

SPIS TREŚCI NUMERU 7(254)

Między matematyką czystą i stosowaną <i>Andrzej Pelczar</i>	str. 1
Jaki jest mechanizm segregacji ziaren różnej wielkości w materiałach sypkich? <i>Maria Massalska-Arodź</i>	str. 1
Drgania powierzchni Ziemi wywołane przez wodospady	str. 2
Zadania	str. 3
Wokół nierówności Younga <i>Grzegorz Lukaszewicz</i>	str. 4
Mała Delta	str. 8
Niebo przez lornetkę	str. 9
Soczewki grawitacyjne <i>Andrzej Krasiński</i>	str.10
Klub 44	str.14
Kąciak olimpijski	str.16
Epsilon	str.17

W następnym numerze:

Sto lat promieni Röntgena

Okładkę i ilustracje wykonał
Bernard BADZIOCH

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichocki
Roman Duda
Jan A. Gaj
Tomasz Hofmokl
Marta Kicińska-Habior
– przewodnicząca
Krzysztof Maślanka
Andrzej Mąkowski
– wiceprzewodniczący
Andrzej Pelczar
Zbigniew Płochocki
Zdzisław Pogoda
Michał Różyczka
Konrad Rudnicki
Zbigniew Semadeni
Grzegorz Sitarski
Mieczysław Subotowicz
Andrzej Szymacha
Andrzej Woszczyk
Wacław Zawadowski

Redaguje kolegium w składzie:

Krzysztof Biesaga
Jan Kalinowski – z-ca red. nac.
Krystyna Kordos – sekr. red.
Marek Kordos – red. nac.
Tomasz Kwast
Krzysztof Rejmer
Paweł Strzelecki
Joanna Udalska

Adres Redakcji:

ul. Smyczkowa 5/7
02-678 Warszawa
tel. 43-02-43 wewn. 21
PAWELST@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano
w Drukarni Naukowo-Technicznej
w Warszawie, ul. Mińska 65
Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21)
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 1995 roku wynosi 1 zł 50 gr. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru wynosi w 1995 r. 3 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

- Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
- Cena prenumeraty na IV kwartał 1995 r. wynosi 4 zł 50 gr.
- Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
- Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
 - na teren kraju
 - jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób,
 - na zagranicę
 - „Ruch” S.A. Oddział Warszawa, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia dostawy pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni pokrywa prenumerator.
- Terminy przyjmowania prenumeraty:
 - na kraj i zagranicę – do 20 XI na I kwartał roku następnego
 - do 20 II na II kwartał
 - do 20 V na III kwartał
 - do 20 VIII na IV kwartał.

Cena 1 egzemplarza 1 zł 50 gr, 15 000 zł

Między matematyką czystą i stosowaną

Andrzej PELCZAR

Treść będzie przekorna in stosunku do tytułu. Uważam bowiem, że nie można przeprowadzić żadnego rozsądnego rozgraniczenia między tzw. matematyką czystą a stosowaną. Przede wszystkim bardzo ryzykowne byłoby każde stwierdzenie o „niestosowalności” jakiegoś wyniku czy nawet teorii, „niestosowalności w ogóle”, nawet w takim przypadku, gdy w tej chwili nie widać żadnych zastosowań praktycznych (o takich zastosowaniach myśli się przecież mówiąc o „matematyce stosowanej”). Historia zna przypadki bardzo długiego czekania na zastosowania. Jako podręcznikowy i spektakularny przykład przytacza się teorię krzywych drugiego stopnia (stożkowych) pochodzącą od Apoloniusza (około 200 lat przed Chrystusem), którą w początkach wieku XVII, a więc po około 1800 latach, zastosował Kepler poprawiając teorię kopernikańską. Znacznie bliższy przykład można znaleźć w polskiej historii matematyki. W latach trzydziestych dwaj matematycy – Stanisław Krystyn Zaremba w Krakowie i A. Marchaud w Paryżu zaproponowali pewne uogólnienia równań różniczkowych (jeden nazwał je równaniami kontyngensowymi, drugi paratyngensowymi). Opowiadał mi Profesor Ważewski o bardzo wstrzemięźliwym (delikatnie mówiąc) przyjęciu tych pomysłów przez większość matematyków w owym czasie; uważano je za „sztuczne” i bez żadnych widoków na jakiegokolwiek rozsądne zastosowania. A były to, jak się okazało po mniej więcej ćwierćwieczu, początki teorii inkluzji różniczkowych i teorii optymalnego sterowania, mających, oczywiście, teraz multum zastosowań. Pokazał to, w latach pięćdziesiątych, właśnie Tadeusz Ważewski. Inny przykład to zastosowania w konstrukcjach komputerów beznawiasowej notacji Łukasiewicza, a więc niezwykle „abstrakcyjnego” pomysłu z logiki formalnej. Znane są dobrze sytuacje odwrotne. Rozwój teorii nie nadążał za potrzebami fizyki czy techniki i matematycy musieli czasem, *ex post* niejako, „dorabiać” podstawy do czegoś, co... funkcjonowało nieformalnie. Tak było z teorią dystrybucji, którą stworzono po tym, jak Dirac już zdążył posłużyć się swymi „funkcjami”.

Jest jeszcze inny argument za tym, by uznać za praktycznie niemożliwe rozgraniczenie matematyki „czystej” i stosowanej”. Jeśli przyjmiemy, że teoria równań różniczkowych jest „stosowalna”, to trudno będzie powiedzieć, że nie są stosowalne te części topologii ogólnej i algebraicznej lub analizy funkcjonalnej czy algebry liniowej, dzięki którym otrzymujemy ważne i mocne twierdzenia o równaniach różniczkowych (w tym np. twierdzenia o stabilności mające bezpośrednie zastosowania techniczne). Tak więc okaże się, że bardzo „abstrakcyjne” wyniki bardzo „abstrakcyjnych” teorii mają zastosowania.

To, co powiedziano wyżej, powinno stanowić dostateczny argument na rzecz takiego poglądu: nie powinno się mówić o matematyce „czystej” i „stosowanej”, lecz o matematyce i o zastosowaniach matematyki. No i trzeba zauważyć, iż nie będzie chyba zbyt ryzykowne stwierdzenie, że – po prostu – matematyka jest stosowalna, a na pewno bardzo ryzykowne byłoby orzekanie o niestosowalności jakiejś jej części.

Minęły na szczęście (sceptycy mogą mieć wątpliwości...) czasy, gdy „nauki stosowane” uważano za lepsze od tych innych, „niestosowanych”. Dlatego powyższych uwag nie należy traktować jako obrony matematyki przez udowadnianie, że jest stosowana lub raczej stosowalna. Jestem od takiego stanowiska bardzo daleki. Po prostu... nie podobają mi się terminy często używane, a wymienione w tytule!

Jaki jest mechanizm segregacji ziaren różnej wielkości w materiałach sypkich?

Maria

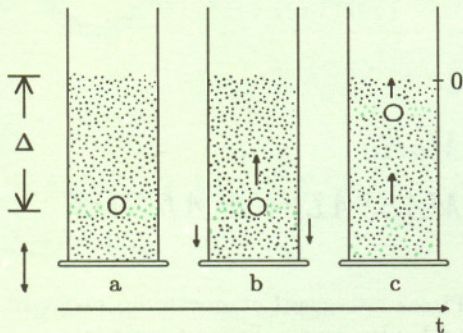
MASSALSKA-ARODŹ

Piasek intrygował obserwatorów przyrody od bardzo dawna. Ponad trzysta lat temu Robert Hooke analizując prawo Archimedesesa dla cieczy zauważył, że można je zastosować również do piasku, jeśli tylko wprawimy naczynie z piaskiem w drgania (patrz *Mała Delta* 10/1992). Stwierdził, że w układzie drgających ziaren ciała o większym ciężarze właściwym toną, lżejsze zaś wydostają się na powierzchnię zupełnie tak, jak to się dzieje w cieczach. Piasek posłużył Hooke’owi do wysunięcia rewolucyjnej hipotezy, iż wszystkie substancje, bez względu na stan skupienia, składają się z małych drgających kulek. Pogląd ten stanowi do dziś podstawę kinetyczno-molekularnej teorii budowy ciał. Jednak, jak to często bywa, prawda okazuje się bardziej złożona, gdy przejdziemy do szczegółów. Prawo Archimedesesa opierające się na bilansie jedynie dwóch sił, tj. siły ciężkości i wyporu, nie wystarcza do opisu zjawiska, które obserwowali Państwo zapewne sami stwierdzając, że w często potrząsanym wiaderku z piaskiem na powierzchnię wydostają się stopniowo wszystkie większe kamyczki i już tam pozostają pomimo dalszych potrząsań. A zatem w układach nawet sypkich ciała o większym ciężarze właściwym nie toną, ale „wypływają” na powierzchnię, jeśli tylko ich ziarna są większe od ziaren układu sypkiego, w którym są „zanurzone”.

Do niedawna za przyczynę takiego zachowania się większych ziaren uważano fakt, że każdy wstrząs popycha ziarna ku górze, a pustą przestrzeń pozostawioną przez duże ziarno łatwo wypełniają mniejsze ziarenka. Duże ziarno jest w ten sposób wynoszone coraz wyżej. Taki mechanizm prowadzący do segregacji

Drgania powierzchni Ziemi wywołane przez wodospady

ziaren ze względu na ich rozmiar, niezależnie od ciężaru właściwego, potwierdziły przeprowadzone nie tak dawno eksperymenty komputerowe. Znaleźli się jednak dociekliwi, którzy z kolei postanowili zweryfikować rezultaty modeli komputerowych w prawdziwym eksperymencie z kolorowymi kulkami szklanymi różnej wielkości.



Rys. 1

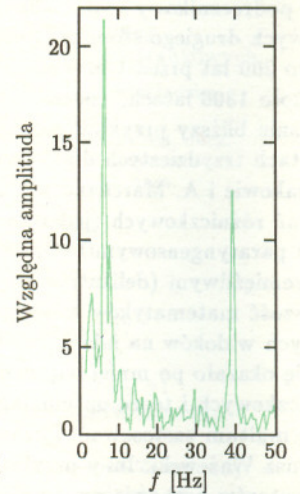
Na rysunku 1a przedstawiony jest cylinder, który poddawano regularnym sinusoidalnym drganiom o amplitudzie przyspieszenia równej $7g$ ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$), czyli wyraźnie większej niż stosowana w doświadczeniach z transmisją drgań akustycznych (patrz *Delta* 6/1995). Wypełniono go małymi przezroczystymi kulkami o średnicy $0,2 \text{ cm}$, które zaznaczono na rysunku kropkami. Do cylindra włożono dodatkowo kulkę znacznie większą – o średnicy $1,9 \text{ cm}$ – umieszczając wokół niej małe kulki, takie jak te, które wypełniały cały cylinder, ale dla ułatwienia obserwacji zabarwione na czarno (na rysunku są one kolorowe). Rysunek 1a przedstawia początkowe ułożenie kulek w cylindrze. Kolejne rysunki (1b i 1c) pokazują, jak to ułożenie zmienia się w miarę upływu czasu, gdy cylinder był poddawany regularnym wstrząsom. Autorzy doświadczenia, James B. Knight, H.M. Jaeger oraz Sidney Nagel [1], stwierdzają wyraźnie, że w wyniku wstrząsań duże ziarno podąża ku górze wraz z otaczającymi je małymi ziarnami (zaznaczonymi na rysunku 1 grubszymi kropkami) wbrew powszechnemu oczekiwaniu, że będą one spadać w dół. Natomiast w dół zniżają się – ku zaskoczeniu obserwatorów – ziarna odległe od „olbrzyma”, położone w pobliżu ścian naczynia. Ponadto, można zauważyć, że gdy dojdą one do dna naczynia, wówczas same zaczynają również uczestniczyć w ruchu ku górze, który to ruch trwa nieprzerwanie środkiem naczynia. Gdy duże ziarno dotrze do

W jednym z zadań zamieszczonych w *Delcie* 2/1995 postawiłem następujące pytanie: jaka jest wysokość wodospadu, jeśli stojąc w jego pobliżu czujemy drgania gruntu o częstotliwości f ? Rozwiązanie zadania opierało się na założeniu, że w spadającej kolumnie wody powstaje fala stojąca o węźle u podnóża i strzałce przy górnej krawędzi wodospadu. Wtedy wysokość wodospadu jest równa jednej czwartej długości fali dźwiękowej, czyli

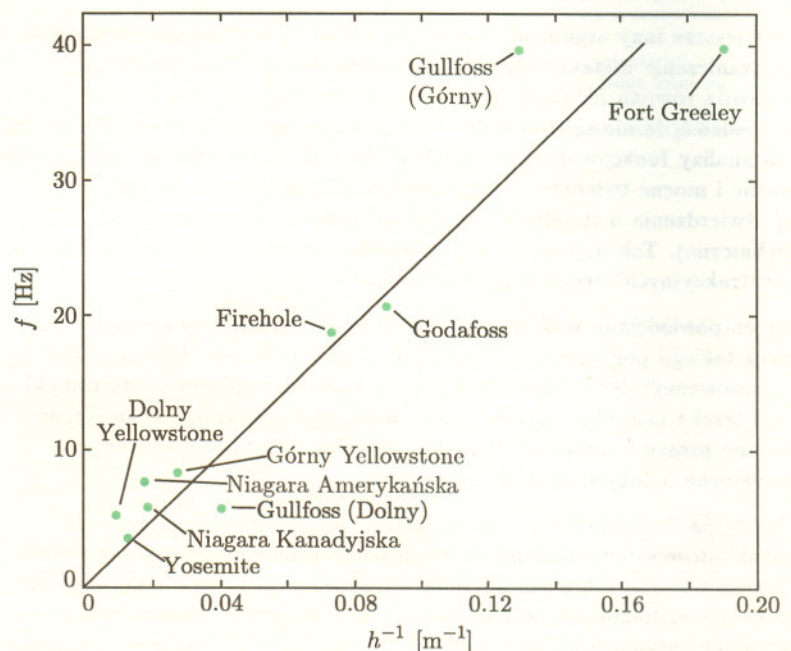
$$h = \frac{v}{4f},$$

gdzie v jest prędkością dźwięku w wodzie. Powyższy wzór nie jest ścisły: posługując się nim zakładamy, że woda spada pionowo, a krawędź przelewu jest ostra, co nie zawsze jest prawdą.

