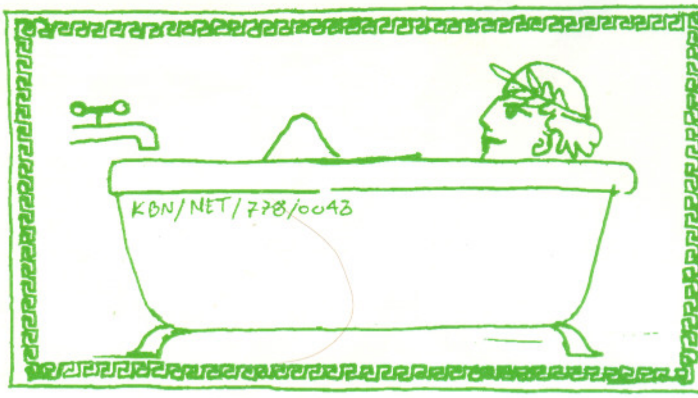


SPIS TREŚCI

NUMERU 4(251)

W następnym numerze:

Radiowęglowy zegar

Okładkę i ilustracje wykonał
Bernard BADZIOCH

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski

„Delta" – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.

Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7
02-678 Warszawa
tel. 43-02-43 wewn. 21
PAWELST@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej w Warszawie, ul. Mińska 65
Skład systemem TEX wykonała Redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21)
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące**. Cena jednego numeru w 1995 roku wynosi 1 zł 50 gr. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru wynosi w 1995 r. 3 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na III kwartał 1995 r. wynosi 4 zł 50 gr.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
   - na teren kraju
     - jednostki kolportażowe „Ruch" S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób,
   - na zagranicę
     - „Ruch" S.A. Oddział Warszawa, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – **dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty**, z wyjątkiem zlecenia dostawy pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni pokrywa prenumerator.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
   - na kraj i zagranicę – do 20 XI na I kwartał roku następnego
     do 20 II na II kwartał
     do 20 V na III kwartał
     do 20 VIII na IV kwartał.

Cena 1 egzemplarza 1 zł 50 gr (15 000 zł)

Teoria liczb i geometria

Piotr Wojciech ŚNIADY

Jest to skrót pracy „Geometryczne dowody dwóch twierdzeń dotyczących ułamków Fareya", za którą Autor zdobył srebrny medal na Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki w 1994 roku.

Niekiedy twierdzeń z teorii liczb dowodzi się wykorzystując metody geometryczne. Zilustrujemy to podając nowe dowody dwóch twierdzeń dotyczących tzw. ułamków Fareya.

Niech N będzie dowolną, ustaloną liczbą naturalną.

Ciąg $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \frac{m_3}{n_3}, \ldots, \frac{m_k}{n_k}$ wszystkich ułamków **nieskracalnych** z przedziału $[0,1]$, o mianownikach nie przekraczających N, ustawionych w porządku rosnącym, nazwiemy ciągiem ułamków Fareya. Dla $N = 7$ takim ciągiem jest

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}.$$

Aż do końca artykułu wszystkie ułamki Fareya będą odpowiadać jednej ustalonej liczbie N.

Twierdzenie 1. *Niech $\frac{m}{n}$ i $\frac{m'}{n'}$ $\left(\frac{m}{n} < \frac{m'}{n'}\right)$ będą dwoma kolejnymi wyrazami ciągu ułamków Fareya. Wówczas*

$$m'n - mn' = 1\,.$$

Dowód. Rozważmy w układzie współrzędnych dwa punkty $A = (n,m)$ i $B = (n',m')$. Niech O oznacza początek układu współrzędnych. We wnętrzu odcinka AO nie ma żadnego punktu kratowego (tzn. punktu o obu współrzędnych całkowitych). W przeciwnym bowiem przypadku punkt kratowy (a,b) z wnętrza odcinka AO spełniałby $\frac{b}{a} = \frac{m}{n}$ (twierdzenie Talesa) oraz $a < n$, co przeczy nieskracalności ułamka $\frac{m}{n}$. Analogicznie nie ma punktów kratowych we wnętrzu odcinka BO.

Udowodnimy teraz, że również we wnętrzu odcinka AB, jak i we wnętrzu trójkąta OAB nie ma punktów kratowych. Przypuśćmy bowiem, że można znaleźć punkt kratowy (a,b) należący do brzegu lub wnętrza trójkąta OAB, nie leżący jednak na żadnym z boków OA i OB. Stąd a jest mniejsze od większej z liczb n, n' i w konsekwencji $a \leq N$. Ponieważ punkt (a,b) leży między półprostymi OA i OB, więc wobec twierdzenia Talesa mamy

$$\frac{m}{n} < \frac{b}{a} < \frac{m'}{n'}\,.$$

Przeczy to założeniu, że $\frac{m}{n}$ i $\frac{m'}{n'}$ są kolejnymi ułamkami Fareya.

Podsumowując, udowodniliśmy, że na brzegu trójkąta OAB leżą dokładnie trzy punkty kratowe: O, A, B, oraz że we wnętrzu trójkąta OAB nie ma punktów kratowych.

Skorzystamy teraz z następującego ślicznego twierdzenia Picka (jego dowód można znaleźć w *Delcie* 4/1993).

Niech S oznacza pole powierzchni dowolnego wielokąta o wierzchołkach w punktach kratowych, B – liczbę punktów kratowych leżących na jego brzegu, a W – liczbę punktów kratowych w jego wnętrzu. Wówczas $S = W + \frac{1}{2}B - 1$.

Jak fizyk gra na giełdzie albo od upadku do rozmagnesowania adiabatycznego

Jan GAJ

Artykuł ten ukazał się w piśmie studentów Nauczycielskiego Kolegium Fizyki *Młoda Fizyka*.

Każdy, kto kiedykolwiek przewrócił się albo spadł skądkolwiek, zgodzi się, że **układ fizyczny dąży do osiągnięcia minimalnej energii**.

Chwila zastanowienia uprzytomni nam, że doświadczenia prowadzące do sformułowania powyższej zasady dotyczą układów **makroskopowych**. Naturalne pytanie, czy dotyczy ona także mikroskopowych stopni swobody, można zaatakować posługując się powszechnie uznawanym **rozkładem kanonicznym**. Określa on prawdopodobieństwo tego, że układ w równowadze znajdzie się w określonym stanie α (o energii E_α). Jest ono wykładniczą funkcją stosunku energii do temperatury,

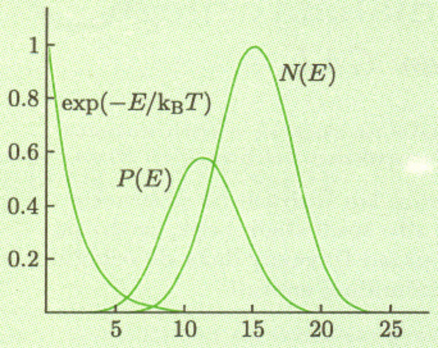
$$P_\alpha \sim \exp(-E_\alpha/k_B T)\,,$$

gdzie k_B oznacza stałą Boltzmanna. Zbyt łatwy byłby jednak wniosek: „ależ tak, zasada stosuje się zawsze, przecież przy najniższej energii prawdopodobieństwo jest największe!". Nie ostaje się on w konfrontacji ze światem, w którym morza nie są zamarznięte, powietrze nie zestaliło się, a wnętrze Słońca dysponuje ogromną nadwyżką energii hojnie rozsyłanej wokół od miliardów lat. A więc **rozkład kanoniczny w niebezpieczeństwie?** Nietrudno go uratować zauważając, że czym innym jest prawdopodobieństwo P_α zajęcia stanu α, a czym innym prawdopodobieństwo $P(E)$ tego, że układ będzie miał energię E, czyli że zajmie **jakikolwiek** stan o tej energii (może być ich wiele). To drugie jest większe od pierwszego tyle razy, ile wynosi liczba $N(E)$ stanów układu o energii E

$$P(E) \sim N(E)\exp(-E/k_B T)\,.$$

Układ przyjmie więc energię bliską wartości, dla której powyższe wyrażenie osiąga wartość największą. Przykładem może być układ n mikroskopowych momentów magnetycznych o spinie 1/2, z których każdy może zajmować tylko dwa stany o energiach różniących się o $\mu_B B$, gdzie μ_B – magneton Bohra oraz B – pole magnetyczne, w którym umieszczono te spiny. Liczba możliwych realizacji stanu, w którym k spośród n spinów jest wzbudzonych (o wyższej energii), wynosi

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$



Na rysunku (gdzie $P(E)$ i $N(E)$ przedstawiono w różnej skali) widać, że choć P_α ma maksimum dla najniższej energii (energia jest proporcjonalna do k), $P(E)$ jest największe przy innej jej wartości. Można widzieć decyzję układu, jaką energię przyjąć, jako wynik walki dwóch tendencji: energia przez człon $\exp(-E/k_BT)$ ciągnie w stronę swojej najniższej wartości, natomiast nieporządek uosobiony przez funkcję $N(E)$ próbuje zwiększyć energię do połowy zakresu jej wartości, bo tam jest największy. Walkę tę można jeszcze prościej przedstawić po zlogarytmowaniu. Będziemy wtedy szukali maksimum funkcji

$$-E/k_BT + \ln N(E)$$

albo, równoważnie, minimum funkcji

$$F = E - k_BT \ln N(E).$$

Widać teraz, że to nie energia układu ma przyjąć minimum, ale inna funkcja stanu: energia pomniejszona o wartość $k_BT \ln N(E)$. Nosi ona nazwę **energii swobodnej**. Omawianą poprzednio walkę widać tu jak na dłoni: energia chce być jak najmniejsza, natomiast nieporządek – jak największy. Miarą nieporządku jest tu wielkość $S = k_B \ln N(E)$ – nazywamy ją **entropią**, natomiast temperaturę T możemy teraz zobaczyć jako kurs, po jakim „sprzedaje się" entropia, albo jako (energetyczną) cenę jednostki nieporządku (jednostki entropii). Po tych wszystkich rozważaniach możemy więc powiedzieć, że prawo, które zostało sformułowane na początku tego tekstu, jest prawdziwe pod warunkiem uzupełnienia go słowem **„swobodnej"**.

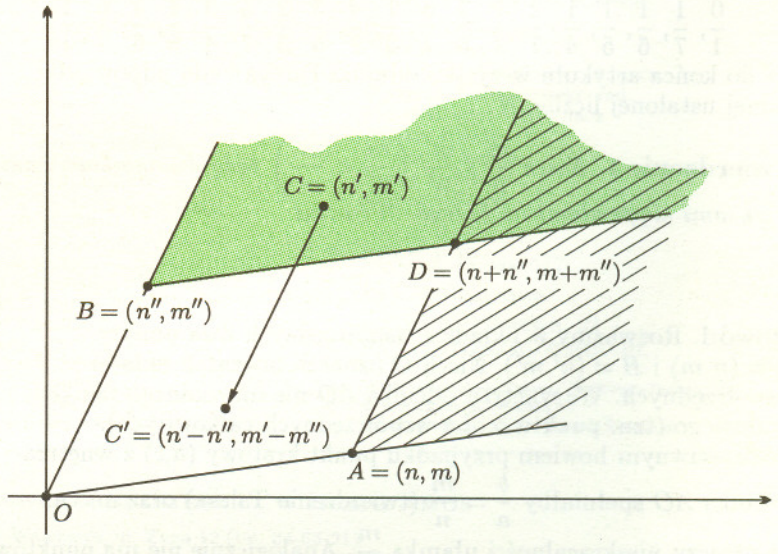
Stąd pole trójkąta OAB jest równe $\frac{1}{2}$. Z drugiej zaś strony nietrudno obliczyć (korzystając z geometrii analitycznej), że pole trójkąta o wierzchołkach $(0,0)$, (n,m) i (n',m') jest równe $|m'n - mn'|/2$. Porównując oba wyniki i korzystając z faktu, że $m'n > mn'$, ostatecznie otrzymujemy

$$m'n - mn' = 1.$$

Twierdzenie 2. *Niech* $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}$ *będą trzema kolejnymi wyrazami ciągu ułamków Fareya. Wówczas*

$$\frac{m'}{n'} = \frac{m+m''}{n+n''}.$$

Dowód. Niech A, B, C, D mają takie współrzędne jak na rysunku 1. Ponieważ $\frac{m}{n} < \frac{m'}{n'} < \frac{m''}{n''}$, więc punkt C leży między półprostymi OA i OB. Udowodnimy, że leży on na brzegu lub we wnętrzu równoległoboku $OBDA$.



