

tel. 63-10-95 11-3141593...

delta



SPIS TREŚCI

NUMERU 6(253)

Na granicy prawa <i>Jan Gaj</i>	str. 1
Rozchodzenie się dźwięku w materiałach sypkich <i>Maria Massalska-Arodź</i>	str. 1
Zadania	str. 3
Ankieta	str. 4
Problem Borsuka o Podziale rozstrzygnięty <i>Danuta Kołodziejczyk</i>	str. 5
Mała Delta	str. 8
Kilka słów o powierzchniach <i>Jarostaw Górnicki</i>	str.10
Klub 44	str.14
Niebo przez lornetkę	str.16
Epsilon	str.17

W następnym numerze:

Soczewki grawitacyjne

Ilustracje wykonał
Bernard BADZIOCH

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.

Komitet Redakcyjny:
 Andrzej Białynicki-Birula
 Bogdan Cichocki
 Roman Duda
 Jan A. Gaj
 Tomasz Hofmokl
 Marta Kicińska-Habior
 – przewodnicząca
 Krzysztof Maślanka
 Andrzej Mąkowski
 – wiceprzewodniczący
 Andrzej Pelczar
 Zbigniew Płochocki
 Zdzisław Pogoda
 Michał Różycka
 Konrad Rudnicki
 Zbigniew Semadeni
 Grzegorz Sitarski
 Mieczysław Subotowicz
 Andrzej Szymacha
 Andrzej Woszczyk
 Wacław Zawadowski

Redaguje kolegium w składzie:
 Krzysztof Biesaga
 Jan Kalinowski – z-ca red. nac.
 Krystyna Kordos – sekr. red.
 Marek Kordos – red. nac.
 Tomasz Kwast
 Krzysztof Rejmer
 Paweł Strzelecki
 Joanna Udalska

Adres Redakcji:
 ul. Smyczkowa 5/7
 02-678 Warszawa
 tel. 43-02-43 wewn. 21
 PAWELST@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano
 w Drukarni Naukowo-Technicznej
 w Warszawie, ul. Mińska 65
 Skład systemem TeX wykonała Redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21)
 Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 1995 roku wynosi 1 zł 50 gr. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.
 W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru wynosi w 1995 r. 3 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.
Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.
 Konto AMOS-u: **PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

- Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
- Cena prenumeraty na IV kwartał 1995 r. wynosi 4 zł 50 gr.
- Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
- Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
 - na teren kraju
 - jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób,
 - na zagranicę
 - „Ruch” S.A. Oddział Warszawa, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – **dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty**, z wyjątkiem zlecenia dostawy pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni pokrywa prenumerator.
- Terminy przyjmowania prenumeraty:
 - na kraj i zagranicę – do 20 XI na I kwartał roku następnego
 do 20 II na II kwartał
 do 20 V na III kwartał
 do 20 VIII na IV kwartał.

Cena 1 egzemplarza 1 zł 50 gr, 15 000 zł

Na granicy prawa

Jan GAJ

Postępowanie na granicy prawa zyskało sobie w ostatnich latach w naszym kraju wielką popularność, co jest niewątpliwym postępem, gdyż jeszcze kilka lat temu granica ta, w odróżnieniu od granic państwowych, nie była zbyt starannie strzeżona i nikt zbyt poważnie prawa nie traktował. Domyślasz się jednak, Czytelniku, że nie będziemy się zajmowali działalnością polityków i prawem karnym ani cywilnym. Chodzi mi, oczywiście, o prawa fizyki. Często słyszymy ostrzeżenia, żeby stosując te prawa pilnie zważać, czy założenia, przy których je sformułowano, są spełnione. Zaniedbanie tej ostrożności prowadzi bowiem do przykrych konsekwencji w postaci fałszywych wniosków, jak na przykład stwierdzenie, że prawdopodobieństwo zajmowania stanu podstawowego przez atom wodoru jest równe zeru (zob. *Delta* 10/1987). Zagadnienie to ma jednak drugą, bardzo interesującą stronę. Otóż, niektóre prawa fizyki czy – w skromniejszym wymiarze – modele teoretyczne obowiązują zaskakująco daleko od zakresu, w którym obowiązywać powinny. Żeby nie być gołosłownym, chciałbym dziś zaproponować Ci, Czytelniku, przyjrzenie się z bliska jednemu z takich przypadków. Dotyczy on jednego z podstawowych praw fizyki statystycznej, jakim jest

rozkład kanoniczny.

Zacznijmy od założeń. Rozkład kanoniczny wyraża prawdopodobieństwo zajęcia określonego stanu przez układ fizyczny przy założeniu, że układ ten jest słabo sprzężony z termostatem, czyli dużym układem pozostającym w równowadze termodynamicznej. Na przykład, gdyby układem była kulka przywiązana sprężynką do ciężkiego obiektu (termostatu) i energia układu (energia kinetyczna kulki) byłaby porównywalna z energią oddziaływania układ-termostat (energia potencjalna sprężynki), to założenie stosowalności rozkładu kanonicznego nie byłoby spełnione. Rozkład kanoniczny można wyrazić wzorem

$$(1) \quad P_\alpha = Ae^{-E_\alpha/kT},$$

gdzie P_α jest prawdopodobieństwem tego, że układ znajdzie się w stanie α , E_α jest energią tego stanu, A jest stałą, $e = 2,71 \dots$ jest podstawą logarytmów naturalnych, $k \approx 1,38 \times 10^{-23}$ J/K jest stałą Boltzmanna, a T – temperaturą (w skali Kelvina). Inaczej mówiąc, prawdopodobieństwo tego, że układ zajmie jakiś stan, jest proporcjonalne do liczby e podniesionej do pewnej potęgi. Wykładnik tej potęgi jest ujemny, wprost proporcjonalny do energii rozważanego stanu i odwrotnie proporcjonalny do temperatury. Układ fizyczny, dla którego formułujemy to prawo, może być dowolny, aby tylko był dobrze wyodrębniony i spełniał wymienione na wstępie założenie. Przejdźmy teraz do następnego kroku, którym będzie

bezprawne zastosowanie rozkładu kanonicznego.

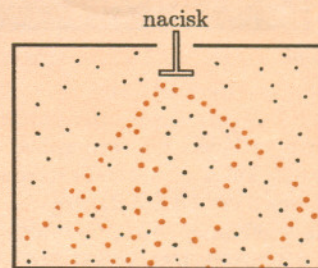
Zastosujemy go do zjawiska parowania wody. Model, w którym spróbujemy opisać to zjawisko, jest następujący. Naszym układem fizycznym będzie cząsteczka wody. Może ona przebywać w cieczy lub w części naczynia nad cieczą, wypełnionej parą nasyconą. Energia cząsteczki zależy tylko od tego, czy znajduje się ona w cieczy czy w parze, a różnica między jej wartościami dla obu tych stanów to po prostu ciepło parowania przypadające na jedną cząsteczkę.

Rozchodzenie się dźwięku w materiałach sypkich

Maria

MASSALSKA-ARODŹ

W poprzednim artykule na temat materiałów sypkich (patrz *Delta* 2/1995) zwróciłam uwagę na fakt, że przy opisie stanu skupienia, w jakim znajduje się układ sypki, bardzo istotną wielkością jest parametr geometrycznego upakowania u , czyli ułamek wypełnienia objętości próbki przez ziarna. Może on przyjmować różne wartości w zależności od warunków, w jakich umieścimy analizowaną próbkę. Ciekawy był fakt, że układ tracił swoją mechaniczną stabilność i zaczynał przejawiać cechy typowe dla stanu ciekłego, jeśli parametr upakowania był mniejszy niż wartość $u_{\min} = 0,52$ (przepraszamy za błąd w *Delcie* 2/1995). Okazuje się jednak, że problem upakowania ziaren w układzie sypkim jest bardziej złożony. Szczegółowa analiza rozłożenia ziaren piasku pozwala stwierdzić, że nie są to układy o jednorodnym upakowaniu. Aby się o tym przekonać, wykonano następujące doświadczenie: kuleczki o własnościach elastooptycznych, które na nacisk reagują zmianą współczynnika załamania światła, wsypano do płaskiego naczynia i poddano ścisłaniu (tłok ma średnicę znacznie mniejszą niż średnica naczynia – rys. 1).

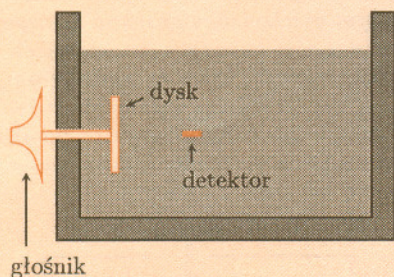


Rys. 1

Pod wpływem nacisku kulki skręcały płaszczynę polaryzacji światła i w odpowiednio dobranych warunkach mogły być obserwowane w świetle spolaryzowanym jako jasne punkty – na rysunku 1 są to kropki kolorowe. Okazało się, że jasne punkty tworzą ciągłą, bardzo złożoną sieć wypełniającą całe naczynie. A więc wywierany na układ nacisk był przenoszony nie przez wszystkie kulki, ale przez sieć bardzo gęsto

upakowanych kulek, które tworzyły w układzie konstrukcję nośną. Pod łukami, lub w przypadku trójwymiarowym – pod sklepieniami takiej konstrukcji istnieją obszary bardzo luźno upakowanych ziaren, które w ogóle nie doznają nacisku. Jest to zachowanie odmienne od obserwowanego przy ściskaniu zarówno próbek ciekłych, jak i stałych. Okazuje się, że również w swobodnej masie piasku, nie poddanej naciskowi, mamy do czynienia z podobną architekturą, która powstaje samoistnie. Takie sklepienia z gęsto upakowanych ziaren, pod którymi znajdują się obszary o ziarnach luźno upakowanych, zapewniają układowi sypkiemu stabilność mechaniczną.

Rozłożenie ziaren w materiałach sypkich jest zatem niejednorodne, co oznacza, że uporządkowanie ich nie jest całkowicie przypadkowe. Obecność konstrukcji nośnych o bardzo złożonej, hierarchicznej budowie pozwala wytłumaczyć zaskakujące zachowanie się dźwięku, jakie stwierdzono w doświadczeniu przeprowadzonym niedawno na uniwersytecie w Chicago [1]. W naczyniu wypełnionym szklanymi kulkami (o średnicy 0,5 cm) umieszczono aluminiowy dysk (o średnicy 7 cm) połączony sztywnym prętem z głośnikiem (rys. 2).



Rys. 2

Detektor o wielkości porównywalnej z rozmiarem kulek został umieszczony w odległości 6 cm od źródła drgań. Mierzoną wielkością było przyspieszenie detektora. Głośnik wykonywał drgania harmoniczne $A_s(t) = A_s \sin(2\pi\nu_0 t)$ o częstotliwości $\nu_0 = 4$ kHz i stałej amplitudzie przyspieszenia $A_s = 1,4$ g ($g = 9,81$ m/s²). Tak więc siła, z jaką głośnik działał na otaczające go kulki, była niewiele większa od ich ciężaru. Drgania, które w otoczeniu źródła były sinusoidalne, w pewnej odległości od niego przestały być regularne, pomimo że układ starannie odizolowano od otoczenia. Drgania rejestrowane przez detektor można opisać wzorem: $A(t) = A_d(t) \sin(2\pi\nu_0 t + \phi(t))$. Jego amplitudę przedstawia rysunek 3.

Podstawowe założenie, które w oczywisty sposób nie jest tu spełnione, to słabość sprzężenia między cząsteczką a termostatem, którym, oczywiście, będzie całe naczynie z wodą. Przecież parowanie polega na wyrwaniu cząsteczki z zasięgu sił utrzymujących ją w kontakcie z innymi cząsteczkami cieczy, trudno więc mówić o słabym sprzężeniu w takiej sytuacji. Zlekceważmy jednak to nie spełnione założenie i spróbujmy doświadczalnie sprawdzić stosowalność w tym przypadku rozkładu kanonicznego. Miarą prawdopodobieństwa znajdowania się cząsteczki w określonym stanie jest liczba cząsteczek na jednostkę objętości (ściślej mówiąc – będzie to gęstość prawdopodobieństwa na jednostkę objętości), do której jest proporcjonalna gęstość cieczy lub pary: $\varrho = CP$. Logarytmując obustronnie wzór (1), reprezentujący rozkład kanoniczny, otrzymujemy

$$\ln \varrho_c = \ln C + \ln A - \frac{E_c}{kT}$$

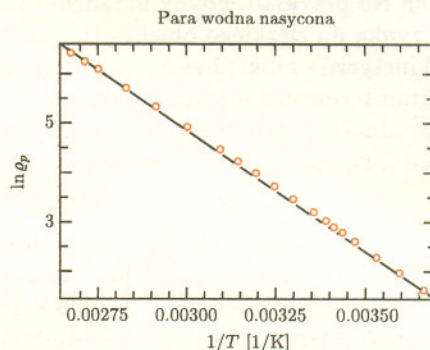
oraz

$$\ln \varrho_p = \ln C + \ln A - \frac{E_p}{kT}$$

odpowiednio dla cieczy i pary. Jeżeli teraz odejmiemy te równości stronami, to otrzymamy po prostym przekształceniu

$$\ln \varrho_p = \ln \varrho_c - \frac{E_p - E_c}{kT}$$

A więc przedstawiając na wykresie logarytm gęstości pary nasyconej wody w zależności od odwrotności temperatury powinniśmy otrzymać prostą o nachyleniu $-(E_p - E_c)/k$. Poniższy rysunek przedstawia taką zależność na podstawie danych zaczerpniętych z książki H. Szydłowskiego *Pomiary fizyczne* (PWN, Warszawa 1977).