W naturalny sposób może pojawić się następujące pytanie: czy jest tak rzeczywiście, czy też jest to problem wydumany? Odpowiedź na nie przynoszą dane doświadczalne. Pod koniec lat sześćdziesiątych John S. Rinehart z Boulder w stanie Colorado (USA) zbadał dokładnie drgania gruntu w pobliżu dziewięciu wodospadów (o wysokości od 5 m do 93 m) Islandii, Alaski i kontynentalnej części USA. Okazuje się, że widmo drgań powierzchni Ziemi charakteryzuje się istnieniem silnie dominującej częstotliwości oraz nieregularnego tła, jeśli tylko spadek wody nie jest zbyt zakłócony, na przykład przez występy skalne. Silne tło istnieje w przypadku szerokich wodospadów, takich jak Niagara, ale nadal towarzyszy mu dominująca częstotliwość. Jeśli wodospad ma kilka kaskad, obserwuje się kilka dominujących częstotliwości odpowiadających każdej z nich.



Rys. 1. Widmo drgań gruntu wywołanych przez wodospad Gullfoss. Wykresy pochodzą z artykułu Johna Rineharta „Waterfall-Generated Earth Vibrations”, *Science*, vol. 164 (1969).



Rys. 2. Dominująca częstotliwość drgań gruntu w zależności od odwrotności wysokości wodospadu.

Przykładem może być szeroki dwuczęściowy islandzki Gullfoss (widmo jego drgań przedstawia rys. 1), charakteryzujący się dwiema dominującymi częstotliwościami: 6 Hz i 40 Hz, odpowiadającymi dwu kaskadom o wysokościach 27 m i 7,5 m. Pierwsza z tych częstotliwości należy do kategorii infradźwięków, druga mieści się w zakresie akustycznym. Rysunek 2 przedstawia dane dotyczące szczegółowo zbadanych przez Rineharta wodospadów, a dokładniej, zależność częstotliwości drgań od odwrotności wysokości wodospadu.

Zależność tę w zadowalającym przybliżeniu można określić jako liniową. Nachylenie prostej z rysunku 2 jest równe 250 m/s, czyli około jednej czwartej prędkości dźwięku w wodzie. Największe odstępstwa od liniowości obserwuje się dla niskich wodospadów, co prawdopodobnie bierze się stąd, że w rzeczywistości strzałka powstaje poniżej górnej krawędzi wodospadu, a zatem względny błąd jest tym mniejszy, im wyższy jest wodospad. W przypadku wodospadu Gullfoss łatwo można sprawdzić, że jest akurat odwrotnie; zgodność z doświadczeniem jest dobra dla niższej kaskady, dla wyższej błąd wynosi około 50%...

Nieregularne tło szumów częściowo jest zjawiskiem zewnętrznym, częściowo zaś także efektem działania wodospadu. Na rysunku 1 widać, że jest ono podwyższone w obszarze niskich częstotliwości; jest to charakterystyczne szczególnie dla wysokich wodospadów. Przyczyny tego zjawiska należy upatrywać w fakcie, że spadek wody jest przepływem turbulentnym; strumień rozpada się na liczne wiry, których rozmiary rosną podczas spadania. Efektem turbulencji są dość nieregularne silne uderzenia dużych mas wody o podstawę wodospadu, generujące drgania o niskich częstotliwościach.

Krzysztof REJMER



Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

M 744. Podzielić koło na trzy części o równych polach, z których każda ma taki sam obwód, jak całe koło.

Rozwiązanie na str. 7

M 745. Stosując nierówność Younga (patrz artykuł Grzegorza Łukaszewicza „Wokół nierówności Younga” na str. 4) udowodnić, że dla wszystkich $x, y \geq 0$ oraz dowolnej liczby naturalnej k mamy

$$(x + y)^k \leq 2^{k-1}(x^k + y^k).$$

Rozwiązanie na str. 7

M 746. Niech $x_1 = 1995^{1995}$. Dla $n \geq 2$ definiujemy $x_n = S(x_{n-1})$, gdzie $S(m)$ oznacza sumę wszystkich cyfr liczby naturalnej m (zapisanej w układzie dziesiętnym). Obliczyć x_5 .

Rozwiązanie na str. 6

Redaguje Adam KOROCIŃSKI

F 409. Oszacować liczbę cząsteczek w atmosferze Ziemi. Dany jest promień Ziemi $R = 6400$ km, masa molowa powietrza $\mu = 0,029$ kg/mol i ciśnienie atmosferyczne na poziomie morza $p_0 = 1$ atm.

Rozwiązanie na str. 6

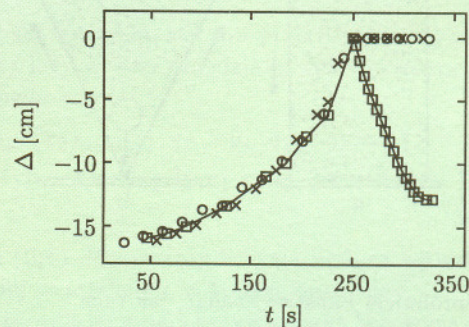
F 410. Do naczynia nalano pewną ilość czterochloru węgla CCl_4 , a następnie warstwę wody tak, by nie zmieszać obu substancji. Przy normalnym ciśnieniu atmosferycznym woda wrze w temperaturze 100°C , a czterochlorek węgla w temperaturze $76,7^\circ\text{C}$. W trakcie powolnego ogrzewania naczynia na granicy rozdziału cieczy wrzenie rozpoczyna się w temperaturze $65,5^\circ\text{C}$. Wyjaśnić, dlaczego.

Rozwiązanie na str. 6

powierzchni, już tam pozostaje, bo nie może się włączyć w wąski strumień, jaki przy ścianie naczynia tworzą małe ziarna przemieszczające się ku dołowi. Jeśli natomiast do powierzchni dotrą małe ziarna, to nic nie stoi na przeszkodzie, by kontynuowały ruch ku ścianie naczynia, a następnie wzdłuż ścian w kierunku dna. Okazuje się, że w wibrującym z odpowiednią amplitudą cylindrze ruch konwekcyjny ziaren odbywa się regularnie środkiem naczynia, jak w fontannie, i bokami naczynia w dół, nawet wówczas, gdy wszystkie ziarna mają jednakową wielkość. Większe ziarna są jedynie porywane przez strumień małych ziaren wędrujących ku górze!

Co było przyczyną, że modele komputerowe potwierdzały wcześniejszą interpretację zjawiska segregacji ziaren? Aby to rozstrzygnąć, powtórzono poprzednie doświadczenie, ale dla cylindra o wypolerowanych ściankach. Okazało się, że wówczas ruch konwekcyjny jest wyraźnie utrudniony. Konwekcja może zachodzić dzięki oddziaływaniom kulek (ziaren) ze ściankami naczynia, a więc dzięki siłom tarcia. Tego oddziaływania nie uwzględniały modele komputerowe! Segregacja była w nich wynikiem zderzeń sąsiadujących ze sobą kulek o różnych rozmiarach.

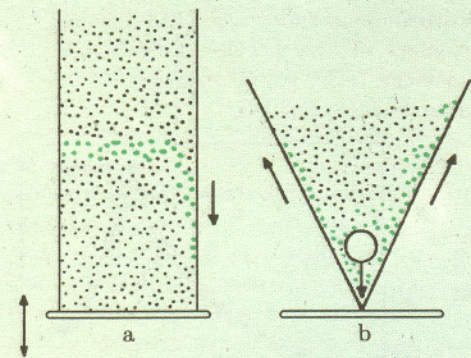
Po stwierdzeniu faktu, że segregacja ziaren jest następstwem ruchu konwekcyjnego, ciekawa wydała się analiza samego zjawiska konwekcji. Powtórzono zatem doświadczenie zmieniając każdorazowo rozmiary większych kulek. Porównanie przebiegu ruchu konwekcyjnego przedstawia rysunek 2.



Rys. 2

Funkcja $\Delta(t)$, czyli odległość Δ dużego ziarna od powierzchni naczynia w zależności od czasu, jest identyczna dla różnych rozmiarów ziaren aż do momentu, gdy osiągną one powierzchnię naczynia. Potem ziarna o rozmiarach 1,9 cm

oraz 0,6 cm (których ruch pokazują odpowiednio kółka i krzyżyki) już tam pozostają, a małe ziarna (dla których $\Delta(t)$ oznaczono kwadracikami) podążają coraz wolniej w dół. Rysunek pokazuje ciekawy fakt: Otóż zależność $\Delta(t)$ jest wyraźnie nieliniowa. Inaczej można powiedzieć, że prędkość $d\Delta(t)/dt$ przemieszczania się dużego ziarna nie zależy od stosunku promieni ziaren dużych i małych, natomiast rośnie wraz ze zmniejszaniem się odległości dużego ziarna od górnej powierzchni. Im większa amplituda drgań, tym bardziej stroma jest zależność $\Delta(t)$, czyli tym szybciej narasta tempo zbliżania się ziarna do powierzchni naczynia. Natomiast istnieje pewna krytyczna amplituda potrząśnięcia cylindrem, poniżej której konwekcja przestaje zachodzić. Nie możemy też wywołać ruchów konwekcyjnych dla upakowania ziaren większego niż pewne upakowanie krytyczne (np. gdy ubity piasek zamkniemy ciasno w naczyniu). Można również zauważyć, że gdy wypolerujemy jedynie jedną ściankę naczynia, wówczas wzory, jakie w naczyniu tworzą poruszające się ziarna, przestaną być symetryczne, jak to pokazuje rysunek 3a. Zależność ruchu konwekcyjnego od oddziaływań ziaren ze ściankami potwierdza inna obserwacja. Kierunek przemieszczania się większego ziarna można zmienić, gdy doświadczenie przeprowadzimy w naczyniu zważającym się ku dołowi. Przy takiej geometrii większe ziarna będą na stałe uwięzione na dnie naczynia (rys. 3b).



Rys. 3

Spróbujcie Państwo zbadać, jak ruch konwekcyjny zależy od nachylenia ścian potrząsanego cylindra. Pytanie, przy jakim nachyleniu ścian naczynia ruch konwekcyjny ustanie, nadal czeka na odpowiedź!

[1] James B. Knight, H.M. Jaeger i Sidney R. Nagel, *Physical Review Letters*, **70**, 3728 (1993).

Wokół nierówności Younga

Grzegorz ŁUKASZEWICZ

W miesięczniku *Delta* co pewien czas pojawiają się artykuły o ważnych nierównościach i ich dowodach. Niniejszy artykuł nawiązuje do tej tematyki.

Będziemy rozważać pewną nierówność, zwaną **nierównością Younga**, i jej naturalne otoczenie, czyli kilka innych ważnych nierówności będących bardzo bliskimi jej konsekwencjami.

Przedstawiamy

Nierówność Younga

Jeśli x i y są dowolnymi liczbami nieujemnymi, a liczby dodatnie p, q spełniają warunek $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, to

$$(1) \quad xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $y = x^{p-1}$.

