

## SPIS TREŚCI

### NUMERU 5(252)

Kwantowy ołówek <i>Stanisław Mrówczyński</i>	str. 1
Radiowęglowy zegar odmierza tysiąclecia <i>Maria Kaczmarczyk</i>	str. 1
Całka Gaussa	str. 3
Ankiety ciąg dalszy	str. 4
Drobiazgi	str. 6
Empedokles i Darwin	str. 7
Rysujemy choinkę	str. 8
Zadania	str. 9
Mała Delta	str.10
Europejski Konkurs Prac Młodych Naukowców	str.11
Kącik Olimpijski	str.12
Klub 44	str.14
Niebo przez lornetkę	str.16
Epsilon	str.17

### W następnym numerze:

Kilka słów o powierzchniach

Okladkę i ilustracje wykonał  
*Bernard BADZIOCH*

Wydawca:  
Uniwersytet Warszawski

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula  
Bogdan Cichocki  
Roman Duda  
Jan A. Gaj  
Tomasz Hofmokl  
Marta Kicińska-Habior  
– przewodnicząca  
Krzysztof Maślanka  
Andrzej Mąkowski  
– wiceprzewodniczący  
Andrzej Pelczar  
Zbigniew Płochocki  
Zdzisław Pogoda  
Michał Różycka  
Konrad Rudnicki  
Zbigniew Semadeni  
Grzegorz Sitarski  
Mieczysław Subotowicz  
Andrzej Szymacha  
Andrzej Woszczyk  
Wacław Zawadowski

Redaguje kolegium w składzie:

Krzysztof Biesaga  
Jan Kalinowski – z-ca red. nac.  
Krystyna Kordos – sekr. red.  
Marek Kordos – red. nac.  
Tomasz Kwast  
Krzysztof Rejmer  
Paweł Strzelecki  
Joanna Udalska

Adres Redakcji:

ul. Smyczkowa 5/7  
02-678 Warszawa  
tel. 43-02-43 wewn. 21

PAWELST@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w  
Drukarni Naukowo-Technicznej  
w Warszawie, ul. Mińska 65

Skład systemem T<sub>E</sub>X wykonała Redakcja.

### WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 1995 roku wynosi 1 zł 50 gr. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru wynosi w 1995 r. 3 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136

### WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na III kwartał 1995 r. wynosi 4 zł 50 gr.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
  - na teren kraju
  - jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób,
  - na zagranicę
  - „Ruch” S.A. Oddział Warszawa, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – **dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty**, z wyjątkiem zlecenia dostawy pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni pokrywa prenumerator.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
  - na kraj i zagranicę – do 20 XI na I kwartał roku następnego
  - do 20 II na II kwartał
  - do 20 V na III kwartał
  - do 20 VIII na IV kwartał.

Cena 1 egzemplarza 1 zł 50 gr, 15 000 zł



# Kwantowy ołówek

Stanisław MRÓWCZYŃSKI

Postawiony pionowo ołówek niemal natychmiast się wywraca, jeśli tylko przestajemy go podtrzymywać. Dzieje się tak dlatego, że nie umiemy go ustawić dokładnie pionowo bądź odrywając rękę nadajemy mu niewielki pęd. Zdaje się jednak, że gdyby pokonać te „techniczne” trudności, ołówek mógłby pozostawać w pionie w nieskończoność. Tak przynajmniej orzeka fizyka klasyczna, o czym jeszcze poniżej. Zakładam oczywiście, że ołówek jest idealnie osiowo symetryczny i odizolowany od wszelkich zaburzeń zewnętrznych.

Mechanika kwantowa, jak pamiętamy, wyklucza, dzięki zasadzie nieoznaczoności, możliwość jednoczesnego określenia położenia i pędu obiektu z dowolną dokładnością. A zatem, jeśli nawet ustawimy ołówek precyzyjnie pionowo, jego pęd będzie się wahał wokół zera, co spowoduje upadek. Zachodzi pytanie, jak długo ołówek może utrzymać się w pionie pomimo kwantowych fluktuacji pędu i położenia.

Jako model ołówka rozważmy kulkę o masie  $m$  umocowaną na sztywnym nieważkim ramieniu o długości  $l$ . Analizę ograniczymy do sytuacji, gdy kąt wychylenia naszego odwróconego wahadła jest niewielki. Wówczas siła działająca na kulkę stycznie do okręgu, po którym się ona porusza, wynosi  $mgx/l$ , gdzie  $x$  jest wychyleniem od pionu,  $g$  zaś przyspieszeniem ziemskim. Stosując drugą zasadę dynamiki Newtona otrzymujemy równanie ruchu

$$(1) \quad \frac{d^2}{dt^2}x(t) - \omega^2 x(t) = 0,$$

w którym  $t$  jest, oczywiście, czasem;  $\omega = \sqrt{g/l}$ . Równanie to różni się jedynie znakiem od równania oscylatora harmonicznego, w którym  $\omega$  pełni rolę częstości. Jeśli warunki początkowe przyjąć w postaci

$$x(0) = x_0, \quad \frac{d}{dt}x(0) = v_0,$$

rozwiązanie równania (1) zapiszemy za pomocą hiperbolicznego sinususa i cosinusa jako

$$x(t) = x_0 \operatorname{ch} \omega t + \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sh} \omega t.$$

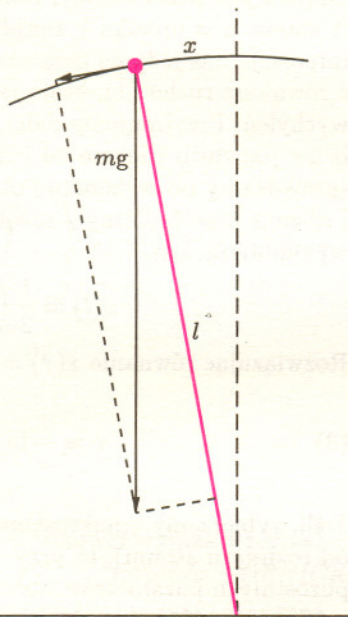
Sinus i cosinus hiperboliczny definiuje się następująco:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Z definicji natychmiast wynika, że

$$\frac{d}{dz} \operatorname{sh} z = \operatorname{ch} z, \quad \frac{d}{dz} \operatorname{ch} z = \operatorname{sh} z.$$

Zauważmy również, że dla  $z \gg 1$  mamy  $\operatorname{sh} z \approx \operatorname{ch} z \approx e^z/2$ .

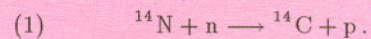


# Radiowęglowy zegar odmierza tysiąclecia

Maria KACZMARCZYK

W tkanki żywego organizmu wbudowany jest niezwykle zegar, który może odmierzać tysiąclecia. Rozpoczyna on swój bieg w chwili, gdy tkanki obumierają. Nie wymaga on nakręcania ani zasilania z baterii. Jest to zegar radiowęglowy. Odkrył go amerykański chemik, W.F. Libby, uhonorowany w 1960 r. Nagrodą Nobla.

W latach 1945–1955 Libby zaproponował i opracował metodę absolutnego datowania znalezisk wykopaliskowych o pochodzeniu organicznym. Głównym składnikiem takich przedmiotów jest węgiel. W próbce węgla naturalnego stabilny izotop  $^{12}\text{C}$  stanowi 98,89% jej masy. Drugi stabilny izotop,  $^{13}\text{C}$ , występuje w ilości 1,11%. W zawierających węgiel związkach organicznych pochodzenia roślinnego znajdują się śladowe ilości promieniotwórczego izotopu węgla  $^{14}\text{C}$ . Jego okres połowicznego zaniku wynosi 5730 lat. Izotop ten jest wytwarzany w wysokich warstwach atmosfery w reakcji typu neutron-proton w atmosferycznym azocie



Neutrony wywołujące tę reakcję są wytwarzane w atmosferze przez promieniowanie kosmiczne. Wytworzone jądra  $^{14}\text{C}$  rozpadają się przez emisję cząstek  $\beta^-$  i antyneutrino przekształcając się w jądra azotu  $^{14}\text{N}$ :



Atomy węgla łatwo łączą się z tlenem atmosfery w dwutlenek węgla, który jest przyswajany przez rośliny w procesie fotosyntezy. Rośliny oraz zwierzęta i ludzie spożywając pokarmy roślinne lub mięso roślinożernych zwierząt przyswajają wszystkie izotopy węgla wraz z promieniotwórczym  $^{14}\text{C}$ . Libby zauważył, że zachodzące w ciągu milionów lat w atmosferze ziemskiej reakcje jądrowe  $^{14}\text{N}(n,p)^{14}\text{C}$  i jednoczesny rozpad wytworzonych radioaktywnych jąder węgla  $^{14}\text{C}$  prowadzą do ustalenia się równowagi, w której szybkości zachodzenia obu procesów stają się jednakowe. W wyniku tego przy niezmiennym natężeniu promieniowania kosmicznego



ustala się także względna zawartość  $^{14}\text{C}$  w atmosferze, a co za tym idzie – procentowa zawartość atomów  $^{14}\text{C}$  w węglu z żywych organizmów współczesnych, jak i żyjących tysiące lat temu jest praktycznie taka sama. Jest ona równa około  $10^{-10}\%$ . Oznacza to, że na bilion atomów węgla żywej tkanki średnio występuje jeden atom  $^{14}\text{C}$ . W organizmach, które obumarły, naturalna wymiana węgla ustaje i zawartość atomów  $^{14}\text{C}$  maleje nieodwracalnie w wyniku ich rozpadu promieniotwórczego. Na przykład, po upływie okresu równego czasowi połowicznego zaniku ( $T_{1/2}$ ), równego 5730 lat, liczba ta zmniejsza się o połowę. Po upływie 50 tys. lat staje się ona już około 1000 razy mniejsza. Metoda radiowęglowego datowania pozostałości organicznych opiera się na bardzo prostej statystycznej prawidłowości opisującej, w jaki sposób zmniejsza się z biegiem czasu liczba atomów promieniotwórczych w izolowanej próbce. Jeśli w chwili początkowej liczba atomów izotopu promieniotwórczego wynosi  $N_0$ , a po upływie czasu  $t$  jest ona równa  $N$ , to wymieniona prawidłowość ma następującą postać matematyczną

$$(3) \quad N = N_0 \cdot 2^{-t/T_{1/2}}$$

Biorąc pod uwagę to, że aktywność, to znaczy liczba rozpadów promieniotwórczych w jednostce czasu, badanej próbki  $A$  jest proporcjonalna do liczby atomów pierwiastka promieniotwórczego  $N$ , tj.  $A = \lambda \cdot N$ , gdzie  $\lambda$  jest stałą rozpadu związaną z czasem połowicznego zaniku wzorem  $\lambda = \ln 2/T_{1/2}$ , równanie (3) można zapisać w równoważnej postaci

$$(4) \quad A = A_0 \cdot 2^{-t/T_{1/2}}$$

Pomiar aktywności  $^{14}\text{C}$  próbki archeologicznej pochodzenia organicznego pozwala wyznaczyć wiek próbki, a ściślej mówiąc – liczbę lat, które upłynęły od chwili obumarcia organizmu. Aktywność  $A_0$  jest równa aktywności zmierzonej dla żywego obecnie organizmu, np. drzewa ściętego przed chwilą dla dokonania pomiarów. Na przykład, próbka o zawartości 1 grama węgla zawiera  $5,014 \cdot 10^{22}$  wszystkich atomów węgla, a w tym jest  $N_0 = 5,014 \cdot 10^{10}$  atomów węgla  $^{14}\text{C}$ . Wobec tego, że stała rozpadu dla  $^{14}\text{C}$  wynosi  $\lambda = 3,83 \cdot 10^{-12} \text{ s}^{-1}$ , aktywność jest równa  $A_0 = \lambda N_0 = 11,5$  rozpadów na minutę. Wiek znaleziska można określić przez pomiar aktywności próbek organicznych lub skamielin pobranych w wykopaliskach, a więc ze szczątków organizmów lub tkanek, które od wielu lat przestały pobierać węgiel z otoczenia. Wartość tę oblicza się z równania

$$(5) \quad t = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \cdot \ln \frac{A_0}{A(t)}$$

Dla  $x_0 = v_0 = 0$  mamy  $x(t) = 0$ , a zatem odwrócone wahadło pozostaje w spoczynku. Tyle mechanika klasyczna. Jak już jednak wspomniałem, taki wybór warunków początkowych przeczy kwantowej zasadzie nieoznaczoności. Jeśli położenie określone jest z dokładnością  $\Delta x$ , to pęd jedynie z dokładnością

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{\Delta x},$$

gdzie  $\hbar$  jest stałą Plancka.

Pełna kwantowo-mechaniczna analiza ruchu odwróconego wahadła jest bardzo skomplikowana. Ograniczymy się tutaj jedynie do podania „kwantowych” warunków początkowych rozwiązania klasycznego równania ruchu (1). Wybierzmy te warunki w postaci

$$x(0) = \Delta x, \quad \frac{d}{dt}x(0) = \frac{\hbar}{m\Delta x},$$

tzn. zakładamy najmniejsze odchylenie od wartości zerowych dopuszczalne przez zasadę nieoznaczoności.

Rozwiązanie równania (1) wygląda teraz następująco

$$(2) \quad x(t) = \Delta x \cosh \omega t + \frac{\hbar}{m\omega \Delta x} \text{sh} \omega t.$$

Ołówek jest przewrócony, jeśli wychylenie osiąga jego długość.