$\ln \varrho_p = -4902 \frac{1}{T} + 19,6$; maksymalne odchylenie 0,0442.

Widać, że punkty doświadczalne pięknie układają się w prostą. A więc postać zależności zgadza się z przewidywaną przez rozkład kanoniczny. A co z wartością nachylenia? Nachylenie prostej znalezione metodą najmniejszych kwadratów wynosi 4902 K. Obliczmy je używając znanej wartości ciepła parowania wody $Q = 2260$ J/g, jej masy molowej $m = 18$ g oraz liczby cząsteczek w molu $N_A = 6,02 \times 10^{23}$.

$$\frac{E_p - E_c}{k} = \frac{Qm}{N_A} = \frac{Qm}{kN_A} = \frac{2260 \left[\frac{\text{J}}{\text{g}} \right] \cdot 18 [\text{g}]}{1,38 \times 10^{-23} \left[\frac{\text{J}}{\text{K}} \right] \cdot 6,02 \times 10^{23}} = 4910 [\text{K}]$$

A więc doświadczenie potwierdza ze zdumiewającą dokładnością przewidywanie oparte na fałszywym założeniu! W tym miejscu żaden miłośnik logiki nie wytrzyma dłużej i zawoła

ależ to wszystko bzdura!

Na podstawie fałszywego założenia mogą udowodnić wszystko, a więc powyższy wynik o niczym nie świadczy! Taka postawa, niezbędna na przykład w matematyce, jest, niestety, nie do utrzymania w fizyce, w której nigdy niczego nie wiemy z całkowitą pewnością. Jedyną dostępną fizykowi metodą sprawdzania słuszności swoich teorii jest wysnuwanie z nich wniosków, które dadzą się bezpośrednio skonfrontować z doświadczeniem. Właśnie to przed chwilą zrobiliśmy. Zamiast więc biadać nad nędzą logiczną metod działania fizyków, spróbujmy zastanowić się, dlaczego uzyskaliśmy tak dokładną zgodność z doświadczeniem teorii, która nie ma prawa się stosować. Pozostawiam Cię, Czytelniku, z tym problemem i zapraszam do listownych komentarzy. Najlepsze nagrodzimy książkami.



Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

M 741. Wykazać, że jeśli istnieje ograniczony podzbiór A przestrzeni \mathbf{R}^n o średnicy 1, który nie da się podzielić na n części o średnicy mniejszej od 1, to istnieje również ograniczony podzbiór wypukły B przestrzeni \mathbf{R}^n o tej samej własności. (Por. artykuł *Problem Borsuka o Podziale rozstrzygnięty* na str. 5).

Rozwiązanie na str. 7

M 742. Znaleźć choć jedną liczbę $n > 1$ o tej własności, że pewnego zbioru w \mathbf{R}^n o średnicy równej 1 nie można rozłożyć na mniej niż n^2 części o średnicy mniejszej od 1. (Por. artykuł *Problem Borsuka o Podziale rozstrzygnięty* na str. 5).

Rozwiązanie na str. 7

Zadania nr 741 i 742 zaproponowała Danuta KOŁODZIEJCZYK

M 743. W artykule Jarosława Górnickiego *Kilka słów o powierzchniach* (str. 10) opisana jest wstęga Möbiusa. Czy można z niej wyciąć torus? A czy z torusa można wyciąć wstęgę Möbiusa?

Rozwiązanie na str. 15

Redaguje Adam KOROCIŃSKI

F 407. Jeśli żelazny pręt o długości 1 m ogrzejemy od 0°C do 300°C , to zgodnie ze znanym wzorem na rozszerzalność termiczną ciał $L = L_0(1 + \alpha \cdot \delta T)$ stwierdzimy, że długość pręta powinna wzrosnąć do $L_{300} = 1,0039$ m ($\alpha_{\text{Fe}} = 1,3 \cdot 10^{-5} (^\circ\text{C})^{-1}$ dla tego zakresu temperatur).

Z kolei, jeśli ochłodzimy go z powrotem do temperatury początkowej, to na podstawie tego samego wzoru – z ujemną zmianą temperatury oraz $L'_0 = L_{300}$ – przewidujemy, że długość pręta w temperaturze 0°C wyniesie $0,9999848 \dots$ m!

Wyjaśnić, co jest źródłem powyższego „paradoksu”.

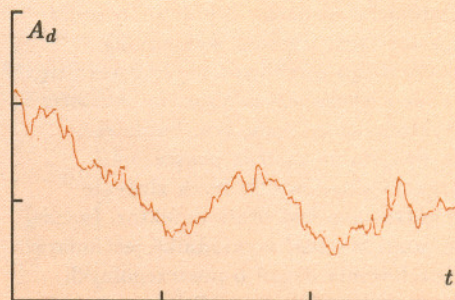
Rozwiązanie na str. 16

F 408. Dysponując gumą do skoków na uwięzi chcemy, aby skoczek o masie 40 kg obciążony workiem z piaskiem o masie 10 kg zanurzył się po skoku „do pasa” (wysokość jego środka ciężkości) w rzecze.

Jak długą gumę należy zastosować, jeśli lustro rzeki znajduje się 20 m poniżej poziomu, z którego startuje skoczek i na którym przymocowana jest guma? Na jaką wysokość wzniesie się skoczek, jeśli upuści on worek w dolnym położeniu? Jakie będzie maksymalne przyspieszenie, którego doświadczy skoczek?

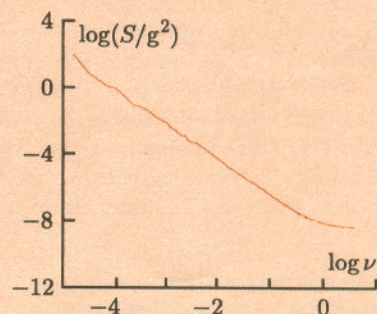
Zakładamy, że do gumy stosuje się prawo Hooke’a, iloczyn modułu Younga i przekroju poprzecznego gumy jest stały i wynosi 500 N, oraz że uprząż utrzymuje skoczka głową do góry. Przyjmujemy $g = 10 \text{ m/s}^2$ oraz zaniedbujemy opory ruchu.

Rozwiązanie na str. 16



Rys. 3

W przypadku substancji w stanie stałym lub ciekłym zarejestrowane drgania byłyby drganiami harmonicznymi o tej samej częstotliwości, a jedynie mniejszej amplitudzie. W przypadku materiałów sypkich jest całkiem inaczej. Zmiany amplitudy drgań obserwowane w trakcie upływu czasu mają charakter bardzo chaotyczny, co sugeruje, że sygnał odbierany przez detektor jest superpozycją wielu drgań harmonicznymi o różnych częstotliwościach i amplitudach. Aby się o tym przekonać, wygodnie jest przedstawić otrzymane wyniki w nieco innej postaci.



Rys. 4

Rysunek 4 pokazuje tak zwane widmo mocy w skali podwójnie logarytmicznej. Widmo mocy jest zdefiniowane jako kwadrat modułu transformaty Fouriera amplitudy drgań

$$S(\nu) = \left| \int A_d(t) \exp(-2\pi\nu t) dt \right|^2.$$

Zależność $\log S(\nu)$ od $\log \nu$ jest wyraźnie liniowa w szerokim zakresie częstotliwości, od 10^{-5} Hz do 1 Hz. Oznacza ona, że $S(\nu) \sim \nu^{-2}$. Jest to zachowanie niezwykle. Oznacza ono, że drgania detektora (czyli w przybliżeniu drgania każdego z ziaren) obserwowane na rysunku 3 jako sygnał chaotyczny podobny do szumu) są złożeniem drgań o wszystkich częstotliwościach z zakresu ponad 5 dekad, których amplitudy cechuje pewna regularność. Istotną informację niesie wartość wykładnika potęgi oszacowanego z nachylenia prostej z rysunku 4. Dla tzw. białego szumu, będącego

łożeniem sygnałów o przypadkowych częstościach, wartość wykładnika potęgowego jest równa zeru. Uważa się, że im większe jest odstępstwo wartości wykładnika od zera, tym bardziej są wzajemnie zależne poszczególne drgania składowe, których złożenie rejestrowane jest przez detektor. Inaczej mówiąc, wartość wykładnika jest miarą skorelowania drgań o poszczególnych częstościach. Wartość bliska -2 świadczy o silnym skorelowaniu. Wydaje się to związane z faktem, że propagacja słabej fali dźwiękowej jest bardzo czuła na wzajemny kontakt poszczególnych ziaren. Drgania źródła nie są przenoszone przez luźno upakowane, drgające niezależnie ziarna. Przeciwnie, w transmisji sygnału akustycznego przede wszystkim uczestniczy jako całość sieć ciasno upakowanych ziaren.

Wychylenie jednego ziarna jest odczuwane nie tylko przez jego bezpośrednich sąsiadów, ale przez wszystkie ziarna tworzące sieć. Zaskakujące jest, że pod wpływem drgań o amplitudzie tak małej (odpowiadająca im amplituda wychyleń źródła wynosi zaledwie 200 \AA) obserwowane są silne fluktuacje $A_d(t)$ o wielkości tego rzędu co średnia amplituda samego sygnału. Transmisja słabej fali dźwiękowej przez materiał sypki wywołuje zapewne dość znaczne odkształcenia ciasno upakowanych ziaren oraz ich wzajemne przemieszczenia. Można wnioskować, że sygnał przenoszony jest przez sieć, która jest w każdej chwili nieco inna.

Niejednorodność rozłożenia ziaren w materiałach sypkich potwierdzono również w innym doświadczeniu, które Chu-heng Liu oraz Sidney Nagel [1] przeprowadzili dla takiego samego jak przedstawiony wcześniej, układu szklanych kulek. Tym razem zamiast drgania o ustalonej częstości, źródło dźwięku wytwarzało bardzo słaby sygnał, ale w formie widma $A_s(\nu)$. (Oznacza to, że drgania źródła składały się z wielu drgań harmonicznym o częstotliwościach ν i amplitudach $A_s(\nu)$.) Wielkością, którą analizowano, był iloraz $\eta(\nu) = A_d(\nu)/A_s(\nu)$, gdzie $A_d(\nu)$ było amplitudą sygnału wywołanego w badanym układzie przez amplitudę drgań źródła $A_s(\nu)$ źródła. Rysunek 5a pokazuje dwie bardzo nieregularne krzywe $\eta(\nu)$ zarejestrowane w dwóch różnych chwilach (aby ułatwić porównanie, są one przesunięte względem siebie wzdłuż skali pionowej). Tym razem zaskakująca jest niezwykle powtarzalność wszystkich szczegółów zależności $\eta(\nu)$ w kolejnych pomiarach. Równocześnie, gdy

Tekst ten jest kontynuacją dyskusji z numeru 250 *Delta* (3/1995). Przypominamy pytania przedstawione przez redakcję z prośbą o ustosunkowanie się do problematyki w nich zawartej.

1. Jaką korzyść może odnieść ktoś zajmujący się np. hodowlą karpia lub malarstwem abstrakcyjnym ze znajomości małego twierdzenia Fermata, reguły Oersteda czy stałej Hubble'a ?
2. Skoro byle kalkulator liczy szybciej i lepiej od człowieka, to po co uczyć człowieka liczenia ?
3. Nie ma na świecie gazu doskonałego, próżni, prostokąta ani liczby e itd. Czemu więc z takim uporem o takich właśnie obiektach idealnych mówią wszystkie nauki ścisłe ?
4. Fizyka – znaczy to po grecku *rzeczy widzialne, rzeczy naturalne, zjawiska przyrody*. Czemu nazwa ta uznawana jest dziś za trafną dla nauki o obiektach będących wytworami ludzkiego umysłu, jakimi są w szczególności cząstki elementarne i pola ?
5. O lotach kosmicznych marzyli przed laty wszyscy. Dlaczego, gdy pierwsi ludzie wylądowali na Księżycu, sprawy podróży pozaziemskich przestały – praktycznie wszystkich – obchodzić ?
6. Dlaczego w *dobrym tonie* jest chwalić się szkolnymi niepowodzeniami w nauce matematyki czy fizyki, a nie wypada przyznawać się do niewydolności w humanistyce ?
7. Czemu zawdzięcza w chwili obecnej paragon nauka swoją przewagę nad nauką ?

Szanowny Panie Redaktorze

Dziękuję za list wraz z ankietą z dnia 15 IX 1994 i przepraszam, że odpowiadam w ostatniej chwili, a może nawet już po niej. Niestety, nawał obowiązków...