Rys. 1

Przypuśćmy bowiem, że leży on poza równoległobokiem. Wówczas należy on do obszaru kolorowego bądź zakreskowanego. Przypuśćmy, że należy on do obszaru kolorowego. Wówczas punkt $C' = (n'-n'', m'-m'')$ powstały z C w wyniku przesunięcia o wektor $\overrightarrow{BO}$ nadal leży między półprostymi OA i OB. Stąd

$$\frac{m}{n} < \frac{m'-m''}{n'-n''} < \frac{m''}{n''}.$$

Ponieważ jedynym ułamkiem Fareya między $\frac{m}{n}$ i $\frac{m''}{n''}$ jest $\frac{m'}{n'}$, więc

$$\frac{m'-m''}{n'-n''} = \frac{m'}{n'}.$$

To zaś oznacza, że punkty O, C i C' leżą na jednej prostej. Prosta ta jest równoległa do wektora $\overrightarrow{C'C} = \overrightarrow{OB}$ i przechodzi przez punkt O. A więc jest to prosta OB. To daje zaś sprzeczność, gdyż punkt C leży **między** półprostymi OA i OB, a więc nie leży na prostej OB.

Analogicznie punkt C nie może leżeć w części zakreskowanej. Tym samym udowodniliśmy, że C należy do brzegu bądź do wnętrza równoległoboku $OBDA$.

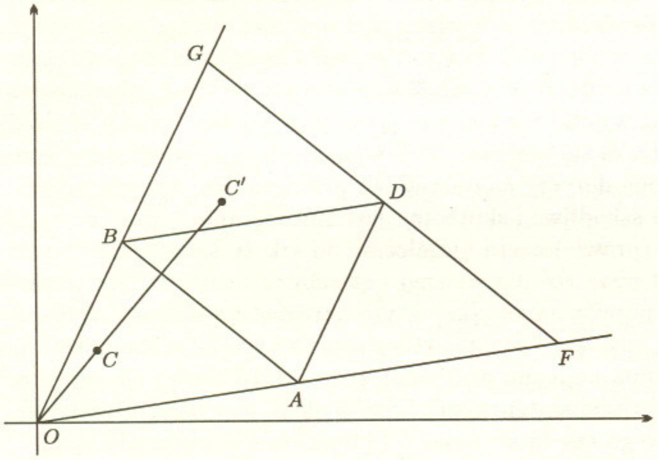
Jeżeli $C = D$, to $n' = n + n''$, $m' = m + m''$, skąd teza. Możemy więc założyć, że $C \neq D$.

Przypuśćmy, że C leży w trójkącie ABD. Niech C' będzie obrazem C przy symetrii środkowej względem środka równoległoboku. Punkt $C' = (a,b)$ jest punktem kratowym należącym do trójkąta OAB. Powtarzając początek dowodu twierdzenia 1 otrzymujemy, że $\frac{m}{n} < \frac{b}{a} < \frac{m''}{n''}$, oraz że po sprowadzeniu do postaci nieskracalnej $\frac{b}{a}$ jest ułamkiem Fareya.

Ponieważ jednak $\frac{m'}{n'}$ jest jedynym ułamkiem Fareya pomiędzy $\frac{m}{n}$ i $\frac{m''}{n''}$, więc $\frac{b}{a} = \frac{m'}{n'}$, czyli punkty O, C i C' leżą na jednej prostej. Na tej samej prostej leży środek równoległoboku, a stąd również punkt D. To zaś w połączeniu z twierdzeniem Talesa daje równość

$$\frac{m'}{n'} = \frac{m+m''}{n+n''}.$$

Pozostał nam do rozpatrzenia przypadek, gdy C należy do trójkąta OAB (rys. 2). Niech k będzie najmniejszą liczbą naturalną, dla której C' (będący obrazem punktu C w jednokładności o środku O i skali k) nie należy do trójkąta OAB. Łatwo zauważyć, że C' należy do trójkąta OFG będącego obrazem trójkąta OAB w jednokładności o środku O i skali 2.



Rys. 2

W przeciwnym bowiem przypadku obraz C w jednokładności o środku O i skali $k-1$ też nie należałby do trójkąta OAB (bo $k-1 \geq k/2$), co przeczy minimalności liczby k.

Punkt C' musi należeć do jednego z przystających trójkątów: BGD, ADF, ABD. Wystarczy rozważyć tylko dwa przypadki: C' należy do $\triangle ABD$ lub C' należy do $\triangle BGD$ (przypadek, gdy C' należy do $\triangle ADF$ jest analogiczny do przypadku, gdy C' należy do $\triangle BGD$).

Jeżeli punkt C' należy do trójkąta BGD, to punkt $H = (a,b)$ – obraz punktu C' w translacji o wektor $\overrightarrow{BO}$ – należy do trójkąta OAB. Podobnie jak wyżej, można wykazać, że $\frac{m}{n} < \frac{b}{a} < \frac{m''}{n''}$ oraz $\frac{b}{a}$ (po ewentualnym skróceniu) jest ułamkiem Fareya, skąd $\frac{b}{a} = \frac{m'}{n'}$. To zaś, analogicznie jak na początku dowodu, implikuje, że punkt C leży na prostej OB – sprzeczność.

Do rozważenia pozostał tylko przypadek, gdy C' należy do trójkąta ABD. Modyfikując powyższe rozważania (odbijamy C symetrycznie względem środka równoległoboku) łatwo dochodzimy do wniosku, że O, C i D leżą na jednej prostej, skąd

$$\frac{m'}{n'} = \frac{m+m''}{n+n''}.$$

Przywołane powyżej rynkowe porównanie możemy eksploatować szerzej zauważywszy, że dla paramagnetyka w polu magnetycznym (a więc dla naszego układu) energia spełnia równość

$$E = -MB,$$

gdzie M jest namagnesowaniem, a B indukcją pola magnetycznego. Możemy poszukać teraz maksimum funkcji $-F$, która jest sumą dwóch bogactw

$$-F = MB + TS.$$

Kandydat na Rotschilda (nasz układ fizyczny) będzie się starał tę sumę powiększyć. Składa się ona z **namagnesowania i nieporządku.** Ceną pierwszego jest **pole magnetyczne**, drugiego – **temperatura**. W procesy rynkowe może jednak wkroczyć eksperymentator zmieniając cenę jednostki namagnesowania, czyli przyłożone pole magnetyczne. Jeżeli zrobi to adiabatycznie (tak, aby spiny nie zdążyły się przeorientować), to entropia (miara nieporządku) się nie zmieni. Namagnesowanie też nie, bo jest proporcjonalne do różnicy liczby spinów w stanach 1 i 2

$$M = \mu_B((n-k)-k).$$

Maksimum sumy, które układ osiągał przy określonej proporcji cen $B:T$, może teraz być osiągnięte przy zmianie temperatury w takiej samej proporcji, w jakiej zmieniono pole magnetyczne. Gracz na giełdzie mógłby to ująć w słowach **„wzrost cen jest zaraźliwy"**. Istotnie, przy sieci wzajemnych powiązań, cechującej gospodarkę rynkową, wzrost cen jakiegoś towaru pociąga za sobą wzrost cen innych produktów. Także przeciwnie: **spadek pola magnetycznego obniża temperaturę.**

W ten sposób wyjaśniliśmy zasadę stosowanego w kriogenice chłodzenia metodą **adiabatycznego rozmagnesowania.** Włączenie pola magnetycznego, aby nie zagrzać przy tym paramagnetyka, musi się przedtem odbyć **izotermicznie** – powoli i przy dobrym kontakcie cieplnym z otoczeniem (termostatem). Zechciej, Czytelniku, zauważyć, że taki proces (spróbuj sprawdzić, że dla $T = \text{const.}$, wzrost B spowoduje wzrost M i spadek S) można widzieć jako **run na akcje, które idą w górę.** Metodą kaskady łącząc na przemian izotermiczne włączanie z adiabatycznym wyłączaniem otrzymuje się temperatury w obszarze milikelwinów. Trochę to pracochłonne, ale czyż nie zabawne?

Dlaczego ludzie nie znają i nie lubią nauk przyrodniczych?

Krzysztof FIAŁKOWSKI

Kraków – Instytut Fizyki UJ

Tekst ten jest kontynuacją dyskusji z numeru 250 *Delty* (3/1995). Przypominamy pytania przedstawione przez redakcję z prośbą o ustosunkowanie się do problematyki w nich zawartej.

1. Jaką korzyść może odnieść ktoś zajmujący się np. hodowlą karpi lub malarstwem abstrakcyjnym ze znajomości małego twierdzenia Fermata, reguły Oersteda czy stałej Hubble'a?

2. Skoro byle kalkulator liczy szybciej i lepiej od człowieka, to po co uczyć człowieka liczenia?

3. Nie ma na świecie gazu doskonałego, próżni, prostokąta ani liczby e itd. Czemu więc z takim uporem o takich właśnie obiektach idealnych mówią wszystkie nauki ścisłe?

4. Fizyka – znaczy to po grecku *rzeczy widzialne, rzeczy naturalne, zjawiska przyrody*. **Czemu nazwa ta uznawana jest dziś za trafną dla nauki o obiektach będących wytworami ludzkiego umysłu, jakimi są w szczególności cząstki elementarne i pola?**

5. O lotach kosmicznych marzyli przed laty wszyscy. Dlaczego, gdy pierwsi ludzie wylądowali na Księżycu, sprawy podróży pozaziemskich przestały – praktycznie wszystkich – obchodzić?

6. Dlaczego *w dobrym tonie* **jest chwalić się szkolnymi niepowodzeniami w nauce matematyki czy fizyki, a nie wypada przyznawać się do niewydolności w humanistyce?**

7. Czemu zawdzięcza w chwili obecnej paranauka swoją przewagę nad nauką?

Dano mi, jak innym, kilka pytań do wyboru. Uznałem jednak, że dwa najciekawsze – o przyczyny towarzyskiego chlubienia się szkolnymi niepowodzeniami z matematyki czy fizyki oraz klęsk nauki w starciach z paranauką – są tak blisko związane, że chętnie spróbuję zastanowić się nad oboma równocześnie.

Zacząć wypadnie, niestety, od win własnych i wspólnych. Z przeprowadzanych przed laty w szkołach badań wynikało, że przed rozpoczęciem nauki fizyki uczniowie uważali ten przedmiot za jeden z najciekawszych. Już po roku ocena ta dramatycznie spadała, a po dwu latach fizyka wygrywała jedynie z językiem rosyjskim (ciekawe, jaki przedmiot jest dziś na tym miejscu?). A więc już w szkole podstawowej złe programy i słabi nauczyciele zniechęcali do fizyki i innych przedmiotów ścisłych, a u większości uczniów wyrządzone wtedy szkody nigdy nie dały się nadrobić. Czy dziś jest lepiej? Chciałbym w to wierzyć patrząc na kolorowe podręczniki i atrakcyjne zeszyty ćwiczeń, ale obawiam się, że największe nawet wysiłki nie zmienią sytuacji w istotny sposób, dopóki zawód nauczyciela nie doczeka się odpowiednich wynagrodzeń i skutecznego systemu oceny pracy. Pozornie dotyczy to wszystkich przedmiotów, ale w naukach ścisłych szczególnie szkodliwe i skuteczne jest zniechęcanie ucznia przez złego nauczyciela: każdy (prawie) czyta niezależnie od szkoły książki czy choćby gazety, wielu nawet pisze coś dla własnej potrzeby, ale nikt (znów: „prawie") nie sięgnie sam po popularną książkę, a tym bardziej nie wykona doświadczenia z fizyki. Naturalna ciekawość świata, którą można i trzeba wykorzystać w celu zainteresowania ucznia naukami przyrodniczymi, szybko ustępuje miejsca zadomowieniu w „świecie zastępczym" filmów akcji, gier komputerowych i komiksów, do którego tak łatwo uciec od kłopotów i obowiązków dnia codziennego. Dawniej w większym stopniu świat ten tworzyły książki, stąd też obawiać się można, że za parę lat „w dobrym tonie" będzie także ignorancja w dziedzinie literatury i historii...