Zanim udowodnimy nierówność Younga, rozejrzyjmy się nieco wokół niej. Zauważmy przede wszystkim, że można ją zapisać także w postaci

$$(2) \quad a_1^{q_1} \cdot a_2^{q_2} \leq q_1 \cdot a_1 + q_2 \cdot a_2,$$

gdzie $a_1, a_2 \geq 0$, $q_1, q_2 > 0$, $q_1 + q_2 = 1$ (równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2$). Nierówność (2) powinna się wydać bliska Czytelnikom *Delty*, kładąc bowiem $q_1 = q_2 = \frac{1}{2}$, dostajemy dobrze znaną **nierówność dla średniej arytmetycznej i geometrycznej** dla dwóch składników:

$$(3) \quad (a_1 \cdot a_2)^{1/2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

Szczególnym przypadkiem nierówności Younga jest bardzo często używana, elementarna nierówność

$$(4) \quad xy \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2,$$

będąca także przypadkiem szczególnym **nierówności Cauchy'ego-Schwarza**

$$(5) \quad \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2}.$$

Ostatnia nierówność wyraża fakt, że iloczyn skalarny wektorów $a = (a_1, \dots, a_n)$ i $b = (b_1, \dots, b_n)$ w n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej jest nie większy niż iloczyn długości tych wektorów (jest mniejszy, jeśli wektory te nie są równoległe). Uogólnieniem nierówności Cauchy'ego-Schwarza jest bardzo ważna **nierówność Höldera**

$$(6) \quad \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q},$$

prawdziwa dla $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$ i dla takich $p, q > 0$, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Z nierówności Höldera wynika łatwo podstawowa **nierówność Minkowskiego**

$$(7) \quad \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{1/p},$$

prawdziwa dla $a_i \geq 0, b_i \geq 0, i = 1, \dots, n$ i $p \geq 1$. Dla $p = 2$ nierówność (7) redukuje się do **nierówności trójkąta**

$$(8) \quad \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2},$$

która mówi, że suma długości dwu boków trójkąta jest nie mniejsza niż długość trzeciego boku.

Jeśli w nierównościach Höldera i Minkowskiego położyć $n = \infty$, to dostajemy nierówności prawdziwe dla sum nieskończonych:

$$(9) \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^q \right)^{1/q}$$

oraz

$$(10) \quad \left(\sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^p \right)^{1/p},$$

gdzie (a_i) i (b_i) są teraz dowolnymi ciągami liczb nieujemnych.

Możemy wreszcie zastąpić w (9) i (10) sumy nieskończone całkami po dowolnych zbiorach, a ciągi (a_i) i (b_i) dowolnymi funkcjami całkowalnymi na tych zbiorach, z odpowiednimi potęgami. Niech np. I będzie dowolnym przedziałem na prostej liczbowej, a f i g dowolnymi funkcjami całkowalnymi na I . Wtedy

$$(11) \quad \int_I |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_I |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \cdot \left(\int_I |g(x)|^q dx \right)^{1/q}$$

oraz

$$(12) \quad \left(\int_I |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_I |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_I |g(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Zauważmy, że jeśli znamy nierówności dla całek, to możemy z nich wyprowadzić nierówności dla sum (skończonych czy nieskończonych).

Wnikliwemu Czytelnikowi proponujemy teraz przerwę w czytaniu tego artykułu, samodzielną próbę udowodnienia jak największej liczby zależności między powyższymi nierównościami i zbadanie, przy jakich założeniach zachodzą nierówności ostre.

Poniżej podamy trzy poglądowe dowody nierówności Younga oraz udowodnimy nierówności Höldera (11) i Minkowskiego (12).

Trzy dowody nierówności Younga.

Będziemy rozważać przypadek nietrywialny, gdy $x, y > 0$.

1) Ponieważ funkcja $f(x) = e^x$ jest ściśle wypukła, sieczna przecinająca wykres funkcji w punktach o odciętych x_1 i x_2 leży w tym przedziale nad wykresem tej funkcji, co zapisujemy w postaci nierówności

$$(13) \quad f(q_1x_1 + q_2x_2) \leq q_1f(x_1) + q_2f(x_2), \quad (q_1, q_2 > 0, q_1 + q_2 = 1),$$

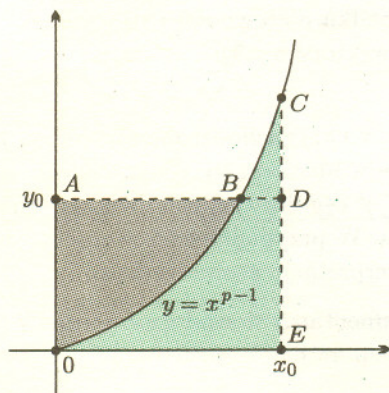
przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = x_2$. Proste podstawienia dają nierówność (2).

2) Niech q_1 będzie liczbą z przedziału $(0,1)$. Rozważmy krzywą będącą wykresem funkcji $t \rightarrow t^{q_1}$ ($t \in R$) i styczną do niej w punkcie $t = 1$. Jest oczywiste, że względu na wklęsłość krzywej, że styczna leży nad krzywą. Fakt ten wyraża nierówność $t^{q_1} \leq q_1t + (1 - q_1)$, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $t = 1$. Kładąc $q_2 = 1 - q_1$ i $t = a_1/a_2$ dostajemy znowu (2).

3) Niech $p > 1$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Rysujemy krzywą $y = x^{p-1}$ i dwie proste $x = x_0$, $y = y_0$, gdzie x_0 i y_0 są dowolnymi ustalonymi liczbami dodatnimi (rysunek). Rozważmy pola figur $0AB$, $0CE$ i prostokąta $0ADE$. Jest widoczne, że

$$\text{pole } 0ADE \leq \text{pole } 0AB + \text{pole } 0CE$$

(równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $y_0 = x_0^{p-1}$). Wyrażając pola





Rozwiązanie zadania F 409. Satelita krążący po orbicie na wysokości 200 km nad Ziemią praktycznie nie doznaje oporu powietrza, możemy więc uważać, że cała masa atmosfery jest skupiona poniżej tej wysokości. Ziemskie przyspieszenie grawitacyjne zmienia się w tym obszarze o około 3%, możemy je więc uważać za stałe. Ciśnienie atmosferyczne na poziomie morza jest równe ciężarowi powietrza w słupie o jednostkowej podstawie $F = mg$, gdzie m jest masą powietrza zawartego w tym słupie. Masa atmosfery jest zatem równa

$$M \approx \frac{F}{g} 4\pi R^2.$$

A więc liczba cząsteczek wynosi

$$N = \frac{M}{\mu} N_A = \frac{4\pi R^2 p_0}{\mu g} N_A \approx 10^{44},$$

gdzie N_A jest liczbą Avogadry.



Rozwiązanie zadania F 410. Wrzenie polega na tworzeniu się pęcherzyków pary wewnątrz cieczy, gdy ciśnienie pary nasyconej staje się równe ciśnieniu cieczy na tej głębokości, na której znajduje się pęcherzyk pary. Na granicy rozdziału cieczy pęcherzyki zawierają zarówno pary H_2O , jak i CCl_4 . Ciśnienie pary w pęcherzykach jest równe sumie ciśnień parcjalnych par obu cieczy (prawo Daltona). Dlatego ciśnienie równe atmosferycznemu wytworzy się na granicy obu cieczy w temperaturze mniejszej od $76,7^\circ C$. (Ciśnienie hydrostatyczne cienkiej warstwy wody jest zanedbywalnie małe w porównaniu z atmosferycznym). W temperaturze $65,5^\circ C$ ciśnienie nasyconej pary wodnej wynosi 192 mm Hg, a ciśnienie pary nasyconej czterochloru węgla wynosi 568 mm Hg, co razem daje 760 mm Hg (ciśnienie atmosferyczne).



Rozwiązanie zadania M 746. Ponieważ $x_1 = 1995^{1995} \leq (10^4)^{2000} = 10^{8000}$, to $x_2 = S(x_1) \leq 8000 \cdot 9 = 72000$. Zatem, $x_3 \leq 5 \cdot 9 = 45$, $x_4 \leq 3 + 9 = 12$ i wreszcie $x_5 \leq 9$. Mamy też, oczywiście, $x_5 \geq 1$.

Ponadto, liczby m i $S(m)$ dają równe reszty z dzielenia przez 9. Liczba 1995 jest podzielna przez 3, zatem x_1 dzieli się bez reszty przez 9, a więc dla dowolnego n liczba x_n także dzieli się przez 9. Stąd $x_5 = 9$. Wszystkie dalsze wyrazy ciągu (x_n) też są równe 9.

za pomocą całek dostajemy

$$x_0 y_0 \leq \int_0^{x_0} x^{p-1} dx + \int_0^{y_0} y^{q-1} dy,$$

co po scałkowaniu daje nierówność (1) z $x = x_0$, $y = y_0$.

Udowodnimy teraz nierówność (11). Dla prostoty zapisu wprowadźmy oznaczenie

$$\|f\|_p = \left(\int_I |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Jeśli $\|f\|_p \neq 0$ i $\|g\|_q \neq 0$, to korzystając z nierówności Younga mamy

$$(14) \quad \int_I \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} dx \leq \int_I \left(\frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q} \right) dx = 1,$$

co jest innym zapisem nierówności (11). Jeśli prawa strona nierówności (11) jest równa zero, to lewa strona także jest zerem. To kończy dowód nierówności Höldera.

Przejdźmy do dowodu nierówności (12). Korzystając z nierówności Höldera (11) mamy

$$(15) \quad \begin{aligned} \int_I |f(x) + g(x)|^p dx &= \\ &= \int_I |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x)| dx + \int_I |f(x) + g(x)|^{p-1} |g(x)| dx \leq \\ &\leq \|f + g\|_p^{p-1} (\|f\|_p + \|g\|_p), \end{aligned}$$

i po podzieleniu obu stron nierówności przez $\|f + g\|_p^{p-1}$ dostajemy nierówność (12).

W nierównościach Höldera i Minkowskiego dla całek można dobrać funkcje f i g oraz zbiór, po którym całkujemy w taki sposób, aby dostać nierówności dla sum: (6), (9) oraz (7), (10).

Pierwsze dwie nierówności otrzymujemy zakładając, że np. I jest przedziałem $(0, n]$, a funkcje f i g są funkcjami schodkowymi:

$$f(x) = a_i, \quad g(x) = b_i \quad \text{dla } x \in (i-1, i], \quad 1 \leq i \leq n, \quad (a_i, b_i \geq 0).$$

Nierówności dla sum nieskończonych otrzymujemy bezpośrednio z odpowiednich nierówności dla sum skończonych, w granicy, gdy z n zbiegamy do nieskończoności. Zauważmy, że postępując w ten sposób nie otrzymamy w (9) i (10) nierówności ostrych, wychodząc z nierówności ostrych w (6) i (7).

Chcąc zbadać warunki, przy których w (9) i (10) zachodzą nierówności ostre, możemy np. zbadać te warunki dla nierówności całkowych (11) i (12), a potem wyrazić je w języku ciągów.

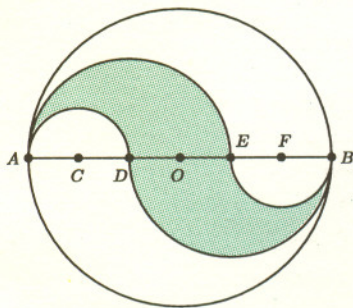
Stosując nasze główne twierdzenie o nierówności (1) do nierówności (14) widzimy bez trudu, że w nierówności Höldera dla całek zachodzi nierówność ostra, jeśli tylko $c_1 f^p \neq c_2 g^q$ dla każdego dwu stałych c_1, c_2 , z których przynajmniej jedna jest różna od zera. Dla $p = q = 2$, w przypadku nierówności (5), warunek ten sprowadza się do warunku orzekającego, że wektory $a = (a_1, \dots, a_n)$ i $b = (b_1, \dots, b_n)$ nie są równoległe.

Korzystając z warunku, przy którego spełnieniu w (11) zachodzi nierówność ostra i patrząc na nierówność w (15) widzimy, że w nierówności Minkowskiego dla całek mamy nierówność ostrą, jeśli tylko $c_1 f \neq c_2 g$ dla każdego dwu stałych c_1, c_2 , gdy przynajmniej jedna jest różna od zera. W przypadku nierówności trójkąta (8) nierówność ostra ma przejrzystą interpretację geometryczną.

Gdy już mówimy o geometrii, prosimy podać elementarny dowód geometryczny nierówności (4), z wynikającym z niego warunkiem na nierówność ostrą (por. dowód 3) nierówności Younga.



Rozwiązanie zadania M 744. Dzielimy średnicę AB tego koła na sześć równych części punktami C, D, O, E, F . Półokręgi o średnicach AD, AE, BE i BD (patrz rysunek) dzielą koło w żądany sposób.