Oto moje odpowiedzi na pytania ankiety:

1. Nie sądzę, aby hodowca karpia odniósł szczególną korzyść akurat ze znajomości stałej Hubble'a. Uważam natomiast, że dobre wykształcenie ogólnie przynosi korzyść każdemu, bo ćwiczy umysł, poszerza horyzonty myślenia i wyrabia nawyk pracy intelektualnej, która potrzebna jest dziś w każdym zawodzie. A co do samej stałej Hubble'a, to uważam, że dla nie-fizyka ważniejsze jest wiedzieć, że wiek Wszechświata daje się w ogóle jakoś oszacować, niż znać wielkość tego oszacowania.
2. Są dwa powody. Pierwszy wyjaśniłem powyżej. Drugi jest bardziej przyziemny. Kalkulator liczy rzeczywiście szybciej, gdy w grę wchodzi duże liczby i gdy zaniedbujemy czas dostępu do kalkulatora. Przy małych liczbach zawodnik rachujący w pamięci wygrywa z przeciwnikiem, który musi sięgać po kalkulator i wpalcowywać dane.
3. Nauki ścisłe koncentrują się na wyjaśnianiu istoty rzeczy, a poszukiwanie istoty rzeczy to właśnie odrzucanie tego, co mniej ważne, na korzyść tego, co decyduje o własnościach badanego przedmiotu. Istotą małych trójkątów jest znana własność sumy ich kątów: w granicach błędu każdego pomiaru równa się ona 180 stopni. Jednak dla trójkątów kosmicznych ta własność przestaje opisywać istotę rzeczy i wtedy trzeba sięgnąć po geometrię Łobaczewskiego.
4. Czy rzeczywiście ktoś zastanawia się dziś nad literalną trafnością nazwy „fizyka”? Jest to po prostu nazwa historyczna powszechnie przyjęta i tyle!
5. Sądzę, że sprawy podróży pozaziemskich obchodzą dziś znacznie więcej ludzi i w znacznie większym stopniu niż kiedyś. Policzymy choćby tę armię naukowców, techników, managerów, urzędników, polityków i prawników, którzy zajmują się lotami kosmicznymi zawodowo. A to, że prasa niedzielna mniej się tymi podróżami interesuje, to tylko dowód, że przeniosły się one ze świata fantazji do codziennej rzeczywistości.
6. Wiedza humanistyczna potrzebna jest wszędzie tam, gdzie człowiek spotyka się z człowiekiem. Dla przykładu, kto nie potrafi sprawnie posługiwać się ojczystym językiem, ten jest ułomny w każdej sytuacji i w każdym zawodzie. A człowiek nie znający matematyki w wielu sytuacjach może radzić sobie całkiem nieźle.
7. A czy rzeczywiście ma taką przewagę? Chyba tylko w niedzielnej prasie.

Andrzej BLIKLE

Problem Borsuka o Podziale rozstrzygnięty

Danuta KOŁODZIEJCZYK

W 1992 roku środowisko matematyczne obiegła sensacyjna wiadomość, że po 60 latach został rozstrzygnięty negatywnie przez Jeffa Kahna z USA i Gila Kalai'a z Izraela słynny Problem Borsuka o Podziale:

Czy każdy ograniczony podzbiór przestrzeni euklidesowej n -wymiarowej można podzielić na $n + 1$ części, z których każda ma średnicę mniejszą niż wyjściowy zbiór?

Profesor Karol Borsuk (1905–1982) był jednym z najwybitniejszych matematyków polskich okresu przed i powojennego, twórcą nowych gałęzi topologii (teorii retraktów, teorii kształtu, teorii grup kohomotopii). Jego idee oraz bogactwo i głębokość problemów, które stawiał, stanowią inspirację do badań w Polsce i za granicą od wielu lat.

Wyjaśnijmy bliżej pojęcia występujące w sformułowaniu tego pytania.

Średnicą zbioru nazywamy kres górny odległości par punktów należących do zbioru. I tak, koło o promieniu $1/2$ ma średnicę 1 , trójkąt równoboczny o boku 1 ma średnicę 1 , natomiast kwadrat o boku 1 ma średnicę $\sqrt{2}$.

Przestrzenie euklidesowe wymiaru $1, 2$ i 3 to prosta, płaszczyzna i przestrzeń, w której żyjemy. Punkty na prostej można opisać przy użyciu jednej liczby (oś liczbowa), a na płaszczyźnie i w przestrzeni za pomocą dwóch i trzech liczb, czyli w 2 - i 3 -wymiarowych układach współrzędnych. To podsunęło pomysł, by zdefiniować n -wymiarową przestrzeń euklidesową, oznaczaną też przez \mathbf{R}^n . Punkty tej przestrzeni opisujemy za pomocą układów n liczb (x_1, x_2, \dots, x_n) , czyli w n -wymiarowym układzie współrzędnych.

W przestrzeni \mathbf{R}^n odległość między punktami $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ i $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ oblicza się analogicznie jak w przestrzeni dwu- i trójwymiarowej:

$$\rho(a, b) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}.$$

Podobnie, jak w niższych wymiarach, można też zdefiniować wiele pojęć geometrycznych. Na przykład sfera $S^{n-1}(x, r)$ o środku x i promieniu r to zbiór punktów w \mathbf{R}^n , których odległość od punktu x jest równa r . Sfera $S^{n-1}(x, r)$ ma, oczywiście, średnicę $2r$.

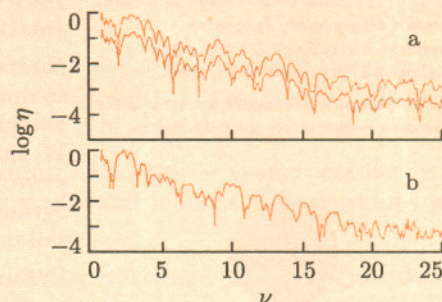
Indeks $n - 1$ w oznaczeniu sfery bierze się stąd, że ma ona o jeden wymiar mniej niż przestrzeń – widać to dobrze na płaszczyźnie (okrąg) i w przestrzeni trójwymiarowej.

Rozważmy czworościan foremny o krawędzi 1 . Jego średnica jest równa 1 . Zauważmy, że nie można go rozbić na trzy części o średnicach mniejszych od 1 (dwa wierzchołki musiałyby należeć do jednej z nich). Można jednak, co jest widoczne, rozbić go na cztery takie części.

Istnieje n -wymiarowy odpowiednik czworościanu – tzw. n -wymiarowy sympleks (dla $n = 2$ jest to po prostu trójkąt). Definiujemy go jako uwypuklenie zbioru $n + 1$ punktów przestrzeni, które nie leżą w żadnej wspólnej przestrzeni niższego wymiaru. Podobnie jak czworościan, każdy n -wymiarowy sympleks „foremny” o krawędzi 1 da się rozbić na $n + 1$ części o mniejszych średnicach, ale na n części już nie. Okazuje się, że tak samo jest ze sferami i kulami w przestrzeni n -wymiarowej.

Uwypuklenie zbioru B to najmniejszy zbiór wypukły, który zawiera B .

nieznacznie zaburzone upakowanie ziaren, wówczas szczegóły widma $\eta(\nu)$ uległy zasadniczym zmianom, jak to pokazuje rysunek 5b.



Rys. 5

Cechą wspólną pozostaje chaotyczny charakter obserwowanych zależności $\eta(\nu)$. Pomimo to w tym doświadczeniu nie możemy, jak poprzednio, mówić o szumie, który stwierdzamy wówczas, gdy obserwacje z różnych chwil różnią się, chociaż warunki eksperymentu nie ulegają zmianie. Tym razem bez wątpienia została zarejestrowana odpowiedź układu na widmo $A_s(\nu)$ źródła, charakterystyczna dla konkretnego przestrzennego rozłożenia wszystkich ziaren w naczyniu. Można ją sprawdzić powtarzając eksperyment w tych samych warunkach. (W doświadczeniu wykluczono możliwość obserwowania rezonansowych wzbudzeń od naczynia.) Trudno byłoby wyjaśnić zaobserwowane zjawisko przyjmując jednorodne rozłożenie ziaren w próbce. Natomiast dla sieci ciasno upakowanych ziaren można sobie wyobrazić, że w przestrzeni między detektorem a źródłem znajdzie się na pewno wiele rozgałęzień sieci o coraz drobniejszych odnogach, którymi przenoszony jest sygnał. Nieregularne zmiany zależności transmisji $\eta(\nu)$ od częstości mogą być wywołane interferencją tych sygnałów cząstkowych.

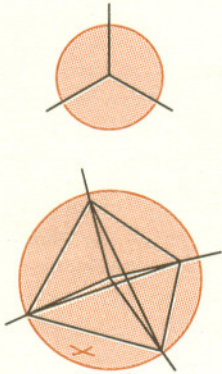
Zachowanie się dźwięku w układach składających się z ziaren pokazuje, że są to układy niejednorodne, których własności zależą wyraźnie od tego, w jakim miejscu próbki je badamy. Dla układów sypkich nie obowiązuje proporcjonalność między wielkością wprowadzonego do układu zaburzenia a efektem, który ono wywołuje, nawet wówczas, gdy zaburzenie jest bardzo małe. Są to układy nieliniowe, co ilustrują opisane doświadczenia. Wydaje się intrygujące pytanie, jakie będzie zachowanie układu sypkiego, gdy poddamy go działaniu drgań o dużej amplitudzie, znacznie większej niż stosowane dotychczas.

[1] Chu-heng Liu i S.R. Nagel, *Physical Review Letters*, vol. 68, No 15, 2301 (1992).

W przypadku „zwykłej” sfery dwuwymiarowej w przestrzeni trójwymiarowej Twierdzenie o Antypodach można obrazowo sformułować jak następuje:

Jeśli sferę pomalujemy trzema kolorami, to pewne dwa punkty leżące po przeciwnych stronach środka zostaną zamalowane tym samym kolorem.

Istotnie, pomalowanie sfery na trzy kolory odpowiada rozbięciu jej na trzy części.



Rys. 1

To, że sfery S^n nie można podzielić na n części o mniejszej średnicy, nie jest już jednak tak proste. Dokładniej, ten fakt jest treścią słynnego Twierdzenia Borsuka o Antypodach, które mówi, że:

Jeśli sferę $(n - 1)$ -wymiarową rozbijemy na n części, to co najmniej jedna z nich zawiera parę punktów antypodycznych (tj. punktów symetrycznych względem środka sfery, inaczej mówiąc: dwóch końców tej samej średnicy).

Nietrudno wykazać, że o ile sfera w \mathbf{R}^n nie da się rozbić na n części o mniejszej średnicy, to można ją łatwo rozbić na $n + 1$ takich części (w przypadku okręgu i sfery 2-wymiarowej, patrz rys. 1 przedstawiający rozbięcie koła i kuli). W 1933 roku, publikując Twierdzenie o Antypodach, Karol Borsuk wysunął przypuszczenie, znane odtąd jako hipoteza Borsuka o Podziale, że dowolny, ograniczony podzbiór przestrzeni \mathbf{R}^n ma również tę własność. Zauważmy (patrz zadanie M 741), że wystarczy zająć się przypadkiem figur wypukłych.

Pytanie, czy hipoteza ta jest prawdziwa, okazało się bardzo trudne. Mimo że problem prostotą sformułowania i nazwiskiem autora przyciągał wielu matematyków, przez długi czas pojawiały się jedynie częściowe rezultaty.

Pozytywna odpowiedź dla $n = 2$ została od razu podana przez Borsuka, ale na taki sam wynik dla $n = 3$ trzeba było czekać przeszło 20 lat. Opublikował go H.G. Eggleston w 1955 roku. Warto wspomnieć, że podobne rozwiązanie ogłosił polski matematyk J. Perkal na posiedzeniu Polskiego Towarzystwa Matematycznego już w 1947 roku, ale nie złożył go do druku. W 1957 roku znacznie prostszy dowód prawdziwości hipotezy dla $n = 3$ podali niezależnie B. Grünbaum i A. Heppes.

Metoda podziału *pokryw uniwersalnych*, tj. figur, w których można umieścić dowolny podzbiór \mathbf{R}^n o średnicy 1 (na płaszczyźnie są nimi np. sześciokąt foremny o boku $\sqrt{3}/3$ i kwadrat o boku 1), stosowana z dobrym skutkiem w wymiarach niskich, raczej nie dawała nadziei na rozstrzygnięcie problemu w całej ogólności. Wydaje się jednak, iż powszechnie wierzono, że hipoteza jest prawdziwa, a od czasu do czasu (podobnie jak w przypadku Wielkiego Twierdzenia Fermata) ktoś utrzymywał, że potrafi ją udowodnić. Ale proponowane, a czasem nawet publikowane dowody okazywały się fałszywe.

W wymiarach wyższych od trzech znane więc były tylko pewne szczególne klasy figur, dla których udało się wykazać prawdziwość hipotezy.

Na uwagę zasługuje tu przede wszystkim dowód H. Hadwigera (1945) dla brył wypukłych o gładkim brzegu (nie będziemy precyzować, co to znaczy gładki brzeg, odwołując się do intuicji: kula i elipsoida mają gładki brzeg, natomiast wielościan nie ma gładkiego brzegu, jest „kanciasty”).

Pojawiły się również drobne wzmocnienia tego wyniku dla pewnych zbiorów o niegładkim brzegu (1952, Anderson-Klee i inne), a A.S. Rissling udowodnił, że hipoteza jest prawdziwa dla brył wypukłych mających środek symetrii.

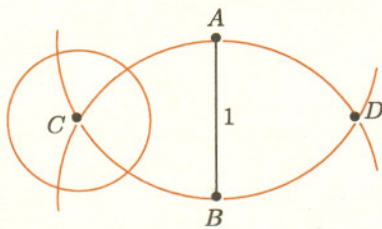
Autorka niniejszego artykułu wykazała to samo dla brył wypukłych o średnicy 1 w przestrzeni \mathbf{R}^n , które zawierają $(n - 1)$ -wymiarowy sympleks foremny o krawędzi 1.

W przypadku wymiaru 2 tym sympleksem jest po prostu odcinek o długości 1, a dowód powyższego faktu daje nam wówczas jeden z dowodów (być może najprostszy) hipotezy Borsuka dla $n = 2$.

