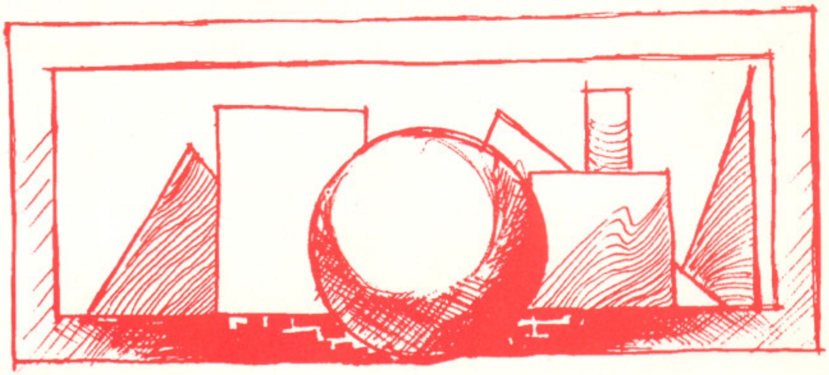


SPIS TREŚCI

NUMERU 2(249)

W następnym numerze: Ankieta jubileuszowa

Okładkę wykonał
Bernard BADZIOCH

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa

„Delta" – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.

Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7
02-678 Warszawa
tel. 43-02-43 wewn. 21
PAWELST@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w Zakładach Graficznych w Warszawie, ul. Srebrna 16

Skład systemem TEXwykonała Redakcja.

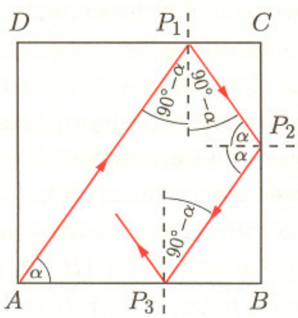
Bilard Weyla, czyli raz jeszcze o metodzie obrazów

Krzysztof REJMER

> . . . Oto jest korytarz. Jeżeli otworzysz drzwi naszego salonu, zobaczysz malusieńki skrawek korytarza w Domu po Drugiej Stronie Lustra: i jak głęboko wzrok sięga, jest on bardzo podobny do naszego korytarza, tylko, wiesz, tam dalej może być zupełnie inny. Och, Kiciu! Jak miło byłoby przedostać się do Domu po Drugiej Stronie Lustra! Jestem pewna, że są tam, och, takie piękne rzeczy! Spróbujmy udać, że znaleźliśmy sposób przedostania się tam, Kiciu.
>
> Lewis Caroll
> *O tym, co Alicja odkryła po drugiej stronie lustra*
> tłum. Macieja Słomczyńskiego

Rozważmy stół bilardowy w kształcie kwadratu, którego bok ma jednostkową długość. Po stole porusza się bez tarcia kula, odbijając się sprężyście od band. Pomiędzy kolejnymi zderzeniami, zgodnie z prawami mechaniki klasycznej, kula porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym. Zderzenia ze ścianami są sprężyste, co oznacza, że wartość prędkości kuli nie zmienia się, zmianie ulega jedynie kierunek jej ruchu w taki sposób, że kąt odbicia jest równy kątowi padania. W narożnikach stołu znajdują się otwory (małe, czarne dziury), w które kula wpada, jeśli tylko trafi w narożnik.

Wyobraźmy sobie, że z jednego z narożników (na przykład A, rys. 1) wylatuje kula pod kątem α do boku AB. Interesować nas będzie następujące zagadnienie: jakie warunki muszą być spełnione, by kula wpadła w jeden z otworów znajdujących się w narożnikach, a także, jak długo będzie trwał jej ruch.



Rys. 1. Ruch kuli na kwadratowym stole bilardowym. Kąty padania i odbicia na ściankach BC i AD są zawsze równe α, natomiast na ściankach AB i DC są zawsze równe $90° - \alpha$.