A zatem czas upadku  $\tau$  znajdujemy z równania  $x(\tau) = l$ . Ponieważ interesuje nas jedynie oszacowanie tego czasu, nadal korzystamy z równania ruchu (1), które jest poprawne tylko dla małych wychyleń. Przyjmujemy dalej, że czas upadku jest na tyle długi, iż  $\omega \tau$  jest dużo większe od jedności. (Prawdziwość tego założenia sprawdzamy po wykonaniu obliczeń i znalezieniu  $\tau$ .) Wówczas sinus i cosinus hiperboliczny z równania (2) możemy przybliżyć funkcją wykładniczą, tzn.

$$x(t) \approx \frac{1}{2} \left( \Delta x + \frac{\hbar}{m\omega \Delta x} \right) e^{\omega t}.$$

Rozwiązując równanie  $x(\tau) = l$  znajdujemy

$$(3) \quad \tau \approx \frac{1}{\omega} \ln \left( \frac{2l}{\Delta x + \frac{\hbar}{m\omega \Delta x}} \right).$$

Jeśli wybierzemy „makroskopową” wielkość  $\Delta x$  (tzn. dużo większą od rozmiaru atomu), to przy „makroskopowych” wartościach pozostałych parametrów wahadła  $l$  i  $m$  możemy zaniedbać w równaniu (3) człon zawierający stałą Plancka i odtwarzamy rezultat klasyczny odpowiadający zerowej prędkości początkowej i wychyleniu początkowemu  $\Delta x$ .

Jak widzimy, czas upadku  $\tau$  w równaniu (3) niemonotonicznie zależy od  $\Delta x$  i przyjmuje największą wartość

$$(4) \quad \tau_{\max} \approx \frac{1}{2\omega} \ln \left( \frac{l^2 m \omega}{\hbar} \right)$$

dla

$$(5) \quad \Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} = \frac{\hbar}{\Delta p}.$$

Maksymalny czas upadku (4) dąży do nieskończoności w granicy klasycznej, tj. kiedy  $\hbar \rightarrow 0$ . Podstawiając do wzorów (4) i (5)  $l = 0,1 \text{ m}$ ,  $m = 0,01 \text{ kg}$ ,  $g = 10 \text{ m/s}^2$  oraz  $\hbar = 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  otrzymujemy  $\tau_{\max} \approx 4 \text{ s}$  oraz  $\Delta x \approx 3 \cdot 10^{-17} \text{ m}$ . A zatem, by osiągnąć maksymalny czas upadku, należałoby ustawić położenie ołówka z dokładnością do wielkości  $10^7$  razy mniejszej niż średnica atomu. Nie muszę wyjaśniać, że jest to zupełnie niemożliwe.



## Całka Gaussa

E.T. Bell w swojej książce *Men of Mathematics* (Simon and Schuster, New York 1937) przytacza następującą anegdotę o lordzie Kelvinie (właściwie: Williamie Thomsonie, 1824–1907). Miał on zapytać uczniów w klasie: „Czy wiecie, kto to jest matematyk?” Podszedł do tablicy i napisał na niej

$$(*) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Wskazując palcem na to, co napisał, zwrócił się do uczniów: „Matematyk to ktoś, dla kogo to jest tak oczywiste jak to, że dwa i dwa daje cztery”.

Całka, o której tu mowa, w literaturze zwana jest całką Poissona, całką Laplace’a lub właśnie całką Gaussa. Ma ona istotne zastosowania w teorii prawdopodobieństwa, statystyce matematycznej i teorii funkcji specjalnych. Jej obliczenie wcale nie jest kłopotliwe, o ile znamy całkę podwójną. Oznaczmy

$$G = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

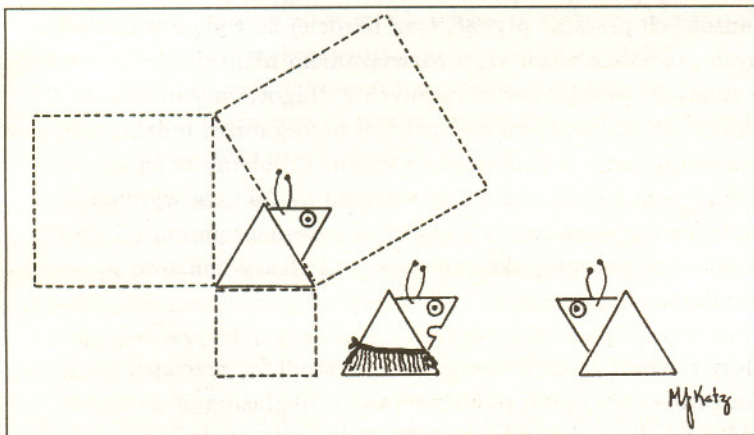
i niech  $y = sx$ . Wtedy  $dy = x ds$  oraz

$$\begin{aligned} G^2 &= \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dy \right) dx = \\ &= \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+s^2)} x ds \right) dx = \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} x e^{-x^2(1+s^2)} dx \right) ds = \\ &= \int_0^{+\infty} \left[ \frac{1}{-2(1+s^2)} e^{-x^2(1+s^2)} \right]_{x=0}^{x=+\infty} ds = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+s^2} ds = \frac{1}{2} [\operatorname{arctg} s]_{s=0}^{s=+\infty} = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

skąd  $G = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ . Z parzystości funkcji podcałkowej wynika wzór (\*).

Jarosław GÓRNICKI

\*\*\*\*\*



Wybieramy się na bal maskowy, Gerald idzie jako twierdzenie Pitagorasa.

(Science, vol. 246, 1989)

wynikającego z przekształcenia wzoru opisującego prawo rozpadu promieniotwórczego.

Można powiedzieć, że wszelkie szczątki organiczne i skamieliny żyjątek, jak np. korale i mięczaki, zawierają w sobie specyficzny zegar radiowęglowy, który rozpoczyna swój bieg w chwili zakończenia życia organizmu. Praktycznie zegar ten chodzi wiecznie. Jego „wskazówkami” są pozostałe atomy radioaktywnego węgla  $^{14}\text{C}$  wchodzące w skład organizmu lub obecne w wytworzonym wapieniu, w którym węgiel  $^{14}\text{C}$  związany jest z wapniem w węglan wapnia  $\text{CaCO}_3$ . Omawiana metoda była sprawdzana przez analizę czasowej zależności względnej zawartości atomów  $^{14}\text{C}$  w próbkach sporządzonych z fragmentów grobów faraonów, których datę śmierci ustalono według zapisków odczytanych na papirusach. Ta metoda, tak jak każda inna metoda naukowa, ma szereg ograniczeń zakresu swojego zastosowania. Tylko przy spełnieniu wynikających z nich wymagań i pokonaniu trudności natury eksperymentalnej może dawać poprawne wyniki. Wymaga ona bezpowrotnego zniszczenia szczątków organicznych poprzez ich spalenie. Nie zawsze to wymaganie może być łatwo spełnione ze względu np. na możliwe znaczenie historyczne znaleziska. Z otrzymanych po spaleniu pozostałości sporządza się próbki i w postaci np. cienkiej warstwy grafitu wprowadza się je do gazowego detektora lub umieszcza przed okienkiem licznika. Ze względu na to, że w rozpadzie  $^{14}\text{C}$  emitowane są cząstki  $\beta^-$  o niewielkiej energii (maksymalna energia  $Q_\beta = 0,156 \text{ MeV}$ ), zarówno badana próbka, jak i okienko licznika cząstek  $\beta$  muszą być bardzo cienkie. Jeśli natomiast badana jest próbka węgla w postaci gazu, to trudność wynika z konieczności stosowania detektora o bardzo dużej objętości. Objętość  $\text{CO}_2$  zawierająca zaledwie 1 gram węgla (przy ciśnieniu atmosferycznym) to około 2 litry.

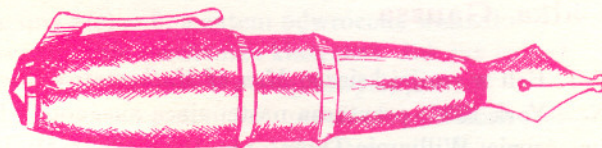
Metoda Libby’ego zakłada, że strumień promieniowania kosmicznego (warunkujący wytwarzanie neutronów w atmosferze) ma stałe natężenie. Tylko wtedy, o ile to założenie jest prawdziwe, proces aktywacji neutronowej atomów azotu, zachodzący ciągle w atmosferze, może prowadzić po czasie  $6 \cdot T_{1/2}$  do obecności w niej praktycznie stałej względnej zawartości węgla  $^{14}\text{C}$ . Biorąc pod uwagę to, że wiek Ziemi jest znacznie dłuższy niż okres  $6 \cdot T_{1/2} = 34\,380 \text{ lat}$ , można uznać istnienie swoistego stanu nasycenia dla ilości promieniotwórczych atomów  $^{14}\text{C}$  w atmosferze. Stan taki opisuje się stałą wartością aktywności  $A_0$ , którą można nazwać aktywnością nasycenia



i która jednocześnie określa wartość początkową aktywności archeologicznych próbek węgla. Tak więc podstawową hipotezą Libby'ego jest stwierdzenie, że względna zawartość atomów  $^{14}\text{C}$  w próbce węgla z atmosfery była stała w przeciągu ostatnich dziesiątków tysięcy lat. Tymczasem, tak naprawdę nie wiadomo, czy w tym okresie utrzymywała się niezmienna intensywność promieniowania kosmicznego. Nauka nie jest w stanie potwierdzić tej stałości. Nawet stwierdza, że w przeszłości formowanie się  $^{14}\text{C}$  było zmniejszone, a obecnie uznaje, że natężenie strumienia promieniowania kosmicznego ulega zmianom, chociaż niewielkim – w granicach 1% – w związku ze zmianami aktywności Słońca.

Innym z czynników, który powoduje, że aktywność początkowa  $A_0$  w rzeczywistości zależy zarówno od czasu, jak i od miejsca na Ziemi, jest to, że koncentracja  $^{14}\text{C}$  w dwutlenku węgla może zmieniać się w rejonach przemysłowych podczas spalania takich paliw, jak nafta czy węgiel kopalny. Spalanie węgla kopalnego, wydobywanego z pokładów leżących głęboko pod ziemią, a więc nie mających kontaktu z radioaktywnym węglem z powietrza, powoduje zmniejszanie koncentracji  $^{14}\text{C}$  w atmosferze. Również nie bez znaczenia dla powstawania nadmiaru radioaktywnego węgla są próbné wybuchy bomb termojądrowych. Wszystkie te czynniki powinny być uwzględnione w wyliczeniach wieku próbek archeologicznych, a to jest możliwe, jeśli znana jest zależność koncentracji  $^{14}\text{C}$ , odpowiadających aktywności  $A_0$ , od czasu i miejsca na Ziemi. Zależność tę badano pobierając próbki z różnych słojuw wieloletnich drzew, które narastały rok po roku. Jeśli w którymś roku w danym miejscu na Ziemi dwutlenek węgla w powietrzu zawierał anomalnie dużo lub mało atomów  $^{14}\text{C}$ , to odpowiadający temu okresowi słuju w drzewie, poddany badaniu ze względu na jego radioaktywność, będzie wykazywał względnie większą lub mniejszą aktywność niż warstwy sąsiednie. Można obliczyć, że przy niedokładności określenia  $N_0$ , wynoszącej 3%, błąd określenia wieku próbki dochodzi do  $\pm 250$  lat.

Znaleziska archeologiczne (czy też geologiczne) zazwyczaj wydobywane są z głębokich warstw ziemi i na tej podstawie można uznać, że nie wnikają w nie atomy  $^{14}\text{C}$  aktualnie wytworzone w atmosferze. Jeśli również to założenie można uznać za prawdziwe, to metoda datowania węglem  $^{14}\text{C}$  pozwala otrzymać



Kontynuując dyskusję z 250 numeru *Delty* (3/1995) przedstawiamy wypowiedź

Andrzeja SZYTULĘY (Kraków, Instytut Fizyki UJ),  
który wybrał 3 spośród 7 pytań redakcyjnej ankiety.

**O lotach kosmicznych marzyli przed laty wszyscy. Dlaczego, gdy pierwsi ludzie wylądowali na Księżycu, sprawy podróży pozaziemskich przestały – praktycznie wszystkich – obchodzić?**

Na przykładzie tego problemu można prześledzić pewien oczywisty fakt, że nauka nie jest prowadzona w próżni, ale odbywa się w realiach i to realiach XX wieku, kiedy Nauki przez duże „N” nie można prowadzić bez dużych środków finansowych. Problem ten jest przez środowiska naukowe traktowany jako wstydlivy, o którym nie mówi się głośno w rozmowach, w szczególności z osobami spoza środowiska. Problem, kto pierwszy wylądował na Księżycu, stał się w latach sześćdziesiątych polem, na którym rozgrywała się rywalizacja między dwoma supermocarstwami, z których każde chciało pokazać swoją wyższość. W sytuacji, gdy z punktu widzenia wojskowego każde z nich mogło zniszczyć drugie ponosząc jednocześnie samo dotkliwe straty, łącznie z perspektywą całkowitego zniszczenia, powrócono do dobrych przykładów z przeszłości, gdzie pojedynczy herosi ścierali się w boju na oczach armii. Badania kosmiczne stały się punktem dogodnym do realizacji takiego planu. Aby wykazać wyższość nad stroną przeciwną, nie oszczędzono środków finansowych na rozwój badań. Już dawno nie było takiego zaangażowania środków finansowych przez władze państwowe (podobne zaangażowanie wystąpiło tylko w trakcie wyścigu przy budowie potencjału jądrowego). Efektem tego było, że już w roku 1969 pierwszy człowiek wylądował na Księżycu. Postawiony przez polityków cel został osiągnięty i strumień środków finansowych przestał płynąć, tym bardziej że wylądowanie na innych planetach wiąże się z rozwiązaniem różnych, dotychczas nie znanych, problemów związanych z długotrwałymi lotami w kosmosie, np. wpływu nieważkości na organizm ludzki, problem życia grupy ludzi w zamkniętym kręgu. Problemy te są obecnie przedmiotem badań, jednak ze względu na fakt, że wymagają żmudnych i czasochłonnych badań, a przeznaczone na nie środki finansowe są znacznie skromniejsze, to i efekty końcowe są mniej spektakularne.