Czy przed ewentualną radykalną „naprawą szkoły" można coś zrobić? Oczywiście – i tu dochodzimy do drugiej przyczyny naszych kłopotów. Przynajmniej znaczna część absolwentów szkół podstawowych jest jeszcze „do uratowania", jeśli w liceach trafi na istotnie lepszych nauczycieli i atrakcyjny program. Sądzę jednak, że niezbędnym warunkiem sukcesu jest tu wyraźne zróżnicowanie wymagań. Minimum programowe, obowiązujące dla wszystkich, musi być naprawdę łatwe do opanowania, ciekawe, a przede wszystkim nie może obejmować wszystkiego, co my uważamy za ważne. Wybierać należy raczej patrząc na codzienne zastosowania, a nie na spójność logiczną i kompletność programu. Trudne problemy, kompletne rozwiązania i wzajemne powiązania różnych zjawisk można i należy przedstawiać uczniom, ale nie od wszystkich można wymagać pełnego opanowania tej części programu. Jeśli zróżnicujemy wymagania, będziemy mogli uczciwie odpowiadać na oświadczenia typu „ja nigdy nic nie rozumiałem(am) z matematyki (fizyki, chemii, biologii)" prostym stwierdzeniem „musiał(a) Pan(i) być okropnie tępym uczniem".

Na koniec tych uwag zostawiłem sprawę „edukacji dorosłych". Czy można jeszcze coś zrobić z kimś, kto nie wyniósł ze szkoły wiedzy z nauk ścisłych, a co gorsza, żywi do nich niechęć? Oczywiście! Trzeba tylko umiejętnie apelować do dwu najsilniejszych pobudek: instynktu samozachowawczego i ambicji.

Trzeba pracowicie propagować i nagłaśniać nie tylko wszystkie sukcesy nauki, ale ich zastosowania, a zwłaszcza indywidualne sukcesy ludzi dobrze wykształconych, niekoniecznie uprawiających naukę. Dlaczego tyle czytamy o miliarderach bez wykształcenia, a tak mało o fizykach czy matematykach robiących wielką karierę w świecie biznesu czy polityki? Dlaczego nie pokazuje się częściej, do jakich katastrof prowadzi wiara w pseudonaukę? Dlaczego nie wyjaśnia się dokładnie, że klęski ekologiczne i kryzysy nie są winą nauki, ale jej złego stosowania, a często właśnie wynikiem niedouczenia decydentów i podporządkowania decyzji inwestycyjnych i ekonomicznych takiej czy innej ideologii?

Wszyscy możemy i powinniśmy wnieść wkład w edukację społeczeństwa nie tylko w szkołach i uniwersytetach, ale także w prasie, radiu i telewizji. Spróbujmy przyczynić się do tego, aby na stałe już Nikodem Dyzma został bohaterem negatywnym, a dzieci bawiły się częściej w Mac Gyvera niż w Conana barbarzyńcę...

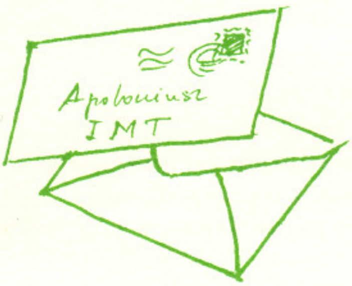
Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

M 735. Udowodnić, że pole rzutu prostokątnego sześcianu o objętości 1 na płaszczyznę jest nie mniejsze niż 1 i nie większe niż $\sqrt{3}$.
Rozwiązanie na str. 10

M 736. Na wszystkich polach nieskończonej szachownicy zapisano liczby naturalne w taki sposób, że liczba napisana na każdym polu jest średnią arytmetyczną ośmiu liczb z sąsiednich pól. Udowodnić, iż liczba 1995 albo wcale nie pojawia się na szachownicy, albo występuje na niej nieskończenie wiele razy.
Rozwiązanie na str. 10

M 737. W jest środkowosymetrycznym wielokątem wypukłym o polu 3. Udowodnić, że W można zawrzeć w pasie między dwiema prostymi równoległymi odległymi o mniej niż 2.
Rozwiązanie na str. 13



Redaguje Adam KOROCIŃSKI

F 403. Przy dobrej pogodzie natężenie pola elektrycznego skierowanego w dół wynosi przy powierzchni Ziemi około 150 V/m, a na wysokości 100 m około 100 V/m. Gęstość jonów w powietrzu blisko powierzchni Ziemi wynosi wtedy $n_+ \approx n_- \approx 6 \cdot 10^8\ \mathrm{m}^{-3}$ i poruszają się one ze średnią prędkością proporcjonalną do natężenia pola (wartość współczynnika proporcjonalności wynosi około $1{,}5 \cdot 10^{-4}\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{V \cdot s}}$). Znaleźć całkowity ładunek Ziemi, jego średnią gęstość powierzchniową, średnią gęstość objętościową wypadkowego ładunku w atmosferze do wysokości 100 m oraz obliczyć, ile czasu potrzeba, aby strumień jonów zneutralizował połowę ładunku Ziemi, przy założeniu braku innych źródeł ładunku.
Z punktu widzenia elektrostatyki powierzchnię Ziemi możemy uważać za dobry przewodnik.
Rozwiązanie na str. 11

F 404. Wszyscy, którzy zajmują się fotografią, doskonale wiedzą, że im silniej przysłaniamy obiektyw, tym większą głębię ostrości uzyskujemy na zdjęciu. Oszacować głębię ostrości przy fotografowaniu odległego obiektu (można przyjąć, że znajduje się on w nieskończoności) obiektywem Helios-44M-4 o ogniskowej $f = 58$ mm i jasności 1:2 przy pełnym otworze i przy obiektywie maksymalnie przysłoniętym (jasność 1:16). Jasnością nazywamy stosunek średnicy przesłony do ogniskowej obiektywu. Przyjąć, że średnia długość fali świetlnej wynosi 5800 Å.
Rozwiązanie na str. 12

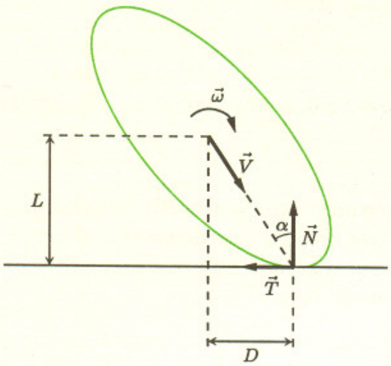
O odbiciu pewnej piłki

Arkadiusz KOWALSKI

Artykuł jest skróconą wersją pracy nagrodzonej w Pierwszym Ogólnopolskim Konkursie Uczniowskich Prac Naukowych z Fizyki.

W najprostszym przypadku odbicia piłki od przeszkody kąt odbicia jest równy kątowi padania. Najprostsze przypadki mają jednak to do siebie, że realizują się raczej rzadko. Jeżeli piłka wiruje, a powierzchnia, od której odbija się, nie jest gładka – a tak jest najczęściej – kąt odbicia różni się od kąta padania. Ma to wiele ważnych konsekwencji, o których dobrze wiedzą sportowcy i kibice. Zwyczajna piłka, taka, jakiej używają siatkarze czy tenisiści, ma kształt kuli. Istnieje jednak dyscyplina sportowa, której zawodnicy posługują się nietypową piłką o kształcie elipsoidy obrotowej (a przynajmniej my przyjmiemy, że jest to elipsoida) – jest nią rugby. Jak odbija się taka piłka i czy jej kształt ma istotny wpływ na odbicie? Spróbujmy to zbadać.

Oznaczmy przez a i b długości dużej i małej półosi piłki-elipsoidy. Piłka porusza się z prędkością $\vec{v}$ i uderza pod kątem α w płaską przeszkodę (rys. 1). Dodatkowo niech wiruje z prędkością kątową ω wokół osi równoległej do podłoża, będącej jednocześnie osią symetrii. Oznaczmy przez m masę piłki, a przez I jej moment bezwładności. Dzięki symetrii możemy rozważać zagadnienie dwuwymiarowe: odbicie od przeszkody nie elipsoidy, ale elipsy o zadanej masie i momencie bezwładności.



Rys. 1. Zderzenie elipsoidalnej piłki z płaskim podłożem.

Podczas zderzenia na piłkę działają dwie siły wpływające na jej ruch: siła reakcji podłoża $\vec{N}$ i siła tarcia $\vec{T}$. Drugą zasadę dynamiki dla składowej pędu prostopadłej do przeszkody możemy zapisać w następującej postaci

$$mv_\perp - mv\cos\alpha = \int_0^t N(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,,$$

gdzie $v_\perp$ jest składową prędkości prostopadłą do przeszkody po odbiciu, t zaś jest czasem trwania odbicia. Na początek zajmijmy się sytuacją, w której nie występuje siła tarcia, czyli podłoże jest gładkie. Wtedy składowa prędkości równoległa do podłoża nie ulega zmianie. Zapiszmy teraz drugą zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego w przypadku bez tarcia

$$I\omega_t - I\omega = \pm\int_0^t D(\tau)N(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,,$$

gdzie ω_t jest prędkością kątową piłki po odbiciu, D zaś jest ramieniem siły N. Znak $+$ odpowiada rotacji prostej, znak $-$ odpowiada rotacji wstecznej. Zapiszmy jeszcze zasadę zachowania energii, która jest spełniona w przypadku, gdy tarcie nie występuje

$$\frac{1}{2}m(v\cos\alpha)^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv_\perp^2 + \frac{1}{2}I\omega_t^2\,.$$

Układ równań, które otrzymaliśmy, jest mało przydatny, gdyż nic nie wiemy ani o sile reakcji podłoża, ani o jej ramieniu. Zróbmy więc upraszczające założenie, że zderzenie trwa na tyle krótko, że ramię siły reakcji w tym czasie się nie zmienia. Jeśli D jest stałe, szczegółowa wiedza na temat siły reakcji nie jest potrzebna. Wartość jej ramienia możemy obliczyć znając geometrię zderzenia. Rozwiązując układ równań otrzymujemy

$$v_\perp = \frac{mD^2 - I}{mD^2 + I}v\cos\alpha - 2\omega D\frac{I}{mD^2 + I}\,.$$

Jeśli przyjmiemy, że w trakcie zderzenia ruchy piłki w kierunkach prostopadłym i równoległym do przeszkody są niezależne, co na ogół jest założeniem sensownym, to istnienie lub nieistnienie siły tarcia nie wpływa na wartość prędkości $v_\perp$. Pozostaje nam zatem wyznaczenie składowej prędkości równoległej do przeszkody $v_\parallel$ po odbiciu.