Rozwiązanie zadania M 745.
Z dwumianu Newtona mamy

$$(x + y)^k = x^k + y^k + \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} x^j y^{k-j}$$

Każdy z iloczynów $x^j y^{k-j}$ szacujemy wykorzystując nierówność Younga z wykładnikami $p = k/j, q = k/(k-j)$. Daje to w efekcie nierówność

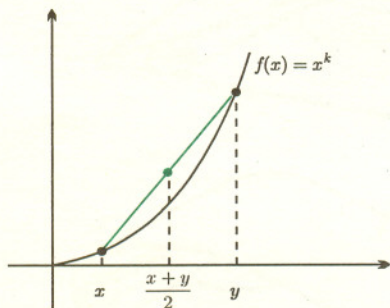
$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} x^j y^{k-j} &\leq \\ &\leq x^k \sum_{j=1}^k \frac{j}{k} \binom{k}{j} + y^k \sum_{j=1}^k \frac{k-j}{k} \binom{k}{j} \end{aligned}$$

Ponieważ $\frac{j}{k} \binom{k}{j} = \binom{k-1}{j-1}$ oraz $\binom{k}{j} = \binom{k}{k-j}$, każda z sum po prawej stronie jest równa

$$\binom{k-1}{0} + \binom{k-1}{1} + \dots + \binom{k-1}{k-2} = 2^{k-1} - 1$$

Stąd już od razu wynika teza zadania.

Uwaga. Uważny Czytelnik spostrzegł zapewne, że nierówność z tezy zadania pociąga za sobą wypukłość funkcji potęgowej i ma prostą interpretację graficzną (patrz rysunek).



Środek odcinka siecznej leży nad wykresem funkcji $f(x) = x^k$ - dla funkcji ciągłej ta własność jest równoważna wypukłości.

Na zakończenie artykułu omówimy krótko przedstawione trzy dowody nierówności Younga. Czytelnik mógłby zadać w tym miejscu uzasadnione pytanie, dlaczego podano aż trzy dowody, podczas gdy zupełnie wystarczyłby jeden z nich. Niepełna odpowiedź na takie pytanie zawiera się w stwierdzeniu, że wszystkie trzy dowody są krótkie, proste i geometryczne w tym sensie, że można je zobaczyć na rysunku i łatwo zapamiętać, że podobają się autorowi i dlatego zostały przedstawione.

Oczywiście, jeden dowód wystarczyłby dla wykazania prawdziwości nierówności (1). Można jednak spytać, który z przedstawionych dowodów miałby być tym wybranym i dlaczego. Ktoś może też powiedzieć, że zna inny dowód, lepszy od każdego z przedstawionych powyżej. Dochodzimy tu do zagadnienia kryteriów, według których można porównywać i oceniać różne dowody tego samego twierdzenia. Mogą to być kryteria różnej natury, od bardzo subiektywnych (np. estetyczne czy filozoficzne), do całkiem obiektywnych, gdy rozważamy zalety danego dowodu patrząc np. na potencjalnie ogólne metody lub na analogie i powiązania z innymi teoriami matematycznymi, jakich jest nośnikiem.

Może ktoś kiedyś napisze na łamach *Delty* artykuł o kryteriach wartościujących dowody w matematyce...

Po tych uwagach ogólnych przejdźmy do krótkiego omówienia przedstawionych trzech dowodów nierówności Younga. Jak już wspomnieliśmy, zaletą każdego z nich jest krótkość, prostota i obrazowość.

Zaletą pierwszego dowodu jest możliwość jego prostego i płodnego uogólnienia: wykorzystując nierówność Jensena dla funkcji wypukłych

$$f(q_1 x_1 + \dots + q_n x_n) \leq q_1 f(x_1) + \dots + q_n f(x_n), \quad (q_i > 0, q_1 + \dots + q_n = 1),$$

będącą konsekwencją nierówności (13), dostajemy następujące uogólnienie nierówności (2)

$$a_1^{q_1} a_2^{q_2} \dots a_n^{q_n} \leq q_1 a_1 + \dots + q_n a_n, \quad (a_i > 0, q_i \geq 0, q_1 + \dots + q_n = 1)$$

i, w szczególności, nierówność o średnich, arytmetycznej i geometrycznej, dla n składników

$$(a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

W drugim z podanych dowodów nierówności (1) korzystamy ze wzoru na równanie stycznej do krzywej gładkiej, które najłatwiej jest znaleźć używając pojęcia pochodnej funkcji, należącego do analizy matematycznej. Dla wielu Czytelników, być może, ten dowód jest najbardziej naturalny.

Dowód trzeci nierówności Younga prowadzi bezpośrednio do innego ważnego uogólnienia tej nierówności. Jeśli zamiast funkcji $y = x^{p-1}, p > 1$, weźmiemy dowolną funkcję $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, ciągłą, ściśle monotoniczną i taką, że $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$ i $f(0) = 0$, to dla $x, y \geq 0$ zachodzi nierówność (znana także jako nierówność Younga)

$$xy \leq \int_0^x f(u) du + \int_0^y f^{-1}(v) dv,$$

przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $y = f(x)$.

Uwagi:

(1) Znaczące pogłębienie i rozszerzenie rozważań zawartych w tym artykule można znaleźć w klasycznej monografii: G.H. Hardy, J.E. Littlewood i G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge, 1934.

(2) Bardzo ciekawym artykułem przedstawiającym kryteria, których spełnienia można żądać od dowodów matematycznych, jest „Bolzano's Analytic Programme”, autor: V.H. Parshall, *Mathematical Intelligencer*, vol. 14, no. 3, 1992, str. 45-53.

δ

mała delta

Opływowe kształty

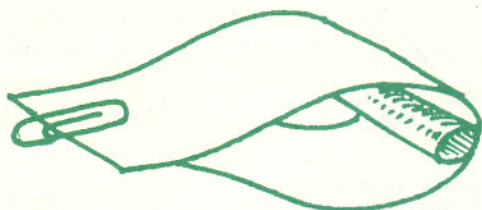
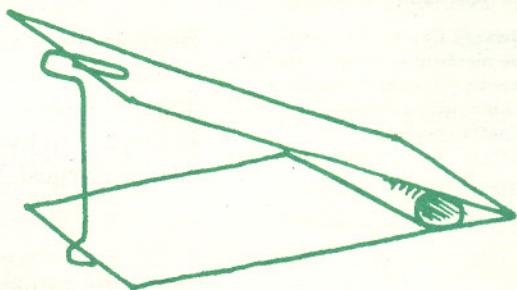
W wielu zadaniach z fizyki autorzy każą pominąć opory ruchu związane z tym, że rozpatrywane ciała poruszają się w powietrzu lub cieczy. Pozwala to w istotny sposób uprościć rozwiązanie zadania. Oczywiście, nie zawsze można pominąć opory. Są sytuacje, w których ich pominięcie prowadziłoby do absurdu. Na przykład rozpatrywanie ruchu samolotu czy ptaka z pominięciem oporów powietrza jest bez sensu.

Opory ośrodka, w którym odbywa się ruch, zależą od wielu czynników. Jednym z nich jest kształt poruszających się ciał. Ma on szczególnie istotne znaczenie, gdy chcemy osiągnąć duże prędkości ruchu. Projektanci samochodów i samolotów dobrze o tym wiedzą. Na przykład wszystkie części samolotu mają grube, zaokrąglone i gładkie kształty z przodu, a ostre z tyłu. O ciałach mających takie kształty mówimy, że są opływowe. Opływowy kształt mają ptaki, spadające krople wody, ryby itp. Taki kształt pozwala zminimalizować opory ośrodka.

Wydawać by się mogło, że ciało ostre z przodu powinno napotykać mniejszy opór, gdyż powinno łatwiej „pruć” ośrodek, w którym się porusza. Taki kształt mają, na przykład, samoloty ponaddźwiękowe. W tym przypadku dochodzą jednak dodatkowe problemy związane z tworzeniem się bariery dźwiękowej, o których tutaj nie będziemy dyskutować.

Łatwo się samemu przekonać o „wyższości” kształtów opływowych nad ostrymi z przodu. Wystarczy wykonać bardzo proste doświadczenie, które opisał Arkadiusz Piekara w książeczce „Ciekawe historie o powietrzu”. Weźcie dwa kawałki sztywnego papieru o wymiarach około 10 cm × 25 cm. Jeden kawałek spinamy tak, aby miał kształt opływowy, a drugi – kształt klina (patrz rysunek). Można to zrobić za pomocą spinacza. W dolnej części należy umieścić obciążniki wykonane, na przykład, z kawałków gwoździ i przyklejone do pasków papieru taśmą klejącą. W obu przypadkach użycie takich samych spinaczy i obciążników. Teraz puszczałyśmy jednocześnie oba ciała z wysokości kilku metrów. Wyścig wygra ciało o kształcie opływowym. Ciało klinowate napotyka więc większy opór powietrza.

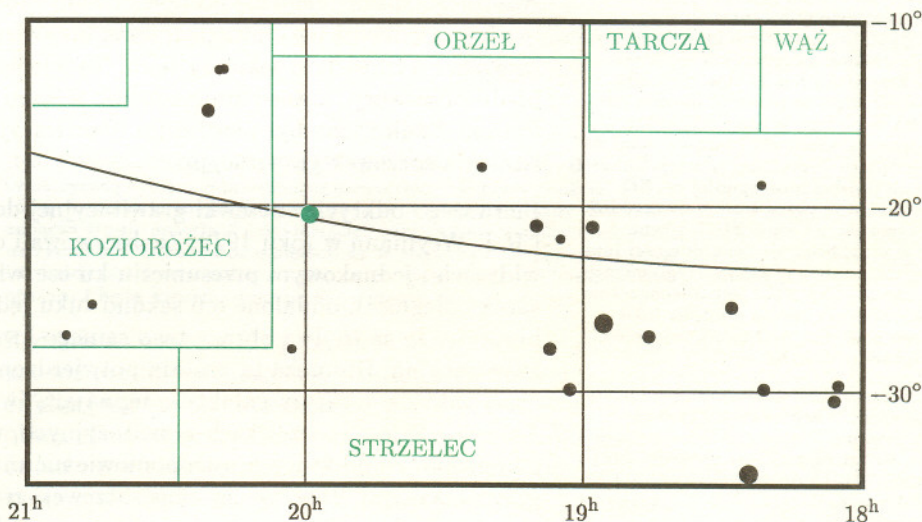
Małą Deltę przygotował Jan KALINOWSKI



Niebo przez lornetkę

Tak się składa, że w lipcu, w pełni lata, jesteśmy odrobinę dalej od Słońca niż zimą. Jawny to dowód, że o aktualnej sytuacji atmosferycznej decyduje nasłonecznienie zależne od kąta padania promieni słonecznych. Zmiany odległości Ziemi od Słońca są za małe, by odegrać tu jakąś rolę. Najmniejsza i największa odległość od Słońca są odpowiednio $a(1 - e)$ i $a(1 + e)$, gdzie a oznacza odległość średnią równą, jak wiadomo, 150 mln km (jednostka astronomiczna), $e = 0,016$ jest mimośrodem orbity. Zmiany odległości procentowo równe są mimośrodkowi, a więc rzeczywiście niewielkie. Najdalej od Słońca Ziemia znajduje się 4 lipca.

Lipiec 1995 r. to akurat najlepsza pora do zaobserwowania Urana; 21 lipca nastąpi jego opozycja, tzn. znajdzie się on w kierunku przeciwnym niż Słońce, a wtedy najwyżej na niebie widać go o północy. Jest on siódmą (licząc od Słońca) planetą obiegającą je w średniej odległości 19,2 jednostek astronomicznych. Uran odkryty został przypadkowo przez Fredericka W. Herschela w 1781 r. Okazało się wtedy, że planeta jest, a w każdym razie bywa, widoczna gołym okiem, co prawda jako punkt z trudem już dostrzegalny. Mając jednak lornetkę można go zlokalizować na niebie bez wielkiego trudu, wystarczy trochę cierpliwości. Mianowicie, choć przez lornetkę tarczy planety się nie zobaczy (za małe powiększenie), to zauważy się jej ruch w dłuższym odstępie czasu, jeżeli się wie, gdzie jej szukać. W lipcu tego roku Uran znajduje się na granicy Strzelca i Koziorożca, oczywiście, w pobliżu ekliptyki. Niestety, ekliptyka na letnim niebie w naszej szerokości geograficznej przebiega dość nisko, warto jednak spróbować obserwacji. Najlepiej jest narysować widziany przez lornetkę układ gwiazd w okolicy nieba, gdzie spodziewamy się znaleźć Urana, i śledzić zmiany w tym obszarze z upływem czasu. Po kilku dniach powinno się zauważyć przesunięcie jednej z „gwiazd” i to będzie Uran. Dla ułatwienia obserwacji zamieszczamy mapkę większego obszaru nieba, gdzie w lipcu jest Uran. Na mapce są, oczywiście, tylko gwiazdy najjaśniejsze.