Należy również zwrócić uwagę na rolę środków przekazu w kształtowaniu opinii publicznej przez nagłaśnianie pewnych faktów. Środki przekazu odegrały wielką rolę nagłaśniając problemy związane z „podbojem Kosmosu” w latach sześćdziesiątych. W latach następnych problematyka ta znika ze środków przekazu lub jest przesuwana na dalsze miejsce w informacjach.



## Dlaczego w dobrym tonie jest chwalić się szkolnymi niepowodzeniami w nauce matematyki czy fizyki, a nie wypada przyznawać się do niewydolności w humanistyce?

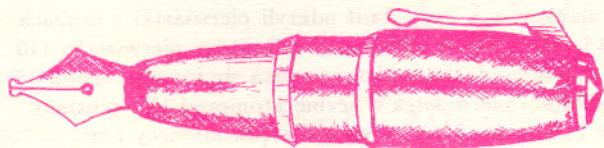
Powyższy problem dotyka jednego z ważnych zagadnień dla Polaków, postawy romantycznej i pozytywistycznej. Na postawione pytania dostajemy jednoznaczną odpowiedź w momencie, kiedy przyjmujemy, że 90% naszego społeczeństwa zalicza się do pierwszej grupy, a tylko 10% do drugiej. Wymogi stawiane przy nauczaniu przedmiotów przyrodniczych i humanistycznych są różne. W przypadku pierwszym wymagana jest systematyczna ciągła praca od podstaw, bo tylko w takim przypadku możemy liczyć na końcowy sukces. W drugim przypadku wystarczy tylko chwilowy zryw, a już uzyskamy sukces. W świadomości większości Polaków brak zakodowanej chęci do prowadzenia systematycznych prac. Jest to związane z faktem, że teren naszego kraju, z wyjątkiem krótkich okresów, od czasu „potopu szwedzkiego”, tzn. od przeszło 300 lat, jest terenem niespokojnym (wojny, przemarsze wojsk). Stworzyło to w mentalności Polaków brak poczucia pewności, wymóg życia chwilą. Długotrwałość tego okresu spowodowała trwałe zmiany w psychice Polaków.

## Czemu zawdzięcza w chwili obecnej paranauka swoją przewagę nad nauką?

Odpowiedź na to pytanie może być prosta, ale nie zawsze wszystkich usatysfakcjonuje.

Żyjemy w czasie wielkich zmian, które nie wszystkie prowadzą do pozytywnych skutków w odczuciu przeciętnego człowieka. To wywołuje w nim niepokój i chęć szukania przyczyn negatywnych skutków. Jak w takich poszukiwaniach jest obserwowana nauka? Z jednej strony „prawdziwy” naukowiec nie może dać jednoznacznej i ostatecznej odpowiedzi, ponieważ dochodzenie do prawdy naukowej to droga małych lub dużych kroków. Najlepiej to widać np. w fizyce przy badaniu składników materii. Drugim czynnikiem wpływającym na negatywną ocenę nauki w oczach współczesnego człowieka jest fakt, że przy okazji wielkich odkryć również w fizyce obiecywano, że przyniosą one wielkie korzyści zmieniające oblicze naszej Ziemi. Praktycznie jednak efekty były znacznie mniejsze, co spowodowało, że obecnie nie bierze się pod uwagę faktu ogromnego postępu technicznego, jaki miał miejsce w XX wieku, a niektóre osiągnięcia stara się zdewaluować wykorzystując niewiedzę przeciętnego człowieka. Wiąże się to z faktem, że za szybkim rozwojem technicznym nie nadąża rozwój intelektualny przeciętnego człowieka, głównie z powodu złego systemu edukacyjnego.

Współczesny człowiek znalazł się w próżni, która musi zostać zapełniona. Zapełnia ją paranauka dająca odpowiedź i sposób rozwiązania problemów, co nie zawsze na określonym etapie rozwoju poszczególnych nauk mogą dać te ostatnie. Przewaga paranauki nad nauką jest wyrazem głębokiego kryzysu, jakim dotknięty jest współczesny świat.



poprawną wartość wieku badanej próbki. Jednak istnieje też możliwość, że próbki badane mogą być wzbogacone węglem  $^{14}\text{C}$  z atmosfery przez niekontrolowany z nią kontakt. Nieświadomość tego faktu i nieuwzględnienie go w obliczeniach prowadzi do istotnych zniekształceń wyniku obliczeń, do „odmłodzenia” znaleziska o wiele lat. Przykładowo, jeśli śmierć organizmu miała miejsce 5000 lat temu, ale szczątki nie były dostatecznie zabezpieczone przed kontaktem z atmosferą, co spowodowało, że zawartość węgla „młodego” ( $^{14}\text{C}$ ) zwiększyła ogólną ilość zawartego w nich węgla o np. 0,1% wartości  $N_0$ , to, jak łatwo obliczyć, otrzymany ze wzoru (5) wiek próbki jest o 15 lat krótszy od rzeczywistego. Daje to błąd określenia wieku rzędu 0,3%.

Podobnie, wyliczenie wieku próbki, której rzeczywisty wiek jest np. równy 50 tys. lat, i która przez kontakt z atmosferą zwiększyła zawartość  $^{14}\text{C}$  też o 0,1%, prowadzi do wyniku, który „odmładza” próbkę o około 2900 lat. Próbka sprzed miliona lat wzbogacona węglem  $^{14}\text{C}$  w tej samej ilości zostanie odmłodzona do 57 000 lat, a więc wiek jej zostanie skrócony 17,5 razy.

Może zaistnieć też sytuacja odwrotna. Na przykład, w rejonach, gdzie występuje rozrzedzenie  $^{14}\text{C}$  w atmosferze, próbka absorbując węgiel ubogi w radioaktywny  $^{14}\text{C}$  może okazać się starsza niż jest w rzeczywistości. Niektóre czasopisma naukowe podają przykłady takich „pomyłek”, czasem też dla rozweselenia czytelników. Na przykład, liście platanu zerwane w Rzymie rok przed testem  $^{14}\text{C}$  wskazały wiek 400 lat.

Z przeprowadzonej analizy wynika, że im starsze jest znalezisko, tym bardziej niebezpieczne jest skażenie go węglem młodym. Wtedy również omawiana metoda prowadzi do błędnych wyników.

Aby pokonać tę trudność, opracowano metody oczyszczania próbek z zawartości „młodego węgla”. Jednak metody te pozostawiają w starszych próbkach „węgiel młody” w takiej ilości, że obliczenie (na podstawie metody datowania węglem  $^{14}\text{C}$ ) wieku próbki daje wyniki 70 000 lat. Radiowęglowy zegar pozwala odmierzać czas wstecz, nie dalej jednak niż do 70 tysięcy lat. „Izotopowa” historia zapisana w materiale archeologicznym przez wieki, uwarunkowana działaniem na niego różnych czynników, np. wody, dymu ze spalin, promieniowania, nie pozostaje bez wpływu na wynik datowania metodą  $^{14}\text{C}$  i jego wiarygodność.



Nie zmienia ona jednak wartości  $T_{1/2}$ . Istotne dla metody datowania węglem  $^{14}\text{C}$  jest to, że charakterystyka pierwiastka promieniotwórczego, jaką jest okres  $T_{1/2}$ , jest wielkością stałą. Nie zależy ona od związku chemicznego, w którym dany pierwiastek promieniotwórczy występuje, ani też od warunków określonych przez temperaturę i ciśnienie. Wielkość ta jest cechą nuklidu promieniotwórczego zależną od struktury jądra atomowego. Wartość liczbowa tej wielkości fizycznej ustala się na podstawie pomiarów statystycznych liczby zliczeń impulsów licznika od promieniowania próbki zawierającej pierwiastek promieniotwórczy. Opracowanie statystyczne takich pomiarów pozwala też określić dokładność wyznaczenia  $T_{1/2}$ , która to wartość dla węgla  $^{14}\text{C}$  została ustalona na 40 lat.

Z obliczeń można ocenić, jaka minimalna liczba rejestracji ( $n$ ) promieniowania jądrowego z badanej próbki jest potrzebna, aby wyznaczyć wiek z założoną dokładnością. Na przykład, jeśli założyc, że wystarczające jest wyznaczenie wieku  $t$  próbki z dokładnością 2% od wartości  $T_{1/2}$  dla  $^{14}\text{C}$ , co odpowiada  $\Delta t = 114$  lat, to  $n_{\min} = 5260$ . Jak wiadomo, próbce o zawartości 1 grama węgla odpowiada  $A_0 = 12$  rozpadów  $\beta^-$  na minutę. Dla próbki, której przypuszczalny wiek wyniósłby  $10 \cdot T_{1/2}$ , zmierzenie  $A(t)$ , z założoną dokładnością  $\Delta t = 114$  lat, wymagałoby przeprowadzenia pomiaru w ciągu około 310 dni.

Obliczenie to wskazuje, jak uciążliwe są tego rodzaju pomiary. Skrócenie czasu pomiaru można uzyskać przez zwiększenie masy badanej próbki, co jednak stwarza nowe trudności techniczne w wykonywaniu pomiarów, takie jak konieczność zwiększenia objętości licznika gazowego.

Obecnie uważa się, że górna granica wieku próbek organicznych, jaką można wyznaczyć metodą datowania za pomocą węgla  $^{14}\text{C}$ , jest rzędu  $10 \cdot T_{1/2}$ .

Ciekawe, że zastosowanie metody Libby'ego do wyznaczenia wieku całunu z Turyru pozwoliło określić jego pochodzenie na przełom XIII i XIV wieku. W przypadku tkaniny całunowej problem jest niezwykle złożony, ponieważ, jak stwierdzono, przez wieki oddziaływały na nią liczne znane i mniej znane czynniki, wnosząc w strukturę płótna węgiel „młody”. To kontrowersyjne zagadnienie nie zostało dotychczas ostatecznie rozstrzygnięte.

Metoda datowania znalezisk oparta o węgiel  $^{14}\text{C}$  pozwala cofnąć się w czasie o 60 do 70 000 lat i stosowana jest do oceny wieku substancji pochodzenia organicznego. W geologii interesuje nas znacznie szersza skala czasu, rzędu miliardów lat. Stosowane są do tego izotopy o znacznie dłuższym okresie połowicznego zaniku, w zależności od rodzaju (przede wszystkim składu chemicznego) badanej skały czy minerału.

Naturalne jądro promieniotwórcze	Trwale jądro końcowe	Okres połowicznego zaniku (w miliardach lat)
$^{238}\text{U}$	$^{206}\text{Pb}$	4,49
$^{235}\text{U}$	$^{207}\text{Pb}$	0,71
$^{232}\text{Th}$	$^{208}\text{Pb}$	14,1
$^{87}\text{Rb}$	$^{87}\text{Sr}$	50,0
$^{40}\text{K}$	$^{40}\text{Ar}$	1,3

Jako przykład izotopowej metody datowania znalezisk geologicznych wybierzmy minerał zawierający ołów. Naturalny ołów jest mieszaniną izotopów o liczbach masowych 204, 206, 207, 208. Z tych czterech izotopów trzy ostatnie produkowane są w rozpadach promieniotwórczych uranu i toru. Jeśli w badanej próbce nie występuje izotop  $^{204}\text{Pb}$ , natomiast występują uran lub tor, stanowi to dowód, że istniejący ołów jest produktem rozpadów promieniotwórczych tych nuklidów. Na podstawie proporcji, w jakiej występują różne izotopy, możemy określić wiek próbki. Analiza zawartości ołowiu i uranu w wodzie morskiej pozwoliła oszacować wiek naszej planety.

K.R.

Kwaśne deszcze zostały odkryte w 1852 roku przez Anglika Agnusa Smitha, który napisał później na ten temat książkę „Air and Rain” (Longmans, London, 1872), ale jego odkrycie i jego praca uległy zapomnieniu. Ponownego odkrycia kwaśnych deszczy dokonano w latach 50. naszego wieku.

NASA planuje wystrzelenie w okresie 1998–2012 serii satelitów mających za zadanie monitorowanie zmian klimatycznych i czynników mogących wpływać na klimat, takich jak pokrywa chmur, deszcze, śniegi, cyrkulacje wód w oceanach, emisje gazów mogących powodować efekt cieplarniany itp. Szacuje się, że satelity będą przekazywały na Ziemię miliardy bajtów informacji dziennie (około  $10^6$  bajtów na sekundę).

Światowe zapasy plutonu wyniosą pod koniec tego wieku 1700 ton. Reaktory atomowe produkują pluton jako produkt uboczny procesu rozszczepienia paliwa jądrowego. Rocznie wszystkie reaktory atomowe produkują około 60 ton tego pierwiastka. Do produkcji bomby jądrowej potrzeba około 5 kg plutonu o dostatecznej czystości. Oddzielenie plutonu z wyeksploatowanego paliwa jądrowego jest niebezpiecznym i skomplikowanym procesem. Ale z około 10 kg plutonu reaktorowego też można wyprodukować bombę o mocy takiej, jaką miała bomba zrzucona na Nagasaki. W USA przeprowadzono próbny wybuch tak wyprodukowanej bomby.