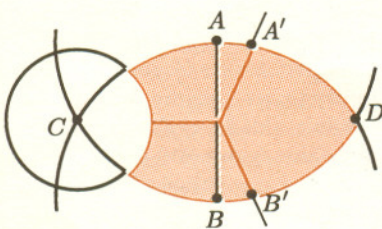
Weźmy mianowicie dowolny odcinek o długości 1, którego końce leżą na brzegu danej figury F o średnicy 1. Końce te oznaczmy przez A i B . Łatwo spostrzec, że F musi się zawierać w części wspólnej dwóch kół o promieniach 1 i środkach w A i B (patrz rys. 2). Odległość punktów C i D jest większa niż 1, więc jeden z nich, powiedzmy C , na pewno nie należy do F . Jeśli więc narysujemy odpowiednio małe kółko wokół punktu C , to musi ono także być rozłączne z F . Wobec tego figura F jest zawarta w takiej „wygryzionej soczewce” jak na rysunku 3. Przesuwając teraz odrobinę punkty A i B po brzegu tej „soczewki” w kierunku punktu D otrzymamy punkty A' i B' oraz rozbięcie soczewki na trzy części, z których każda ma średnicę mniejszą niż 1 (patrz rys. 3).

Znany rezultat H. W. E. Junga z 1901 roku mówi, że:

Każdą bryłę o średnicy 1 w \mathbf{R}^n można zawrzeć w pewnej kuli o promieniu $r \leq r_0 = \sqrt{n/(2n + 2)}$ (czyli kula o promieniu r_0 jest pokrywą uniwersalną w \mathbf{R}^n). Co więcej, jeśli dla danej bryły najmniejsze takie r jest równe dokładnie $\sqrt{n/(2n + 2)}$, to zawiera ona wierzchołki pewnego n -wymiarowego sympleksu o krawędzi 1.



Rys. 2



Rys. 3

Zestawiając ten fakt z tym, co powiedzieliśmy nieco wyżej, dorzucamy do wspomnianych już wyników trochę przewrotne stwierdzenie, że:

Każdą bryłę wypukłą o średnicy 1 w \mathbf{R}^n , która nie mieści się w żadnej kuli n -wymiarowej o promieniu mniejszym od $\sqrt{n}/(2n+2)$ można podzielić na $n+1$ części o mniejszej średnicy.

Nietrudno wykazać, że dla udowodnienia (lub obalenia) hipotezy Borsuka wystarcza rozważać zamiast całego zbioru o średnicy 1 tylko punkty, które są końcami odcinków o długości 1 zawartych w tym zbiorze.

Ale nawet „najprostszy” przypadek zbiorów złożonych ze skończonej liczby punktów lub równoważnie – wielościanów sprawiał trudności, wydawałoby się, nie do pokonania. Aż do roku 1992...

W roku 1992 Jeff Kahn i Gil Kalai obalili nieoczekiwanie hipotezę Borsuka wykazując, że istnieje zbiór, a nawet wielościan bardzo dużego wymiaru n (a więc również pewien skończony zbiór punktów w przestrzeni euklidesowej tego wymiaru), którego nie można podzielić na $n+1$ części o mniejszej średnicy.

Wykorzystując kombinatoryczne lematy Frankla i Wilsona oraz Larmana, o skończonych konfiguracjach punktów w \mathbf{R}^n , udowodnili oni, że jeśli $n = 4p^\alpha$, gdzie p jest liczbą pierwszą, a $\alpha \in \mathbf{N}$, to najmniejsza liczba części o średnicy mniejszej od 1, na jaką można rozłożyć każdy zbiór o średnicy 1 w \mathbf{R}^n , jest nie mniejsza niż $(1,1)^{\sqrt{n}}$.

Dla odpowiednio dużych n liczba $(1,1)^{\sqrt{n}}$ jest **znacznie** większa od $n+1$ (patrz też zadanie M 742).

Możliwość zastosowania metod kombinatorycznych do badań nad tym problemem została po raz pierwszy zasugerowana prawdopodobnie przez P. Erdősa, który użył ich do prostych dowodów hipotezy Borsuka dla skończonych zbiorów punktów w wymiarach 2 i 3. Jego podejście wydawało się jednak zbyt trudne do przeniesienia na wymiary wyższe.

Warto wspomnieć, że dwaj autorzy zaskakująco elementarnego, choć technicznie dość skomplikowanego, rozwiązania nie należeli do grona stałych amatorów hipotezy, nie byli nawet przedstawicielami tych dyscyplin matematyki, z którymi była ona zwykle wiązana (geometria i topologia). O problemie dowiedzieli się przypadkiem.

Entuzjastom hipotezy Borsuka o Podziale pozostało więc do rozstrzygnięcia, w jakim wymiarze przestaje ona być prawdziwa, w szczególności: jak wygląda sytuacja w najniższym nie zbadanym dotąd wymiarze 4.



W związku z klasyczną hipotezą Borsuka o Podziale powstało też wiele innych, otwartych dotąd problemów o podobnie prostych sformułowaniach. Zainteresowanym polecamy przeglądowy artykuł B. Grünbauma „Borsuk’s problem and related questions”, *Proc. Sympos. Pure Math.*, v. 7 (Convexity), Providence (USA), 1963, 271–284.



Rozwiązanie zadania M 741. Warunki tezy zadania spełnia np. zbiór B będący uwypukleniem A . Zauważmy najpierw, że średnica $\text{diam } B$ zbioru B jest równa 1. W tym celu niech A_1 będzie sumą wszystkich odcinków o końcach w A , A_2 – sumą wszystkich odcinków o końcach w A_1 , itd. Ogólnie, niech A_{k+1} będzie sumą wszystkich odcinków o końcach w A_k . Łatwo wykazać przez indukcję, że $\text{diam } A_k = 1$ dla wszystkich k . Ponieważ $A_k \subset A_{k+1}$, to wynika stąd, że zbiór

$$C = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} A_k$$

ma średnicę 1 i, oczywiście, jest wypukły. Ponieważ B jest najmniejszym zbiorem wypukłym zawierającym A , to mamy $A \subset B \subset C$, a zatem

$$1 = \text{diam } A \leq \text{diam } B \leq \text{diam } C = 1.$$

Gdyby zbiór B można było podzielić na n części B_1, \dots, B_n o średnicy mniejszej od 1, to zbiory $A_i = B_i \cap A$ stanowiłyby rozbięcie A na n części o średnicy mniejszej od 1 – sprzeczność.

Uwaga: Czytelnik Wnikliwy zechce się zastanowić, czy istnieje takie n_0 , że dla $k > n_0$ mamy $A_k = A_{n_0}$, i czy $B = C$.



Rozwiązanie zadania M 742. Zgodnie ze wspomnianym w artykule *Problem Borsuka o Podziale rozstrzygnięty* rezultatem Kahna i Kalaja wystarczy np. znaleźć takie $k \in \mathbf{N}$, by dla $n = 4 \cdot 2^{2k}$ mieć

$$\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{\sqrt{n}} > n^2.$$

Ponieważ $\sqrt{n} = 2^{k+1} \in \mathbf{N}$, to ze wzoru dwumianowego Newtona wynika, że

$$\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{\sqrt{n}} > \binom{\sqrt{n}}{5} \frac{1}{10^5}.$$

Nietrudno zauważyć, że dla $n \geq 64$, gdy $\sqrt{n} - 4 \geq \sqrt{n}/2$ prawa strona ostatniej nierówności jest większa od liczby

$$\frac{n^{5/2}}{16 \cdot 5! \cdot 10^5},$$

która jest większa od n^2 dla $n > 2^8 \cdot (5!)^2 \cdot 10^{10}$, a więc tym bardziej dla $n \geq 2^8 \cdot (128)^2 \cdot (2^4)^{10} = 2^{62}$. Warunki zadania spełniają więc np. wszystkie liczby n postaci $4 \cdot 2^{2k}$, gdzie k jest liczbą naturalną nie mniejszą od 30.

Uwaga. Można sprawdzić, że $(1,1)^{\sqrt{n}} > n+1$ już dla $n = 9162 \ll 2^{62}$.

Paradoks kapilarny

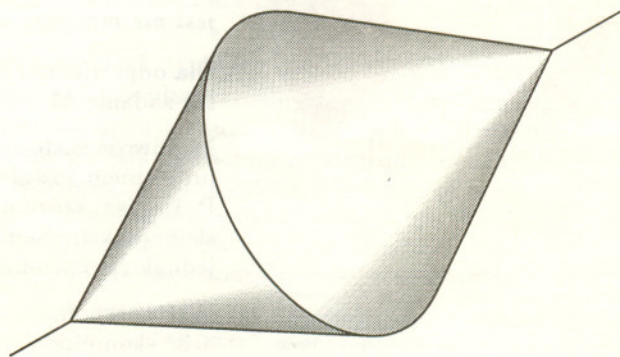
Zapewne każdy z Czytelników *Delty* zna następujące proste, a efektowne doświadczenie: z dwóch listewek budujemy równię pochyłą w postaci szyn rozszerzających się ku górze; następnie kładziemy na nich bryłę o kształcie dwóch jednakowych stożków złączonych podstawami. Przy odpowiedniej geometrii układu bryła będzie się toczyć pod górę! Wytłumaczenie tego paradoksu jest proste. Ponieważ szyny rozszerzają się ku górze, położenie środka masy toczącej się pod górę bryły obniża się, a zatem maleje jej energia potencjalna.

Podobny paradoks ma także miejsce w fizyce cieczy. Jeśli do szklanej rurki o kształcie stożka wpuścimy trochę wody i rurkę ustawimy pionowo, węższym końcem ku górze, może się okazać, że woda zamiast wyciekać z rurki, będzie się przemieszczać do góry!

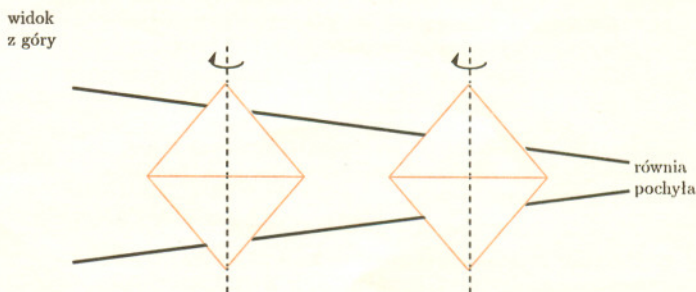
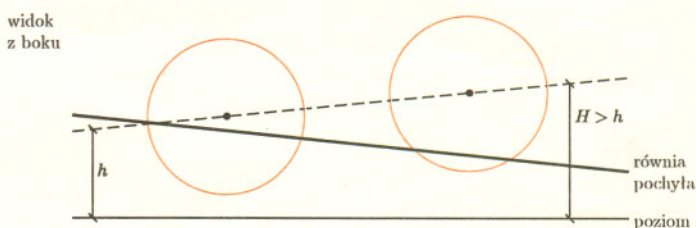
Takie zachowanie się wody możemy łatwo wytłumaczyć, jeśli pamiętamy o zjawiskach kapilarnych. Woda w kontakcie ze szkłem tworzy menisk wklęsły (w naszym przypadku będą to dwa meniski). Ciśnienie cieczy pod powierzchnią menisku wklęsłego jest niższe od ciśnienia atmosferycznego. Różnica obu tych ciśnień jest równa

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r} \cos \theta,$$

gdzie r jest promieniem krzywizny menisku (jest on proporcjonalny do promienia rurki), σ – napięciem powierzchniowym na granicy woda-powietrze, a θ – kątem zwilżania szkła przez wodę. W górnej części rurki, gdzie jej promień jest mniejszy, mniejszy jest także promień krzywizny menisku, a zatem większa jest różnica ciśnień.



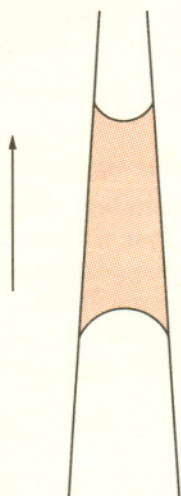
Rys. 1



Rys. 2. Bryła pozornie toczy się pod górę, ale jej środek ciężkości obniża się.



Rys. 3. Woda w rurce kapilarnej, θ – kąt zwilżania, r – promień krzywizny menisku.



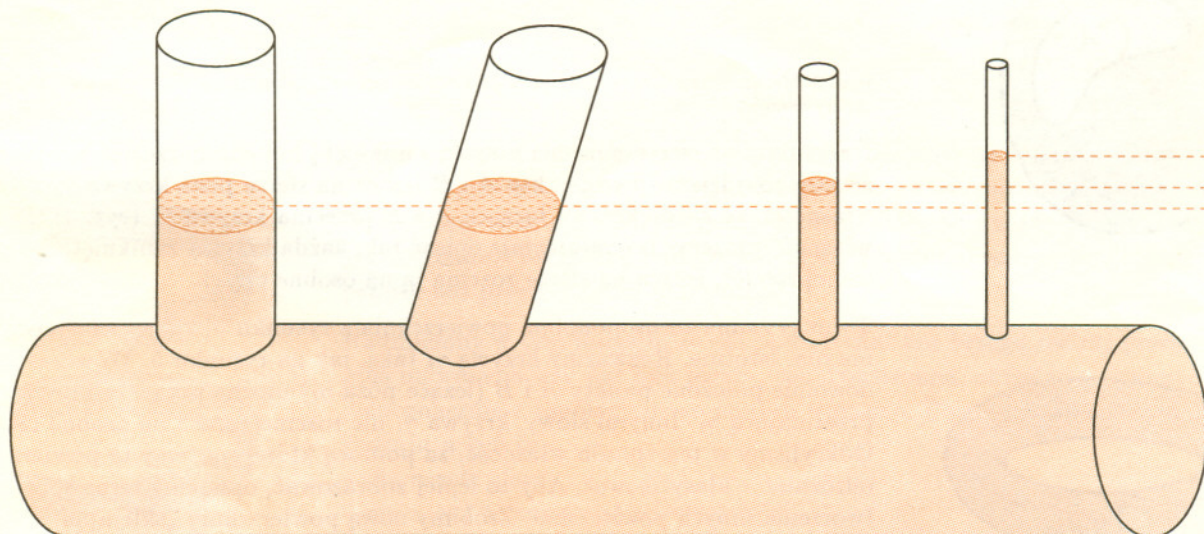
Rys. 4. Ruch wody w zwężającej się ku górze rurce kapilarnej.