Na początek rozważmy przypadek, gdy $\operatorname{tg}\alpha$ jest liczbą wymierną, to znaczy, gdy:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{p}{q},$$

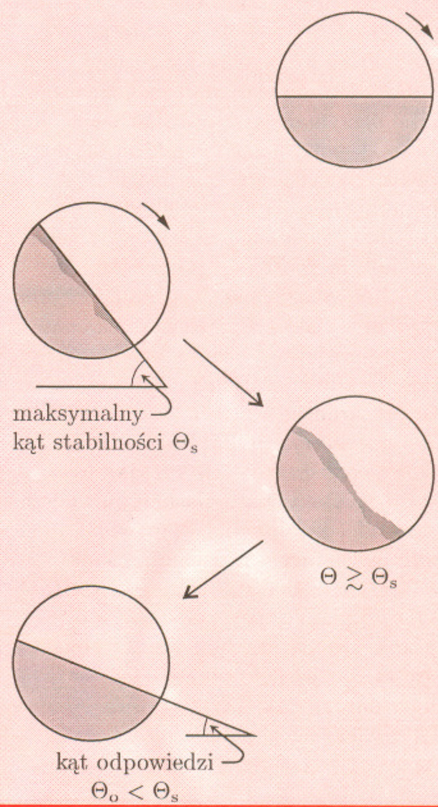
gdzie p i q są liczbami względnie pierwszymi. Kiedy kula zderzy się ze ścianą BC (to może nastąpić od razu albo po kilku odbiciach od ścian AB i CD), dokonajmy zwierciadlanego odbicia kwadratu $ABCD$ względem prostej BC.

Pośredni stan skupienia: materia sypka

Maria MASSALSKA-ARODŹ

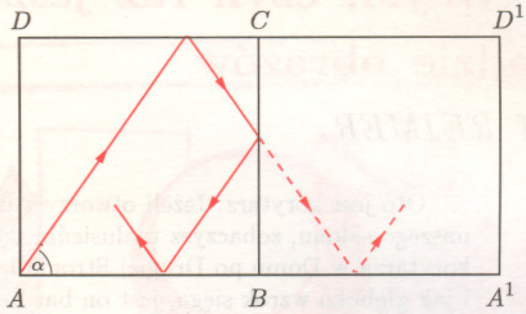
Materiały sypkie, takie jak piasek, sól, cukier, wszelkiego rodzaju żwiry, proszki czy granulaty składają się z wielu małych ziaren. Stykamy się z nimi w życiu codziennym, są powszechnie stosowane w przemyśle. W przyrodzie własności materiałów sypkich są przyczyną kataklizmów, takich jak osuwanie się ziemi czy lawiny. Poznanie własności materiałów sypkich, a są one często zagadkowe, wydaje się zatem bardzo istotne.

Zacznijmy od pytania o stan skupienia piasku wsypanego do naczynia. Wydaje się oczywiste, że układ taki jest w stanie stałym. Spróbujmy jednak obrócić naczynie! Otóż, gdy tylko nachylenie powierzchni piasku przekroczy pewien kąt (nazywany maksymalnym kątem stabilności Θ_s – rys.), to dalszy, nawet nieznaczny obrót naczynia spowoduje jakby przejście fazowe (podobnie jak ogrzanie lodu powyżej 0°C) do stanu, w którym ziarenka piasku zaczynają spontanicznie tworzyć „lawiny".



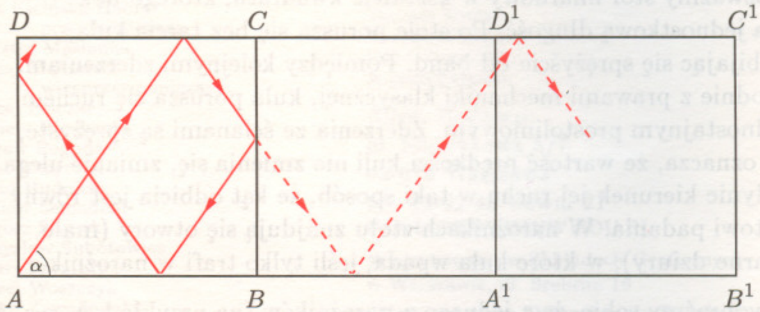
Obserwujemy wyraźny efekt płynięcia, a więc zjawisko charakterystyczne dla stanu ciekłego. Równocześnie można zauważyć, że przebiega ono w bardzo ciekawy sposób, na pewno inaczej niż w zwykłej cieczy. Otóż, w ruchu uczestniczą jedynie ziarna z cienkiej warstwy znajdującej się bezpośrednio przy powierzchni piasku. A więc tak naprawdę w stanie ciekłym jest jedynie ta warstwa ziaren. Pozostałe ziarna są nieruchome, a więc ta część układu jest nadal w stanie stałym. „Lawiny" biorące udział w zjawisku płynięcia zmniejszają kąt nachylenia powierzchni piasku. Proces płynięcia ustaje, gdy nachylenie powierzchni zmaleje do kąta zwanego kątem odpowiedzi $\Theta_o < \Theta_s$. Układy sypkie mają zatem dwa kąty graniczne – pomiędzy tymi kątami nachylenia układ znajduje się w stanie metastabilnym. To, czy układ pozostanie stabilny w danym stanie skupienia, czy też nastąpi przejście fazowe do innego stanu, zależy od historii eksperymentu. Potwierdzeniem takiej obserwacji może być doświadczenie z sypaniem pryzmy piasku. Spontaniczne płynięcie ziaren nie wystąpi, jeśli kąt nachylenia Θ powierzchni pryzmy będzie mniejszy od kąta Θ_o. Natomiast można go oczekiwać zawsze, gdy kąt nachylenia Θ przekroczy maksymalny kąt stabilności Θ_s, nawet gdybyśmy ostrożnie dokładali do pryzmy po jednym ziarenku.