Przybliżone położenie Urana w lipcu 1995 roku zaznaczone kolorowym kółkiem.

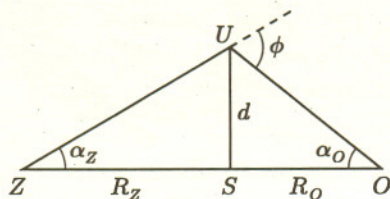
Z różnych wzmianek o Uranie zamieszczanych w naszym miesięczniku Czytelnik zapewne pamięta, że jest to duża planeta typu jowiszowego, a więc zbudowana głównie z wodoru (gazowego i ciekłego) ze skalnym jedynie jądrem. Porusza się niemal w płaszczyźnie orbity ziemskiej i obiega Słońce w 84 lata. Ma bardzo rzadkie pierścienie pyłowe i 15 satelitów, a jej osobliwością jest to, że płaszczyzna równika jest niemal prostopadła do płaszczyzny orbity.

Tomasz KWAST

Soczewki grawitacyjne

Andrzej KRASIŃSKI

Na podstawie wzoru (1) można łatwo wyprowadzić „równanie soczewki grawitacyjnej”, podobne do znanego wszystkim ze szkoły równania soczewki optycznej.



Promień świetlny wyemitowany ze źródła Z przebiega w pobliżu soczewki S , ugina się o kąt ϕ i trafia w obserwatora O . Odległość źródła od soczewki wynosi R_Z , odległość obserwatora od soczewki wynosi R_O . Obserwator, soczewka i źródło umieszczone są na jednej prostej. Drogę promienia można w przybliżeniu opisać jako dwa odcinki ZU i UO , tworzące kąt ϕ . Punkt U leży na prostej prostopadłej do ZO i przechodzącej przez środek soczewki S , w odległości d od S . W układach, których dotyczy równanie (2), kąty α_Z , α_O i ϕ są bardzo małe (do kilku sekund łuku), a odległości R_Z (duża odległość międzygwiazdowa) i R_O (co najmniej rozmiar układu planetarnego) są wielokrotnie większe od d (promienia gwiazdy). Dzięki temu można stosować przybliżenia opisane w tekście.

W tym celu zrobimy dwa inne założenia upraszczające, spełnione tylko w przybliżeniu:

1. W rzeczywistości tor promienia świetlnego w polu grawitacyjnym jest zakrzywiony na całej długości i przypomina kształtem hiperbolę. Poza bezpośrednim sąsiedztwem soczewki jego krzywizna jest jednak niewielka. Załóżmy więc, że promień biegnie od źródła Z po linii prostej do punktu U , po czym zalamuje się i biegnie dalej do obserwatora O po innej prostej. Punkt U leży na prostej prostopadłej do ZO przechodzącej przez środek soczewki S .
2. Wysokość trójkąta ZUO , równa d , jest w przybliżeniu równa długości łuku okręgu o środku w Z zawartego między odcinkami ZS i ZU i jest równocześnie w przybliżeniu równa długości łuku okręgu o środku w O zawartego między odcinkami OS i OU .

Te upraszczające założenia są spełnione w sytuacji, w której wzór (1) ma zastosowanie. Jeśli d jest odpowiednio duże, to kąt ugięcia jest niewielki (kilka sekund łuku!) i odcinki ZS oraz SO są wielokrotnie dłuższe od d . Z rysunku powyżej mamy wtedy

$$\alpha_Z + \alpha_O = \phi = \frac{4GM}{c^2 d},$$

$$d = R_Z \alpha_Z = R_O \alpha_O,$$

i stąd

$$(2) \quad \frac{1}{R_Z} + \frac{1}{R_O} = \frac{\alpha_Z + \alpha_O}{d} = \frac{\phi}{d} = \frac{4GM}{c^2 d^2}.$$

W analogicznym wzorze dla soczewki optycznej, po prawej stronie równania stoi wielkość zależna tylko od kształtu soczewki ($1/f$, gdzie f jest odległością ogniskową soczewki). W powyższym wzorze natomiast miejsce powtórnego

Przewidywania teoretyczne i odkrycie soczewek grawitacyjnych

Najstarsze sugestie, że światło powinno oddziaływać z polem grawitacyjnym pochodzą z XVIII wieku. W roku 1783 angielski geolog i astronom John Michell napisał w liście do Henry'ego Cavendisha, że ciało swobodnie spadające z nieskończoności na obiekt o tej samej gęstości co Słońce, ale o promieniu 500 razy większym, miałoby przy jego powierzchni prędkość większą od prędkości światła. Wywnioskował stąd, że światło nie mogłoby uciec z powierzchni takiego obiektu.

Do podobnej konkluzji doszedł w roku 1796 Pierre Simon Laplace: jeśli obiekt o danej masie ma wystarczająco małe rozmiary, to prędkość ucieczki z jego powierzchni będzie większa od prędkości światła. Z perspektywy dzisiejszej wiedzy możemy powiedzieć, że Michell i Laplace przewidzieli istnienie czarnych dziur.

W roku 1801 monachijski astronom J. Soldner obliczył kąt ugięcia promienia świetlnego w polu grawitacyjnym gwiazdy. Jego obliczenie opierało się na spostrzeżeniu, że kąt ugięcia toru ciała masywnego nadlatującego z nieskończoności nie zależy od masy tego ciała, lecz tylko od jego prędkości w nieskończonej odległości od gwiazdy. Do odpowiedniego wzoru wystarczy więc podstawić prędkość światła – i wynik gotowy. Dla promienia prześlizgującego się po powierzchni Słońca kąt ten wynosiłby 0,85 sekundy łuku.

Ten sam wynik uzyskał Einstein w roku 1911, nieco inną metodą.

Wszystkie opisane wyżej wyniki były sugestiami opartymi na nie całkiem ścisłych wywodach, wykraczających poza zakres stosowalności teorii grawitacji Newtona. Poza tym, rozumowania Soldnera i Einsteina opierały się na założeniu, że promień świetlny porusza się w płaskiej przestrzeni. Kąt ugięcia promienia świetlnego ślizgającego się po powierzchni Słońca, obliczony za pomocą ogólnej teorii względności przy uwzględnieniu krzywizny przestrzeni, jest dwukrotnie większy i wynosi 1,75 sekundy łuku. Ta właśnie wielkość jest równa, w granicach błędu obserwacji, kątowi zmierzonemu w roku 1919 przez A. Eddingtona. Pomiar Eddingtona był pierwszym obserwacyjnym potwierdzeniem możliwości istnienia soczewek grawitacyjnych.

Pierwszego odkrycia soczewki grawitacyjnej dokonali D. Walsh, R.F. Carswell i R.J. Weymann w roku 1979. Zaobserwowali oni dwa kwazary o identycznych widmach i jednakowym przesunięciu ku czerwieni (wskazującym na tę samą odległość), oddalone o 6 sekund łuku jeden od drugiego. Postawili hipotezę, że są to dwa obrazy tego samego kwazara utworzone przez soczewkę grawitacyjną. Hipoteza ta została potwierdzona rok później, gdy dwa zespoły obserwatorów wykryły galaktykę uginającą światło kwazara. Książka Schneidera, Ehlersa i Falco o soczewkach grawitacyjnych, wydana w 1992 roku, wymienia 22 obiekty, co do których astronomowie nie mają wątpliwości, że są soczewkami grawitacyjnymi. Teoretyczny opis soczewek grawitacyjnych jest dziś bardzo obszernym działem astronomii, który wykształcił własne metody obliczeń podobne do stosowanych w optyce geometrycznej.

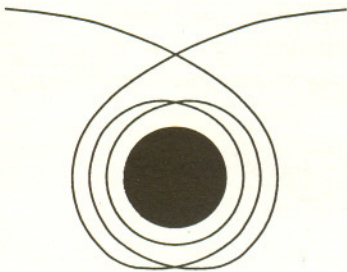
Nieprzezroczysta soczewka kulista

Historycznie najstarszym modelem soczewki grawitacyjnej jest sferycznie symetryczna masa uginająca promienie świetlne przechodzące w jej pobliżu. W takim przypadku kąt ugięcia promienia wynosi:

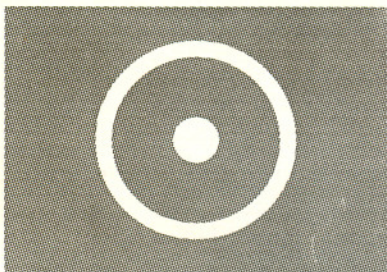
$$(1) \quad \phi = \frac{4GM}{c^2 d},$$

gdzie G jest stałą grawitacyjną, c – prędkością światła, M – masą obiektu

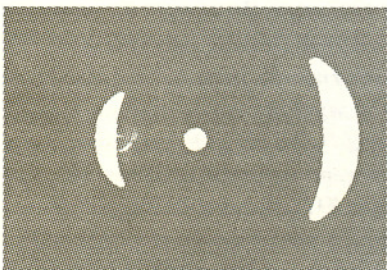
przecięcia promienia z osią zależy od kierunku promienia (d jest inne dla każdego kierunku). Widać, że R_0 maleje przy wzroście R_Z i przy zmniejszaniu d . Najmniejsza możliwa wartość d jest równa promieniowi obiektu uginającego światło. Wartość R_Z może być dowolnie duża. Biorąc d równe promieniowi Słońca, M równe masie Słońca i R_Z nieskończenie wielkie, możemy obliczyć najmniejszą odległość obserwatora od Słońca, przy której mógłby on wykorzystać Słońce jako soczewkę grawitacyjną, tzn. mógłby zaobserwować dwa różne obrazy tej samej gwiazdy lub galaktyki po przeciwnych stronach tarczy słonecznej. Wynosi ona około $8,2 \cdot 10^{10}$ km (jest to długość obszaru I z rysunku 3). Odległość ta jest około 12 razy większa niż promień orbity najdalszej planety, Plutona.



Rys. 2. Promień świetlny przebiegający blisko powierzchni czarnej dziury może wykonać wiele obiegów wokół niej i oddalić się w dowolnym kierunku. Kierunek końcowy jest jednoznacznie wyznaczony przez kierunek początkowy, ale wzór (1) nie stosuje się do tej sytuacji. Każdy promień, który trafi w powierzchnię kuli o promieniu równym $3/2$ promienia czarnej dziury, zostanie nieodwracalnie pochłonięty przez czarną dziurę.

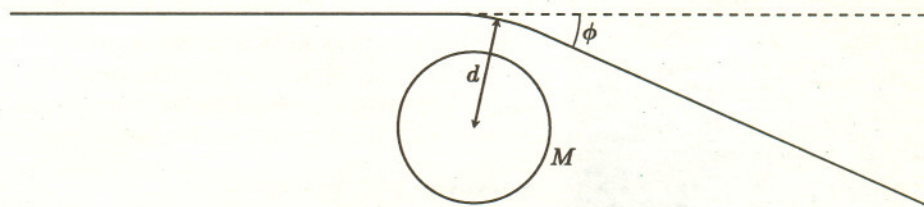


Rys. 4. Taki obraz zobaczyłby obserwator umieszczony na prostej przechodzącej przez środek sferycznie symetrycznego źródła światła i sferycznie symetrycznej soczewki grawitacyjnej. Szerokość pierścienia jest tym większa, im większy jest rozmiar źródła.



Rys. 5. Taki obraz zobaczyłby obserwator umieszczony w obszarze II z rysunku 3, ale w pewnej odległości od osi symetrii.

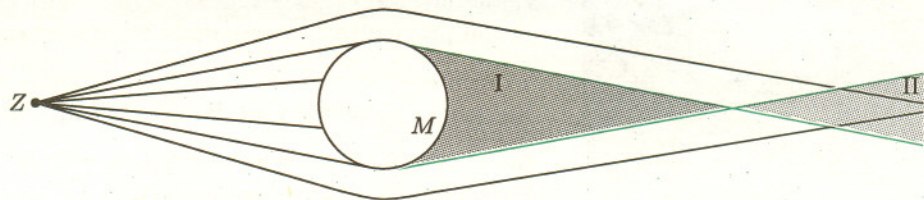
(soczewki), d – najmniejszą odległością promienia od środka soczewki (rys. 1).



Rys. 1. Promień świetlny przebiegający w odległości d od środka kulistego ciała o masie M ugina się o kąt ϕ dany wzorem (1).