Na każdy z menisków działa skierowana do wnętrza cieczy wypadkowa siła parcia. Siły te zależą nie tylko od różnicy ciśnień po obu stronach powierzchni, ale i od pola powierzchni menisku. Różnica ciśnień jest odwrotnie proporcjonalna do promienia rurki, pole powierzchni zaś jest proporcjonalne do kwadratu promienia, tak więc siła parcia jest proporcjonalna do promienia rurki, czyli jest większa w szerszej, dolnej części. Wartość współczynnika proporcjonalności nie jest szczególnie istotna, choć przy odrobinie wprawy można go obliczyć. Tak więc na wodę działa wypadkowa siła parcia skierowana pionowo do góry i może być ona większa niż ciężar wody, a wtedy wbrew sile grawitacji woda będzie się przemieszczać ku górze.

Możemy na to popatrzeć także z innego punktu widzenia. To, że woda w kontakcie ze szkłem tworzy menisk wklęsły, wynika z faktu, że oddziaływania przyciągające między cząsteczkami wody i szkła są silniejsze niż oddziaływania między samymi cząsteczkami wody. W konsekwencji napięcie powierzchniowe na granicy woda-szkło jest mniejsze niż napięcie powierzchniowe na granicy woda-powietrze. Oznacza to, że energia powierzchniowa wody (a dokładniej: powierzchniowa energia swobodna) jest tym mniejsza, im większa jest powierzchnia kontaktu wody ze szkłem. Minimalizując swoją energię powierzchniową woda będzie się przemieszczać ku górze. Wprawdzie rośnie wtedy potencjalna energia grawitacyjna, ale w sumie takie zachowanie się może być opłacalne.

W ten sam sposób można wytłumaczyć to, że jeśli w naczyniach połączonych jedno z ramion jest kapilarą, to poziom wody w tym ramieniu jest wyższy niż w pozostałych (rys. 5). Położenie równowagi odpowiada minimum energii, do której istotny wkład dają energia powierzchniowa i potencjalna energia grawitacyjna. Woda podnosi się w rurce kapilarnej zmniejszając energię powierzchniową, aż znajdzie się w położeniu równowagi.

A jak w zwężającej się rurce kapilarnej będzie się zachowywać rtęć?

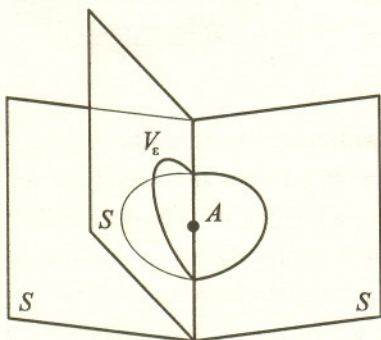


Rys. 5

Kilka słów o powierzchniach

Jarosław GÓRNICKI

Czasem precyzyjne określenie (na gruncie matematyki) pozornie prostego pojęcia nastrocza wiele trudności. Tak jest, na przykład, w przypadku odpowiedzi na pytanie: co to jest krzywa? Przekonasz się o tym Czytelniku przeglądając książkę [5]. Podobnie kłopotliwe jest określenie powierzchni. Możemy o niej mówić, na przykład, z punktu widzenia geometrii, a szczególnie geometrii różniczkowej (patrz np. [2]) bądź z punktu widzenia topologii. Aby uniknąć tych trudności, w tym artykule poprzestaniemy na intuicyjnym rozumieniu terminu *powierzchnia*. Będzie to dla nas *twór dwuwymiarowy, ograniczony, który lokalnie przypomina płaszczyznę*, tzn. malutki człowieczek postawiony w dowolnym miejscu na tej powierzchni będzie miał wrażenie, że stoi na płaszczyźnie – podobnie nam się wydaje, że Ziemia jest płaska. Będziemy ponadto zakładać, że powierzchnia jest zbiorem domkniętym, tzn. wraz z ciągiem zbieżnym punktów zawiera jego granicę.

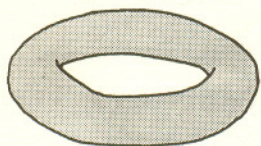


Rys. 1. Dowolne otoczenie $V_\epsilon \cap S$ punktu A składa się z „trzech kawałków”, nie przypomina więc płaszczyzny.

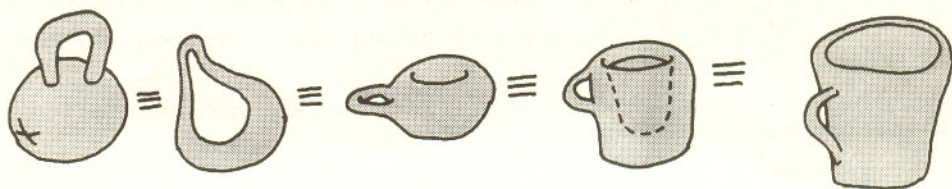
Przykładami powierzchni są więc: sfera, powierzchnia torusa (rys. 2), natomiast płaszczyzna (jako zbiór nieograniczony), sfera z usuniętym jednym punktem (gdyż nie jest domknięta), czy figura z rysunku 1 nie są powierzchniami.

Łatwo godzimy się z poglądem, że różnych powierzchni jest dużo. Czy można je w jakiś sposób klasyfikować?

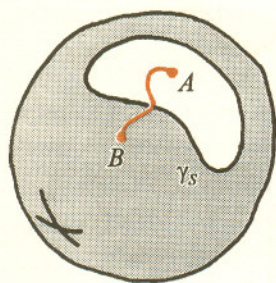
Popatrzmy na sferę i na torus. Intuicyjnie jest dla nas jasne, że wszystkie powierzchnie z rysunku 3 w jakimś sensie są powierzchniami tego samego typu co torus, natomiast sfera jest powierzchnią innego typu. Chciałoby się powiedzieć, że powierzchnie z rysunków 2 i 3 mają jedną „dziurę”, natomiast sfera dziury nie ma. Lecz co to znaczy, że torus ma dziurę? Jak ją matematycznie zdefiniować? Zamiast zajmować się ową definicją, wskażemy inną własność, która odróżnia sferę od wszystkich torusopodobnych powierzchni z rysunków 2 i 3.



Rys. 2. Torus

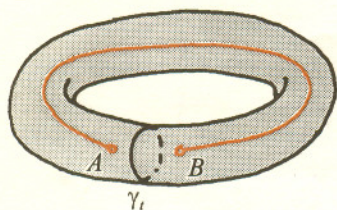


Rys. 3. Metamorfozy torusa otrzymane przez „rozciąganie”, „skurczenie”, „wyginanie”, ale bez „rozrywania” i „sklejeń”.



Rys. 4

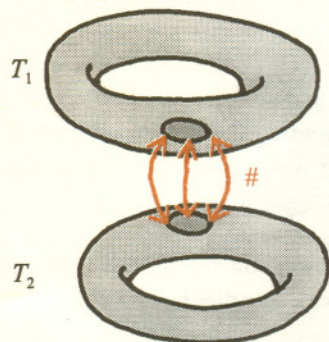
Narysujmy na sferze *dowolną* krzywą zamkniętą bez samoprzecięć γ_s . Wówczas zawsze znajdziemy dwa punkty A i B leżące na sferze poza krzywą γ_s i o tej własności, że każda krzywa łącząca A z B przecina krzywą γ_s (rys. 4). Powyższą własność możemy też *intuicyjnie* opisać tak: każda krzywa zamknięta i bez samoprzecięć, leżąca na sferze rozcina ją na osobne części.



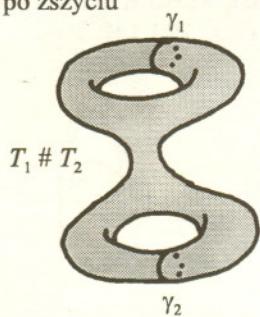
Rys. 5

Torus (i żadna torusopodobna powierzchnia z rysunku 3) takiej własności nie ma. Istotnie. Rozważmy krzywą γ_t taką, jak na rysunku 5. Wówczas dowolnie położone punkty A i B (leżące poza γ_t) można połączyć krzywą nie przecinającą γ_t . Innymi słowy, krzywa γ_t nie rozcina torusa na osobne części. Odkryliśmy w ten sposób własność, za pomocą której możemy te powierzchnie odróżniać – klasyfikować. Aby to lepiej zobrazować, opiszemy teraz sposób tworzenia innych powierzchni. Zrobimy nową powierzchnię „sklejając” dwa torusy, a dokładniej – zdefiniujemy tzw. sumę spójną dwóch torusów $T_1 \# T_2$. Budujemy ją następująco: wycinamy w każdym z torusów koło (i wyrzucamy je), a następnie „zszywamy” oba torusy wzdłuż brzegów owych dziur (rys. 6).

a) zszywamy



b) po zszyciu



Rys. 6. Jeżeli $T_1 \# T_2$ rozetniemy wzdłuż γ_1 i γ_2 , to nie rozpadnie się.

„Doszywając” w podobny sposób kolejne torusy będziemy otrzymywali coraz to inne powierzchnie (rys. 7).

Umawiamy się przy tym, że:

rodzajem powierzchni nazywamy maksymalną liczbę zawartych w niej rozłącznych krzywych zamkniętych bez samoprzecięć i takich, że rozcięcie powierzchni wzdłuż tych krzywych nie powoduje jej rozpadu na osobne części.

Na przykład:

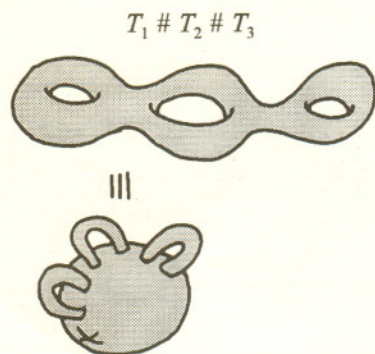
- sfera jest powierzchnią rodzaju 0,
- torus jest powierzchnią rodzaju 1,
- $T_1 \# T_2$ jest powierzchnią rodzaju 2 (rys. 6b),
- $T_1 \# T_2 \# T_3$ jest powierzchnią rodzaju 3 (rys. 7), itd.

Dokładniejsza analiza tego zjawiska – tym zajmuje się, między innymi, topologia – pokazuje, że powierzchnie różnego rodzaju nie można wzajemnie na siebie odwzorować w sposób ciągły i różnowartościowy.

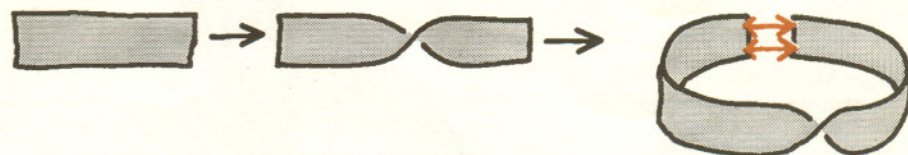
Do dalszych rozważań dopuścimy teraz dodatkowo tzw. *powierzchnie z brzegiem*, na przykład domknięte koło, prostokąt z brzegiem.

Wszystkie wymienione dotychczas przykłady powierzchni mają jedną wspólną cechę – na każdej z nich można wyróżnić dwie strony. Dwie strony takiej powierzchni można pomalować różnymi kolorami, aby je rozróżnić. Jeżeli powierzchnia jest zamknięta (tzn. bez brzegu), to kolory nigdzie się nie stykają. Jeżeli powierzchnia ma brzeg (np. prostokąt), to oba kolory stykają się tylko wzdłuż brzegu. Zatem – czy istnieją powierzchnie mające tylko jedną stronę? Tak. Przykłady takich powierzchni podali około 1858 roku, niezależnie, A.F. Möbius (1790–1868) i J.B. Listing (1808–1882). Model takiej jednostronnej powierzchni bardzo łatwo otrzymać. Bierzymy wąski pasek papieru, jeden jego koniec przekręcamy o 180° (w lewo lub w prawo) i sklejamy z drugim.

Otrzymujemy w ten sposób figurę zwaną obecnie *wstęgą Möbiusa* (rys. 8 i 9).



Rys. 7



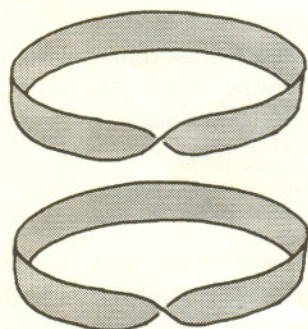
Rys. 8. Kolejne etapy tworzenia wstęgi Möbiusa.

Możemy, oczywiście, otrzymać dwie przeciwnie skręcone wstęgi Möbiusa i żadne wyginanie, rozciąganie bez rozrywania nie przeprowadzi jednej z tych powierzchni w drugą. Otrzymujemy w ten sposób dwie różne *powierzchnie jednostronne* – z każdego punktu wstęgi do dowolnego innego jej punktu można przejść bez przechodzenia przez brzeg.