Siła tarcia jest proporcjonalna do nacisku wywieranego przez piłkę na podłoże, a zatem

$$T(t) = \mu N(t)\,.$$

Rozważymy dwa przypadki: pierwszy, gdy ruch piłki w kierunku równoległym do przeszkody nie ustanie (na skutek działania tarcia) w trakcie zderzenia oraz drugi, gdy ruch ten ustanie. W pierwszym przypadku druga zasada dynamiki Newtona dla składowej ruchu równoległej do przeszkody ma postać

$$mv_{\parallel} - mv\sin\alpha = \int_0^t T(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,,$$

natomiast druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego określona jest wtedy równaniem

$$I_t - I\omega = \pm\int_0^t DN(\tau)\,\mathrm{d}\tau \mp \int_0^t LT(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

W drugim przypadku spełnione są równania

$$v_{\parallel} = 0\,, \qquad -mv\sin\alpha = \int_0^t T(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Jeśli ruch piłki w kierunku równoległym do przeszkody nie ustanie na skutek działania siły tarcia, przy przyjętych założeniach możemy wyznaczyć $v_{\parallel}$ i ω_t

$$v_{\parallel} = v\sin\alpha - \frac{2I\mu}{I+mD^2}(v\cos\alpha + \omega D)\,,$$

$$\omega_t = \omega - (D - L\mu)\frac{2m(v\cos\alpha + \omega D)}{I+mD^2}\,,$$

gdzie L jest ramieniem siły tarcia. W przypadku, gdy ruch piłki wzdłuż przeszkody ustaje, również można wyznaczyć obie te wielkości. Są one równe

$$v_{\parallel} = 0\,,$$

$$\omega_t = \omega - \frac{2Dm(v\cos\alpha + \omega D)}{I+mD^2} + \frac{Lmv\cos\alpha}{I}\,.$$

Znając ruch piłki po odbiciu możemy wyznaczyć zależność kąta odbicia od kąta padania wyznaczając D i L z geometrii zderzenia. Jest oczywiste, że

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}}\,.$$

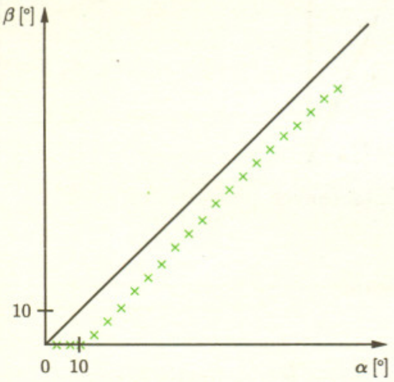
W przypadku, gdy ruch w kierunku równoległym do przeszkody nie ustaje, otrzymujemy niezwykle skomplikowany wzór

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{v(I+mD^2)\sin\alpha - 2\mu Iv\cos\alpha - 2\mu\omega ID}{v(I-mD^2)\cos\alpha + \omega ID}\,.$$

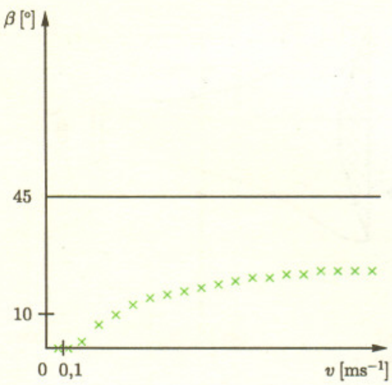
W drugim przypadku jest, oczywiście, dużo prościej, gdyż

$$\beta = 0\,.$$

Skoro wzór określający zależność kąta odbicia od kąta padania jest albo zagmatwany, albo banalny, zbadajmy tę zależność w konkretnym przypadku. W tym celu przyjmijmy: $v = 1$ m/s, $\omega = 1\ \mathrm{s}^{-1}$, $m = 1$ kg, $\mu = 0{,}1$, $D = 0{,}1$ m, $I = 0{,}1\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$. Wyniki obliczeń dla kąta α z przedziału $(0, 90°)$ przedstawia rysunek 2. Ciekawe jest też, jak zmienia się wartość kąta odbicia przy ustalonym kącie padania w zależności od wartości prędkości v. Tu przyjąłem $\mu = 0{,}3$ oraz $\alpha = 45°$, natomiast pozostałe parametry są takie jak poprzednio. Wyniki przedstawia rysunek 3. Można także postawić inne pytania, na przykład: kiedy spełnione jest prawo odbicia mówiące, że kąt odbicia jest równy kątowi padania?



Rys. 2. Zależność kąta odbicia od kąta padania w przypadku spełnienia prawa odbicia (linia ciągła) i dla piłki elipsoidalnej dla wartości parametrów opisanych w tekście (gwiazdki).



Rys. 3. Zależność kąta odbicia od prędkości padającej piłki przy ustalonym kącie padania (45°) w przypadku spełnienia prawa odbicia (linia ciągła) i dla piłki elipsoidalnej (gwiazdki) dla wartości parametrów opisanych w tekście.

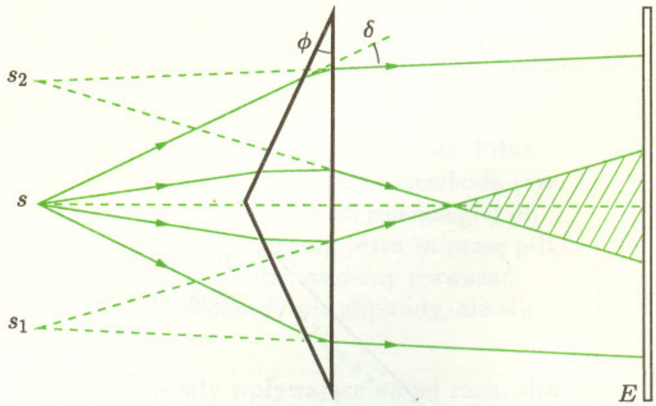
Przedstawiony przeze mnie model odbicia elipsoidalnej piłki od płaskiej przeszkody jest bardzo uproszczony, pokazuje jednak, jak skomplikowany jest opis zderzenia, gdy nie zaniedba się sił tarcia, a ciało uderzające w płaską przeszkodę nie jest sferycznie symetryczne.

Bipryzmat Fresnela

Promień świetlny przechodząc przez pryzmat o małym kącie łamiącym ϕ doznaje odchylenia o kąt δ, którego wartość jest równa

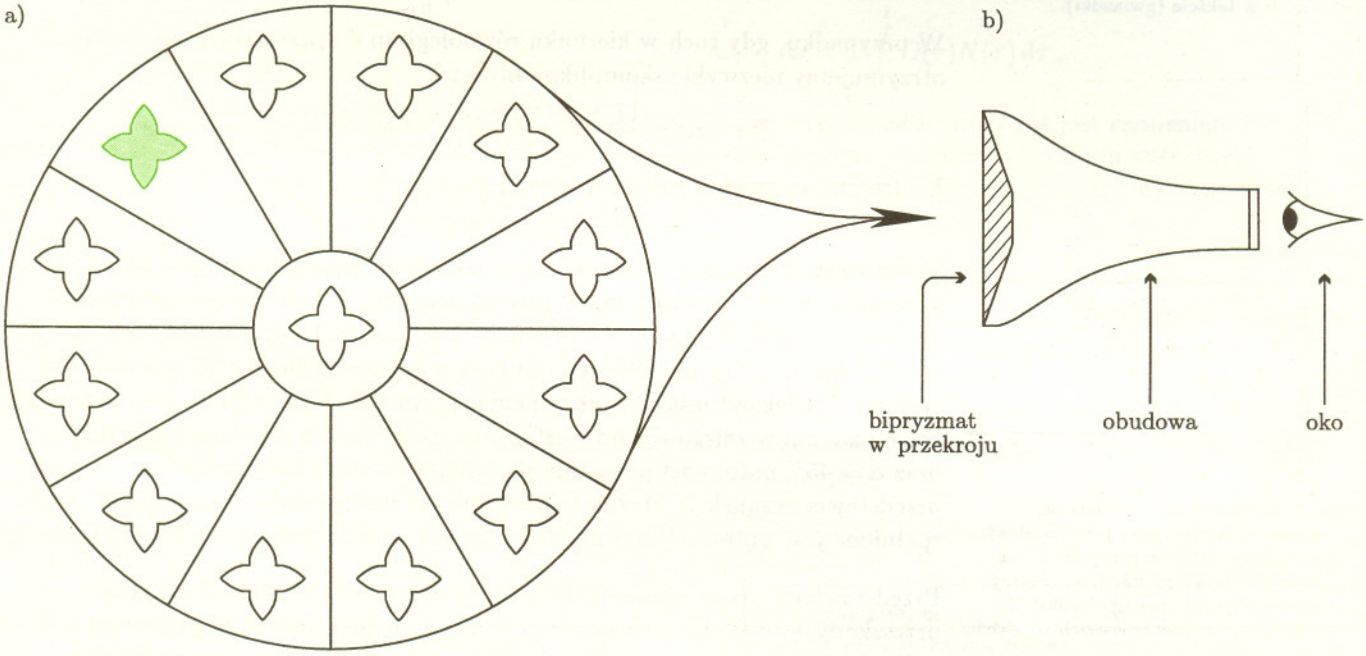
$$\delta = (n-1)\phi,$$

gdzie n jest współczynnikiem załamania pryzmatu. Obraz przedmiotu oglądanego przez optyczny klin jest zatem przesunięty o kąt δ w stosunku do obrazu oglądanego gołym okiem. Dwa kliny połączone podstawami tworzą tak zwany bipryzmat Fresnela (rys. 1) często stosowany w układach optycznych. W fotografii, do zdjęć trickowych wykorzystuje się filtry będące połączeniem kilku bipryzmatów Fresnela, umieszczonych centralnie w kole. Każdy klin musi zwężać się ku środkowi, a rozszerzać na zewnątrz.



Rys. 1. Układ klinów połączonych podstawami, czyli bipryzmat Fresnela:
s – źródło światła,
s_1, s_2 – dwa źródła pozorne,
E – ekran.

Rzut połówki takiego klina na płaszczyznę jest wycinkiem koła o rozwartości $\dfrac{360^\circ}{2k}$, gdzie k jest liczbą bipryzmatów. Zwykle środek układu bipryzmatów Fresnela jest ścięty, najczęściej płasko. Taki filtr, przy odpowiednim ustawieniu w stosunku do oglądanego przedmiotu daje maksymalnie $2k+1$ obrazów pozornych, $2k$ jest tworzonych przez bipryzmaty, ostatni pochodzi od ściętej części układu.



Rys. 2. Dwunastokątny bipryzmat z oszlifowanym środkiem. a) obraz widziany przez oko, b) schemat w przekroju.