Zastanówmy się teraz nad tak podstawowym parametrem charakteryzującym układy materialne jak gęstość. Otóż dla piasku wsypanego do cylindra zaskoczy nas brak jednoznaczności wyniku otrzymanego z doświadczenia. Wystarczy potrząsnąć cylindrem, aby pierwotna wysokość słupka piasku wypełniającego cylinder obniżyła się wyraźnie – okazuje się, że gęstość piasku może się tym sposobem powiększyć aż o 10%. Zmienia się przy tym współczynnik upakowania ziaren u, czyli ułamek całkowitej objętości próbki, którą zajmują ziarna. W stanie stałym upakowanie u nie może przekroczyć wartości $u_{\max} = 0{,}74$, która charakteryzuje najdoskonalsze upakowania jednakowych kul (jak to wykazał Kepler). Natomiast najluźniejsze upakowanie, które jednak zapewnia jeszcze mechaniczną stabilność układu, charakteryzuje znacznie mniejsza wartość współczynnika upakowania $u_{\min} = 0{,}56$. Jeśli upakowanie jest mniejsze od tej progowej wartości, to piasek zaczyna płynąć. Zatem efekt płynięcia lub jakiejkolwiek deformacji w materiale sypkim jest związany z możliwością



Rys. 2. Stół bilardowy i jego zwierciadlane odbicie.

Od tego momentu będziemy rozważać ruch zwierciadlanej kuli na zwierciadlanym stole bilardowym A^1BCD^1 tak długo, aż wreszcie kula uderzy w ścianę A^1D^1. Dokonamy wtedy zwierciadlanego odbicia naszego zwierciadlanego stołu względem prostej A^1D^1 otrzymując kolejny stół bilardowy $A^1B^1C^1D^1$, który jest tożsamy (z dokładnością do translacji) z wyjściowym stołem $ABCD$.

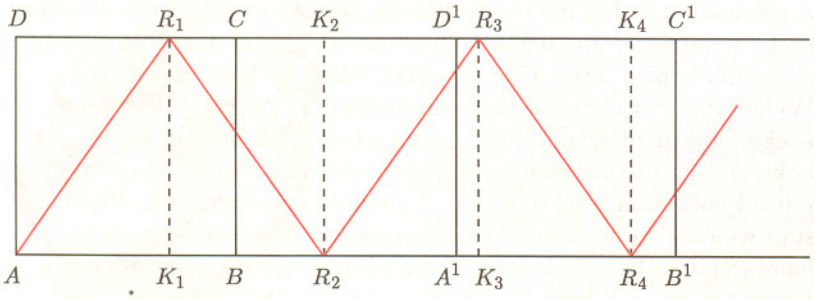


Rys. 3. Kwadratowy stół bilardowy i jego dwa kolejne zwierciadlane odbicia.

Oczywiście, przez cały czas śledzimy ruch kuli, która na przemian jest prawdziwą kulą, to znowu jej zwierciadlanym odbiciem.