W ośrodku GSI w Darmstadt (RFN) uzyskano pierwiastek o rekordowej liczbie atomowej 110, którego masa atomowa wynosi 269. Odkryto go w trakcie bombardowania tarczy ołowianej wiązką jąder niklu. Na początku lat 80. naukowcy z Darmstadt odkryli pierwiastki o liczbach atomowych 107, 108 i 109. Chociaż jądro nowo odkrytego pierwiastka 110 rozpada się po kilku milisekundach, naukowcy sądzą, że jeszcze cięższe pierwiastki, w szczególności pierwiastek o liczbie atomowej 114, powinny być bardziej stabilne i ich czasy życia mogą być rzędu miesięcy i lat.



Świat filozofii greckiej to nie tylko różnorodność idei, które dały początek europejskiej nauce, ale także galeria barwnych i niezwykłych postaci. Do najbardziej fascynujących nie tylko bogactwem myśli, ale także nietuzinkową osobowością należał Empedokles, filozof szkoły italskiej. Empedokles zajmował się nie tylko nauką, był również politykiem, lekarzem, poetą. Nieprzejednany zwolennik demokracji miał jednocześnie teatralne i wyniosłe maniere, pozował na królewskość czy też wręcz sugerował swe boskie pochodzenie. Hippobotos podaje, że aby je uwiarygodnić, Empedokles skoczył do krateru Etny. Istnieje także wiele innych, niezwykłych wersji jego śmierci. Gdyby Empedokles żył dziś, mógłby zostać popularnym, ekscentrycznym profesorem – bożyszczem studentów albo też uznano by go za dziwaka.

Poglądy Empedoklesa bliskie były milezyjskiej filozofii przyrody i stanowiły swoisty kompromis między heraklitemską doktryną zmienności a eleacką koncepcją jedynego, wiecznego i niezmiennego bytu. Zdaniem Empedoklesa wszystkie ciała podlegają wprawdzie zmianom, jednak zbudowane są z czterech prostych, wiecznych i niezmiennych elementów, które nazwał „korzeniami wszechrzeczy”. Te cztery elementy, znane powszechnie pod nazwą czterech żywiołów, to: ziemia, woda, powietrze i ogień. Empedokles torował drogę greckim atomistom, a „korzenie wszechrzeczy” są archetypami pojęcia pierwiastka chemicznego.

Niezwykle ciekawa jest empedoklejska dynamika. W świecie działają dwie przeciwstawne siły: miłość (*filia*) i nienawiść (*neikos*). Dziś powiedzielibyśmy: przyciąganie i odpychanie. Obie siły kształtują ewolucję Wszechświata oscylującego między dwoma przeciwstawnymi stanami. Gdy dominuje miłość, wszystkie elementy łączą się i mieszają. Powstaje jednorodny twór o symetrii sferycznej, nazwany przez Empedoklesa Sfajrosem. Potem następuje okres dominacji nienawiści, która powoduje separowanie się elementów. W tym etapie powstają różnorodne, złożone struktury; rodzi się Kosmos. Następnie znów miłość zaczyna przeważać nad nienawiścią, co kończy się powstaniem kolejnego Sfajrosu, zacierającego wszelką wiedzę o tym, co było wcześniej. I tak *ad infinitum*, Wszechświat nieustannie oscyluje pomiędzy kolejnymi Sfajrosami i Kosmosami.



**Rozwiązanie zadania M 739.** Posłużymy się (łatwą do udowodnienia przez indukcję) nierównością Bernoulliego

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \text{dla } x \geq -1 \text{ i } n \in \mathbb{N}.$$

Rozważmy dwa przypadki. Albo liczba  $n$  jest parzysta,  $n = 2k$ , wtedy

$$\left(1 - \frac{1}{2k}\right)^{2k} = \left(\left(1 - \frac{1}{2k}\right)^k\right)^2 \geq \left(1 - \frac{k}{2k}\right)^2 = \frac{1}{4} > \frac{1}{10},$$

albo  $n$  jest nieparzysta,  $n = 2k + 1$  i wtedy

$$\left(1 - \frac{1}{2k+1}\right)^{2k+1} \geq \left(1 - \frac{1}{2k+1}\right)^{2k+2} \geq \left(1 - \frac{k+1}{2k+1}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4k+2}\right)^2 \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)^2 > \frac{1}{10}.$$

Jeszcze bardziej zaskakująca jest empedoklejska wizja powstania życia, które odradza się na nowo, wraz z powstaniem nowego Kosmosu. Początkowo tworzą się zaledwie fragmenty żywych istot: same oczy, głowy bez szyi, tułowia bez kończyn... Części te łączą się w przypadkowy sposób, powstają zatem różne potwory: ryby z ludzkimi głowami, hipopotamy ze skrzydłami ptaków i jeszcze bardziej monstrialne hybrydy. Istoty te jednak w większości przypadków nie są zdolne do życia, dlatego giną. Przeżywają jedynie te, które samorzutnie zdobyły odpowiednią budowę.

Trzeba przyznać, że poglądy Empedoklesa żywo przemawiają do wyobraźni współczesnego człowieka. Pulsujący Wszechświat, którego skrajnymi stanami są Kosmos i Sfajros, przypomina periodyczny model Friedmana, w którym po okresie ekspansji następuje kontrakcja zakończona pojawieniem się osobliwości, potem następuje kolejna ekspansja i tak dalej... Empedoklejska wizja rozwoju życia (pomijając szczegóły anatomiczne) przypomina teorię ewolucji i doboru naturalnego Darwina. Myśl o istnieniu ewolucji nie była, oczywiście, oryginalnym „wynalazkiem” Empedoklesa. W tradycji greckiej współistniały dwie przeciwstawne koncepcje. Platońska, zgodnie z którą świat materialny jest odbiciem świata wiecznych i niezmiennych idei, oraz jońska, zgodnie z którą świat rozwinął się z pramaterii, którą dla Talesa była woda, Anaksymenesa powietrze, dla Anaksymandra zaś nieokreślony, pozbawiony jakości apeiron.

Czyniąc porównania między filozofią grecką i współczesną nauką musimy jednak zachować daleko idącą ostrożność, aby uniknąć narzucającego się bałamutnego stwierdzenia: a więc już starożytni wiedzieli, że...! Byłoby ono nieuzasadnione. Empedokles nie poparł swoich idei żadną wiedzą szczegółową, wynikającą z doświadczenia, ani też żadnym rozumowaniem. Jest chyba raczej tak, że – podczas gdy wiedza empiryczna rozwija się szybko – sposoby, którymi ludzka wyobraźnia posługuje się w celu uporządkowania tej wiedzy, nie zmieniają się albo też zmieniają się bardzo powoli. Rewolucje światopoglądowe, takie jak przewrót kopernikański czy powstanie mechaniki kwantowej, zdarzają się bardzo rzadko i przez długi czas ich skutki mają znaczenie jedynie dla wąskich środowisk. Naukowe i światopoglądowe paradygmaty są odporne na wpływ czasu. A więc to nie tyle Empedokles przeczuł to, co my dziś wiemy, ile raczej nasza wyobraźnia kroczy tymi samymi drogami, co w V wieku przed naszą erą.

K.R.



# Rysujemy choinkę,

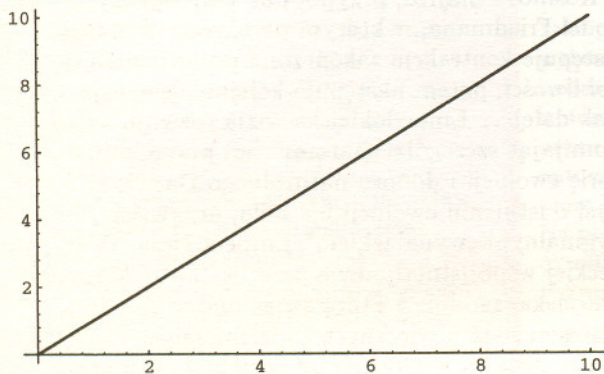
czyli jak komputer może przyczynić się do ochrony lasów

Mimo iż święta Bożego Narodzenia dawno minęły, dobrze pamiętamy, jak wygląda choinka. Spróbujmy więc narysować choinkę, by mieć wspomnienie świąt w komputerze, a zagorzali obrońcy środowiska naturalnego ucieszą się, bo sosenki i jodełki pozostaną w ziemi.

Najpierw trzeba jakoś narysować kontur choinki, czyli coś w rodzaju piły. Mogą się do tego przydać funkcje tangens i arcus tangens.

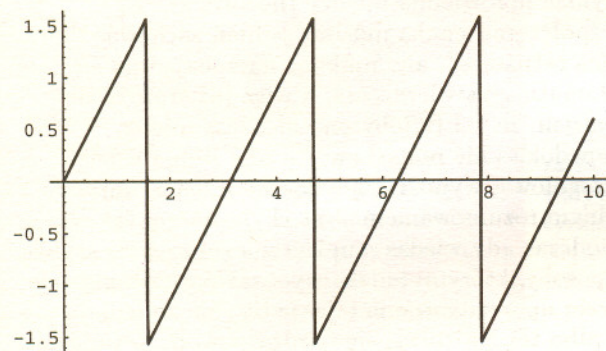
Zobaczmy, co wyjdzie, jak złożymy je ze sobą.

```
Plot[Tan[ArcTan[x]], {x, 0, 10}];
```



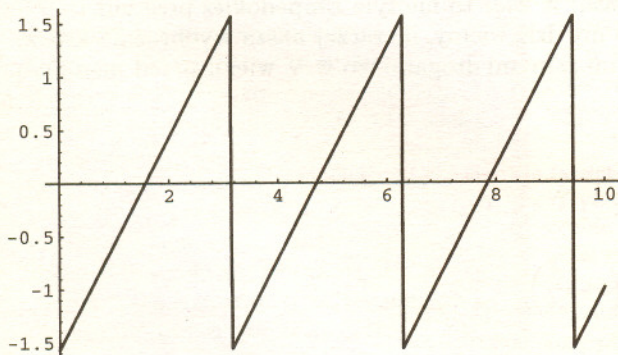
Nie wyszło nic specjalnego, spróbujmy je złożyć w odwrotnej kolejności.

```
Plot[ArcTan[Tan[x]], {x, 0, 10}];
```



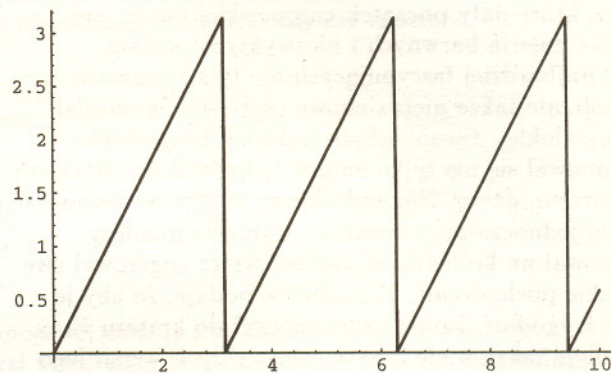
To jest chyba to, o co chodzi, trzeba teraz wybrać odpowiedni odcinek tej piły. W tym celu przesuniemy wykres w prawo o  $\pi/2$ .

```
Plot[ArcTan[Tan[x-Pi/2]], {x, 0, 10}];
```



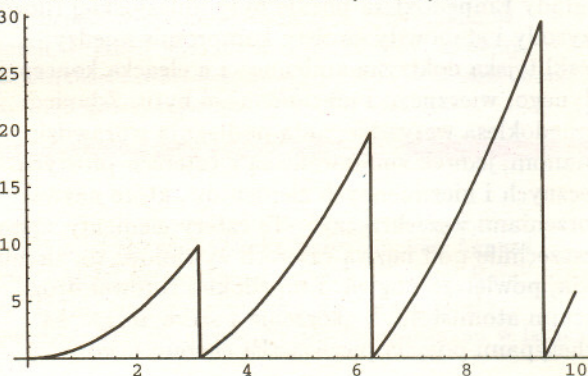
Dodajemy do wszystkiego  $\pi/2$ , żeby wykres tylko dotykał osi.

```
Plot[Pi/2+ArcTan[Tan[x-Pi/2]], {x, 0, 10}];
```



Teraz pomnożymy wszystko przez  $x$ , żeby skrócić gałęzie, które mają być bliżej czubka.

```
Plot[x(Pi/2+ArcTan[Tan[x-Pi/2]]), {x, 0, 10}];
```

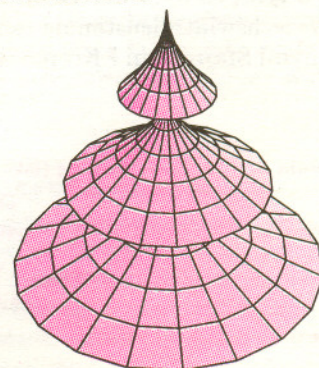


Zobaczmy, co wyjdzie, jeśli postawimy to pionowo i obrócimy dookoła osi  $z$ . Trzeba przy tym wykonać parę operacji:

1. Zamienić  $x$  na  $z$ , żeby się nie myliło.
2. Zamienić  $z$  na  $(10-z)$ , żeby choinka nie stała do góry nogami.
3. Przypomnieć sobie, jak wygląda walcowy układ współrzędnych. Potem piszemy po kolei współrzędne. Wysokość choinki będzie równa 10 jednostek, a jej szerokość około 60, trzeba więc ją trochę zwęzić, na przykład mnożąc współrzędne  $x$  i  $y$  przez 0,2. Wynik jest na rysunku.