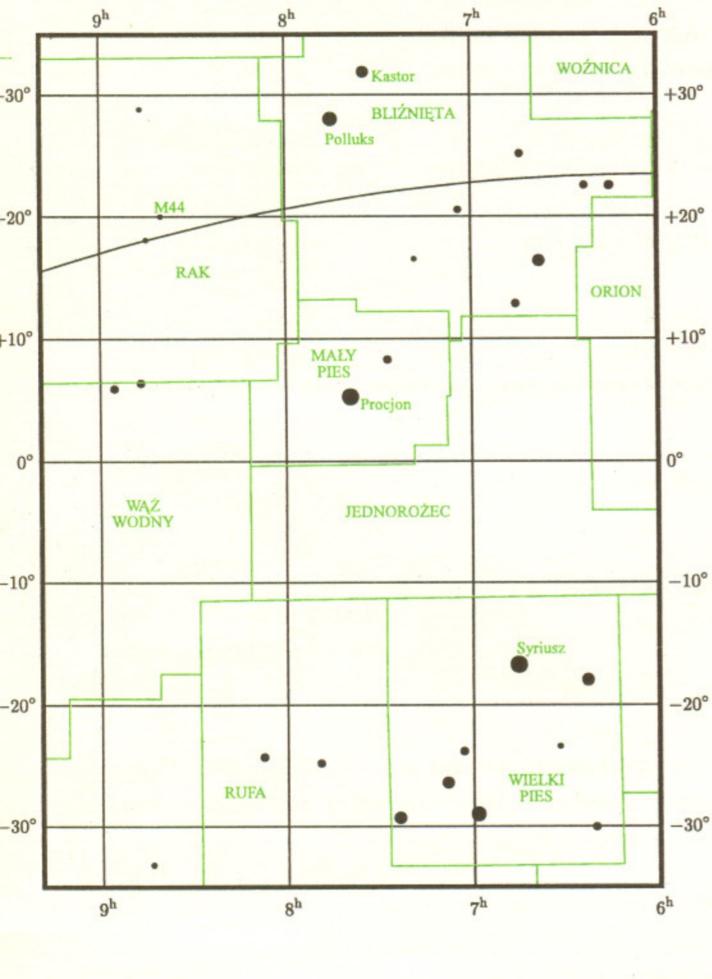
Małą Deltę przygotowali: Kazimierz MIKULSKI i Dariusz Jacek RUSZKIEWICZ

Niebo przez lornetkę

Droga Mleczna ze swoimi licznymi gromadami otwartymi jest w kwietniowy wieczór praktycznie niewidoczna. Widać jednak, i to gołym okiem, jeszcze jedną gromadę. To Praesepe (M 44) w gwiazdozbiorze Raka. Jak każda gromada otwarta leży ona niemal w płaszczyźnie Galaktyki, widzimy jednak ją poza Drogą Mleczną, ponieważ znajduje się blisko nas, w odległości 180 pc – jest to mniej, niż wynosi grubość dysku galaktycznego. Jest to gromada już niemłoda, jej wiek oceniany jest na blisko pół miliarda lat. W lornetce zobaczymy kilkadziesiąt gwiazd w polu widzenia.

W kierunku południowym wysoko na niebie mamy teraz obszary nieba położone w pobliżu północnego bieguna galaktycznego. Patrzymy więc pod dużym kątem do płaszczyzny naszej Galaktyki i nasz wzrok skierowany jest na inne galaktyki. Nie da się jednak ich zobaczyć, gdyż galaktyki są obiektami zbyt słabymi, by można je zauważyć gołym okiem czy nawet za pomocą lornetki.

Kto poznał niebo zimowe, zauważy zapewne, że wieczorem na południowym zachodzie znika gwiazdozbiór Oriona oraz leżąca na przedłużeniu jego Pasa najjaśniejsza gwiazda Wielkiego Psa, Syriusz.



Jego jasność określa się na −1,45 mag. Oglądanie go przez lornetkę niewiele zmienia – widać po prostu bardzo jasną gwiazdę. Tymczasem jest to dość osobliwy układ podwójny, w dodatku położony blisko nas, mianowicie w odległości 2,7 pc. To, co widać, to tzw. Syriusz A, biaława gwiazda o rozmiarach dwukrotnie przekraczających wielkość Słońca. Nie widać natomiast Syriusza B, słabej gwiazdy ósmej wielkości gwiazdowej. Dla wielkich teleskopów zarejestrowanie gwiazdy ósmej wielkości jest, co prawda, fraszką, jednak Syriusz B zawsze ginie w blasku Syriusza A i dlatego uchwycenie jego obrazu wymagało zastosowania nietypowej techniki obserwacyjnej.

W każdym razie okazało się, że Syriusz B, przy rozmiarach stosownych dla średniej planety, ma masę zbliżoną do słonecznej. Łatwo sprawdzić, że gęstość takiej gwiazdy jest rzędu tony na centymetr sześcienny. Syriusz B, odkryty w 1862 r. przez A. Clarka, stał się pierwszym przedstawicielem klasy gwiazd zwanych białymi karłami. Podobnego towarzysza ma również Procjon, najjaśniejsza gwiazda Małego Psa, położona w kwietniowy wieczór niemal pionowo 30° nad Syriuszem.

Dwie najjaśniejsze gwiazdy Bliźniąt to, oczywiście, Kastor (α) i Polluks (β), przy czym wyjątkowo w tym gwiazdozbiorze najjaśniejsza jest β. Kastor natomiast (odległy o 14 pc) jest gwiazdą sześciokrotną. Gwiazdy uważane do niedawna za najciaśniejszą parę jego składników same okazały się jeszcze ciaśniejszymi gwiazdami podwójnymi, o czym świadczy już tylko dopplerowskie rozdwojenie ich linii widmowych (mówi się, że są to gwiazdy spektroskopowo podwójne). Czwórkę tę obiega w większej odległości jeszcze jedna para, której składniki obiegają się w płaszczyźnie przechodzącej przez Ziemię – para ta tworzy więc tzw. układ zaćmieniowy. Ale tego wszystkiego przez lornetkę nie zobaczymy.

Gdybyśmy w kwietniu późnym wieczorem mogli bardzo szybko przelecieć parę tysięcy kilometrów na południe, wyłoniłby się spod horyzontu gwiazdozbiór Centaura, którego najjaśniejsza gwiazda, Toliman, jest najbliższą sąsiadką Słońca w Galaktyce (jego odległość wynosi 1,3 pc). Jest to układ podwójny, a w gruncie rzeczy potrójny, tylko że trzeci składnik znajduje się w tak wielkiej odległości od Tolimana, że ma nawet własną nazwę: Proxima Centauri. Na niebie dzieli te gwiazdy odległość ponad 2°, w przestrzeni 12 000 j.a. To właśnie Proxima obecnie jest najbliższą nam (po Słońcu) gwiazdą, co za wiele lat przestanie być aktualne, gdy mianowicie znajdzie się ona w odleglejszej części swojej orbity i jej „funkcję” przejmie podwójna część Tolimana.

Tomasz KWAST

Dajcie mi grant, a poruszę Ziemię

Ian STEWART

****

Prof. Archimedes
Instytut Matematyki Stosowanej
Uniwersytet w Syrakuzach

Komitet Badań Naukowych
Zespół Metalurgii
Aleksandria

Wniosek o sfinansowanie projektu badawczego nr KBN/MET/778/0043

Temat projektu: Analiza wykrywalności obecności metali nieszlachetnych w próbkach złota i srebra.

Wymagane wyposażenie: Wykładany marmurem zbiornik hydrostatyczny z zainstalowanymi dwoma zaworami wodnymi (zawór wysokich temperatur, zawór niskich temperatur) i jednym odpływem; jeden korek.

Kosztorys (w drachmach)	
Aparatura	276
Materiały i przedmioty nietrwałe (woda, mydło, ręczniki)	115
Inne koszty bezpośrednie (ogrzewanie)	98
OGÓŁEM	489
Wynagrodzenia	400
KOSZTY BEZPOŚREDNIE OGÓŁEM	889
Koszty pośrednie $42\frac{1}{2}\%$	382
KOSZTY OGÓŁEM	1271

****

Hipokrytes
Zespół Metalurgii
KBN Aleksandria

Hipnarchus ze Smyrny
Prezes Cechu Złotników

Drogi Narku,
Jakiś facet z matematyki w Syrakuzach przysłał mi podanie o grant. Wydaje mi się, że to coś z Twojego podwórka. Byłbym wdzięczny za szybką recenzję, bo termin mija za miesiąc.

Hipokrytes

****

Rozwiązanie zadania M 735. Pole rzutu sześcianu S stanowi, oczywiście, połowę sumy pól rzutów wszystkich ścian sześcianu, a więc jest równe sumie pól rzutów trzech ścian o wspólnym wierzchołku. Rozważmy układ współrzędnych, w którym ten wierzchołek ma współrzędne (0,0,0), wspólne zaś krawędzie owych trzech ścian zawierają się w osiach układu. Wówczas pole rzutu ściany zawartej w płaszczyźnie $x = 0$ na płaszczyznę o równaniu $ax + by + cz = 0$ wynosi $|a|/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Zatem

$$S = \frac{|a|+|b|+|c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Oczywiście, $S \geq 1$, bo $S^2 \geq 1$, a z drugiej strony

$$S = \frac{[|a|,|b|,|c|] \circ [1,1,1]}{\|[|a|,|b|,|c|]\|} = \|[1,1,1]\| \cdot \cos\alpha \leq \sqrt{3},$$

gdzie α oznacza kąt między wektorami $[|a|,|b|,|c|]$ i $[1,1,1]$.

Jakie oszacowanie można podać na pole rzutu prostokątnego czworościanu foremnego o objętości 1?

Rozwiązanie zadania M 736. Niech m będzie najmniejszą spośród liczb zapisanych na szachownicy. Jak łatwo zauważyć, na wszystkich sąsiednich polach też musi znajdować się liczba m. Prowadząc dalej to rozumowanie stwierdzamy, że na wszystkich polach szachownicy napisano liczbę m. W zależności od tego, czy $m = 1995$, spełniony jest jeden lub drugi z wariantów tezy.

Czy teza zadania pozostanie prawdziwa, jeśli w jego sformułowaniu zastąpimy słowo „naturalne" przez „dodatnie"?

Rozwiązanie zadania F 403. Gęstość ładunku powierzchniowego σ obliczamy z prawa Gaussa zastosowanego do cienkiej warstwy zawierającej powierzchnię Ziemi

$$\sigma = \varepsilon_0 \cdot E_0 \approx -1{,}3 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{C/m^2}.$$

Całkowity ładunek Ziemi wynosi więc

$$Q = 4\pi R^2 \cdot \sigma \approx -6{,}7 \cdot 10^5\ \mathrm{C}.$$

Aby znaleźć średnią gęstość objętościową wypadkowego ładunku w powietrzu do wysokości 100 m, rozważmy pionowy cylinder o polu przekroju A, pomiędzy poziomami 0 i 100 m. Z prawa Gaussa zastosowanego do tego cylindra otrzymujemy

$$\varepsilon_0[A \cdot E(0) - A \cdot E(100)] = \\ = q_{\mathrm{wewn.walca}} = V\,\overline{\varrho}_q\,,$$

gdzie $\overline{\varrho}_q$ to średnia gęstość objętościowa ładunku w walcu. Dostajemy więc

$$\overline{\varrho}_q = \frac{\varepsilon_0[E(0) - E(100)]}{100} \approx \\ \approx 4{,}4 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C/m^3}.$$

Rozważmy teraz przewód o n nośnikach prądu w jednostce objętości, każdy o ładunku e. Niech poruszają się one z prędkością v. Wtedy przez jednostkową powierzchnię tego przewodu przepływa prąd o wartości natężenia $j = n \cdot e \cdot v$. W polu Ziemi tylko ładunki dodatnie docierają do jej powierzchni zmieniając jej ładunek (przy założeniu braku innych źródeł ładunku). Więc

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = j_+ = n_+ \cdot e \cdot v = \\ = 1{,}44 \cdot 10^{-14} \cdot E\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{Vsm}}.$$

Przy powierzchni Ziemi mamy, oczywiście, $E = E_0 = -\sigma/\varepsilon_0$, dostajemy więc równanie zaniku ładunku

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = -1{,}44 \cdot 10^{-14}\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \approx -\frac{\sigma}{600\ \mathrm{s}},$$

którego rozwiązaniem jest $\sigma(t) = \sigma_0 \mathrm{e}^{-t/\tau}$, $\tau = 600$ s. Dla $\sigma(t) = \sigma_0/2$ dostajemy czas połowicznej neutralizacji ładunku Ziemi $t = \tau \cdot \ln 2 \approx 415\ \mathrm{s} \approx 7$ min.

Hipnarchus ze Smyrny
Prezes Cechu Złotników, Srebrników,
Brązowników i Zawodów Stowarzyszonych

Dr Hipokrytes
Zespół Metalurgii
KBN Aleksandria

Recenzja projektu badawczego nr KBN/MET/778/0043

Szanowny Panie Doktorze,

Po uważnym przestudiowaniu projektu stwierdzam, że nie przedstawia on wielkiej wartości. Co prawda, lista publikacji kierownika projektu jest dosyć długa, ale wygląda na to, że nie ma wiele wspólnego z tematem badań. Trudno mi dostrzec, jaki związek ma teoretyczna analiza objętości sfery czy też numerologia ziaren piasku z fałszowaniem złota metalami nieszlachetnymi. Sugeruję wstrzymanie się z finansowaniem projektu do czasu wyjaśnienia metodologii.