Zapomnijmy teraz o zwierciadlanych światach i wyobraźmy sobie nieskończenie długi stół bilardowy ograniczony odcinkiem AD i półprostymi AB i DC. Zamiast analizować ruch kuli na kwadratowym stole, zajmiemy się jej ruchem na stole nieskończonym, który jest mu równoważny. Stoły zwierciadlane były tylko pośrednim elementem konstrukcji. Każdemu odbiciu od boku DC (AB) kwadratowego stołu wzajemnie jednoznacznie odpowiada odbicie od półprostej DC (AB) na nieskończonym stole. Każdemu odbiciu od boku BC (AD) stołu kwadratowego także wzajemnie jednoznacznie odpowiada przejście przez odcinek B^iC^i (A^iD^i) na nieskończonym stole; linie te powstają w trakcie zwierciadlanych odbić jako wielokrotne obrazy boków BC (AD) pierwotnego stołu.

Z rysunku 4 widzimy, że i-ty punkt odbicia kuli od nieskończonych band jest odległy od boku AB o $i \cdot \frac{q}{p}$. W szczególności dla $i = p$ otrzymamy liczbę całkowitą p, co odpowiada trafieniu kuli w narożnik w naszym wyjściowym zagadnieniu. A zatem, zanim kula trafi w narożnik, $p - 1$ razy odbije się od band AB i CD oraz $q - 1$



Rys. 4. R_i oznaczają punkty kolejnych odbić kuli od band AB i DC nieskończonego stołu bilardowego, natomiast K_i ich rzuty prostopadłe na równoległy bok. Jeśli $\operatorname{tg}\alpha = \frac{p}{q}$, to $AK_1 = R_iK_{i+1} = K_iR_{i+1} = \frac{q}{p}$.

razy przetnie linię A^iD^i lub B^iC^i; każde z tych zdarzeń odpowiada wzajemnie jednoznacznie odbiciu kuli od boku kwadratowego stołu. Wynika stąd, że kula doznaje $p+q-2$ zderzeń z bandami kwadratowego stołu bilardowego, zanim wpadnie w narożnik. Długość odcinka AR_1 (a także każdego z odcinków R_iR_{i+1}) jest równa:

$$s = \sqrt{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^2}\,.$$

A zatem długość łamanej przebytej przez kulę wynosi:

$$l = p \cdot s = \sqrt{p^2 + q^2}\,.$$

Jeśli przez v oznaczymy prędkość kuli, to czas trwania ruchu kuli, od momentu jej wystrzelenia do momentu znalezienia się w narożniku, jest równy:

$$t = \frac{1}{v}\sqrt{p^2 + q^2}\,.$$

Jeżeli $\operatorname{tg}\alpha$ jest liczbą niewymierną, to i-ty punkt zderzenia kuli z nieskończonymi bandami AB i DC jest odległy od boku AD o $i \operatorname{ctg}\alpha$. Ponieważ jest to liczba niewymierna, wnioskujemy, że kula nigdy nie znajdzie się w narożniku kwadratowego stołu, a jej ruch będzie trwał nieskończenie długo. Funkcja

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \ni \alpha \to t(\alpha) \in [0, \infty]\,,$$

jest dość niezwykła, ponieważ „na ogół" przyjmuje wartość nieskończoną (zbiór liczb niewymiernych jest gęstym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych), natomiast gdzieniegdzie (tam, gdzie $\operatorname{tg}\alpha$ jest liczbą wymierną) przyjmuje wartość skończoną. Interesujące byłoby zbadanie własności tej funkcji. Może ktoś z Czytelników *Delty* będzie miał jakieś ciekawe pomysły?

Powróćmy do przypadku, gdy $\operatorname{tg}\alpha$ jest liczbą niewymierną. W *Delcie* 7/1994 ukazał się artykuł Pawła Strzeleckiego „O potęgach dwójki", w którym cytowane jest następujące twierdzenia Hermanna Weyla:

Twierdzenie

Niech x będzie liczbą niewymierną, natomiast a i b liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunek: $0 \le a < b \le 1$. Zdefiniujmy następujący ciąg liczbowy: $c_i = ix - [ix]$. Niech $K_i(a,b)$ będzie liczbą elementów zbioru $\{c_n \in (a,b) : 1 \le n \le i\}$. Zachodzi wtedy następująca równość:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{K_i(a,b)}{i} = b - a\,.$$

jego rozprężenia, czyli zmniejszenia współczynnika upakowania. Dla ilustracji przywołam tu eksperyment, który pewnie każdy przeprowadził sam stąpając po wilgotnej, piaszczystej plaży. Deformacja wywołana ciśnieniem postawionej na piasku stopy powoduje, że powstaje wokół niej wzgórek suchego piasku. Jest to wywołane rozsunięciem się ziarenek, co pozwala wodzie znajdującej się w wolnych przestrzeniach pomiędzy ziarenkami przedostać się głębiej. Dla układów sypkich istotna jest zarówno własność sztywności, charakterystyczna dla stanu stałego, jak i własność płynięcia, typowa dla cieczy. To, z jakim zjawiskiem mamy w konkretnym przypadku do czynienia, jest uwarunkowane geometrycznym upakowaniem takich nieuporządkowanych układów.

Już podkreślałam, że nie jest sprawą oczywistą, do jakiego stanu skupienia zaklasyfikować materiały sypkie. Potwierdza to obserwacja zachowania się fal akustycznych w tych układach. Wiadomo, że dźwięk rozchodzi się dobrze w substancjach w dowolnym stanie skupienia. Tymczasem, pomimo że poszczególne ziarna piasku są wyraźnie ciałem stałym (o składzie chemicznym danym wzorem SiO_2), to w próbce wypełnionej piaskiem fala akustyczna rozchodzi się znacznie wolniej niż w próbce jednorodnej (bez ziaren) o tym samym składzie: prędkość dźwięku w próbce składającej się z wielu szklanych kulek o średnicy 0,5 cm jest równa 280 m/s, podczas gdy w jednorodnej próbce szklanej jest około 15 razy większa. Rozchodzenie się dźwięku jest więc uzależnione nie tyle od składu chemicznego próbki, ile od sposobu wypełnienia jej objętości ziarnami. Stwierdzono ponadto, że prędkość rozchodzenia się fal głosowych jest silnie uzależniona od wzajemnego nacisku ziaren. Jeśli ziarna ledwo się dotykają, wówczas prędkość fali jest niewielka. W dużej pryzmie piasku wzajemny nacisk ziaren rośnie, gdy zbliżamy się do podłoża. Prędkość fali akustycznej w piaszczystej pryzmie będzie zatem różna na różnych wysokościach (na szczycie będzie bliska zeru, a na głębokości h będzie proporcjonalna do $h^{1/6}$). Z powodu takiego rozkładu prędkości fala akustyczna nie będzie w stanie utrzymać pierwotnego poziomego kierunku rozchodzenia się na całej wysokości pryzmy. Wektor prędkości będzie więc stopniowo odchylany od kierunku poziomego aż pozostanie jedynie składowa pionowa prędkości dźwięku.

Rzeczywiście odgłos huczących fal morskich jest bardzo słaby, jeśli od morza oddziela nas piaszczysta wydma.

Inną ciekawą własność materiałów sypkich można zauważyć obserwując przesypywanie się piasku w klepsydrze odmierzającej czas. Otóż, czas „wypływu" piasku z górnej części klepsydry jest proporcjonalny do ilości piasku zebranego powyżej otworu. W odróżnieniu od cieczy, gdzie prędkość wypływu zależy od wysokości słupka cieczy ponad otworem, prędkość „wypływu" strumienia ziaren jest stała niezależnie od tego, jak dużo piasku jest nadal w naczyniu. Po prostu ciężar piasku jest równoważony przez siły tarcia przy ściankach naczynia. Szczegółowe obserwacje wypływu piasku przez otwory pozwoliły stwierdzić, że strumień piasku opuszczający cylinder wytwarza bardzo złożony ruch ziaren wewnątrz cylindra. Nad otworem powstaje stożek, poniżej którego ziarna piasku są nieruchome. Natomiast wewnątrz stożka ziarna poruszają się tworząc fronty, gdzie gęstość ziaren jest wyraźnie mniejsza niż w otoczeniu. Ich przemieszczanie się w czasie jest regularne. Można powiedzieć, że przepływ piasku przez cylinder przebiega w formie fal gęstości.