Nadmieśmy w tym miejscu, że dla powierzchni bez brzegu rodzaj powierzchni plus informacja, czy jest ona jedno-, czy dwustronna, określa tę powierzchnię jednoznacznie z topologicznego punktu widzenia. Powierzchnie dwustronne rodzaju $n \geq 0$ to

- dla $n = 0$: sfera,
- dla $n \geq 1$ to suma spójna n torusów,

i innych dwustronnych powierzchni bez brzegu w topologii nie ma, to znaczy każda inna może być w sposób ciągły i różnowartościowy przekształcona na jedną z wyżej wymienionych.

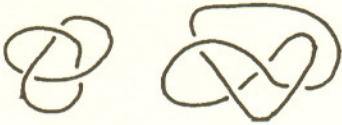


Rys. 9. Przeciwnie skierowanie wstęgi Möbiusa.

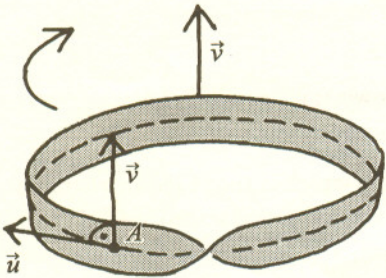
krzywe niezawężłone:



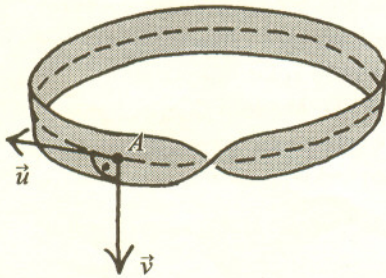
... i zawężłone:



Rys. 10

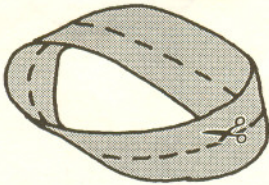


... po obiegu ...

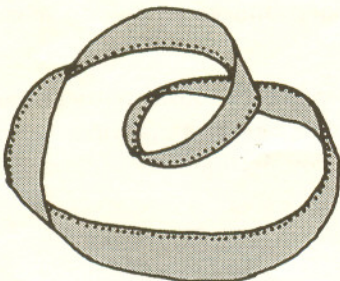


Rys. 11

wstęga Möbiusa —
powierzchnia jednostronna:



po rozcięciu —
powierzchnia dwustronna:

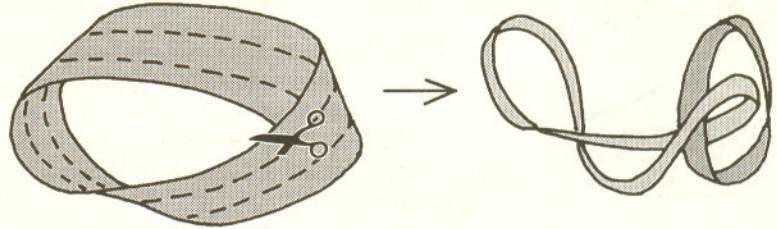


Rys. 12

Wróćmy teraz do wstęg Möbiusa i przypatrzmy się jednej z nich. Nie tylko jest to powierzchnia jednostronna, ale ma jeden brzeg będący krzywą zamkniętą „niezawężloną” (rys. 10). Ponadto wyobraźmy sobie, że środkiem wstęgi Möbiusa od punktu A (rys. 11) przesuwamy wzajemnie prostopadłe wektory u i v . Po przejściu całej wstęgi i powrocie do punktu A wektory są skierowane przeciwnie – zmieniły orientację. Zatem pojęcie „orientacja” na powierzchniach jednostronnych nie ma sensu. Kolejną niespodzianką jest zachowanie się wstęgi Möbiusa podczas jej rozcinania. Co otrzymamy, gdy:

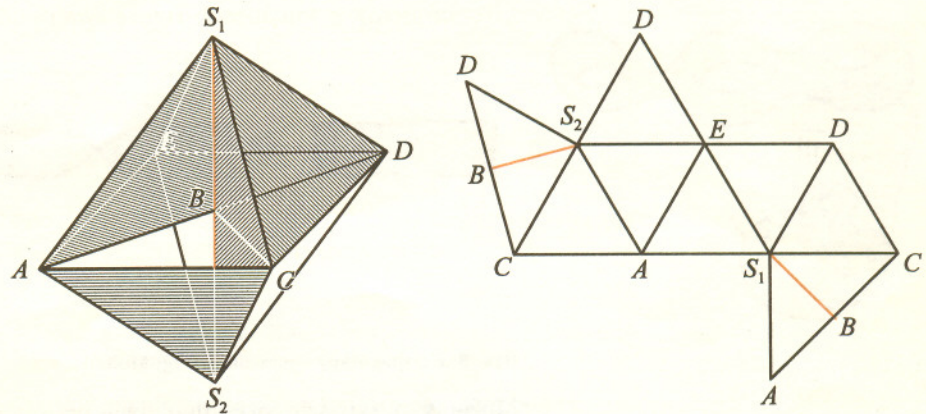
- (i) rozetniemy wstęgę Möbiusa wzdłuż linii środkowej równoległej do brzegu?
- (ii) rozetniemy wstęgę Möbiusa równoległe do brzegu w odległości $1/3$ jej szerokości?

Ponieważ nasza intuicja i wyobraźnia czasem nas zawodzi, warto w tym miejscu sięgnąć po papier, klej, nożyczki i... eksperymentować (rys. 12 i 13).



Rys. 13. Po rozcięciu powstają dwie zaplecione wstęgi – krótsza jest powtórzeniem wyjściowej, dłuższa zaś jest skręcona o 360° i jest powierzchnią dwustronną.

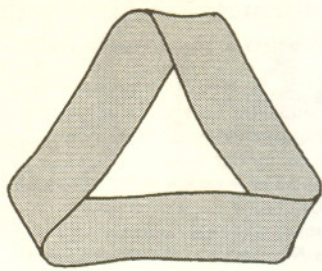
Prezentując wstęgę Möbiusa można jeszcze wspomnieć o jej modelu zaproponowanym przez B. Tuckermanna: wstęga składa się z sześciu ścian ośmiościanu i czterech trójkątów prostokątnych, jej brzegiem jest trójkąt ABC (rys. 14).



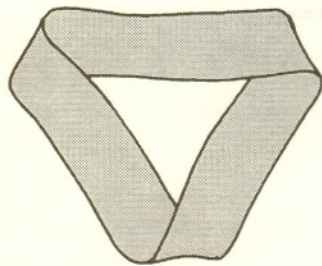
Rys. 14. Wstęga Möbiusa o płaskim brzegu.

Oczywiście, wstęga Möbiusa nie jest jedyną powierzchnią jednostronną, której model możemy otrzymać z paska papieru. Aby się o tym przekonać, trzeba wykonać model powierzchni wyobrażonej na rysunku 15 (pasek papieru skręcamy o $3 \cdot 180^\circ$ w lewo lub w prawo) i zobaczyć, czym różni się od modelu „klasycznej” wstęgi Möbiusa. Z tak uzyskanymi nowymi modelami powierzchni jednostronnych możemy wykonać operacje (i) i (ii).

Z punktu widzenia topologii powierzchnie z brzegiem możemy nie tylko podzielić na dwustronne i jednostronne. Możemy je jeszcze rozróżnić ze względu na liczbę krzywych brzegowych i ich wzajemne położenie. Wykonując niżej proponowane modele (nie jest to łatwe) przekonamy się o bogactwie takiego podziału dla powierzchni o co najwyżej dwóch brzegach (odpowiednie rysunki znajdują się na przedniej okładce):

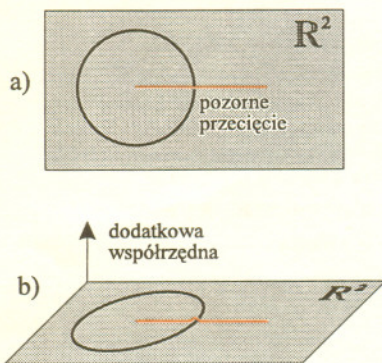


lustro



Rys. 15

- a) jednostronne powierzchnie z jednym brzegiem
 - (1) brzeg jest krzywą zamkniętą niezawężloną,
 - (2) brzeg jest krzywą zamkniętą zawężloną;
- b) dwustronne powierzchnie z jednym brzegiem
 - (3) brzeg jest krzywą zamkniętą niezawężloną,
 - (4) brzeg jest krzywą zamkniętą zawężloną;
- c) jednostronne powierzchnie z dwoma brzegami
 - (5) oba brzegi są krzywymi zamkniętymi niezawężlonymi, które nie są wzajemnie zaczepione,
 - (6) oba brzegi są krzywymi zamkniętymi niezawężlonymi, wzajemnie zaczepionymi,
 - (7) oba brzegi są krzywymi zamkniętymi zawężlonymi, które nie są wzajemnie zaczepione,
 - (8) oba brzegi są krzywymi zamkniętymi zawężlonymi, wzajemnie zaczepionymi,
 - (9) jeden brzeg jest krzywą zamkniętą niezawężloną, drugi krzywą zamkniętą zawężloną i nie są one wzajemnie zaczepione,
 - (10) jeden brzeg jest krzywą zamkniętą niezawężloną, drugi krzywą zamkniętą zawężloną i są one wzajemnie zaczepione;
- d) dwustronne powierzchnie z dwoma brzegami
 - (11) oba brzegi są krzywymi zamkniętymi niezawężlonymi, które nie są wzajemnie zaczepione,
 - (12) oba brzegi są krzywymi zamkniętymi niezawężlonymi, wzajemnie zaczepionymi,
 - (13) oba brzegi są krzywymi zamkniętymi zawężlonymi, które nie są wzajemnie zaczepione,
 - (14) oba brzegi są krzywymi zamkniętymi zawężlonymi, wzajemnie zaczepionymi,
 - (15) jeden brzeg jest krzywą zamkniętą niezawężloną, drugi krzywą zamkniętą zawężloną i obie krzywe nie są wzajemnie zaczepione,
 - (16) jeden brzeg jest krzywą zamkniętą niezawężloną, drugi krzywą zamkniętą zawężloną i obie są wzajemnie zaczepione.



Rys. 16

Dotychczas omawiane powierzchnie zamknięte (bez brzegu) były zawsze dwustronne. Naturalne jest więc pytanie o istnienie powierzchni zamkniętych, ale jednostronnych. Powierzchnię tego rodzaju opisał po raz pierwszy w 1874 roku F. Klein (1849–1925). Jej poglądowe przedstawienie jest trochę kłopotliwe, gdyż, podobnie jak zawężłonego okręgu nie można umieścić na płaszczyźnie (bo będą samoprzecięcia), tak *butelki Kleina* (patrz okładka – A(10)) nie można umieścić w przestrzeni trójwymiarowej. Możemy natomiast zaprezentować jej wyobrażenie w postaci powierzchni z pozornym samoprzecięciem. Aby zrozumieć, na czym ten trick polega, popatrzmy na rysunek 16. Rysunek 16a interpretowany w „normalny” sposób przedstawia podzbiór \mathbb{R}^2 złożony z okręgu i przecinającego go odcinka. Możemy jednak umówić się, że przecięcie się obu tych figur jest tylko czymś pozornym, spowodowanym „niedoskonałością środków wyrazu”, gdyż w rzeczywistości sytuacja wygląda tak jak na rysunku 16b.

Butelka Kleina, bo o niej będziemy teraz mówić, jest pewną powierzchnią umieszczoną w czterowymiarowej przestrzeni. Rysunek A(10) przedstawia jej trójwymiarowe wyobrażenie z pozornym samoprzecięciem. Rozetniemy ją, aby zobaczyć, jak ona wygląda wewnątrz (rys. B), następnie z obu części usuńmy pozorne samoprzecięcia. Po „wyprostowaniu” i „wygładzeniu” otrzymamy dwie wstęgi Möbiusa (rys. C). Cały ten proces możemy teraz odwrócić. Pokazuje to, że butelkę Kleina można otrzymać „sklejając” brzegami dwie wstęgi Möbiusa. Rysunki A, B i C znajdują się na tylnej okładce.

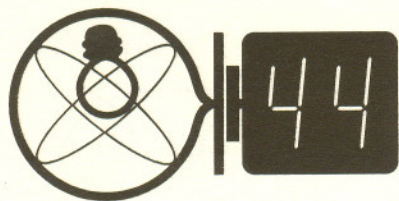
Eksperymentować możemy dalej – wytnijmy w sferze koło (i wyrzucmy je), a następnie połączmy brzeg tej dziury z brzegiem wstęgi Möbiusa. Otrzymamy... coś, czego znowu nie można narysować w przestrzeni trójwymiarowej. To *płaszczyzna rzutowa* stanowiąca model jednej z geometrii nieeuklidesowych – geometrii eliptycznej. Może warto poznać te zjawiska dokładniej i nie poprzestać na tym artykule, który bardziej przypomina „machanie rękami” niż precyzyjną matematykę.

Literatura

- [1] H.S.M. Coxeter, *Wstęp do geometrii dawnej i nowej*, PWN, Warszawa, 1967.
- [2] M.P. Do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [3] D. Hilbert, S. Cohn-Vossen, *Geometria poglądowa*, PWN, Warszawa, 1956.
- [4] A. Lelek, *Zbiory*, PZWS, Warszawa, 1966.
- [5] A.S. Parchomienko, *Co to jest linia*, PWN, Warszawa, 1961.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1995.



Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 2/1995
Przypominamy treść zadań:

193. Siły przyptywowe działające na Ziemię ze strony Księżyca powodują stopniowe spowalnianie obrotu Ziemi (wydłużanie dnia). Gdy w odległej przyszłości obrót Ziemi zsynchronizuje się z obiegiem Księżyca, pływy ustaną. Ile będzie wtedy wynosiła jednakoowa długość dnia i miesiąca, a ile – odległość Księżyca od Ziemi? Przyjmij, że moment bezwładności Ziemi jest równy $0,33 MR^2$ (pamiętajmy, że Ziemia nie jest jednorodną kulą – średnia gęstość jądra jest większa niż płaszczka i skorupy). Pozostałe niezbędne dane wzięć z tablic. Pominąć siły pływowe działające ze strony Słońca.

194. Dwa mikrofony umieszczono we wzajemnej odległości 0,5 m. Nietoperz leci w kierunku równoległym do prostej, na której leżą mikrofony i w danej chwili znajduje się w odległości 10 m od każdego z nich. Stwierdzono, że częstotliwość „pisku” nietoperza wynosi 100 kHz, a łączny sygnał (otrzymany z dodania sygnałów odbieranych przez oba mikrofony) pulsuje z częstotliwością 50 Hz. Z jaką prędkością leci nietoperz? Prędkość dźwięku w powietrzu wynosi 330 m/s.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 185 ($WT=2,60$) i 186 ($WT=3,60$)
z numeru 10/1994

Andrzej Nowogrodzki – Chocianów	42,88
Tomasz Wietecha – Tarnów	40,49
Andrzej Borowski – Aleksandrów K.	38,48
Aleksander Surma – Myszków	25,58
Artur Gawryszczak – Dubeczno	21,23

193. Wprowadźmy oznaczenia: $T_m = 27,32$ d – okres obiegu Księżyca wokół Ziemi (miesiąc gwiazdowy), $T_d = 23$ h 56 min 4 s = 0,9973 d – okres obrotu Ziemi (doba gwiazdowa), T' – szukany wspólny okres, $\omega_m = 2\pi/T_m$, $\omega_d = 2\pi/T_d$, $\omega' = 2\pi/T'$, M_Z – masa Ziemi, M_K – masa Księżyca, $n = M_Z/M_K = 81,51$, $R = 384$ 400 km – średnia odległość Księżyca od Ziemi, R' – ta odległość po ustaniu pływów, $R_S = R \frac{1}{n+1}$ – odległość środka masy układu Ziemia-Księżyc od środka Ziemi, R_Z – promień Ziemi, $r_Z = R_Z/R = 0,01657$, R_K – promień Księżyca, $r_K = R_K/R = 0,0045$, $r' = R'/R$.

Zadanie sprowadza się do wykorzystania zasady zachowania momentu pędu. Początkowy moment pędu jest opisany wzorem

$$K = \omega_m(M_Z R_S^2 + M_K(R - R_S)^2 + 0,33M_K R_K^2) + \omega_d \cdot 0,33M_Z R_Z^2,$$

gdzie dla Księżyca przyjęliśmy ten sam współczynnik 0,33 w momencie bezwładności co dla Ziemi (praktycznie nie ma to znaczenia, gdyż ten składnik momentu pędu jest bardzo mały). Zauważmy, że Księżyc jest zwrócony do Ziemi stale tą samą stroną, czyli jego obrót wokół własnej osi jest zsynchronizowany z obiegiem wokół Ziemi. Jeśli tak będzie także w stanie końcowym (znów założenie bez istotnego znaczenia), to wzór końcowy ma postać

$$K = \omega'(M_Z R_S^2 + 0,33M_Z R_Z^2 + M_K(R' - R_S)^2 + 0,33M_K R_K^2).$$

Przekształcając tożsamość $K_{pocz} = K_{końc}$ dochodzimy do równania

$$\frac{1}{T_m} \left(1 + 0,33r_K^2 \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) + \frac{1}{T_d} \cdot 0,33r_Z^2(n+1) = \frac{1}{T'} (r'^2 + 0,33(n+1)(r_Z^2 + r_K^2/n)),$$

a po podstawieniu danych liczbowych

$$0,04410 = \frac{1}{T'} (r'^2 + 0,00748).$$

Według trzeciego prawa Keplera $R^3/R'^3 = T_m^2/T'^2$, czyli $r'^2 = (T'/T_m)^{4/3} = 0,01215(T')^{4/3}$. Rozwiązując numerycznie równanie

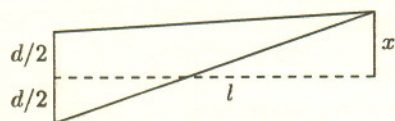
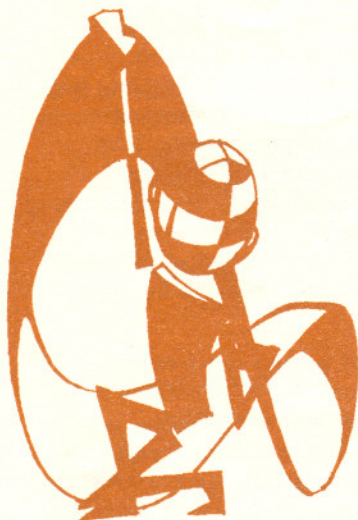
$$0,04410 = 0,01215(T')^{1/3} + 0,00748(T')^{-1}$$

znajdujemy $T' = 47,3$ d, skąd $r' = 1,44$ (tyle razy większy się promień orbity Księżyca). Istnieje też drugie rozwiązanie ($T' = 0,2024$ d, $r' = 0,038$), lecz wymagałoby ono dostarczenia energii do układu, podczas gdy pływy energię odbierają.

194. Sygnały odbierane przez mikrofony są przesunięte względem siebie w fazie, a różnica faz wynika z różnicy dróg od nietoperza do jednego i drugiego mikrofonu. Maksimum łącznego sygnału przypada wtedy, gdy różnica dróg jest całkowitą wielokrotnością długości fali λ . Jeśli oznaczymy odległość między mikrofonami przez d , odległość od nich do prostej, wzdłuż której leci nietoperz, przez l , a przesunięcie nietoperza przez x , to różnica dróg jest dana wyrażeniem (zob. rys.)

$$\sqrt{l^2 + (x + d/2)^2} - \sqrt{l^2 + (x - d/2)^2} \approx \frac{xd}{l}.$$

Długość fali jest równa $\lambda = \frac{330}{100} \left[\frac{\text{m/s}}{\text{kHz}} \right] = 3,3$ mm. Widzimy, że w ciągu 1/50 s nietoperz przelatuje odcinek $l\lambda/d = 66$ mm, zatem jego prędkość wynosi 3,3 m/s.



⊗ $\sqrt{\$!} = 44$

Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 285 (WT=3,29) i 286 (WT=1,76)
z numeru 9/1994

Krzysztof Jedziniak – Katowice 44,82
Waldemar Pompe – Warszawa 43,89
Miroslaw Matłega – Skoczów 43,59
Adam Czornik – Bytom 33,01

Piętnasty Weteran **Klubu 44 M**:
pan Jedziniak!



Rozwiązanie zadania M 743. Nie, ponieważ torus jest powierzchnią bez brzegu (tzn. otoczenie każdego punktu przypomina płaszczyznę). Jeśli przez pewien punkt wstęgi prowadzimy cięcie, to jego otoczenie nie przypomina płaszczyzny, tylko półpłaszczyznę (z brzegiem). Ogólnie: z powierzchni z brzegiem nie można wyciąć powierzchni bez brzegu.

Nie, ponieważ mrówka mogłaby przejść po wstędze Möbiusa z dowolnego punktu do tego samego punktu „po drugiej stronie” wstęgi, czyli z wnętrza torusa mogłaby wydostać się na zewnątrz, co jest niemożliwe. Ogólnie: z powierzchni orientowalnej (tj. dwustronnej) nie można wyciąć powierzchni nieorientowalnej (tj. jednostronnej); można natomiast z powierzchni jednostronnej wyciąć dwustronną, o czym każdy może się przekonać np. tnąc w poprzek wstęgę Möbiusa.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/1995

Przypominamy treść zadań:

295. Dana jest liczba naturalna n . Wyznaczyć najmniejszą liczbę m o następującej własności: z każdego m -elementowego podzbioru zbioru $\{1, 2, \dots, 3n\}$ można wybrać liczby a, b , dla których $n < a - b < 2n$.

296. Wewnątrz trójkąta ABC znajduje się punkt P . Jego odległości od wierzchołków A, B, C równe są odpowiednio R_a, R_b, R_c , a od prostych BC, CA, AB – odpowiednio r_a, r_b, r_c . Dowieść, że

$$8(\sqrt{R_b R_c} + r_a)(\sqrt{R_c R_a} + r_b)(\sqrt{R_a R_b} + r_c) \leq 27 R_a R_b R_c.$$

Kiedy zachodzi równość?

295. Wykażemy, że najmniejszą liczbą o żądanej własności jest $n + 2$.

Niech M będzie dowolnym $(n + 2)$ -elementowym podzbiorem zbioru $\{1, 2, \dots, 3n\}$. Jeśli c jest największą liczbą w tym zbiorze, to zwiększając wszystkie liczby ze zbioru M o jednakowy składnik $3n - c$ otrzymujemy $(n + 2)$ -elementowy zbiór M' , zawarty w $\{1, 2, \dots, 3n\}$ i zawierający liczbę $3n$. Zbiór M zawiera taką parę liczb a, b , że $n < a - b < 2n$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór M' zawiera taką parę. Zatem wystarczy ograniczyć uwagę do zbiorów $(n + 2)$ -elementowych, których największym elementem jest liczba $3n$. Niech M będzie takim zbiorem.

Jeżeli zbiór M zawiera co najmniej jedną liczbę b spełniającą nierówności $n < b < 2n$, to wystarczy przyjąć $a = 3n$: różnica $a - b$ jest wtedy większa od n , a mniejsza od $2n$.

Jeżeli zbiór M nie zawiera takiej liczby, to wówczas zbiór $M \setminus \{3n\}$ jest podzbiorem sumy $A_1 \cup \dots \cup A_n$ zbiorów dwuelementowych

$$A_1 = \{1, 2n\}, \quad A_2 = \{2, 2n + 1\}, \quad \dots, \quad A_n = \{n, 3n - 1\}.$$

Zbiór $M \setminus \{3n\}$ ma $n + 1$ elementów, więc jego część wspólna z co najmniej jednym zbiorem A_k jest zbiorem dwuelementowym. Oznaczając elementy zbioru A_k przez a i b mamy szukaną parę: $a - b = 2n - 1$.

Zatem liczba $n + 2$ ma własność, o którą chodzi. Liczba $n + 1$ tej własności już nie ma, bowiem $(n + 1)$ -elementowy zbiór $\{1, \dots, n\} \cup \{3n\}$ nie zawiera pary liczb a, b , dla których $n < a - b < 2n$.

296. Niech Q będzie rzutem punktu P na prostą BC . Oznaczmy miary kątów BPC, CPA, APB, BPQ, CPQ odpowiednio przez $2\alpha, 2\beta, 2\gamma, \varphi, \psi$. Jeśli Q jest punktem odcinka BC , to $2\alpha = \varphi + \psi$, a jeśli Q leży poza tym odcinkiem, to $2\alpha = |\varphi - \psi|$. W każdym przypadku mamy nierówność

$$\begin{aligned} \frac{r_a}{\sqrt{R_b R_c}} &= \sqrt{\frac{r_a}{R_b} \cdot \frac{r_a}{R_c}} = \sqrt{\cos \varphi \cdot \cos \psi} \leq \\ &\leq \frac{\cos \varphi + \cos \psi}{2} = \cos \frac{\varphi + \psi}{2} \leq \cos \alpha, \end{aligned}$$

i analogicznie

$$\frac{r_b}{\sqrt{R_c R_a}} \leq \cos \beta, \quad \frac{r_c}{\sqrt{R_a R_b}} \leq \cos \gamma.$$

Ponieważ zaś $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ ($\alpha, \beta, \gamma < \pi/2$), zatem z wklęsłości funkcji $\cos x$ w przedziale $(0; \pi/2)$ dostajemy oszacowanie

$$\frac{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{3} \leq \cos \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} = \frac{1}{2}.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} &\frac{(\sqrt{R_b R_c} + r_a)(\sqrt{R_c R_a} + r_b)(\sqrt{R_a R_b} + r_c)}{R_a R_b R_c} \\ &= \left(1 + \frac{r_a}{\sqrt{R_b R_c}}\right) \left(1 + \frac{r_b}{\sqrt{R_c R_a}}\right) \left(1 + \frac{r_c}{\sqrt{R_a R_b}}\right) \leq \\ &\leq (1 + \cos \alpha)(1 + \cos \beta)(1 + \cos \gamma) \leq \\ &\leq \left(\frac{3 + \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{3}\right)^3 \leq \left(\frac{3}{2}\right)^3. \end{aligned}$$

Równość zachodzi tylko wtedy, gdy $\alpha = \beta = \gamma = \pi/3$ oraz gdy w każdym z trójkątów BPC, CPA, APB wysokość poprowadzona z wierzchołka P jest jednocześnie dwusieczną odpowiedniego kąta – to znaczy, gdy trójkąt ABC jest równoboczny, a punkt P jest jego środkiem ciężkości.



Niebo przez lornetkę

Rozwiązanie zadania F 407.