Hipnarchus ze Smyrny

[*odręczny dopisek*]
Hipku, ten gość jest stuknięty. Wywal to.

****

Od: Krollikis
Do: Kleopatka

Kleo, skarbie, pchnij do tego Archomenidesa formularz z prośbą o uzupełnienie danych.

****

Komitet Badań Naukowych
Aleksandria

Prof. Archimedes
Uniwersytet w Syrakuzach

Projekt badawczy nr KBN/MET/778/0043

Szanowny Panie Profesorze,

Ze względu na prośbę naszych recenzentów będziemy zobowiązani za nadesłanie nam bardziej szczegółowego wyjaśnienia metod, które zamierza Pan zastosować.

Hipokrates
(*podpisane*): z up. Kleopasta

****

Apoloniusz
Instytut Matematyki Teoretycznej

Drogi Apoloniuszu, mam problemy z podaniem o grant. Tak naprawdę, to chcę używać tego zbiornika hydrostatycznego jako wanny. Jak wiesz, w kąpieli przychodzą mi do głowy najlepsze pomysły. Wątpię jednak, czy takie uzasadnienie zadowoli KBN. Masz doświadczenie w pisaniu takich podań; co mi doradzisz?

Archimedes
Instytut Matematyki Stosowanej

****

Archimedes
Instytut Matematyki Stosowanej

Drogi Arku, z dnia na dzień jest coraz gorzej. Ja też mam kłopoty. Nikt nie wierzy w możliwość jakiegokolwiek zastosowania krzywych stożkowych; mogą mi nie odnowić w tym roku mojego trzyletniego grantu. Wam, „stosowanym”, jest łatwiej. Spróbuj im wcisnąć jakiś kit.

Apoloniusz
Instytut Matematyki Teoretycznej

****

Prof. Archimedes
Instytut Matematyki Stosowanej
Uniwersytet w Syrakuzach

Hipokrytes
Zespół Metalurgii
KBN Aleksandria

Szanowny Panie Doktorze,

W nawiązaniu do Pańskiego listu z dn. 23. bm.; proponowana metodologia jest uogólnieniem technik badawczych wprowadzonych przez wielkiego złotnika babilońskiego Habberkaddaszera (Proc. Babyl. Acad. Sci. 93 (337 p.n.e.) 173–224), w połączeniu z moją własną koncepcją framnifikacji gramnulatów bozwolpianowych poddanych bombardowaniu neutrinami. Mam nadzieję, że to wyjaśnia wszelkie wątpliwości.

Archimedes

****

Od: Krollikis
Do: Kleopatka Kleo, kochanie, poślij to do dziadka Pryszcza w Smyrnie.

****

Hipnarchus ze Smyrny
Prezes Cechu ZSBZS

Dr Hipokrytes
Zespół Metalurgii
KBN Aleksandria

Recenzja uzupełnienia projektu badawczego nr KBN/MET/778/0043

Przedstawiona propozycja jest ewidentnie nierealistyczna i oparta na zasadach od dawna uznanych za nie związane z tematem. Uważam, że projekt należy odrzucić.

Hipnarchus ze Smyrny

[*odręczny dopisek*]
Hipku, nie rozumiem z tego ani słowa, a jestem ekspertem, więc to muszą być bzdury.

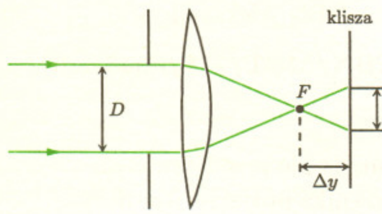
****

Od: Króliczek
Do: Kleopatka

Kleo, złotko, załatw odmownie tego całego Akrymoniusa z US. Stokrotne dzięki. Przy okazji, czy jesteś wolna w czwartek wieczorem?

****

Rozwiązanie zadania F 404. Dla uproszczenia przyjmijmy, że obiektyw zbudowany jest z soczewki skupiającej o ogniskowej f i umieszczonej przed nią przesłony z kołowym otworem o średnicy D.



Rozważmy wiązkę promieni równoległych do osi optycznej, padających na soczewkę. Jeśli klisza filmowa znajduje się w odległości Δy od ogniska soczewki, powstanie na niej obraz o średnicy

$$a = \frac{D}{f}\Delta y\,.$$

Gdyby światło stosowało się ściśle do praw optyki geometrycznej, to umieszczając kliszę w ognisku otrzymalibyśmy obraz punktowy. Tak jednak nie będzie, gdyż ze względu na dyfrakcję na przesłonie otrzymamy plamkę o średnicy

$$b = 2\alpha\frac{\lambda f}{D}\,,$$

gdzie α jest liczbą bliską jedności. Umieszczenie kliszy dokładnie w ognisku daje rozmycie dyfrakcyjne, poza ogniskiem wpływ dyfrakcji nie jest istotny, ale pojawia się rozmycie geometryczne. Odsuwając kliszę o Δy od ogniska nie pogarszamy jakości obrazu, jeśli tylko rozmycie geometryczne nie stanie się zbyt duże. Oznacza to, że a nie może być większe niż b, jeśli nie chcemy pogorszyć jakości obrazu. Z warunku $a = b$ otrzymujemy

$$\Delta y = 2\lambda\left(\frac{f}{D}\right)^2$$

(stałą α zastąpiliśmy jedynką). Na zdjęciu jednakowo ostry będzie odległy obiekt (znajdujący się w nieskończoności), jak i obiekt w odległości x danej równaniem

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{f+\Delta y} = \frac{1}{f}\,.$$

Uwzględniając, że $\Delta y \ll f$ dostajemy

$$x = \frac{D^2}{2\lambda} = \frac{f^2}{2\lambda}\left(\frac{D}{f}\right)^2.$$

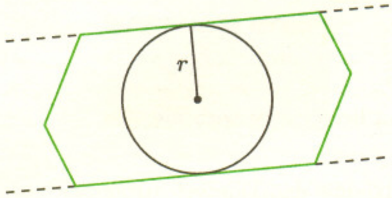
Dla pełnego otworu przesłony dostajemy

$$x = 725\ \mathrm{m}\,.$$

Dla maksymalnie przysłoniętego obiektywu mamy

$$x = 11\ \mathrm{m}\,.$$

Rozwiązanie zadania M 737. Niech r oznacza odległość między środkiem symetrii wielokąta W i jego brzegiem, czyli promień największego spośród zawartych w W kół o środku w środku symetrii. Koło to jest styczne do co najmniej jednego z boków wielokąta W, a stąd także do drugiego boku będącego obrazem pierwszego w symetrii względem środka symetrii W. Przedłużając te dwa boki otrzymamy żądane proste. Istotnie, odległość każdej z nich od środka symetrii W jest równa r, szerokość pasa pomiędzy nimi wynosi $2r$. Teraz wystarczy wykazać, że $r \leq 1$. Szacując pole koła przez pole wielokąta W mamy $\pi r^2 < 3 < \pi$, więc $r < 1$.



Czy w sformułowaniu zadania można pominąć założenie o środkowej symetrii W?

Komitet Badań Naukowych
Aleksandria

Prof. Archimedes
Uniwersytet w Syrakuzach

Projekt badawczy nr KBN/MET/778/0043

Szanowny Panie Profesorze,

Z przykrością informuję, że po dokładnej analizie Pańskiego wniosku recenzenci stwierdzili, że nie spełnia on wymogów stawianych projektom badawczym dofinansowywanym przez Komitet.

Hipokrates
(*podpisane*): z up. Kleopasta

Do wiadomości:
Diplodonkus, Dziekan Wydziału Matematyczno-Fizycznego Uniwersytetu w Syrakuzach
Kierownik Działu Finansowania Badań Naukowych, Uniwersytet w Syrakuzach

****

Dziekan
Diplodonkus

Anarchimonius
Przewodniczący Komisji
ds. Awansów i Zatrudnienia

Szanowny Panie Profesorze,

Zauważyłem, że w przyszłym miesiącu Komisja rozpatruje przedłużenie zatrudnienia dr. hab. Archimedesa. Pragnę zauważyć, że jego podanie o grant KBN zostało odrzucone. Jak Pan wie, Rektor uważa za sprawę niezwykłej wagi utrzymanie wysokiego poziomu badań na naszej uczelni, co oznacza, że uniwersytet powinien zatrudniać jedynie naukowców tak wysokiej klasy, by zapewnić dopływ dużych funduszy. Sądzę, że powinien Pan wziąć pod uwagę zalecenia Kolegium Rektorskiego, choć, oczywiście, nie jest moją intencją wtrącanie się w sprawę dr. hab. Archimedesa...

****

Przekład: *Krzysztof CIESIELSKI i Marcin POŹNIAK*

Od Redakcji. Można się zastanawiać, czy w zamieszczonym tekście Iana Stewarta należało tłumaczyć angielską nazwę *National Science Foundation* na *Komitet Badań Naukowych.* W końcu każdy, kto choć trochę zna angielski (albo po prostu ma pod ręką słownik), stwierdzi, że dosłowny odpowiednik polski to nie *Komitet Badań Naukowych*, lecz *Narodowa Fundacja Nauki.*

Tłumaczenie nie polega jednak na mechanicznym zastępowaniu słów jednego języka ich wyszukanymi w słowniku odpowiednikami w drugim języku. Umberto Eco, chcąc ukazać śmieszność takiej procedury, pisał o kimś, kto włoskie *Lo spirito è pronto ma la carne è debole* (duch ochoczy, ale ciało mdłe) przetłumaczył za pomocą słownika na angielski jako coś w rodzaju *whisky nie brak, ale mięso nieświeże.* Wydaje się więc, że tłumacze dokonali wyboru właściwego. Polski Czytelnik tego tłumaczenia może, podobnie jak amerykański czytelnik *Intelligencera*, pomyśleć z rozbawieniem (lub goryczą):

A to ci zbieg okoliczności, nadęta firma, z którą boryka się Archimedes, nazywa się tak samo, jak największa w moim kraju instytucja przyznająca granty na badania naukowe.

O ile nam wiadomo, będzie to w pełni zgodne z intencją Iana Stewarta.

Mamy ponadto nadzieję, że nikt rozsądny o przypadkową zbieżność nazw obrażać się nie będzie. W końcu Archimedes nie żyje od ponad 2200 lat, a swoje podania o grant pisał w Aleksandrii. Zarówno amerykańska *National Science Foundation*, jak i polski *Komitet Badań Naukowych* są zaś instytucjami dwudziestowiecznymi, z Aleksandrią i Archimedesem nie mającymi, Drogi Czytelniku, nic wspólnego...

Klub 44

$$\sqrt[\otimes]{\int\!\!\!\!\!\pounds!}=44$$

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 1995

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.**
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1995.

Zadania z matematyki nr 299, 300

Redaguje Marcin E. KUCZMA

299. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite n, dla których suma

$$\sum_{k=1}^{n^2} \frac{n-[\sqrt{k-1}\,]}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$$

jest liczbą całkowitą. (Symbol $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie przekraczającą x.)

300. Zbiór $S \subset \mathbf{R}$ jest sumą skończonej liczby przedziałów domkniętych (długości dodatniej, skończonej), parami rozłącznych. Dowieść, że dla każdej funkcji ciągłej $f\colon S \to S$ istnieje niepusty zbiór $A \subset S$ spełniający równość $f(A) = A$.

Zadanie **300** zaproponował pan Lesław Skrzypek z Rzeszowa.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/1994

Przypominamy treść zadań:

291. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite x, dla których $x^2+19x+94$ jest kwadratem liczby całkowitej.