Wzór (1) został wyprowadzony przez Einsteina z ogólnej teorii względności, ale przy kilku upraszczających założeniach, o których należy pamiętać przy posługiwaniu się nim. Najważniejszym założeniem jest, że $\frac{4GM}{c^2}$ jest wielokrotnie mniejsze od d , tzn. że obserwowany promień świetlny nie przebiega zbyt blisko środka soczewki. Dla Słońca założenie to jest spełnione automatycznie, ponieważ $\frac{4GM}{c^2}$ dla Słońca wynosi około 3 km, promień zaś Słońca jest równy około 700 000 km. Promień świetlny wycelowany w punkt leżący bliżej środka Słońca niż 700 000 km trafi w powierzchnię Słońca, zostanie pochłonięty i obserwacja ugięcia nie będzie możliwa. Promienie gwiazd neutronowych są jednak niewiele większe od $\frac{4GM}{c^2}$, a promień czarnej dziury wynosi $\frac{2GM}{c^2}$. Promienie świetlne przebiegające blisko takich obiektów nie spełniają więc warunku, przy którym wzór (1) został wyprowadzony i nie można go w tych sytuacjach stosować (rys. 2).

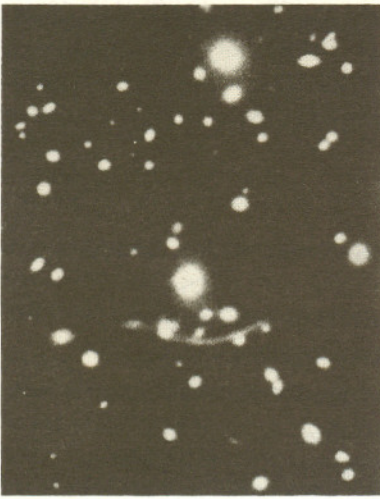
Należy też zwrócić uwagę, że soczewka grawitacyjna opisywana wzorem (1), w przeciwieństwie do soczewki optycznej, nie potrafi skupić wiązki promieni świetlnych wyemitowanej z punktu z powrotem w jeden punkt (rys. 3 i tekst na marginesie strony 10).



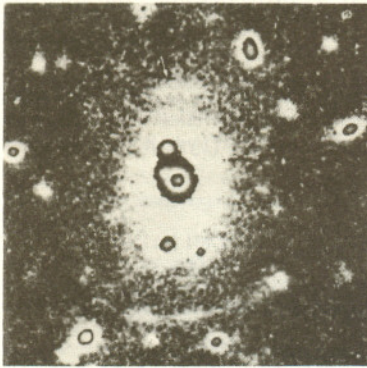
Rys. 3. Wiązka promieni świetlnych wysłanych z jednego punktu, ugięta przez sferycznie symetryczną masę, nie przecina się powtórnie w jednym punkcie. Punkty powtórnego przecięcia różnych promieni znajdują się wszędzie w obszarze II. Każdy obserwator umieszczony w obszarze II zobaczy źródło światła Z jako pierścień taki, jak na rysunku 4 albo parę półksiężyców taką, jak na rysunku 5. Obserwator umieszczony w obszarze I nie zobaczy źródła Z wcale. Poza obszarami I i II każdy obserwator zobaczy tylko jeden obraz źródła Z ; obserwatorzy umieszczeni blisko granicy obszaru I będą widzieli obraz przemieszczony i zdeformowany.

Zgodnie ze wzorem (1) promienie dalsze od osi optycznej uginają się o mniejszy kąt niż promienie bliższe osi – na odwrót niż w soczewce optycznej. „Obrazem” źródła punkowego utworzonym przez kulistą soczewkę grawitacyjną jest cały obszar II na rysunku 3. Mimo to obserwator umieszczony za soczewką odbiera światło o większym natężeniu niż odbierałby bez udziału soczewki: promienie, które rozbiegłyby się w dal, zostają skupione z powrotem do małego kąta. Soczewki grawitacyjne mogą więc pozwolić na obserwację dalszych obiektów, których światło docierające do Ziemi bez pośrednictwa soczewki byłoby zbyt słabe, aby je wykryć.

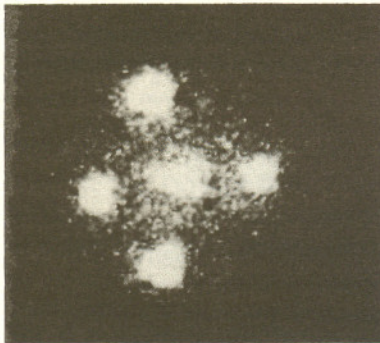
Jeśli sferycznie symetryczne źródło światła i sferycznie symetryczna soczewka są umieszczone na jednej osi z obserwatorem, to obserwator zobaczy źródło jako jasny pierścień dookoła soczewki (rys. 4). Szerokość pierścienia jest zależna od rozmiaru źródła, przy źródle punktowym pierścień byłby okręgiem (o zerowej grubości). Gdy obserwator nie znajduje się na jednej prostej ze źródłem i soczewką, ale jest blisko tej prostej, obraz rozciągniętego źródła deformuje się w dwa półksiężyce (rys. 5). W obserwowanych przez astronomów soczewkach



Rys. 6. Przykład sytuacji z rysunku 5 obserwowanej w rzeczywistości. Łuk wokół gromady galaktyk Abell 370.



Rys. 7. Inny przykład sytuacji z rysunku 5. Łuk wokół gromady galaktyk Abell 963.



Rys. 8. Soczewka Huchry (G2237+0305), nazywana też krzyżem Einsteina. Środkowy jasny krążek jest jądrem galaktyki-soczewki, cztery pozostałe krążki są obrazami tego samego kwazara. Wszystkie cztery obrazy widoczne są poprzez peryferyjne obszary galaktyki-soczewki i można dla nich obserwować mikrosoczewkowanie przez pojedyncze gwiazdy w soczewce (patrz rys. 11).

widac tylko jeden z nich, tak cienki, że wygląda jak łuk okręgu (rys. 6 i 7). W przypadku źródła punktowego obserwator umieszczony blisko osi symetrii zobaczyłby dwa punkty po przeciwnych stronach soczewki. Obserwator umieszczony dalej od osi symetrii widziałby tylko jeden obraz, drugi obraz byłby zasłonięty przez samą soczewkę (rys. 3, poza obszarami I i II).

Soczewki przezroczyste

Przykładem soczewki przezroczystej jest gromada galaktyk uginająca przechodzące przez nią światło dalej położonego obiektu. Innym przykładem jest galaktyka, w której pojedyncze gwiazdy uginają światło dalszego obiektu.

Własności soczewki przezroczystej zależą od rozkładu masy wewnątrz niej i dlatego nie można podać jednego wzoru opisującego wszystkie soczewki. Kąt ugięcia promienia świetlnego przechodzącego przez taką soczewkę oblicza się sumując kąty ugięcia spowodowane przez poszczególne małe elementy jej objętości; obliczenia takie można w większości przypadków wykonać tylko za pomocą komputera. Obliczenia te pokazują, że soczewki przezroczyste powinny mieć dwie ogólne własności:

1. całkowita liczba obrazów małego (tzn. prawie punktowego) źródła światła jest nieparzysta;
2. jeden z obrazów ma większą jasność niż miałyby obraz obserwowany bez pośrednictwa soczewki.

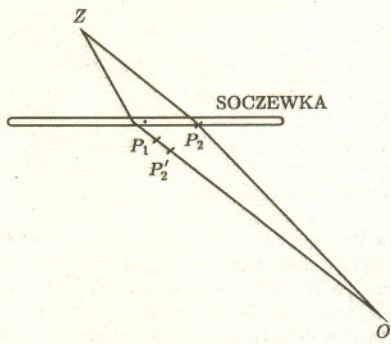
Nie wszystkie obserwacje potwierdzają pierwszą własność. Zakłada się, że w tych przypadkach, w których liczba obrazów jest parzysta, przynajmniej jeden z obrazów ma jasność mniejszą od prognozy wykrywalności.

Najlepiej znanym przykładem soczewki przezroczystej jest soczewka Huchry, zwana też krzyżem Einsteina (rys. 8), w której zaobserwowano cztery obrazy kwazara odległego o 400 000 000 lat świetlnych, utworzone przez galaktykę znajdującą się w odległości 20 000 000 lat świetlnych. Miarą odległości jest w obu przypadkach przesunięcie widma ku czerwieni.

Soczewki grawitacyjne jako przyrząd obserwacyjny

Niektórzy astronomowie twierdzą, że odkrycie soczewek grawitacyjnych jest kolejnym obserwacyjnym potwierdzeniem teorii względności. Nie jest to ściśle zgodne z prawdą, fizycy stawiają swoim teoriom ostrzejsze wymagania niż zgodność z obserwacją na pierwszy rzut oka. Potwierdzeniem teorii względności byłaby zgodność kątów ugięcia w układzie obserwowanym z ich wartościami obliczonymi z teorii. Aby dokonać takiego porównania, musielibyśmy znać odległości źródła światła i soczewki od nas, rozkład masy w soczewce i rozkład jasności w źródle. Tego wszystkiego, oczywiście, nie wiemy.

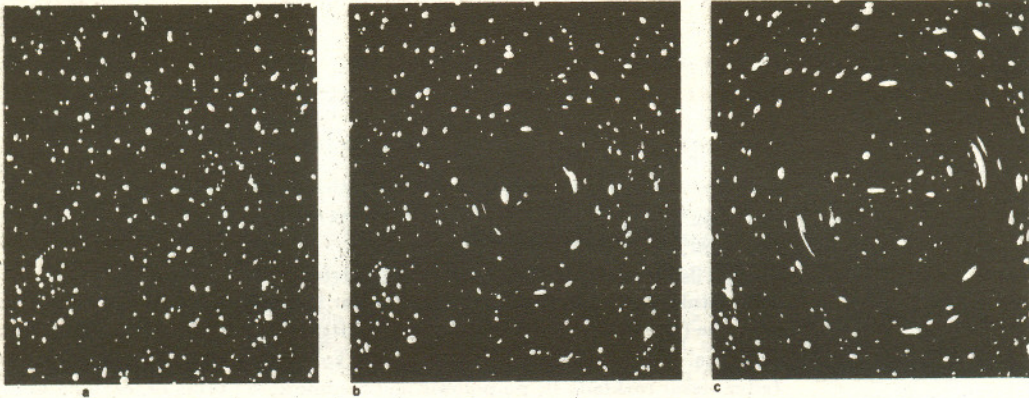
Soczewki grawitacyjne mogą jednak być w zasadzie wykorzystane do zdobywania różnych informacji o Wszechświecie, choć są to na razie tylko plany na przyszłość. Na przykład, jeśli obserwator nie znajduje na jednej prostej ze źródłem światła i soczewką, to sygnały wysłane ze źródła równocześnie, ale biegnące do obserwatora po różnych drogach, docierają do niego nierównocześnie, opóźnienie zaś jednego sygnału względem drugiego zależy od stałej Hubble'a. Sygnałem może być jakakolwiek zmiana jasności źródła. Mechanizm tego zjawiska jest następujący. Sygnały wysłane równocześnie ze źródła Z i biegnące do obserwatora po drogach ZP_1O i ZP_2O wychodzą z soczewki nierównocześnie (rys. 9). Gdy czoło prawego sygnału znajduje się w punkcie P_2 , ma jeszcze do przebycia drogę $OP_2 = OP'_2$, zanim dobiegnie do obserwatora. W tej samej chwili czoło lewego sygnału znajduje się w punkcie P_1 i ma do przebycia drogę $OP_1 > OP_2$. Odległość między punktami P'_2 i P_1 zależy od kierunków początkowych promieni ZP_2 i ZP_1 i od rozkładu masy w soczewce. Później, w drodze między soczewką i obserwatorem, obydwa sygnały



Rys. 9. Możliwość wyznaczenia stałej Hubble'a za pomocą soczewki grawitacyjnej. Źródło Z wysyła do obserwatora O równocześnie dwa sygnały po drogach ZP_2O i ZP_1O . Gdy prawy sygnał znajduje się w punkcie P_2 i ma do pokonania drogę $OP_2 = OP_2'$, lewy sygnał znajduje się w punkcie P_1 i ma do pokonania dłuższą drogę OP_1 . Wskutek rozszerzania się Wszechświata różnica długości dróg OP_2 i OP_1 rośnie z czasem. Sygnałem może być jakakolwiek zmiana jasności źródła.

poruszają się w rozszerzającym się Wszechświecie. Wskutek rozszerzania się Wszechświata powiększa się odległość między ich czołami, a zmiana tej odległości jest proporcjonalna do stałej Hubble'a. W zasadzie można by wykorzystać tę zależność do wyznaczenia stałej Hubble'a i byłby to pomiar całkowicie niezależny od tradycyjnych metod. Aby zrobić to w praktyce, musielibyśmy jednak mieć informację o opóźnieniu powstałym w samej soczewce (tzn. o różnicy dróg $OP_1 - OP_2$), a do tego potrzebna jest dokładna znajomość rozkładu masy w soczewce, niestety, niedostępna.