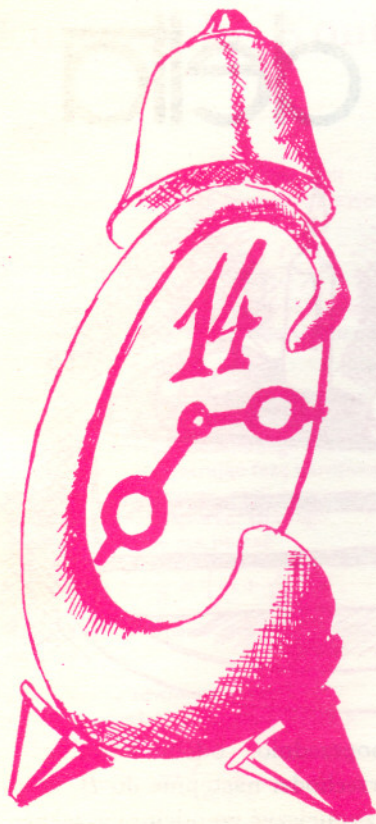
```
ParametricPlot3D[
```

```
{0.2(10-z)(Pi/2+ArcTan[Tan[(10-z)-Pi/2]])Cos[f],  
0.2(10-z)(Pi/2+ArcTan[Tan[(10-z)-Pi/2]])Sin[f],  
z},  
{z, 0, 10}, {f, 0, 2Pi},  
Boxed->False, Axes->False];
```



Kazimierz NAPIÓRKOWSKI





Zadanie na poprzedniej stronie pochodzi z

## Nauczycielskiego Kolegium Fizyki

będącego częścią Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego, o którym jest mowa na tylnej stronie okładki.

Studia w Kolegium są dwustopniowe:

- po pierwszych trzech latach zdobywa się tytuł licencjata i kwalifikacje do **nauczania fizyki, matematyki i chemii w szkole podstawowej**;
- po licencjacie można kontynuować studia i uzyskać tytuł magistra, a z nim kwalifikacje do **nauczania fizyki w szkołach średnich**.

## Nie ma egzaminu wstępnego do Kolegium;

rekrutacja odbędzie się na podstawie

**rozmowy kwalifikacyjnej**

z kandydatami

**w dniach 22 i 23 czerwca 1995 roku**

w Nauczycielskim Kolegium Fizyki

**przy ulicy Smyczkowej 5/7.**

Dokumenty składa się

**w Dziekanacie Wydziału Fizyki**

**ul. Hoża 74, 00-682 Warszawa.**



## Zadania

*Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ*

**M 738.** Załóżmy, że  $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  jest taką funkcją wypukłą, że  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$ . Niech  $\phi(x) = g(x)/x$  dla  $x > 0$ . Wykazać, że  $\phi$  jest funkcją niemalejącą.

Rozwiązanie na str. 16

**M 739.** Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 2$  zachodzi nierówność

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n > \frac{1}{10}.$$

Rozwiązanie na str. 7

**M 740.** Przedstawić przestrzeń trójwymiarową  $\mathbf{R}^3$  jako sumę parami rozłącznych okręgów.

Rozwiązanie na str. 13

*Redaguje Adam KOROCIŃSKI*

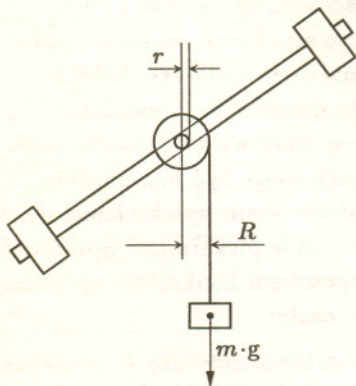
**F 405.** Oszacować, o ile opóźni się wschód Słońca pierwszego dnia wiosny na 50. stopniu szerokości geograficznej północnej, jeśli 3 kilometry na wschód od obserwatora rozciągają się wzgórza o wysokości 100 m ponad poziom, na którym się znajduje. Rozwiązanie na str. 11

**F 406.** Moment bezwładności osiowo symetrycznego rozkładu mas zwykle wyznaczamy mierząc wartość przyspieszenia  $a$  spadku ciężarka w maszynie Atwooda (rysunek) korzystając z równania  $m \cdot g = (m + I/R^2) \cdot a$ , gdzie  $I$  to moment bezwładności rozkładu mas,  $m$  to masa ciężarka, a  $R$  to promień rolki, na którą nawinięta jest nić ciężarka.

Popelniamy tutaj błąd systematyczny pomijając opory tarcia na osi (oraz opór powietrza, który jest w tym przypadku znikomy).

Jak należy uzupełnić pomiary przyspieszenia oraz dane o maszynie w tym eksperymencie, aby otrzymać wynik uwzględniający tarcie? Wyprowadzić poprawne wzory na  $I$  oraz siłę tarcia na osi.

Rozwiązanie na str. 11



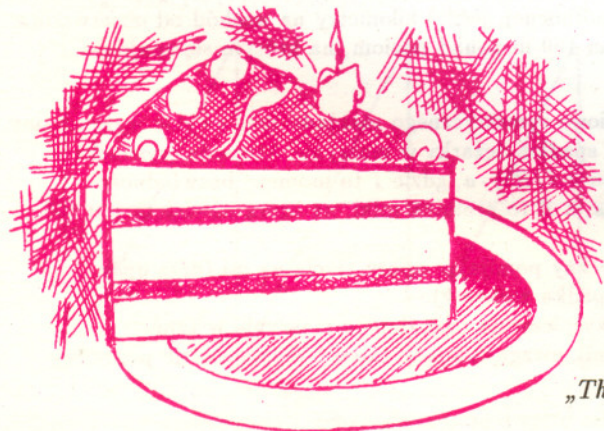




## Placek i sprawiedliwość



Dobrze wiadomo, co zrobić, gdy ma się ciastko, które trzeba sprawiedliwie podzielić między dwie osoby. Jednej z nich (np. starszej) każe się przeciąć ciastko na dwie części, po czym druga osoba może wybrać sobie tę część, którą woli. Co jednak zrobić, gdy chętnych do dzielenia ciastka (czy całego placeka) jest więcej? Można spróbować uogólnić procedurę dla dwóch osób: ustawiamy amatorów placeka (niech będzie ich  $n$ ) po kolei:  $A, B, C, \dots, M, N$ . Każda z osób od  $A$  poczynając, a na  $M$  kończąc kroi kawałek. Po tym, jak zrobi to  $M$ , będzie już  $n$  kawałków ( $n - 1$  odkrojonych i jeden – pozostałość po placeku).  $N$ , który nie kroił, wybiera sobie teraz jedną część, a po nim kolejno po kawałku biorą  $A, B, C, \dots, M$ . Na pierwszy rzut oka wygląda to niezłe, bo nikt nie może być pewny, że przypadnie mu ten kawałek, który sobie odkroił, ale naprawdę możliwość i pokusa popełnienia oszustwa jest spora – bo niech tylko pierwsza i ostatnia osoba umówią się między sobą. . . Co gorsza, nawet zakładając dobrą wolę wszystkich dzielących trzeba pamiętać, że ocena – co jest, a co nie jest  $1/n$ -tą placeka – to rzecz subiektywna, a tu, jeśli już ktoś odkroi mniej lub więcej niż – jak będą sądzili pozostali – powinien, to nikt na to nic nie poradzi i wrażenie, że całkiem sprawiedliwie nie było, pozostanie. Widać stąd, że trzeba by dać każdemu możliwość wnoszenia poprawek do tego, co odkroili inni.



Zróbmy tak:  $A$  – jak poprzednio – odcina kawałek placeka. Ten kawałek przechodzi następnie do  $B$ , który może – ale nie musi – zmniejszyć go odcinając jakąś część. Pomniejszony lub nie kawałek przechodzi do  $C$ , który znowu zmniejsza go lub nie i przekazuje  $D$  itd, aż do  $N$ .

Ostatecznie pomniejszony kawałek dostaje osoba, która odkroiła coś z niego jako ostatnia, a pozostali zbierają resztę placeka i dzielą ją między siebie tak jak poprzednio. Gdy wreszcie dojdzie do dzielenia placeka między dwie osoby, można skorzystać z tradycyjnej metody przytoczonej na początku. Łatwo można się przekonać, że przy takim podziale nawet zmowa wszystkich przeciw jednemu nie ma szans powodzenia – przy dzieleniu między  $n$  osób każdy może po prostu nie brać części, którą uważa za mniejszą od  $1/n$ -tej całości.

Pozostają tylko dwa problemy. Po pierwsze, indywidualne przekonanie o tym, że coś jest  $1/k$ -tą części placeka pozostałej po  $(n - k)$  podziałach, nie musi być zgodne z wrażeniem, że coś jest  $1/n$ -tą całości placeka. Stąd może się okazać, że różne osoby dostaną kawałki niejednakowej wielkości. Jednak przecież nie o równy, ale sprawiedliwy podział chodziło. I drugi problem: przy większej liczbie osób po kilku podziałach placek może być już, niestety, mocno poszatkowany. Może zatem byłoby lepiej dzielić ciasto przed upieczeniem go w piekarniku? Spróbujcie bowiem podzielić tym sposobem konkretny, upieczony tort choćby między trzy osoby.

*Małą Deltę na podstawie artykułu H. Steinhausa „The problem of fair division” (Econometrica 16(1948), str. 101–104) opracował Bernard BADZIOCH*





**Rozwiązanie zadania F 406.** Jeśli uwzględnimy tarcie, to równanie przyjmie postać

$$m \cdot g - f \frac{r}{R} = \left(m + \frac{I}{R^2}\right) a,$$

gdzie  $r$  to promień osi, na której obraca się ramię maszyny, a  $f$  to siła tarcia na tej osi.

Mamy tutaj zatem równanie z dwiema niewiadomymi:  $I$  oraz  $f$ . Potrzebujemy więc dodatkowego niezależnego równania. Dostajemy je rozpatrując fazę nawijania nici na walek maszyny, czyli proces podnoszenia się ciężarka. Dla tego procesu równanie ma postać

$$m \cdot g + f \frac{r}{R} = \left(m + \frac{I}{R^2}\right) a',$$

gdzie  $a'$  to opóźnienie ciężarka w ruchu do góry.

Dodając oba równania stronami i przekształcając wynik otrzymujemy moment bezwładności

$$I = m \cdot R^2 \left(\frac{2g}{a + a'} - 1\right).$$

Odejmując równania stronami i przekształcając wynik otrzymujemy tarcie

$$f = \frac{Rmg}{2r} \cdot \frac{a' - a}{a' + a}.$$



**Rozwiązanie zadania F 405.**

Słońce opóźnia się, gdyż musi wyjść ponad wierzchołek. Prędkość kątowa ruchu Słońca wynosi  $\omega = 1$  (obrót/doba)  $= 7,27 \cdot 10^{-5}$  rad/s. Należy także uwzględnić, że dla rozpatrywanego czasu i położenia geograficznego Słońce rozpozczyna swoją wędrówkę pod kątem 50 stopni do pionu. Stąd rozpiętość kątowa odcinka drogi Słońca, który będzie zasłonięty przez wzgórze o wysokości  $h$  będące w odległości  $d$  (mniejszej od promienia horyzontu obserwatora!) wynosi (dla małych kątów)  $\phi = h/(d \cdot \cos 50^\circ)$ . Stąd czas potrzebny na przebycie tej drogi przez Słońce jest równy

$$t = \phi/\omega = h/(\omega \cdot d \cdot \cos 50^\circ) \approx \approx 713 \text{ s} \approx 12 \text{ min}.$$

Stowarzyszenie Polski z Unią Europejską stworzyło możliwość udziału Polski w Konkursie Młodych Naukowców. Konkurs ten organizowany jest przez Komisję Europejską od 1989 roku i obejmuje wszystkie dziedziny nauk ścisłych i przyrodniczych. Przeznaczony jest głównie, choć nie tylko, dla uczniów szkół średnich: w chwili uczestnictwa w konkursie nie można mieć więcej niż 21 lat. Zadaniem konkursu, podobnie jak olimpiad przedmiotowych, jest zachęcenie uczniów do ciekawej i ciężkiej pracy oraz wyszukanie utalentowanych młodych ludzi.

W krajach Unii Europejskiej konkurs ma bardzo dużą rangę: zdobycie nagrody w Konkursie Europejskim jest cenione wyżej niż laury z międzynarodowych olimpiad. Rangę konkursu zapewnia z jednej strony wysoki poziom nagradzanych prac, z drugiej – Jury złożone z wybitnych naukowców. Nie bez znaczenia są wysokie nagrody: trzy pierwsze nagrody po 5000 ECU, trzy drugie nagrody po 3000 ECU, sześć trzecich nagród po 1500 ECU i nagrody pocieszenia po 120 ECU (Czytelnicy zechcą sięgnąć do dowolnej gazety po tabelę kursów i przeliczyć tę sumę na stare i nowe złotówki).

Konkurs polega na współzawodnictwie napisanych wcześniej prac uczestników. Szansę na nagrody mają prace stanowiące kompletne rozwiązanie ciekawego zagadnienia. Na konkurs trafiają, oczywiście, prace o różnym poziomie, jednakże zdobywcy nagród prezentują dzieła na poziomie (co najmniej) niezłej polskiej pracy magisterskiej. Stanowi to poważne wyzwanie dla ewentualnych polskich uczestników.

Zgodnie z decyzją Komisji Unii Europejskiej oraz polskiego Ministerstwa Edukacji Narodowej od tego roku w Konkursach Europejskich mogą brać udział (na pełnych prawach) Polacy. Oznacza to możliwość wywalczenia nagrody, a także opłacenie przez Unię Europejską kosztów podróży i udziału w finałach konkursu.

Wyboru polskich uczestników Konkursu Europejskiego dokonuje (pracujące przy Ministerstwie Edukacji Narodowej) Jury złożone z wybitnych polskich naukowców. Regulamin polskich eliminacji stwierdza m.in., że do konkursu można zgłaszać wyłącznie prace spełniające co najmniej jeden z poniższych warunków

- nagrodzone w jednym z konkursów organizowanych w Polsce (np. w Olimpiadzie Biologicznej lub Konkursie Prac Uczniowskich z Matematyki itp.);
- opublikowane lub przyjęte do druku w czasopiśmie naukowym;
- polecane przez samodzielnego pracownika nauki lub instytucje opiekujące się młodzieżą wybitnie uzdolnioną.