292. Udowodnić, że dla każdych liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \langle 0;\pi/4)$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{\operatorname{tg} x_1 \cdot \operatorname{tg} x_2 \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} x_n} \le \sqrt{\frac{\sin^2 x_1 + \sin^2 x_2 + \ldots + \sin^2 x_n}{\cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 + \ldots + \cos^2 x_n}}\,.$$

291. Mamy rozwiązać w liczbach całkowitych x, y $(y \ge 0)$ równanie $x^2+19x+94=y^2$, równoważne następującemu:

$$(2y)^2 - (2x+19)^2 = 15$$

– czyli $(u+v)(u-v) = 15$, gdzie $u = 2y \ge 0$, $v = 2x+19$.

Rozważając wszystkie rozkłady liczby 15 na iloczyn dwóch czynników całkowitych znajdujemy cztery pary (u,v) $(u \ge 0)$ spełniające to równanie: $(8,7)$, $(4,1)$, $(4,-1)$, $(8,-7)$. Każda z nich wyznacza rozwiązanie (x,y) wyjściowego równania. Szukanymi wartościami niewiadomej x są (odpowiednio) liczby: -6, -9, -10, -13.

292. Podstawiając $\operatorname{tg}^2 x_i = a_i$ oraz korzystając z tożsamości $\cos^2 x = (1+\operatorname{tg}^2 x)^{-1}$, $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$, sprowadzamy dowodzoną nierówność do postaci

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n} \le n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i}\right)^{-1} - 1\,;$$

równoważnie:

$$(*)\qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i} \le \left(1+\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n}\right)^{-1}.$$

Jeśli liczby x_i należą do przedziału $\langle 0;\pi/4)$, to liczby a_i należą do przedziału $\langle 0;1)$. Można przyjąć, że są to liczby dodatnie (gdy któraś jest zerem, teza jest oczywista). Wykonujemy kolejne podstawienie:

$$a_i = \exp(-t_i) \qquad \text{dla} \quad i = 1,\ldots,n\,; \qquad t_i \ge 0.$$

Nierówność $(*)$ przybiera postać

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(1+\exp(-t_i)\big)^{-1} \le \left(1+\exp\left(-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i\right)\right)^{-1}.$$

Jest to więc po prostu nierówność Jensena dla funkcji $f(t) = (1+\exp(-t))^{-1}$, wklęsłej w przedziale $\langle 0;\infty)$ (o czym łatwo się przekonać obliczając jej pochodną pierwszego i drugiego rzędu).

Zadania z fizyki nr 197, 198

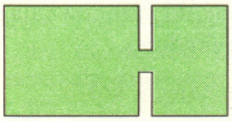
Redaguje Jerzy B. BROJAN

197. Statek kosmiczny o masie m zaopatrzony jest w lustro odbijające światło. Jeśli na to lustro pada prostopadle wiązka światła z nieruchomego lasera o mocy P, to po jakim czasie statek zostanie rozpędzony ze spoczynku do prędkości v równej połowie prędkości światła? Siła grawitacji ani opory ruchu w zadaniu nie występują.

198. Szczelne naczynie z gazem jest przedzielone na dwie części o nierównych objętościach (rys. 1) i izolowane termicznie. Grzałka elektryczna dostarcza do wnętrza pewną ustaloną ilość ciepła Q. W którym przypadku ciśnienie wzrośnie bardziej:
a) gdy podgrzejemy gaz w mniejszej części naczynia,
b) gdy podgrzejemy gaz w większej części naczynia,
c) gdy połowę ciepła dostarczymy mniejszej części, a połowę – większej?
Ciśnienie odczytujemy, zanim temperatury w obu częściach naczynia się wyrównają.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 183 (WT=2,91) i 184 (WT=2,65)
z numeru 9/1994

Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	41,74
Tomasz Wietecha	– Tarnów	40,49
Andrzej Borowski	– Aleksandrów K.	38,48
Aleksander Surma	– Myszków	25,32
Dariusz Wilk	– Rzeszów	20,18
Artur Gawryszczak	– Dubeczno	17,55
Przemysław Gworys	– Częstochowa	14,61



Rys. 1

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/1994

Przypominamy treść zadań:

189. Gdy włączono rotacyjną pompę próżniową, ciśnienie pod kloszem spadło w czasie $t_1 = 30$ s od ciśnienia atmosferycznego $p_{\rm atm}$ do wartości $\frac{1}{2}p_{\rm atm}$. Po długim czasie praca pompy doprowadziła do obniżenia ciśnienia do wartości $p_k = (1/100)p_{\rm atm}$; niższego ciśnienia nie udało się osiągnąć ze względu na nieszczelności klosza. Jeśli pompę wyłączyć, to po jakim czasie dopływ powietrza przez nieszczelności spowoduje wzrost ciśnienia do $\frac{1}{2}p_{\rm atm}$?

190. Ocenić orientacyjnie maksymalną wysokość, na jaką może się wzbić latawiec o powierzchni płatu $S = 0{,}5$ m^2 i masie $m = 400$ g uwiązany na lince o masie na jednostkę długości $\sigma = 10$ g/m, jeśli prędkość wiatru wynosi $v = 15$ m/s. Gęstość powietrza jest równa $\varrho = 1{,}3$ kg/m^3.

189. W rotacyjnej pompie próżniowej – podobnie jak w tłokowej – gaz wypełnia wolną przestrzeń komory roboczej, która zwiększa swoją objętość, po czym następuje zamknięcie otworu wlotowego. Ilość gazu (liczba moli) $\mathrm{d}n$ odpompowana w czasie $\mathrm{d}t$ jest więc proporcjonalna do ciśnienia p panującego wewnątrz klosza. Ponieważ zmiana ciśnienia $\mathrm{d}p$ jest z kolei proporcjonalna do $\mathrm{d}n$ (zmiany temperatury pomijamy), więc

$$\mathrm{d}p = -\lambda p\,\mathrm{d}t\,, \tag{1}$$

gdzie λ – stała zależna od wydajności pompy i objętości klosza. Rozwiązaniem tego równania jest $p = p_{\rm atm}\mathrm{e}^{-\lambda t}$, a stąd nietrudno powiązać stałą λ z danym czasem t_1:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_1}\,. \tag{2}$$

Dopływ powietrza przez nieszczelności można pominąć w początkowej fazie odpompowywania, ale dalej jego rola rośnie. Jeśli przyjmiemy, że dopływ jest proporcjonalny do różnicy ciśnień $p_{\rm atm} - p$, to wynikający z niego wzrost ciśnienia jest równy

$$\mathrm{d}p = \gamma(p_{\rm atm} - p)\,\mathrm{d}t\,, \tag{3}$$

gdzie γ – stała zależna od nieszczelności i objętości klosza. W stanie równowagi, gdy ciśnienie osiągnie minimalną wartość p_k, suma przyrostów opisanych równaniami (1) i (3) jest równa zeru, skąd wynika

$$\gamma = \frac{\lambda p_k}{p_{\rm atm} - p_k} \approx \frac{\lambda p_k}{p_{\rm atm}}\,. \tag{4}$$

Po odłączeniu pompy wzrost ciśnienia jest dany równaniem (3). Rozwiązując je znajdujemy

$$p = p_{\rm atm} - (p_{\rm atm} - p_k)\mathrm{e}^{-\gamma t} \approx p_{\rm atm}(1 - \mathrm{e}^{-\gamma t})\,.$$

Ciśnienie wzrośnie do wartości $\frac{1}{2}p_{\rm atm}$ po czasie t_2, który wyznaczymy z warunku $\mathrm{e}^{-\gamma t_2} = \dfrac{1}{2}$, czyli $t_2 = \gamma^{-1}\ln 2$, a po podstawieniu równań (2) i (4) mamy

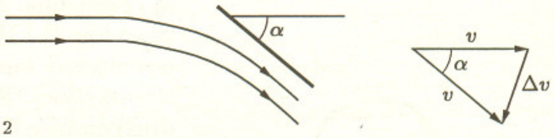
$$t_2 \approx t_1\frac{p_{\rm atm}}{p_k} = 3000\ \mathrm{s} = 50\ \mathrm{min}\,.$$

Odnotujmy jeszcze, że typowe pompy rotacyjne osiągają ciśnienia rzędu 1 Pa, zatem ograniczenia technologiczne (parowanie oleju itp.) nie mają istotnego wpływu na równowagową wartość ciśnienia p_k.

190. Siłę działającą na latawiec obliczymy ze wzoru

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\Delta\vec{v}\,,$$

gdzie $\mathrm{d}m$ – masa powietrza, które w czasie $\mathrm{d}t$ zmieniło prędkość o $\Delta\vec{v}$.



Rys. 2

Załóżmy, że płat nośny jest ustawiony pod kątem α do poziomu, a strumień powietrza o przekroju poprzecznym $S\sin\alpha$ trafiając na płat zmienia kierunek o ten kąt nie zmieniając wartości prędkości (rys. 2).

Te założenia mogą budzić wątpliwości; poza tym dla dużych kątów α nie jest pewne, czy cała masa $\mathrm{d}m$ ulegnie odchyleniu w dół (a nie w bok lub nawet w górę). Dlatego dalej należałoby przyjąć, że kąt α jest niezbyt duży – np. mniejszy niż 45°.

Wtedy

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \varrho v S\sin\alpha\,, \quad \Delta v = 2v\sin\frac{\alpha}{2}\,,$$

zatem

$$F = \varrho v^2 S\cdot 2\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\,,$$

a kierunek siły $\vec{F}$ jest zgodny z kierunkiem wektora $\Delta\vec{v}$, czyli tworzy z pionem kąt $\alpha/2$. Aby znaleźć siłę $\vec{N}$ działającą na linkę, wystarczy odjąć od $\vec{F}$ ciężar latawca, tzn.

$$N_x = F_{\rm poz} = F\sin\frac{\alpha}{2} = 2\varrho v^2 S\sin\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}\,,$$

$$N_y = F_{\rm pion} - mg = F\cos\frac{\alpha}{2} - mg = \varrho v^2 S\sin^2\alpha - mg\,.$$

Ocena wysokości latawca wymaga uwzględnienia wpływu ciężaru linki i działającej na nią siły wiatru na jej kształt; jeśli dla uproszczenia siłę wiatru pominiemy, to linka ma kształt linii łańcuchowej (wykresu cosinusa hiperbolicznego). Zauważmy tu, że gdy latawiec jest na maksymalnej możliwej wysokości, to przy dolnym końcu linka jest pozioma. Można sprawdzić, że dla linki poziomej na dole, a na górze napiętej siłą o składowych N_x i N_y wysokość jest równa

$$h = \frac{1}{\sigma g}\left(\sqrt{N_x^2 + N_y^2} - N_x\right)\,.$$

Numeryczna analiza otrzymanego wyrażenia prowadzi do wniosku, że przy danej wartości parametru $mg/(\varrho v^2 S) = 0{,}0268$ maksimum jest osiągane dla kąta α wynoszącego 73°; wtedy $h = 0{,}44\varrho v^2 S/(\sigma g) = 655$ m. Wyniku tego nie można jednak uważać za dokładny ze względu na niezbyt dobrą stosowalność wspomnianych uprzednio przybliżeń do tak dużych wartości α; ponadto siła oporu powietrza działająca na latawiec i linkę „przygina” latawiec do ziemi, czyli rzeczywiste h będzie mniejsze od wyliczonego. Orientacyjnie można przyjąć $h \approx 400$ m.