Aby wyjaśnić ten „paradoks”, przypomnijmy, jak przebiega proces termicznej rozszerzalności ciał. Każda infinitezalna zmiana temperatury dT powoduje pewną, proporcjonalną do dT oraz do początkowej długości pręta l , zmianę długości pręta o $dl = \alpha \cdot l \cdot dT$, gdzie α jest współczynnikiem rozszerzalności termicznej. Jeśli chcemy zmienić temperaturę o taką wielkość skończoną ΔT , aby długość pręta zmieniła się z L_0 do L , to musimy zsumować kolejne procesy

$$\int_{L_0}^L dl = \int_{T_0}^{T_0+\Delta T} l \cdot \alpha \cdot dT.$$

Stąd otrzymujemy

$$\int_{L_0}^L \frac{dl}{l} = \int_{T_0}^{T_0+\Delta T} \alpha dT,$$

czyli na podstawie elementarnego rachunku dostajemy

$$\ln\left(\frac{L}{L_0}\right) = \alpha \cdot \Delta T,$$

co możemy zapisać jako

$$L = L_0 e^{\alpha \cdot \Delta T}.$$

Równanie to jest „symetryczne” względem zmian temperatur, tj. $L = L_0 e^{\alpha \cdot \Delta T}$ oraz $L_0 = L e^{-\alpha \cdot \Delta T}$ dają $L = (L e^{-\alpha \cdot \Delta T}) e^{\alpha \cdot \Delta T} = L$ i „paradoks” znika.

Natomiast równanie $L = L_0(1 + \alpha \cdot \Delta T)$ jest uzyskane przez przybliżenie pełnego równania. Takie przybliżenie nie jest już symetryczne ze względu na zmianę temperatury, prowadzi więc do „paradoksu”. Dlatego wzór ten można stosować tylko dla małych różnic temperatur, a źródłem paradoksu jest zastosowanie go do dużych różnic.

Czerwiec to najkrótsze noce – gwiazdziste niebo widzimy więc dopiero późnym wieczorem, w dodatku nigdy tak ciemne, jak np. w zimie. Bowiem w naszej szerokości geograficznej (dla Warszawy wynosi ona 52°) w czerwcu nigdy nie zapada tzw. noc astronomiczna. Początek nocy astronomicznej to moment, gdy Słońce znajdzie się 18° pod horyzontem. Praktyka mówi, że od tej chwili niebo jest na tyle ciemne, że można swobodnie prowadzić obserwacje astronomiczne. Tymczasem w dniu przesilenia letniego (około 21 czerwca) Słońce mając deklinację $23,5^\circ$ o północy znajduje się $90^\circ - 52^\circ - 23,5^\circ = 14,5^\circ$ pod horyzontem (w każdym razie w Warszawie). W szerokościach jeszcze wyższych panują wtedy tzw. białe noce, a w szerokościach powyżej $66,5^\circ$ nawet dzień polarny, tzn. Słońce przez dłuższy czas w ogóle nie zapada pod horyzont. Nawiasem mówiąc istnieją jeszcze dwa rodzaje „nocy”. Mianowicie mówimy, że zapada noc cywilna (kończy się zmierzch cywilny), gdy Słońce osiąga wysokość 6° pod horyzontem – od tej chwili zdecydowanie trzeba używać oświetlenia w domu. Wreszcie koniec zmierzchu morskiego to chwila, gdy Słońce osiągnie 12° pod horyzontem – na niebie stają się wtedy widoczne najjaśniejsze gwiazdy i można na podstawie ich obserwacji prowadzić nawigację.

Tak czy inaczej, w czerwcową noc na niezbyt ciemnym niebie widzimy w kierunku południowym obszar nieba wyjątkowo bogaty w gromady kuliste. Są to gromady liczące typowo po sto tysięcy gwiazd w obszarze o promieniu rzędu 10 pc. Są to więc obiekty wyjątkowo gęsto wypełnione gwiazdami, o bardzo regularnym, niemal kulistym kształcie – stąd nazwa. Same gromady kuliste otaczają Galaktykę tak, że tworzą wokół niej również system o symetrii kulistej. Tworzące je gwiazdy są najstarsze w Galaktyce, zbudowane są niemal wyłącznie z wodoru i helu, co interpretuje się właśnie w ten sposób, że widocznie powstały z pierwotnej materii, w której zawartość pierwiastków cięższych była znikoma. Bowiem według naszej aktualnej wiedzy większość pierwiastków cięższych od helu została wyprodukowana w starych gwiazdach, które wybuchając jako supernowe wzbogaciły materię międzygwiazdową w te pierwiastki, a z tej materii powstały nowe pokolenia gwiazd o bogatszym składzie chemicznym.

Najjaśniejszą gromadą kulistą na naszym niebie jest leżąca w Herkulesie gromada M13 o jasności 6,1 mag, a więc przy dobrej pogodzie widoczna nawet gołym okiem. Odległa jest od nas o 6500 pc. Dwie inne, słabsze o pół wielkości gwiazdowej – je już lepiej oglądać przez lornetkę – M10 i M12, leżą w Wężowniku, a od nas odległe są mniej więcej tyle samo. Jeszcze jedna jasna gromada kulista, M5, leży w Wężu. Nie wyczerpuje to całej listy gromad z tego obszaru, pozostałe są jednak znacznie słabsze. Gromady kuliste są widoczne też na zdjęciach innych galaktyk; na ich podstawie można naocznie przekonać się, że istotnie otaczają one swoje galaktyki jednakowo „ze wszystkich stron”. Sama budowa i ewolucja gromad kulistych jest do dziś dosyć tajemnicza, w szczególności podejrzewa się obecności czarnych dziur w ich centrach, ale to już problem nie dla lornetek.

Tomasz KWAST



Rozwiązanie zadania F 408. W wyniku skoku energia potencjalna skoczka zmienia się na energię potencjalną elastycznej gumy. Jeśli więc użyjemy gumy o długości L i zażądamy, aby skok miał głębokość H , to z zasady zachowania energii mamy

$$mgH = \frac{K}{2L}(H-L)^2,$$

gdzie m jest sumą mas skoczka i worka, a K to iloczyn modułu Younga i przekroju poprzecznego gumy. Otrzymujemy stąd

$$L_{\pm} = \left(\frac{mg}{K} + 1 \pm \left(\left(\frac{mg}{K} + 1 \right)^2 - 1 \right)^{1/2} \right) \cdot H.$$

Ponieważ $H > L$, więc fizycznie poprawne jest rozwiązanie L_{-} . Długość liny powinna więc wynosić $L \approx 0,27 \cdot H = 5,4$ m.

Po upuszczeniu worka z piaskiem cała energia zgromadzona w linie zamieni się na energię potencjalną ciężkości skoczka. Dostajemy więc

$$(m_s + m_w)gH = m_s g H',$$

a stąd

$$H' = \left(1 + \frac{m_w}{m_s} \right) H = 24 \text{ m}.$$

Skoczek wzniesie się więc 4 m ponad poziom, z którego wystartował. Maksymalnego przyspieszenia doświadczy on w dolnym położeniu, tuż po upuszczeniu worka. Mamy wtedy

$$a_{\max} = \frac{F_{\max} - m_s g}{m_s} = \frac{K(H-L)}{m_s L} - g = 23,8 \text{ m/s}^2.$$

Spitalfields Day 1994

London Mathematical Society ma ponad 100 lat. Wśród organizowanych przezeń imprez jest doroczny *Spitalfields Day*, który odbywa się w *Mathematical Research Centre* przy *University of Warwick* lub w Instytucie Newtona w Cambridge (*Spitalfields* było poprzednikiem *London Mathematical Society*). Dzień wypełnia seria wykładów, przedstawianych przez wybitnych matematyków, przedzielona lunchem (jeśli spotkanie odbywa się w Warwick, to wystawnym). Kolejny *Spitalfields Day* odbył się w grudniu 1994 r. w Cambridge; wśród słuchaczy był przedstawiciel redakcji *EPSILONA*, wykładom miał okazję przysłuchiwać się Marcin Poźniak.

Odczyty wygłosili Sir Michael Atiyah, Peter Kronheimer, Ron Stern i James Eells. Tematyka była zdominowana przez geometrię rozmaitości czterowymiarowych. Wspomnijmy tu o jednym ciekawym motywie, który pojawił się w wykładzie M. Atiyaha (jednego z najwybitniejszych żyjących matematyków, laureata Medalu Fieldsa w 1966 roku). Mowa była o wpływie kwantowej teorii pola na geometrię i rezultatach Edwarda Wittena.

Fizyka XX wieku kilkakrotnie stymulowała rozwój matematyki: ogólna teoria względności wpłynęła na kształt geometrii, mechanika kwantowa dała przyczynek do rozwoju teorii operatorów, teoria cząstek elementarnych – teorii reprezentacji. Za każdym razem teoria fizyczna była uformowana, a rozwój matematyczny wynikał z potrzeby zbudowania odpowiedniego formalizmu. Tym razem jest inaczej. Kwantowa teoria pola nie jest jeszcze ogólnie uznaną teorią fizyczną (charakterystyczne, że Edward Witten jest laureatem Medalu Fieldsa, a nie Nagrody Nobla z fizyki) – są to raczej dość nieprecyzyjne spekulacje o charakterze matematycznym. Te „fizyczne” rozważania prowadzą jednakże do całkiem konkretnych i dość nieoczekiwanych konkluzji matematycznych. Odgadnięte „wyniki” matematycy udowadniają następnie klasycznymi metodami (m.in. geometrii algebraicznej i geometrii różniczkowej), choć nie sposób dobrze pojąć dowodów bez uwzględnienia fizycznych idei, które za dowodami stoją. Tak więc matematyka pośrednio „potwierdza” fizykę; jeśli bowiem kwantowa teoria pola nie ma fizycznego sensu, to dlaczego daje trafne przewidywania w matematyce?

I w tym roku nie zapominamy o Dniu Dziecka. Wszystkim tym, którzy się czują (lub czuli) niedocenieni w szkole, chcielibyśmy polecić opowiadanie Roberta Gravesa (znanego w Polsce przede wszystkim z książki „Ja, Klaudiusz” i „Klaudiusz, bóg” – druga książka, „Claudius the God”, z nieznanym nam przyczyn ukazała się w Polsce pod tytułem „Klaudiusz i Messalina”). Oto fragment opowiadania, zatytułowanego „Wstrętny pan Gunn” (wraz z innymi, również znakomitymi, wydane zostało w Polsce w tomie „Opowiadania” w roku 1975 nakładem wydawnictwa Książka i Wiedza, przełożyła Zofia Kierszys).

... pan Gunn dał nam do rozwiązania zadanie z podręcznika „Arytmetyka dla szkół przygotowawczych” Hilderbranda, polegające na tym, że trzeba było obliczyć pierwiastek z kwadratu sumy dwóch bardzo długich ułamków dziesiętnych, podzielonej (jak na złość) przez sumę dwóch bardzo złożonych zwykłych ułamków. Po chwili wszyscy mozolnie coś gryzłoli, tylko F.F. Smilley siedział roztargniony, przecierał okulary i patrzył przez okno.

Pan Gunn podniósł na chwilę wzrok znad listu, który pisał, i zapytał złośliwie:

- Czerpiesz natchnienie z tej dalekiej wieżyczki kościelnej, Smilley?
- Nie, panie profesorze. Przecieram okulary.
- A to dlaczego, proszę?
- Zapaćkały się marmoladą, panie profesorze.
- Nie odszczekuj, chłopcze. Dlaczego nie rozwiązujesz zadania?
- Już napisałem rozwiązanie, panie profesorze.
- Pokaż swój zeszyt! Ach, tak, rozwiązanie napisałeś. Sir Isaacu Newtonie, mój wielce oświecony i pomysłowy przyjacielu – szarpnął Smilleya za te krótkie włosy – ale gdzie obliczenia, którymi do tego doszedłeś?
- Nigdzie, panie profesorze. To po prostu samo mi przyszło.
- Samo ci przyszło, F.F. Smilley, chłopcze? Chcesz powiedzieć, że spróbowałeś odgadnąć na chybił trafił?
- Nie, panie profesorze, po prostu zastanowiłem się i zrozumiałem, że rozwiązanie może być tylko takie.
- Ha! Dziwne fizyczne zjawisko! Ale muszę zażądać dowodu, żeś nie zajrzał do rozwiązań podanych na końcu podręcznika.
- No, potem zajrzałem, panie profesorze.
- Prawda powoli wychodzi na jaw.
- Ale w rozwiązaniu z podręcznika jest błąd, panie profesorze. Ostatnie dwie cyfry powinny być trzydzieści pięć, a nie pięćdziesiąt trzy.
- Coraz ciekawsze! Oto chłopiec w trzeciej klasie naszej szkoły, który wie lepiej niż profesor Hilderbrand, wybitny matematyk w Cambridge.
- Nie, panie profesorze, ja myślę, że to błąd drukarski.
- No i patrzcie, znalazł się stary przyjaciel profesora Hilderbranda. Jakoś bardzo gorąco bronisz go.
- Nie, panie profesorze, poznałem pana Hilderbranda osobiście, ale niezbyt mi się spodobał.

A jak się to skończyło? Tego tu nie zdradzimy, polecamy książkę.

Z kolei (by uniknąć zarzutu krytykowania nauczycieli) tym nauczycielom, którzy czują się niedoceniani przez władze zwierzchnie, chcemy zadedykować autentyczną uwagę, jaką pani dyrektor szkoły podstawowej (nie matematyczka) wpisała w oburzeniem po wizytacji, jako komentarz dotyczący prowadzenia lekcji przez wizytowaną nauczycielkę matematyki: „Jak można mówić uczniom, że kwadrat jest prostokątem!”