W tym roku prace na konkurs należało nadsyłać do 15 marca pod adresem Krajowego Funduszu na rzecz Dzieci (ul. Chocimska 14, 00-791 Warszawa). Przez miesiąc, do 15 kwietnia, oceniało je Jury. Następny miesiąc przeznaczony jest dla zwycięzców eliminacji, którzy do 15 maja powinni przygotować wersję swojej pracy według wymagań Konkursu Europejskiego (tekst po angielsku lub w innym oficjalnym języku Unii Europejskiej – najwyżej 30 stron maszynopisu; wykresy i rysunki na dodatkowych stronach; streszczenie po angielsku na jedną stronę maszynopisu). Niewykluczone, że w chwili, gdy Czytelnik przebiega wzrokiem niniejszy tekst, ktoś starannie pakuje wypieszczone dzieła polskich uczestników w grubą kopertę i wysyła ekspresem do Brukseli, by do 1 czerwca dotarły na odpowiednie biurko. Finały odbywają się co roku we wrześniu, za każdym razem w innym miejscu (w tym roku w Newcastle w Wielkiej Brytanii). Przyszłoroczne terminy zapewne będą takie same lub bardzo podobne.

Zatem, (młody) Czytelniku: myśl, pracuj, pisz i wygrywaj.

P.S.



Mogli się o tym przekonać uczestnicy zawodów stopnia drugiego XLIV Olimpiady Matematycznej, kiedy przyszło im zmagać się m.in. z takim zadaniem:

Udowodnić, że dla liczb dodatnich  $x, y, u, v$  zachodzi nierówność

$$\frac{xy + xv + uy + uv}{x + y + u + v} \geq \frac{xy}{x + y} + \frac{uv}{u + v}.$$

Z zainteresowaniem przyglądałem się „walce” z tym zadaniem uczniów próbujących „strzelać” do niego z nierówności Cauchy'ego, Czebyszewa, a bywało, że i z takiej „armaty” jak nierówność Jensena. Niestety, na próżno! Tym razem ten arsenał nie przydał się.

Najszybciej uporali się z tym zadaniem ci uczniowie, którzy tę nierówność po prostu przekształcali. Co robili? Ano, najpierw pomnożyli obie strony tej nierówności przez iloczyn mianowników występujących w niej ułamków i po prostym przekształceniu otrzymali nierówność

$$(xu + yu)[(xv + yu) + (xu + yv)] \geq (u + v)^2 xy + (x + y)^2 uv,$$

równoważną, oczywiście, wyjściowej.

Następnie wykonali wskazane działania, czyli „zlikwidowali” wszystkie nawiasy, przenieśli wszystkie wyrazy na lewą stronę i po redukcji otrzymali nierówność

$$x^2v^2 - 2xvyu + y^2u^2 \geq 0, \text{ czyli nierówność } (xv - yu)^2 \geq 0$$

i mieli... „po zadaniu”.

Z nierównością tą, jak również z jej uogólnieniem, wiąże się pewna metoda dowodzenia nierówności, o której teraz trochę opowiemy.

Załóżmy, że mamy dwie funkcje  $f$  i  $g$ , określone na pewnym przedziale  $(a, b)$ , osiągające w nim swoje wartości najmniejsze (największe). Jeśli równie  $f + g$  osiąga swoją wartość najmniejszą (największą), to

$$\min f(x) + \min g(x) \leq \min(f(x) + g(x)),$$

$$\max f(x) + \max g(x) \geq \max(f(x) + g(x)).$$

Istotnie, jeśli  $x_0 \in (a, b)$  jest punktem, w którym funkcja  $f + g$  osiąga swą wartość najmniejszą (największą), to, oczywiście,

$$f(x_0) \geq \min f(x) \text{ i } g(x_0) \geq \min g(x),$$

$$f(x_0) \leq \max f(x) \text{ i } g(x_0) \leq \max g(x).$$

Stąd otrzymujemy natychmiast żadaną nierówność.

Łatwo stwierdzić też, że równość w nierówności tej ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje  $f$  i  $g$  osiągają swoje wartości najmniejsze (największe) w tym samym punkcie.

Analogiczną nierówność mamy dla  $n$  funkcji  $f_1, f_2, \dots, f_n$ :

$$\sum_{i=1}^n \min f_i(x) \leq \min \left( \sum_{i=1}^n f_i(x) \right), \quad \sum_{i=1}^n \max f_i(x) \geq \max \left( \sum_{i=1}^n f_i(x) \right).$$

Dowód tego otrzymujemy przez oczywistą indukcję.

Rozważmy teraz funkcje  $f_i: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  określone wzorem

$$f_i(x) = (a_i + b_i)x^2 + 2a_ix + a_i, \text{ gdzie}$$

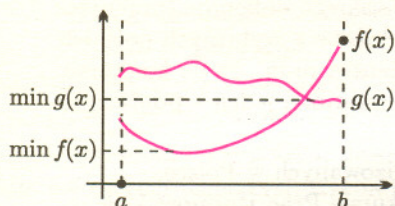
$$a_i > 0, \quad b_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Każda z tych funkcji osiąga, oczywiście, wartość najmniejszą, równą

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4a_i^2 - 4a_i(a_i + b_i)}{4(a_i + b_i)} = \frac{a_ib_i}{a_i + b_i}.$$

Również funkcja

$$F(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) = \left( \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i \right) x^2 + \left( 2 \sum_{i=1}^n a_i \right) x + \sum_{i=1}^n a_i$$

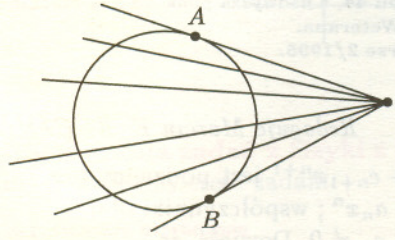




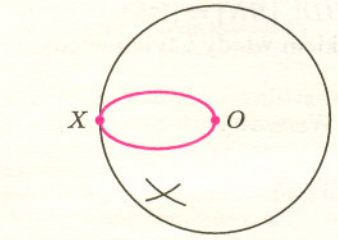


**Rozwiązanie zadania M 740.**

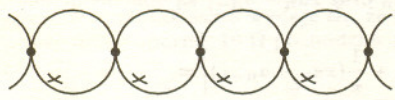
Sferę bez dwóch biegunów można, oczywiście, rozbić na sumę parami rozłącznych okręgów. Rozbicie takie dają równoleżniki. Ogólniej, sferę bez dwóch punktów nie leżących na końcach jednej średnicy też można rozbić na parami rozłączne okręgi – rozbicie otrzymujemy przecinając sferę płaszczyznami, jak na rysunku.



Pokażemy teraz, jak rozbić na parami rozłączne okręgi kulę otwartą z jednym dołączonym punktem  $X$  na brzegu. Rozważmy okrąg o średnicy  $OX$ , gdzie  $O$  jest środkiem owej kuli.



Po „wyjęciu” z kuli owego okręgu widzimy, że z każdej sfery o środku  $O$  zawartej w naszej kuli ubyłoby dwa punkty, a taką sferę potrafimy rozbić na parami rozłączne okręgi. A więc ów okrąg o średnicy  $OX$  oraz rozbicie na okręgi każdej z „poprzekluwanych” sfer daje rozbicie całej kuli z dołączonym punktem  $X$  na parami rozłączne okręgi. Ustawmy teraz tak ciąg kul otwartych o jednakowych promieniach, aby środki tych kul leżały na jednej prostej  $p$  i aby kolejne kule były styczne.



Dołączmy do tych kul wszystkie punkty styczności (do każdej po jednym). Te kule wraz z punktami styczności umiemy już rozbić na parami rozłączne okręgi. Resztę przestrzeni  $\mathbf{R}^3$  wypełniamy okręgami leżącymi w płaszczyznach prostopadłych do  $p$  i mającymi środki na tej prostej.

osiąga swoją wartość najmniejszą, równą

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) + \left(\sum_{i=1}^n b_i\right)}$$

Widzimy zatem, że nierówność  $\sum \min f_i(x) \leq \min(\sum f_i(x))$  to, w tym przypadku, nierówność

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i}{a_i + b_i} \leq \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) + \left(\sum_{i=1}^n b_i\right)},$$

która dla  $n = 2$  jest nierównością przedstawioną na początku tego Kącika.

Rozwiążmy na koniec, tą samą metodą, jeszcze dwa zadania.

**Zadanie 1.** Udowodnić, że jeżeli  $a_1, a_2, \dots, a_n$  są liczbami dodatnimi,  $b_1, b_2, \dots, b_n$  – dowolnymi liczbami rzeczywistymi, to

$$\frac{b_1^2}{a_1} + \dots + \frac{b_n^2}{a_n} \geq \frac{(b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

**Rozwiązanie.** Rozważmy funkcje

$$f_i(x) = a_i x^2 + 2b_i x, \quad i = 1, 2, \dots, n, \text{ gdzie } a_i > 0, b_i \in \mathbf{R}.$$

Otóż każda z nich osiąga swoją wartość najmniejszą równą  $-b_i^2/a_i$ , natomiast najmniejsza wartość funkcji

$$F(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) = \left(\sum_{i=1}^n a_i\right) x^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n b_i\right) x$$

wynosi  $-\frac{(b_1 + \dots + b_n)^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$ .

Przyjrzyjmy się teraz nierówności  $\sum \min f_i(x) \leq \min \sum f_i(x)$ , a okaże się, że w tym przypadku jest to nierówność z zadania.

**Zadanie 2.** Dowieść, że jeżeli  $a_i$  oraz  $b_i$  są liczbami dodatnimi ( $i=1, 2, \dots, n$ ), to

$$(*) \quad \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{b_1} + \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^{b_2} \dots \dots \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{b_n} \geq \left(\frac{b_1 + \dots + b_n}{a_1 + \dots + a_n}\right)^{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$$

**Rozwiązanie.** Rozważmy funkcje  $f_i(x) = a_i e^x - b_i x - b_i$ , gdzie  $a_i > 0, b_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ . Każda z tych funkcji osiąga swoją wartość najmniejszą w punkcie  $\ln \frac{b_i}{a_i}$ , równą  $-b_i \ln \frac{b_i}{a_i}$ . Podobnie wyznaczamy najmniejszą wartość

funkcji  $\sum_{i=1}^n f_i(x)$ . Zatem nierówność  $\sum \min f_i(x) \leq \min \sum f_i(x)$  to w tym przypadku nierówność

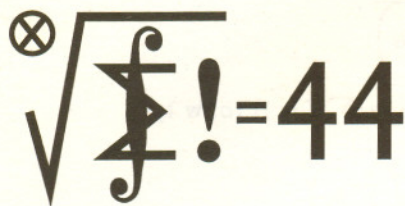
$$\sum_{i=1}^n b_i \ln \frac{b_i}{a_i} \geq \left(\sum_{i=1}^n b_i\right) \ln \frac{b_1 + \dots + b_n}{a_1 + \dots + a_n},$$

z której wprost wynika nierówność zadania.

**Uwaga.** Z nierówności (\*) otrzymujemy:

1. nierówność Cauchy’ego dla średnich, jeśli podstawimy  $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1/n$ ,
2. nierówność  $b_1^{b_1} \dots b_n^{b_n} \geq \left(\frac{b_1 + \dots + b_n}{n}\right)^{b_1 + \dots + b_n}$ , jeśli podstawimy w (\*)  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$ .





Termin nadsyłania rozwiązań:

31 VIII 1995

Czołówka ligi zadaniowej

**Klub 44 M**

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 283 (WT=2,19) i 284 (WT=2,36)  
z numeru 8/1994

Waldemar Pompe - Warszawa 43,89

Krzysztof Jedziniak - Katowice 43,59

Mirosław Matłega - Skoczów 40,30

## Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 3$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. **Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1995.**

## Zadania z matematyki nr 301, 302

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**301.** Wielomian  $P(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n + c_{n+1}x^{n+1}$  jest podzielny bez reszty przez wielomian  $Q(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ ; współczynniki obu wielomianów są liczbami rzeczywistymi,  $c_{n+1} = a_n \neq 0$ . Dowieść, że

$$\max(|a_0|, \dots, |a_n|) \leq (n+1) \max(|c_0|, \dots, |c_{n+1}|).$$

**302.** Pięciokąt  $ABCDE$  jest wpisany w okrąg. Na półprostych  $AD^{\leftarrow}$ ,  $AC^{\leftarrow}$ ,  $BC^{\leftarrow}$ ,  $BD^{\leftarrow}$  odkładamy odpowiednio odcinki  $AK$ ,  $AL$ ,  $BM$ ,  $BN$  o długościach  $|AK| = |AE|$ ,  $|AL| = |AD|$ ,  $|BM| = |BD|$ ,  $|BN| = |BE|$ . Udowodnić, że czworokąt  $KLMN$  jest równoległobokiem wtedy i tylko wtedy, gdy  $|CD| = |DE|$ .

Zadanie 302 zaproponował pan Waldemar Pompe z Warszawy.

## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/1995

Przypominamy treść zadań:

**293.** Ciąg wielomianów  $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots$  jest określony wzorami

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x,$$

$$nP_{n+1}(x) = (n+1)xP_n(x) - P_{n-1}(x) \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Dowieść, że wszystkie pierwiastki rzeczywiste każdego z wielomianów  $P_n(x)$  są liczbami z przedziału  $(-1; 1)$ .

**294.** Udowodnić, że wewnątrz dowolnego czworokąta wypukłego  $ABCD$  istnieje punkt, którego rzuty na proste  $AB, BC, CD, DA$  leżą na jednym okręgu.