Kącik olimpijski (9)

Mała Olimpiada Matematyczna

Mała Olimpiada Matematyczna odbywa się w tym roku już po raz czwarty. „Mała", gdyż głównie biorą w niej udział uczniowie tylko dwóch szkół: IV LO im. T. Kościuszki w Toruniu i III LO im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni. Poza tym prawie wszystko jest w niej takie, jak w olimpiadzie ogólnopolskiej. Są więc zawody I stopnia, które polegają na pisemnym rozwiązywaniu w domu, w czasie od 10 czerwca do 10 września kilkunastu zadań, dwudniowe zawody II stopnia (na przełomie I i II dekady grudnia w Toruniu) oraz zawody III stopnia (na przełomie II i III dekady lutego w Gdyni).

W każdym dniu zawodów II i III stopnia uczniowie mają do rozwiązania w ciągu 5 godzin zegarowych po trzy zadania. Zadania na wszystkie etapy Małej Olimpiady są przygotowywane dla uczniów dwóch grup wiekowych: klas I i klas II–IV. Podyktowane to zostało tym, iż Mała Olimpiada ma przygotować uczniów do udziału w zawodach Olimpiady Matematycznej, a tych najmłodszych (którzy w czasie trwania zawodów I stopnia są bardziej jeszcze uczniami „po VIII klasie" niż uczniami klasy I liceum) – zachęcić do spróbowania swoich sił w olimpiadzie już na początku swej nauki w szkole średniej.

Ponadto Mała Olimpiada Matematyczna uatrakcyjnia zajęcia kół matematycznych działających w obu liceach.

Całą imprezę młodzież obu szkół sobie wymarzyła i w dużej mierze sama ją organizuje. Przygotowuje śniadania dla zawodników w każdym dniu zawodów II i III stopnia oraz po zawodach – podwieczorek, zwany „herbatką", poświęcony omówieniu rozwiązywanych przed południem zadań oraz pogawędce towarzyskiej. Rozgrywane są również mecze koszykówki i siatkówki między drużynami gości i gospodarzy, a wieczorem (po kolacji) – turnieje brydżowe. Ponadto organizowane są też wspólne wyjścia do teatru lub kina czy po prostu na spacer po mieście.

Nauczyciele – opiekunowie klas i działających we wspomnianych liceach kół matematycznych (Wojciech Tomalczyk z III LO w Gdyni i Henryk Pawłowski z IV LO w Toruniu) sprawują nad całą imprezą opiekę i są odpowiedzialni za sprawy merytoryczne (wybór zadań, sprawdzanie prac, ustalanie wyników itp.). Uroczyste zakończenie olimpiady połączone z wręczeniem nagród i dyplomów jej laureatom odbywa się wiosną na przemian w Toruniu i Gdyni.

Całą imprezę trudno byłoby zorganizować, gdyby nie hojność rodziców uczniów biorących w niej udział, Krajowego Funduszu na Rzecz Dzieci w Warszawie, prezesów firm toruńskich: Fabryki Cukierniczej „Kopernik", Zakładów Mięsnych „Tormięs", „ECCO–CEZA", a także wszechstronne poparcie dyrekcji obu liceów.

O tym, że Mała Olimpiada Matematyczna nie jest imprezą zamkniętą dla uczniów spoza IV LO w Toruniu i III LO w Gdyni świadczy fakt uczestnictwa w zawodach III Małej Olimpiady Matematycznej uczniów z I LO w Gdańsku, II LO w Grudziądzu, II LO w Jeleniej Górze oraz XIV LO, VI LO, XI LO i I SLO w Warszawie.

Na koniec podajemy zadania, które rozwiązywali uczniowie klas II–IV drugiego dnia zawodów III stopnia III Małej Olimpiady Matematycznej.

4. Wewnątrz czworościanu $ABCD$ obrano punkt O. Udowodnij, że jeżeli czworościany $OABC$, $OBCD$, $OACD$, $OABD$ mają równe objętości, to $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{0}$.

5. Wyznacz wszystkie funkcje $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ spełniające dla wszystkich $x,y,z\in\mathbf{R}$ nierówność $f(xy)+f(xz)-2f(x)f(yz)\geq 1/2$.

Zadanie 5 podoba się, jak widać, wielu osobom. Czytelnicy *Delty* mieli okazję znaleźć je w numerze 10/1994, jako zadanie **M 719**.

6. W pewnej szkole uczy się 1995 uczniów. Każdy z nich ma wśród pozostałych co najmniej 45 znajomych. Wykaż, że zawsze znajdziemy takich czterech uczniów tej szkoły, którzy mogą usiąść przy okrągłym stole tak, by każdy siedział obok swoich znajomych.

Henryk PAWŁOWSKI

epsilon
$\delta\epsilon\lambda\tau\alpha$...
4/95
(50)

Refleksja jubileuszowa

Ten numer *EPSILONA* jest pięćdziesiąty. Gdy kilka lat temu podjęliśmy sugestię Marka Kordosa („chętnie wydzierżawiłbym stronę w *Delcie*") i wystartowaliśmy trochę „z marszu" – pierwszy *EPSILON* dostarczony był Redakcji w chwili, gdy cała reszta numeru była już gotowa, tuż przed wysłaniem do drukarni – nie przypuszczałem, że wyjdzie pięćdziesiąt *EPSILONÓW* i pewnie będą dalsze. Po przysłaniu dziesiątego zapytaliśmy Naczelnego, czy *Delta* nas dalej chce, chciała – a potem już na wszelki wypadek nie pytaliśmy... Przy okazji – jubileusz jest niejako podwójny, ten numer *Delty* otwiera drugą ćwiartkę tysiąca. *Delty* z *EPSILONAMI* to około 20% wszystkich – no, to już zauważalny kawałek.

W dotychczasowych numerach większość napisaliśmy sami, ale kilka ciekawych tekstów dostarczyły nam osoby spoza redakcji – i to nie tylko od nas, z Krakowa! Wydrukowaliśmy artykuły osób z Poznania, Wrocławia, Torunia... Nie opublikowaliśmy jeszcze tekstu warszawskiego, ale wiele wskazuje na to, że ten brak wkrótce zostanie naprawiony. Poza tym dostaliśmy sporo ciekawych listów z różnych stron Polski – serdecznie dziękujemy i prosimy o dalsze.

Tylko raz *Delta* nie przyjęła nam dostarczonego materiału (choć chyba kilka numerów zasługiwało na odrzucenie). Inna rzecz, że akurat ten nie przyjęty był, moim zdaniem, jednym z najciekawszych *EPSILONÓW*; Redakcji *Delty* też się zresztą podobał, ale uznała, że nie wypada go zamieszczać. *C'est la vie.*

A teraz będzie rekomendacja. Tak się zastanowiłem – jakie artykuły w tych 250 *Deltach* podobały mi się najbardziej, jakie do dziś świetnie pamiętam? Oczywiście, dobrych rzeczy *Delta* wydrukowała wiele. Ale niektóre są, według mnie, szczególnie warte zareklamowania. Chciałbym je polecić tym, którzy ich jeszcze nie czytali. Poszperajcie w bibliotekach, wśród starych numerów – skoro mnie się bardzo podobało, to może i Wy nie pożałujecie, że przeczytacie? Ciekawe – z reguły są to teksty, powiedzmy, niestandardowe... Więc tak: *Egzamin* (nr 5/1977), *Dyskusja o popularyzacji matematyki* (4/1982), *Kłopoty sprzedawców złotej folii* (9/1974), *Podpieramy stary dom* (1/1984 i 8/1984), *Dziwny wieczór* (7/1987),... no, może wystarczy, zwłaszcza że przypomina mi się coraz więcej.

A czego życzyłbym sobie i *EPSILONOWI* z okazji jubileuszu? Przez pierwsze cztery lata swojego istnienia *Delta* była dla mnie niezwykle ciekawa. Potem jednak, właśnie mniej więcej po ukazaniu się pięćdziesiątego numeru (byłem wtedy w połowie studiów matematycznych) zaczął się dla mnie, jako czytelnika, trwający kilka lat gorszy okres *Delty*. Przez pewien czas *Delta* była dla mnie zbyt trudna, ukazywało się w niej coraz mniej tekstów mnie interesujących, za to coraz więcej takich, które mi się źle czytało... I bardzo chciałbym, by się to w przypadku *EPSILONA* nie powtórzyło. *K.C.*

Nowe wirusy atakują

Ostatnio jakby mniej się słyszy o groźnych wirusach komputerowych. Tymczasem jest to „cisza przed burzą". Rozpoczynają bowiem swoją działalność pewne nowe, niebezpieczne wirusy. Nie są one jeszcze szeroko rozpowszechnione, ale prawdopodobnie wkrótce rozpoczną swą niszczycielską działalność na szeroką skalę. Nie powodują one wprawdzie zamiany klasy komputera, np. z 386 na AT (przewidzianej ongiś przez jednego z ekspertów od spraw wirusów), niemniej jednak mogą być dokuczliwe – niektóre z nich – zwłaszcza dla matematyków. Oto krótka charakterystyka kilku najnowszych wirusów:

CeKaKa. Wirus, który kasuje teksty, jego zdaniem, bezwartościowe. Można przypuszczać, że poczyni spustoszenia w dorobku naukowym wielu instytutów w kraju i za granicą.

Syndrom Wilesa. Działa w plikach z rozszerzeniem .tex, bezbłędnie rozpoznając prace z dziedziny teorii liczb. Po przedostatnim twierdzeniu pracy dopisuje wniosek, że z powyższego twierdzenia w sposób prosty wynika Wielkie Twierdzenie Fermata.

SCI-booster. I ten wirus atakuje pliki z rozszerzeniem .tex – dopisuje do pracy współautora, np. zamienia „`\begin{author} A.POŚMIECHOWSKI \end{author}`" na „`\begin{author} M.ATIYAH and A.POŚMIECHOWSKI \end{author}`".

Dura lex sed lex. Wirus, który przerabia teksty matematyczne na język prawniczy. Zabójczy! Choć zdarzały się wypadki, że autor tekstu nie zauważył zmiany.

Trading places. Po każdym włączeniu komputera losowo zamienia „ε" i „δ". Na szczęście nie opanował jeszcze komputerów używanych przez redakcje *Delty* i *EPSILONA*.

J-23. Specyficzny wirus, uaktywniający się dopiero przy drukowaniu; na wydruku pojawia się ni stąd, ni zowąd (gdzieś w środku) napis: „Brunner, ty świnio" lub „W Paryżu najlepsze kasztany są na placu Pigalle".

„Życzliwy". Wirus działający w poczcie elektronicznej; wraz z wysłanym listem przekazuje adresatowi dziesięć poprzednich listów wysłanych e-mailem przez tego samego nadawcę. Wirus tylko pozornie wydaje się stosunkowo nieszkodliwy; jednym z ubocznych efektów jego działalności był szybki rozwód pewnego młodego doktoranta, który wyjechał na stypendium do Amsterdamu. Do jego żony wraz z listem informującym o jego wytężonej pracy naukowej dotarły listy inne, opisujące szczegółowe wrażenia ze zwiedzania dzielnicy czerwonych świateł.

Miś z okienka. Kolejny wirus grasujący w poczcie elektronicznej, do każdego wysłanego listu dopisuje w przedostatniej linijce (nad podpisem nadawcy) propozycję pocałunku wraz z dokładnym wyszczególnieniem miejsca, w które adresat ma nadawcę pocałować.

Zaniepokojonych pragniemy pocieszyć – przygotowywane są pewne specjalne programy antywirusowe niszczące wirusy opisane powyżej. W chwili, gdy przesyłamy *EPSILONA* do druku, nie są one jeszcze gotowe, prawdopodobnie jednak w kwietniu 1995 r. rozpocznie się ich rozpowszechnianie. Zainteresowanych prosimy o kontakt z redakcją *EPSILONA* – obiecano nam kilkadziesiąt dyskietek z tymi programami do bezpłatnego przekazania innym, w celach reklamowych. Zamawiający dyskietkę opłaci jedynie koszty przesyłki pocztowej. Kto pierwszy, ten lepszy!

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski, Marcin Poźniak.
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ε.