Najważniejszym chyba teoretycznie możliwym zastosowaniem soczewek grawitacyjnych jest wykrywanie za ich pomocą ciemnej (nieświecącej) materii we Wszechświecie. Pomiary prędkości ruchu gwiazd w galaktykach i galaktyk w gromadach pokazują, że jest we Wszechświecie około 10-krotnie więcej materii, niż widać w teleskopach. Ta ciemna materia ugina przechodzące przez nią promienie świetlne. Aby wykorzystać to zjawisko do pomiaru rozkładu ciemnej materii w przestrzeni, trzeba znać wiele parametrów źródła światła, których nie znamy, choć stale próbujemy je poznać. Symulacje komputerowe pokazują, jak mógłby wyglądać obraz zbioru dalekich galaktyk obserwowanego przez soczewkę z nieświecącej materii (rys. 10).



Rys. 10. Komputerowa symulacja pokazująca wpływ soczewki grawitacyjnej z ciemnej materii na obserwowany rozkład galaktyk. (a) Wygenerowany przez komputer obraz zbioru galaktyk, na którego tle nie ma soczewki grawitacyjnej; (b) ten sam zbiór widziany przez soczewkę o małej masie; (c) ten sam zbiór widziany przez soczewkę o większej masie.

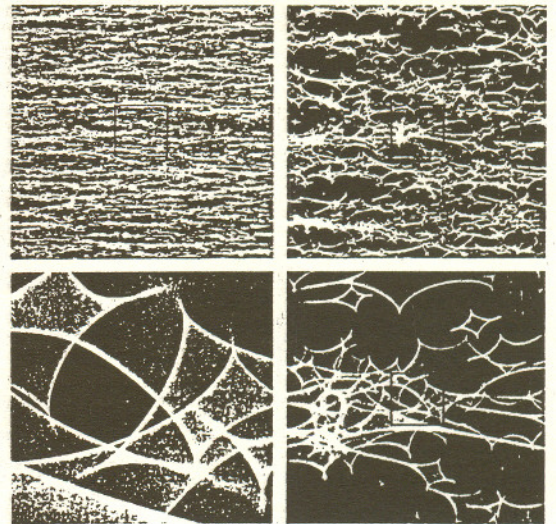
Mikrosoczewki

Mikrosoczewkami grawitacyjnymi nazywane są układy, w których ugięcia światła dokonują pojedyncze gwiazdy. Efekt ten można zaobserwować w dwu sytuacjach:

1. Ugięcie światła kwazara przez pojedyncze gwiazdy w widocznej na jego tle galaktyce.
2. Ugięcie światła gwiazdy przez obiekt leżący bliżej nas.

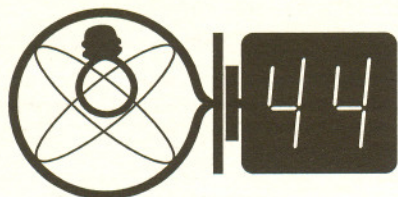
W pierwszym przypadku powstaje bardzo skomplikowany obraz, którego przykład wygenerowany przez komputer pokazuje rysunek na okładce. Jest to obraz źródła światła przesłoniętego przez obłok gwiazd o jednakowych masach rozmieszczonych chaotycznie w przestrzeni. Obserwowanym w rzeczywistości przykładem takiej sytuacji jest wspomniany wcześniej „krzyż Einsteina”, w którym galaktyka-soczewka jest widoczna na tle wszystkich czterech obrazów (rys. 11).

W drugim przypadku nie widać podwójnego obrazu źródła, ponieważ promienie dobiegające do obserwatora po różnych drogach tworzą ze sobą zbyt mały kąt. Jasność obserwowanej gwiazdy zmienia się w momencie jej przejścia za soczewką wskutek nałożenia się dwu obrazów. O zjawisku tym oraz o jego pierwszych obserwacjach napisał obszerniej T. Kwast w *Delcie* 5/1994.



Rys. 11. Obserwowany w rzeczywistości obraz kwazara widzianego poprzez bliższą galaktykę. Jest to jeden z obrazów z „krzyża Einsteina” (rys. 8). Cztery zdjęcia pokazują fragmenty tego samego obrazu kolejno w coraz większych powiększeniach, zaczynając od lewego górnego rogu zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Kwadrat zaznaczony na pierwszych trzech zdjęciach jest obszarem powiększonym na następnym zdjęciu.

Jak widać z tego krótkiego przeglądu, obserwacje soczewek grawitacyjnych są nowym, mało jeszcze zaawansowanym działem astronomii, ale mają przed sobą bardzo obiecującą przyszłość.



Czołówka ligi zadaniowej Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 187 ($WT=2,46$) i 188 ($WT=1,56$)
z numeru 11/1994

Andrzej Nowogrodzki	- Chocianów	44,44
Tomasz Wietecha	- Tarnów	44,35
Aleksander Surma	- Myszków	26,98
Artur Gawryszczak	- Dubeczno	25,09
Przemysław Gworys	- Częstochowa	17,64
Przemysław Gadziński	- Środa Śl.	15,91

Gratulacje dla p. Andrzeja Nowogrodzkiego, który uzupełnia liczbę członków Klubu 44F do dwudziestu – tym gorętsze, że od poprzedniej takiej okazji upłynęło sporo czasu (przypomnijmy, że był to p. Leszek Motyka z Krakowa). Pan Tomasz Wietecha zaliczył natomiast drugie okrążenie.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgrupowaniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1995.

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/1995

Przypominamy treść zadań:

195. Tylne koła trójkołowego rowerka dzieciennego są osadzone na wspólnej osi, więc gdy rowerek skręca, co najmniej jedno z nich musi się ślizgać po podłożu. Jaką siłą F trzeba działać na taki rowerek, aby ruszył z miejsca?

Dane: Wzajemna odległość tylnych kół $2d$; odległość osi kierownicy (przyjmijmy dla uproszczenia, że jest pionowa) od tylnej osi l ; szukana siła jest skierowana wzdłuż tego odcinka, a środek masy znajduje się w jego połowie; kąt skręcenia przedniego koła α ; masa rowerka m ; jednakowy współczynnik tarcia statycznego i kinetycznego kół o podłożu μ .

196. Objasnić, dlaczego zwykła żarówka oświetleniowa nie nadaje się do wykorzystania w rzutnikach i reflektorach. Dlaczego żarówki do rzutników są zasilane niższym napięciem niż żarówki oświetleniowe tej samej mocy?

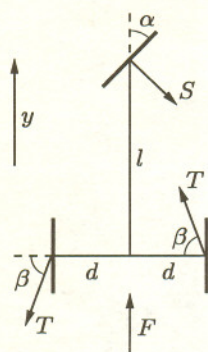
195. Istnieją dwie możliwości ruchu rowerka: 1) przednie koło toczy się bez poślizgu, a ślizgają się tylne (jak wykazemy, muszą się wtedy ślizgać oba), 2) ślizga się koło przednie, a oba tylne się toczą. W przypadku 1) na ślizgające się koło działa siła tarcia kinetycznego $T = \frac{1}{4}\mu mg$ (gdyż ciężar rozkłada się po połowie na przednie koło i tylną oś, czyli na każde z tylnych kół przypada $1/4$). Gdyby ślizgało się tylko jedno z tylnych kół, kierunek poślizgu, a więc i kierunek siły tarcia dla tego koła byłby równoległy do siły F (dalej oznaczmy tę oś jako y). Ze względu na połączenie obu kół tę samą wartość musiałaby mieć równoległa składowa T_y siły tarcia statycznego działającej na drugie tylne koło. Jednak na to drugie koło działa także siła prostopadła równoważąca odpowiednią składową siły S działającej na przednie koło (rys.) – zatem całkowita siła tarcia byłaby większa od T . Ponieważ założyliśmy równość współczynników tarcia statycznego i kinetycznego, taka sytuacja jest niemożliwa i musi nastąpić poślizg obu kół. Obie siły tarcia T będą jednakowe, a ponadto – jak poprzednio – jednakowe (z przeciwnym zwrotem) są składowe T_y , czyli jednakowe są też i drugie składowe, a także kąty kierunkowe β . Aby wyznaczyć wartość β , przyjmijmy, że podczas powolnego poślizgu siły spełniają warunki takie, jak w stanie równowagi. Suma momentów sił jest więc równa zero, a obliczając ją względem osi przedniego koła stwierdzamy, że proste zawierające obie omawiane siły T przechodzą przez tę oś, czyli $\tan \beta = l/d$. Dalej z warunku $2T \cos \beta = S \cos \alpha$ łatwo już znajdujemy S , a szukana siła F jest równa

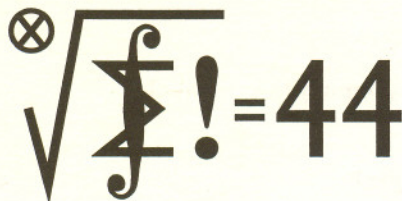
$$F = S \sin \alpha = 2T \cos \beta \tan \alpha = \frac{1}{2} \mu mg \frac{d}{\sqrt{d^2 + l^2}} \tan \alpha.$$

Powyższy dowód obowiązuje wtedy, gdy przednie koło nie ślizga się, tzn. $S \leq 2T$ (obciążenie jest tu podwójne), czyli $\alpha \leq \beta$. W przypadku $\alpha \geq \beta$ mamy do czynienia ze wspomnianym na początku przypadkiem 2). Współrzędne y sił tarcia statycznego działających na tylne koła są tu – jak poprzednio – przeciwne, a $S = 2T$, więc

$$F = S \sin \alpha = \frac{1}{2} \mu mg \sin \alpha.$$

196. Prawidłowe działanie rzutników i reflektorów wymaga wytworzenia silnie skupionej wiązki światła, co można osiągnąć tylko wtedy, gdy dysponujemy bardzo małym (idealnie – punktowym) źródłem. Włókno żarówki do rzutnika musi więc mieć niewielkie rozmiary, czyli małą długość. Grubość włókna jest zapewne podobna do grubości włókna żarówki oświetleniowej lub większa (jeśli założymy tę samą temperaturę, to przy ustalonej mocy wypromieniowanej ustalona jest powierzchnia włókna). Opór elektryczny takiego drutu jest więc mały – stąd niższe napięcie zasilania, a większe natężenie prądu.





Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/1995

Przypominamy treść zadań:

297. Czy istnieje permutacja $(x_1, x_2, \dots, x_{250})$ zbioru $\{1, 2, \dots, 250\}$ o tej własności, że dla każdego $k \in \{1, 2, \dots, 249\}$ suma $x_1 + \dots + x_k$ dzieli się przez x_{k+1} ?

298. Dowieść, że dla dowolnych liczb $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ z przedziału $(-1; 1)$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^n |a_i - b_i| \geq \left| \prod_{i=1}^n a_i - \prod_{i=1}^n b_i \right|.$$

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 287 (WT=1,60) i 288 (WT=2,87)
z numeru 10/1994

Waldemar Pompe - Warszawa	43,89
Mirosław Matłega - Skoczów	43,59
Adam Czornik - Bytom	36,62
Janusz Olszewski - Suwałki	33,80
Tomasz Wietecha - Tarnów	33,68

297. Przykład takiej permutacji:

$$x_1 = 250, \quad x_{250} = 1, \quad x_{2i} = i + 1, \quad x_{2i+1} = i + 125 \quad (\text{dla } i = 1, \dots, 124).$$

Ma ona wymaganą własność:

Dla $k = 1$ suma $\sum_{j=1}^k x_j = x_1 = 250$ dzieli się przez $x_{k+1} = x_2 = 2$.

Dla k parzystego ($k = 2m, 1 \leq m \leq 124$):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k x_j &= x_1 + \sum_{i=1}^m x_{2i} + \sum_{i=1}^{m-1} x_{2i+1} = 250 + \sum_{i=1}^m (i+1) + \sum_{i=1}^{m-1} (i+125) = \\ &= m^2 + 126m + 125 = (m+1)(m+125) = x_{2m} x_{2m+1} = x_k x_{k+1}. \end{aligned}$$

Dla k nieparzystego ($k = 2m + 1, 1 \leq m \leq 124$):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k x_j &= \sum_{j=1}^{2m} x_j + x_{2m+1} = (m+1)(m+125) + (m+125) = \\ &= (m+125)(m+2) = \begin{cases} x_{2m+1} x_{2m+2} = x_k x_{k+1} & \text{gdy } m \leq 123, \\ x_{249} x_3 = x_k x_3 & \text{gdy } m = 124. \end{cases} \end{aligned}$$

W każdym przypadku rozważana suma dzieli się przez x_{k+1} .