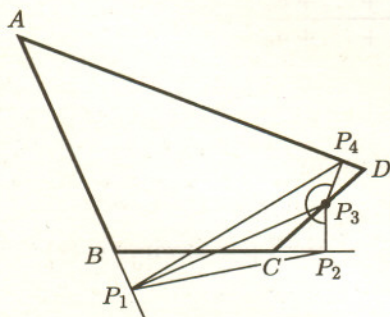
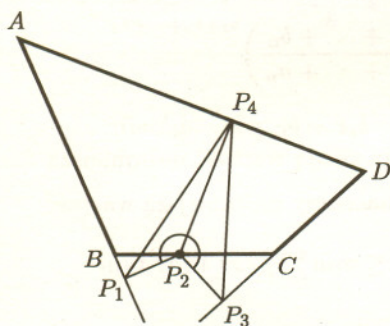
**293.** Ustalmy liczbę rzeczywistą  $x$  taką, że  $|x| \geq 1$ , i oznaczmy wartość  $P_n(x)$  przez  $a_n$ . Tak więc  $|a_1| \geq |a_0|$ . Przyjmijmy indukcyjnie, że dla pewnego  $n$  zachodzi nierówność  $|a_n| \geq |a_{n-1}|$ . Wówczas, tym bardziej,  $|xa_n| \geq |a_{n-1}|$ ; zatem liczby  $xa_n$  oraz  $xa_n - a_{n-1}$  są obie nieujemne lub obie niedodatnie i wobec tego

$$\begin{aligned} |a_{n+1}| &= \left| \frac{n+1}{n}xa_n - \frac{1}{n}a_{n-1} \right| = \left| xa_n + \frac{1}{n}(xa_n - a_{n-1}) \right| = \\ &= |xa_n| + \frac{1}{n}|xa_n - a_{n-1}| \geq |xa_n| \geq |a_n|. \end{aligned}$$

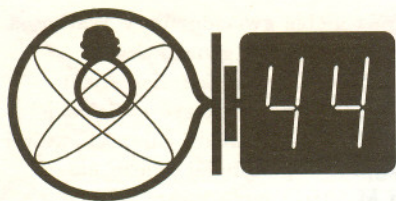
Przez indukcję wnosimy, że  $1 = |a_0| \leq |a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq \dots$ . Stąd wniosek, że dla  $|x| \geq 1$  żadna z liczb  $P_n(x)$  nie jest równa zeru.

**294.** Nie tracąc ogólności przyjmijmy, że  $|\angle ABC| + |\angle BCD| \geq 180^\circ$  oraz  $|\angle BCD| + |\angle CDA| \geq 180^\circ$ . Dla punktu  $P$  leżącego wewnątrz lub na brzegu czworokąta  $ABCD$ , nie pokrywającego się z żadnym z wierzchołków, oznaczmy przez  $P_1, P_2, P_3, P_4$  rzuty  $P$  odpowiednio na proste  $AB, BC, CD, DA$ , a przez  $|\angle P_1|, |\angle P_2|, |\angle P_3|, |\angle P_4|$  miary kątów wewnętrznych czworokąta  $P_1P_2P_3P_4$ .

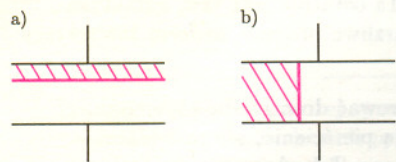
Jeśli punkt  $P$  leży na odcinku  $BC$  (a więc  $P_2$  pokrywa się z  $P$ ), to  $|\angle P_2| \geq 180^\circ$ . Jeśli punkt  $P$  leży na odcinku  $CD$  (a więc  $P_3$  pokrywa się z  $P$ ), to  $|\angle P_3| \geq 180^\circ$ . Suma  $|\angle P_1| + |\angle P_3|$  jest w pierwszym przypadku mniejsza od  $180^\circ$ , a w drugim - większa od  $180^\circ$ . Gdy punkt  $P$  zmienia swoje położenie, miary kątów czworokąta  $P_1P_2P_3P_4$  zmieniają się w sposób ciągły. Jeżeli więc punkt  $P$  przebiega dowolny odcinek, którego jeden koniec leży na boku  $BC$ , a drugi na  $CD$ , to suma  $|\angle P_1| + |\angle P_3|$  przyjmie przy pewnym położeniu punktu  $P$  wartość  $180^\circ$ . Na czworokącie  $P_1P_2P_3P_4$  da się wówczas opisać okrąg.







199. Między okładki płaskiego kondensatora powietrznego wpuszczono ciecz dielektryczną w ilości niewystarczającej do wypełnienia przestrzeni między okładkami. Jeśli kondensator naładować, to czy ciecz utworzy warstwę równoległą do okładek (rys. 1a), czy też zajmie część powierzchni okładek (rys. 1b)? Należy pominąć efekty brzegowe, tzn. przyjąć, że rozmiary okładek (zarówno w części zajętej przez ciecz na rysunku 1b, jak i w pozostałej części) są znacznie większe od ich wzajemnej odległości, a ponadto pominąć efekty siły ciężkości oraz napięcia powierzchniowego.



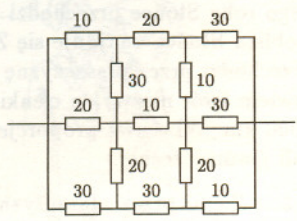
Rys. 1.

200. Ciało o masie  $m$  porusza się po linii prostej pod wpływem siły wywieranej przez nieważką sprężynę o stałej sprężystości  $k$ . Punkt zamocowania drugiego końca sprężyny tak się obluźował, że sprężyna drgając porusza nim; jego prędkość jest proporcjonalna do siły, a stała proporcjonalności  $\alpha$  jest dana. Zakładając, że  $\alpha$  jest małe (obluźwanie jest niewielkie) obliczyć, po jakim czasie amplituda drgań ciała zmaleje 2 razy w stosunku do amplitudy początkowej.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/1995

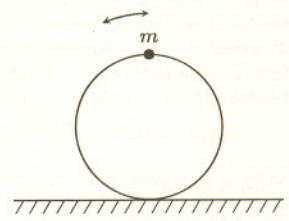
Przypominamy treść zadań:

191. Obliczyć przybliżoną wartość oporu zastępczego obwodu przedstawionego na rysunku 2 (liczby oznaczają oporności w omach). Należy podać ocenę dokładności przybliżenia i uzasadnić ją. Rozwiązanie powinno być możliwie dokładne, a jednocześnie jak najmniej pracochłonne. Użycie komputera do obliczeń jest wykluczone.



Rys. 2.

192. Małe ciało o masie  $m$  przymocowano do cienkiej obręczy o masie  $M$  i promieniu  $r$ . Obręcz postawiono pionowo (rys. 3) i bardzo lekko pchnięto w lewo lub w prawo. Jeśli podczas ruchu obręczy nie występuje poślizg ani straty energii, to jaka musi być wartość stosunku  $M/m$ , aby obręcz „podskaczyła”, tzn. oderwała się od podłoża?



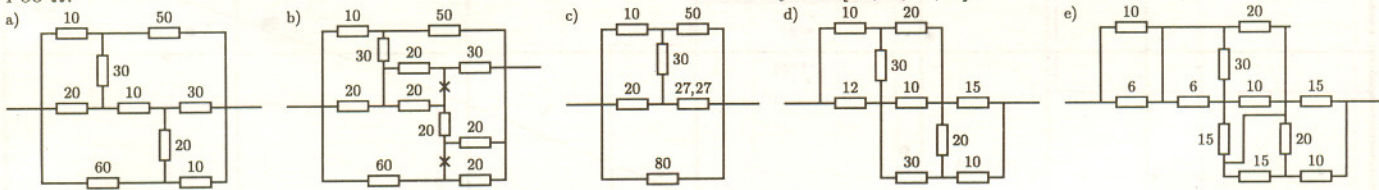
Rys. 3.

191. Skorzystamy z oczywistego twierdzenia, że przerwanie któregośkolwiek połączenia w obwodzie nie zmniejsza oporu zastępczego całości, a zwarcie dowolnych dwóch punktów nie zwiększa oporu. Aby uzyskać oszacowanie od góry, przerwijmy więc wszystkie połączenia pionowe na schemacie. Wtedy mamy trzy opory: 60  $\Omega$ , 60  $\Omega$  i 70  $\Omega$  połączone równolegle, a ich opór zastępczy wynosi 21  $\Omega$  (zapiszmy to w skrócie tak: 60  $\oplus$  60  $\oplus$  70 = 21, gdzie znakiem  $\oplus$  oznaczono operację  $a \oplus b = (a^{-1} + b^{-1})^{-1}$ ). Dla oszacowania od dołu zewrzyjmy wszystkie połączenia pionowe; ponieważ 10  $\oplus$  20  $\oplus$  30 = 5,455, a 30  $\oplus$  30  $\oplus$  10 = 6, więc całkowity opór wynosi  $2 \cdot 5,455 + 6 = 16,91 \Omega$ . Taką „brutalną” metodą zamknęliśmy szukany opór w przedziale [16,91, 21].

Posłużymy się więc trickiem: każdy z tych oporników 10  $\Omega$  zastąpimy dwoma równolegle połączonymi opornikami po 20  $\Omega$  (rys. 4b) i – zgodnie z zasadą oszacowania od góry – przerwiemy połączenia oznaczone krzyżykami. Standardowe przekształcenia (50  $\oplus$  60 = 27,273) prowadzą do schematu z rysunku 4c. Następny trick polega na założeniu, że prąd płynący przez opornik 30  $\Omega$  jest 2 razy mniejszy od prądu przechodzącego przez opornik 20  $\Omega$  i zgodnie z tym na zastąpieniu opornika  $R = 27,273 \Omega$  przez dwa równoległe:  $3R = 81,82 \Omega$  i  $1,5R = 40,91 \Omega$ . Po „rozcięciu” wyliczamy  $81,82 + 30 = 111,82$ ,  $111,82 \oplus 50 = 34,55$ ,  $44,55 \oplus 60,91 \oplus 80 = 19,47$ .

Zawężenie przedziału wymaga zastosowania bardziej subtelniejszego podejścia. Zaczniemy od oszacowania od góry. Usuwamy tym razem tylko dwa oporniki pionowe: prawy górny 10  $\Omega$  i lewy dolny 20  $\Omega$  (ich okolica wydaje się zbliżona do zrównoważonego mostka). W powstałym obwodzie (rys. 4a) można zauważyć, że prąd przepływający przez środkowy opornik 10  $\Omega$  dzieli się w przybliżeniu równo na prawy opornik 30  $\Omega$  i pionowy opornik 20  $\Omega$ ; tak samo wydaje się, że prąd płynący przez prawy dolny opornik 10  $\Omega$  pochodzi w połowie z oporników 20  $\Omega$  i 60  $\Omega$ .

Poprawione oszacowanie od dołu rozpoczynamy od zwarcia tych samych co poprzednio pionowych oporników 10  $\Omega$  i 20  $\Omega$ . Na otrzymanym schemacie (rys. 4d) przyjmijmy, że spadki napięcia na górnym oporniku 10  $\Omega$  i na pionowym oporniku 30  $\Omega$  są zbliżone – zastąpmy więc opornik 12  $\Omega$  dwoma po 6  $\Omega$  połączonymi szeregowo i zewrzyjmy punkty mające – jak sądzimy – zbliżony potencjał. Taką samą operację zrobimy z opornikiem 30  $\Omega$  na dole, dzieląc go na dwa po 15  $\Omega$  i zwierając złącze jak na rysunku 4e. Dalsze przekształcenia są banalne, a w wyniku otrzymujemy 19,14  $\Omega$ . Jak widać, niewielkim nakładem pracy ograniczyliśmy możliwy przedział do wyniku [19,14, 19,47].



Rys. 4

192. Oznaczmy przez  $\alpha$  kąt obrotu obręczy względem położenia początkowego. Prędkość kątową  $\omega$  jest równa  $da/dt$ , a prędkość liniowa  $\vec{v}$  małego ciała jest sumą prędkości środka obręczy i prędkości ruchu obiegowego względem środka:

$$\vec{v} = [\omega r, 0] + [\omega r \cos \alpha, -\omega r \sin \alpha] = \omega r [1 + \cos \alpha, -\sin \alpha].$$

Całkowitą energię kinetyczną  $\frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} M (\omega r)^2 + \frac{1}{2} m v^2$  przyrównujemy do spadku energii potencjalnej  $m g r (1 - \cos \alpha)$  i podstawiamy moment bezwładności obręczy  $I = M r^2$ . Otrzymujemy

$$(1) \quad m g (1 - \cos \alpha) = \omega^2 r (M + m (1 + \cos \alpha)).$$

Różniczkując to równanie względem czasu wyznaczmy przyspieszenie kątowe:

$$(2) \quad \epsilon = \frac{m (M + 2m) g \sin \alpha}{2r (M + m (1 + \cos \alpha))^2}.$$

Pionową składową siły reakcji podłoża znajdziemy ze wzoru  $N = (M + m)g + m a_y = (M + m)g + m d v_y / dt$ , czyli po podstawieniu  $v_y = -\omega r \sin \alpha$  mamy

$$N = (M + m)g - m \epsilon r \sin \alpha - m \omega^2 r \cos \alpha.$$

Analiza numeryczna wyrażenia otrzymanego po podstawieniu tu wzorów (1) i (2) prowadzi do wniosku, że siła  $N$  jest dodatnia dla wszystkich wartości  $\alpha$  tylko wtedy, gdy  $M/m > 0,0769$ . Jeśli ten warunek nie jest spełniony, to obręcz „podskaoczy” (gdy  $M/m$  jest nieznacznie mniejsze od 0,0769, podskok nastąpi w okolicy kąta  $\alpha$  równego 113°).