298. Dla $n = 1$ mamy równość. Ustalmy $n \geq 2$; przyjmijmy indukcyjnie, że teza jest słuszna dla dowolnych dwóch ciągów długości $n - 1$, o wyrazach z przedziału $(-1; 1)$, i weźmy pod uwagę dwa takie ciągi długości n : a_1, \dots, a_n oraz b_1, \dots, b_n . Oznaczając

$$A = \prod_{i=1}^{n-1} a_i, \quad B = \prod_{i=1}^{n-1} b_i$$

mamy z założenia indukcyjnego:

$$(1) \quad |A - B| \leq \sum_{i=1}^{n-1} |a_i - b_i|.$$

Ponadto

$$(2) \quad \begin{aligned} |Aa_n - Bb_n| &= \frac{1}{2} |(A - B)(a_n + b_n) + (A + B)(a_n - b_n)| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} |A - B| \cdot |a_n + b_n| + \frac{1}{2} |A + B| \cdot |a_n - b_n| \leq \\ &\leq |A - B| + |a_n - b_n| \end{aligned}$$

(bo $|a_n + b_n| \leq 2, |A + B| \leq 2$). Dodając stronami (1) i (2) otrzymujemy nierówność

$$|Aa_n - Bb_n| \leq \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|,$$

czyli tezę indukcyjną.

Dowodzona nierówność zachodzi więc dla ciągów dowolnej długości n , na mocy zasady indukcji.

„Kołowacizna kwadratu”

Jedno ze słynnych zagadnień Starożytności, tzw. kwadratura koła, polega na wyznaczeniu boku kwadratu, tak aby jego pole było równe polu danego koła. Od 1882 roku wiadomo (P. Lindemann), że problemu tego nie można rozwiązać przy wyłącznym użyciu cyrkla i linijki (choć można to zrobić, na przykład, za pomocą kwadratrysy, jak uczynił to Dinostratos w IV w.p.n.e.). Konstrukcyjnie (tzn. przy wyłącznym użyciu cyrkla i linijki) potrafimy wskazać jedynie przybliżone rozwiązanie tego problemu.

Bliźniaczy problem – wyznaczenie promienia koła, aby jego pole było równe polu danego kwadratu – ma wyjątkowo proste przybliżone rozwiązanie konstrukcyjne.

Weźmy kwadrat jednostkowy i podzielmy jego przekątną na 5 równych części. Koło, którego promień ma długość dwóch takich części, ma pole równe 1,005309... Dokładność tej konstrukcji można teoretycznie zwiększać. Gdy przekątną kwadratu podzielimy na 1000 równych części, to pole koła o promieniu równym długości 399 takich części wynosi 1,000289...

Jarosław GÓRNICKI

Często musimy udowodnić równość, w której występują tzw. symbole Newtona $\binom{n}{k}$. Na przykład

$$\sum_{k=1}^n k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Jednym ze sposobów dowodzenia takich tożsamości jest przeprowadzenie tzw. dowodu kombinatorycznego. Polega on na tym, że zliczamy na dwa sposoby elementy jakiegoś odpowiednio dobranego zbioru. Obie strony równości wyrażają właśnie tę liczbę elementów, postać każdej strony zależy od sposobu zliczania. Liczba elementów zbioru, oczywiście, nie zależy od sposobu zliczania, więc mamy równość. Oto dowód kombinatoryczny powyższej równości.

Mamy n osób i chcemy spośród nich wybrać grupę co najmniej jednoosobową, która wyjedzie na wycieczkę. Oczywiście, musimy też wybrać kierownika tej grupy. Na ile sposobów można to zrobić? Możemy najpierw zdecydować, ile osób chcemy wybrać. Przypuśćmy, że chcemy wybrać k osób; oczywiście, $1 \leq k \leq n$. Z definicji symbolu Newtona k osób spośród n osób możemy wybrać na $\binom{n}{k}$ sposobów, kierownika grupy na k sposobów. Zatem k -osobową grupę z kierownikiem możemy wybrać na $k \cdot \binom{n}{k}$ sposobów. Teraz wystarczy dodać te liczby (dla k od 1 do n), by stwierdzić, że lewa strona równości wyraża właśnie tę szukaną liczbę sposobów. Prawą stronę otrzymamy zliczając te sposoby wyboru w inny sposób. Najpierw możemy wybrać kierownika grupy, oczywiście, na n sposobów. Potem możemy do niego dobrać resztę grupy: dowolną liczbę osób spośród pozostałych $n - 1$ osób. To możemy zrobić na 2^{n-1} sposobów. Razem na $n \cdot 2^{n-1}$ sposobów. To kończy dowód równości.

W powyższym dowodzie indeks k wyrażał liczebność grupy osób, które wybieramy. Czasami możemy nadać indeksowi k inne znaczenie. Udowodnimy równość

$$\sum_{k=m+1}^{n+1} \binom{k-1}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

Tym razem będziemy wybierać $m + 1$ osób spośród $n + 1$ osób. Możemy to zrobić na $\binom{n+1}{m+1}$ sposobów i to jest prawa strona wzoru. Aby otrzymać lewą stronę, nadajmy najpierw osobom numery od 1 do $n + 1$. Niech k będzie największą liczbą spośród numerów wybranych osób. Jeśli chcemy wybrać $m + 1$ osób tak, by najwyższym numerem była liczba k , to, oczywiście, musimy wybrać osobę o tym numerze, a pozostałe osoby (będzie ich m) musimy dobrać spośród osób o numerach od 1 do $k - 1$. Możemy to zrobić na $\binom{k-1}{m}$ sposobów. Teraz wystarczy tylko dodać te liczby (dla k od $m + 1$ do $n + 1$, bo takie tylko mogą być największe numery tych wybranych $m + 1$ osób), by otrzymać lewą stronę równości.

Gdy wybieramy $m + 1$ osób spośród $n + 1$ osób, to indeks k może też oznaczać liczbę numerów mniejszych od największego wybranego numeru; wtedy łatwo otrzymamy równość

$$\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

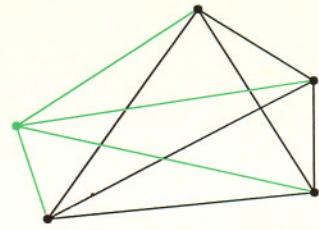
Tę równość można też otrzymać z poprzedniej przez zamianę wskaźnika sumowania. Nadając indeksowi k inne znaczenia (np. może to być drugi od góry numer), otrzymamy podobne tożsamości. A teraz proponuję zadania:

1. (Zadanie z XLVI OM) Dane są liczby naturalne $n > m > 1$. Ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ losujemy bez zwracania m liczb. Obliczyć wartość oczekiwaną różnicy między największą a najmniejszą wylosowaną liczbą.

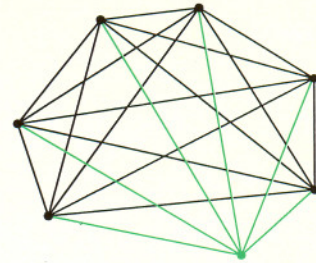
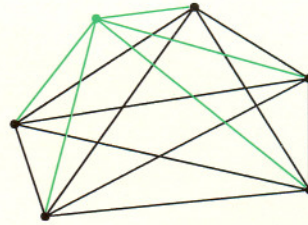
2. Udowodnić tożsamość:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n-k}{m} \cdot \binom{k}{m} = \binom{n+1}{2m+1} \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=0}^n \binom{2n-k}{n} \cdot 2^k = 4^n.$$

Wojciech GUZICKI



Rys. 1



Rys. 2

Nietrudno podać ogólny przepis tworzenia n -wymiarowych sympleksów foremnych. Należy wziąć $n + 1$ punktów jednakowo odległych od siebie i połączyć każdy z każdym odcinkami (zapalkami); jest ich $\binom{n+1}{2}$. Będą to krawędzie sympleksu. Uzyskamy również w ten sposób $\binom{n+1}{3}$ trójkątów – dwuwymiarowych ścian. Ścian k -wymiarowych będzie $\binom{n+1}{k+1}$.

W ten sposób zabawa z zapalkami doprowadziła nas do stosunkowo prostych obiektów wielowymiarowych, które jednak w matematyce odgrywają istotną rolę – ale to już zupełnie inna historia.

Zdzisław POGODA

Zabawy z zapalkami

Istnieje wiele lamigłówek związanych z układaniem zapalek. Jedną z najbardziej znanych jest zadanie: z sześciu zapalek ułożyć cztery przystające trójkąty. Oczywiście, nie wolno zapalek łamać ani kłaść w ten sposób, żeby jedna zapalka leżała na drugiej. A zatem muszą to być trójkąty równoboczne, bokami których są zapalki. Zadanie rozwiązuje się prosto, lecz nietypowo. Słowem, które myli, jest „ułożyć”; gdyby napisać „zbudować”, sprawa, być może, byłaby zupełnie jasna. Z sześciu zapalek można zbudować czworoscian foremny – trzeba po prostu „wyjść” z płaszczyzny.

A oto zadanie podobne: używając dziesięciu zapalek ułożyć dziesięć trójkątów równobocznych. Czy jest to wykonalne? Tu zamiana „ułożyć” na „zbudować” niewiele daje, bowiem takiej konfiguracji nie da się uzyskać w przestrzeni trójwymiarowej, co wcale nie znaczy, że coś takiego nie istnieje w ogóle.

Żeby rozstrzygnąć powyższy problem, wystarczyłoby znaleźć pięć takich punktów, że każdy z nich jest tak samo odległy od pozostałych. Zauważmy, że trzy punkty o tej własności wyznaczają trójkąt równoboczny, cztery – czworoscian foremny, a pięć... Tak, konfiguracja jest możliwa w przestrzeni czterowymiarowej. Wspomniane pięć punktów wyznacza figurę, która jest uogólnieniem na cztery wymiary trójkąta równobocznego i czworoscianu foremnego – nazywa się ją sympleksem czterowymiarowym (foremnym) lub 5-komórką. Druga nazwa bierze się stąd, że twór ten składa się z pięciu czworoscianów foremnych (rys. 1).

Zabawę z zapalkami można kontynuować, choć już raczej tylko teoretycznie, gdyż liczba potrzebnych zapalek staje się coraz większa i potrzeba coraz więcej wymiarów. I tak z piętnastu można (teoretycznie) skonstruować dwadzieścia trójkątów, a z dwudziestu jeden zapalek – trzydzieści pięć trójkątów. Będą to odpowiednio sympleksy pięć i sześciowymiarowe, naturalnie wszystkie foremne (rys. 2).

Każdy wie, jak najprościej podzielić tort na dwie równe części. A na cztery części? To także nie jest trudne, dwa cięcia wystarczą – wzdłuż dwóch prostopadłych płaszczyzn tniemy przysmak na cztery równe kawałki.

Łatwo można powyższą metodę zastosować w przypadku podziału tortu na osiem części, choć może nie będzie to klasyczne krojenie tortu – robimy to trzema cięciami, przy czym trzecie cięcie wykonujemy płaszczyzną prostopadłą do dwóch poprzednich, równoległą do płaszczyzny podstawy.

A jeśli zachodzi potrzeba pokrojenia tortu na szesnaście kawałków czterema cięciami? Wydaje się to niemożliwe, ale (gdy tort jest czterowymiarowy) matematyk sobie z tym poradzi. Wystarczy w czterowymiarowej przestrzeni euklidesowej wykonać cztery cięcia płaszczyznami do siebie wzajemnie prostopadłymi. Moral – gdy przyjdzie dużo gości, potrzeba więcej miejsca.

Wiesz niesie, że gdy wybitny fizyk, Leopold Infeld, przyjechał do Polski po okresie współpracy z Einsteinem, wygłosił w Krakowie dla licznie zgromadzonych słuchaczy wykład o teorii względności. Zaangażowany emocjonalnie w przedstawiany materiał mówił w sposób zaawansowany, trudny, nie zdając sobie sprawy z tego, że słuchacze siedzą „jak na tureckim kazanu”. W dyskusji jako pierwszy zabrał głos inny znakomity fizyk, Jan Weysenhoff, który oznajmił prelegentowi, że wykład był niezrozumiały. „Ja, na przykład” – powiedział „ – zrozumiałem z tego wszystkiego, no, może pięć procent.”

„Jak to, pięć procent?” – obruszył się Infeld. – „Przecież to bardzo proste! Czterowymiarowa przestrzeń, rozważamy ten czterowektor...” – i gestykułując przedstawił jeszcze raz kilka swoich głównych myśli.

„No tak, rzeczywiście” – odpowiedział zamyślony Weysenhoff. – „Bierzemy ten czterowektor, racja... No, niech będzie sześć procent!”