# Niebo przez lornetkę



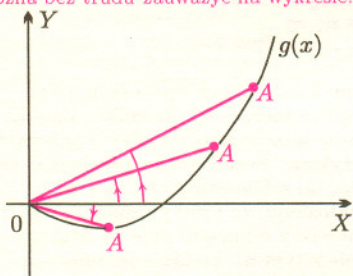
**Rozwiązanie zadania M 738.** Niech  $y \geq x > 0$ , a  $\epsilon$  niech będzie dowolną liczbą dodatnią. Wówczas

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{g(x)}{x} = \\ &= \frac{g\left(\frac{x}{y}\left(y - \frac{y-x}{x}\epsilon\right) + \left(1 - \frac{x}{y}\right) \cdot \epsilon\right)}{x} \leq \\ &\leq \frac{\frac{x}{y}g\left(y - \frac{y-x}{x}\epsilon\right) + \left(1 - \frac{x}{y}\right)g(\epsilon)}{x} \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność zachodzi dzięki wypukłości funkcji  $g$ , bowiem  $\frac{x}{y}$  i  $\frac{y-x}{y}$  są dodatnie oraz  $\frac{x}{y} + \frac{y-x}{y} = 1$ . Ponieważ  $\epsilon$  możemy dobrać dowolnie, to po prawej stronie nierówności możemy przejść do granicy  $\epsilon \rightarrow 0$ . Ponieważ ciągłość funkcji  $g$  na półprostej  $(0, \infty)$  jest konsekwencją wypukłości, otrzymujemy

$$\phi(x) = \frac{g(x)}{x} \leq \frac{g(y)}{y} = \phi(y),$$

co było do wykazania. Wszystko to można bez trudu zauważyć na wykresie.

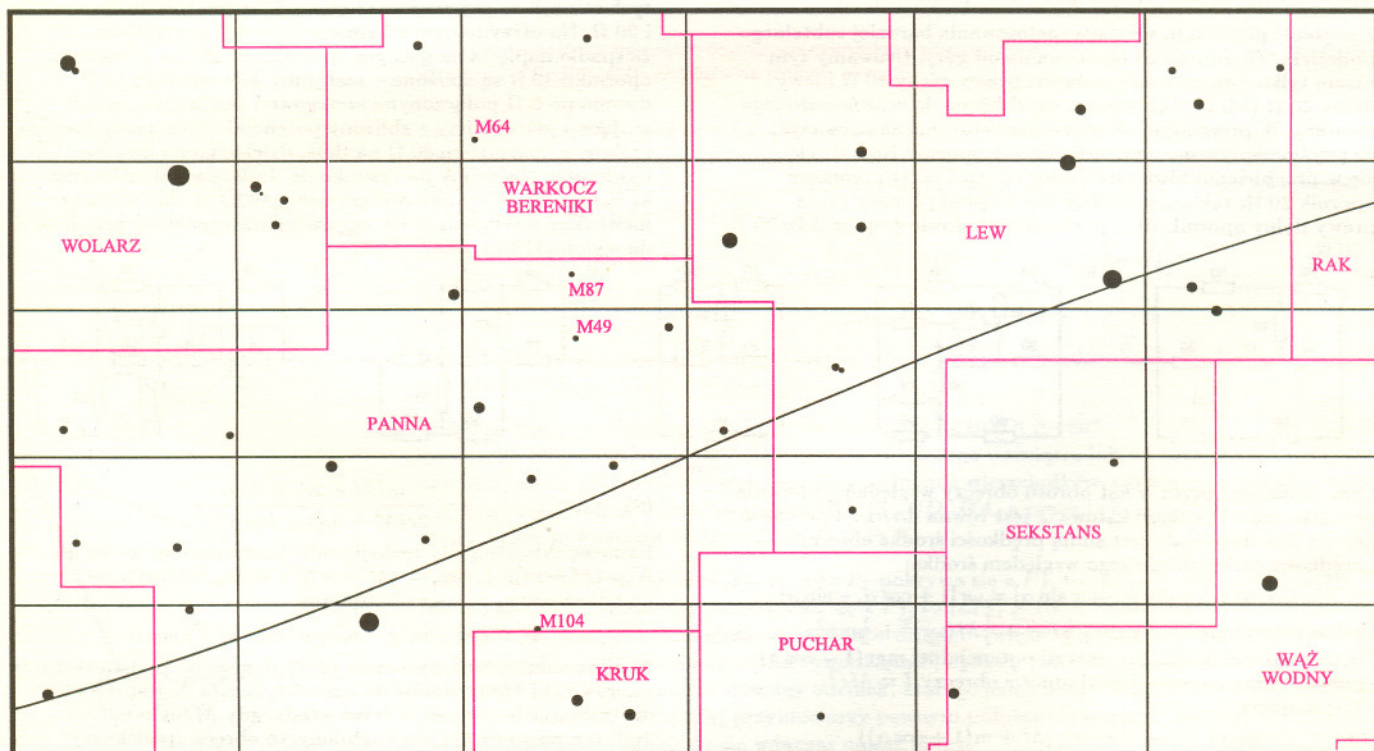


Gdy przemieszczamy punkt  $A$  po wykresie funkcji wypukłej  $g$  w prawo, to tangens zorientowanego kąta między osią  $OX$  a półprostą  $OA$  rośnie.

W maju w kierunku południowym widzimy wysoko na niebie gwiazdozbiory Warkocza Bereniki i Panny. W pierwszym z nich, nie zawierającym jasnych gwiazd, leży północny biegun Galaktyki oraz regularna, bogata gromada galaktyk (około 1000 członków), odległa o 100 Mpc. Przez lornetkę można próbować zobaczyć najjaśniejszą z galaktyk tej gromady, M 64. Natomiast w Pannie leży inna gromada galaktyk, której centrum jest odległe od nas o 20 Mpc i do której najprawdopodobniej należy nasza Galaktyka. Wchodzące w jej skład galaktyki M 49 i M 104 (a może nawet jeszcze jedna – M 87) mogą być widoczne przez lornetkę. Ta ostatnia jest tzw. galaktyką aktywną, co oznacza, że w jej centrum toczą się burzliwe procesy, którym towarzyszy np. wyrzucanie materii z jądra.

Właściciele silnych lornetek mogą w maju zaobserwować dość rzadkie zjawisko. Jak wiadomo, wszystkie cztery wielkie planety mają pierścienie, ale metodami amatorskimi można zobaczyć tylko pierścienie Saturna. Ich płaszczyzna (będąca zarazem płaszczyzną równikową Saturna) nie pokrywa się z płaszczyzną orbity planety; kąt między nimi wynosi  $27^\circ$ . Wynika z tego, że na niebie Saturna Słońce w ciągu jego roku (trwającego 29,4 lat ziemskich) porusza się podobnie jak na niebie ziemskim, w szczególności odbywa się coś w rodzaju zmian pór roku. W rezultacie dwa razy w ciągu saturnowego roku Słońce przechodzi przez płaszczyznę równikową planety, a skoro zawsze w pobliżu Słońca znajduje się Ziemia, to dwukrotnie w ciągu saturnowego roku Ziemia przechodzi przez płaszczyznę pierścieni. Pierścieni wtedy po prostu nie widać! Jest to bowiem twór niezwykle cienki, ich grubość wynosi kilkaset metrów, przy średnicy 340 000 km. Właściwie proporcje miałby papierowy krąg o rozmiarach co najmniej sali gimnastycznej.

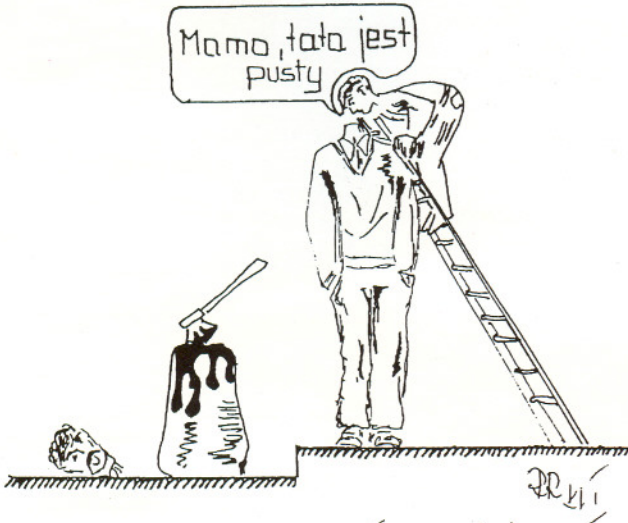
Okazuje się, że kolejne przejście Ziemi przez płaszczyznę pierścieni będzie miało miejsce 22 maja. Warunki obserwacyjne nie będą najlepsze, ale próbować można. Praktycznie przez cały rok Saturn będzie znajdował się na granicy Wodnika i Ryb, a więc w maju widać go będzie nad ranem dość nisko nad wschodnim horyzontem. Z biegiem czasu warunki jego widoczności będą się wprawdzie polepszać (opozycja, czyli ustawienie w kierunku przeciwnym do Słońca, nastąpi 14 września; wtedy planeta będzie górować o północy), niestety, najważniejsze będą dni tuż po 22 maja. Mając silną lornetkę można próbować zaobserwować, w ile dni po tej dacie pierścienie zaczną być widoczne, co może nie być łatwe właśnie ze względu na bliskość wschodzącego Słońca. Pamiętajmy też, że Galileusz za pomocą swoich lunet o mocy porównywalnej z mocą współczesnych lornetek widział wprawdzie pierścienie Saturna, ale nie zdawał sobie z tego sprawy. Nie rozpoznał ich jako pierścieni – myślał, że widzi trzy blisko położone ciała niebieskie. My jesteśmy w lepszej sytuacji, bo wiemy, czego szukamy.



Tomasz KWAST



Dwa zamieszczone poniżej rysunki wykonał Rafał Rogala, uczeń Liceum Ogólnokształcącego w Bochni; gdy je rysował, uczęszczał do I klasy.



Rodzina Pustych (zbiorów)



Wirusy komputerowe, opisane w poprzednim numerze *EPSILONA*, nie istnieją; był to żart primaaprilisowy, który, mamy nadzieję, nie stanie się inspiracją twórczą dla autorów wirusów.

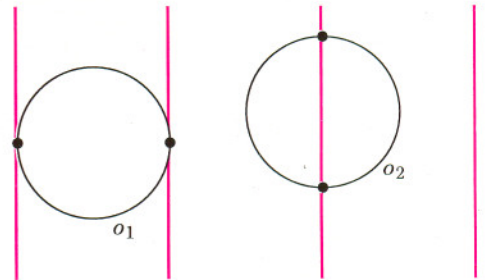
## Przecięcia

Zacznijmy od pytania: czy istnieją dwa takie podzbiory płaszczyzny, że jakkolwiek położymy je na tej płaszczyźnie, to zawsze będą miały dokładnie jeden punkt wspólny? Używając uczonego matematycznego języka, powyższe proste zdanie formuluje się w następujący sposób: czy istnieją takie  $A, B \subset \mathbb{R}^2$ , że dla dowolnych izometrii płaszczyzny  $f$  i  $g$ :  $\text{card}(f(A) \cap g(B)) = 1$ ?

Gdy się chwilę nad tą zagadką pomyśli, odpowiedź szybko się nasunie. Oczywiście, twierdzenie jest prawdziwe – wystarczy wziąć jako jeden zbiór punkt, a jako drugi całą płaszczyznę. Dobrze; to jest jednak przypadek raczej banalny, odrzucmy go więc i zapytajmy o istnienie innego przykładu. Co wtedy?

Otóż, odpowiedź jest znana, ale nie w pełni satysfakcjonująca – wiadomo, że takie zbiory istnieją, ale nikt nie potrafił, jak dotąd, pokazać konkretnych przykładów... Problem postawił nie byle kto, bo Hugo Steinhaus, a rozwiązał też nie byle kto, bo Waław Sierpiński. Może wymienienie tych nazwisk będzie pewnego rodzaju „prztyczkiem w nos” dla osób, które uważają, że tego rodzaju problemy można traktować jedynie jako zabawę i szanujący się matematycy nie powinni im poświęcać uwagi. Dowód istnienia odpowiednich zbiorów opiera się na poważnej machinerii teoriomnościowej – nie wszystkim Czytelnikom to coś powie, ale korzysta się z aksjomatu wyboru i indukcji pozaskończonej. Otwarte pozostaje pytanie, czy istnieją „porządne” zbiory o szukanych własnościach.

Problem można uogólnić – zamiast o zbiory przecinające się w dokładnie jednym punkcie zapytać o zbiory przecinające się w dokładnie  $n$  punktach. I tu odpowiedź jest zabawna. Gdy  $n$  jest liczbą parzystą, istnieje elementarne rozwiązanie. Dla  $n$  równego 2 wystarczy wziąć jako pierwszy zbiór okrąg o średnicy 1, a jako zbiór drugi rodzinę takich prostych równoległych, że dwie kolejne proste są odległe o 1. Łatwo zauważyć, że jakkolwiek położymy na płaszczyźnie czy okrąg, czy te proste, dwa zbiory będą miały dokładnie 2 punkty wspólne. Cztery punkty wspólne? Nic łatwiejszego; wystarczy rozważyć okrąg o średnicy równej 2. I tak dalej. A co z liczbami nieparzystymi? O ile mi wiadomo, problem jest wciąż otwarty.



Można też zastanowić się nad zadaniem łatwiejszym: zamiast podzbiorów płaszczyzny rozważać podzbiory prostej. Pozostawiam je Czytelnikowi do samodzielnego rozwiązania.

Krzysztof CIESIELSKI