Przedstawiłam jedynie niektóre z własności materiałów sypkich. Pokazują one, że układy te zachowują się inaczej niż ciecze (np. przy wypływie ziaren), ale również odmiennie niż ciała stałe (np. przy transmisji dźwięku). Pomimo że zajmowano się materiałami sypkimi już od dość dawna (Hooke około roku 1700, Faraday – 1831 r., Reynolds – 1885 r.), wiele z własności materiałów sypkich czeka jeszcze na wyjaśnienie. Zachowanie się układów składających się z wielu ziaren stanowi przedmiot symulacji komputerowych oraz rozważań teoretycznych, a także skłania do nowych doświadczeń. Najnowsze rezultaty są publikowane w najbardziej renomowanych czasopismach [1–5].

Literatura:

1. S.R. Nagel, *Reviews of Modern Physics*, vol. 64, No 1, 321 (1992),
2. H.M. Jaeger i S.R. Nagel, *Science*, vol. 255, 1523 (1992),
3. Chu-heng Liu i S.R. Nagel, *Physical Review Letters*, vol. 68, No 15, 2301 (1992),
4. J.B. Knight, H.M. Jaeger i S.R. Nagel, *Physical Review Letters*, vol. 70, No 24, 3728 (1993),
5. A. Mehta i G.C. Barker, *Reports on Progress in Physics*, 383 (1994)

Z równości, o której mówi twierdzenie, wnioskujemy, że dla dowolnej liczby r należącej do odcinka otwartego $(0, 1)$ i jej dowolnie małego otoczenia istnieje takie i, że $ix - [ix]$ należy do tego otoczenia. Wybierając $x = \operatorname{ctg} \alpha$ od razu zauważamy, że ix jest odległością i-tego punktu zderzenia kuli z jedną z band AB lub DC od boku AD na nieskończonym stole bilardowym, podczas gdy $ix - [ix]$ jest odpowiadającą jej odległością na stole kwadratowym. Płynie stąd wniosek, że w dowolnie małym otoczeniu dowolnego punktu, należącego do boku AB lub CD kwadratowego stołu, znajdują się punkty, w których kula odbija się od bandy. Oczywiście, to samo można powiedzieć o bokach AD i BC. Przez punkt ten przechodzą dwie proste nachylone do boku pod kątem α i $180° - \alpha$, wzdłuż których kula poruszała się przed i po zderzeniu z bandą. Jeśli teraz weźmiemy dowolny punkt z wnętrza kwadratu, to w każdym jego otoczeniu znajdzie się przynajmniej jedna taka prosta. A zatem kula bilardowa po dostatecznie długim czasie przejdzie dowolnie blisko każdego z wewnętrznych punktów stołu bilardowego. Jest to prawda dla prawie wszystkich warunków początkowych, poza zbiorem odpowiadającym początkowym prędkościom kuli, które tworzą z bokiem kwadratu kąty o wymiernej wartości tangensa.

Kiedy stopa wywiera nacisk na piasek ubity cofającym się odpływem, najbliższe otoczenie stopy natychmiast wysycha... Nacisk stopy powoduje objętościowe powiększenie się piasku, a więc szczeliny w otaczającym piasku wciągają więcej wody wywołując wysuszenie aż do momentu, gdy z dołu podniesie się dostateczna jej ilość do ponownego zwilgotnienia. Podnosząc stopę na ogół widzimy, że piasek pod nią i wokół niej natychmiast wilgotnieje. Dzieje się tak na skutek reakcji piasku po usunięciu działających przedtem sił...

Osborn Reynolds
British Association Report, Aberdeen, 1885

Gdybyśmy zapytali kogokolwiek z dwóchset tysięcy milionów mężczyzn, kobiet i dzieci, którzy od początku świata kiedykolwiek przechadzali się po mokrym piasku, ilu z nich, przed posiedzeniem Brytyjskiego Towarzystwa w Aberdeen w 1885 roku, na pytanie: „Czy piasek pod stopami ulega ściśnięciu?", odpowiedziałoby inaczej niż „Tak!"? (W przeciwieństwie do stąpania po dnie morskim pokrytym mokrymi wodorostami.)

Lord Kelvin
Baltimore Lectures, 1904

Jakiekolwiek jest najściślejsze przypadkowe upakowanie, z eksperymentów Osborna Reynoldsa na wybrzeżu morskim staje się jasne, że najmniejsze choćby zakłócenie zwiększa rozmiary luk. Tę samą zasadę może wyjaśnić sztuka magiczna hinduskiego fakira, o jakiej wspomina Martin Gardner. Cylindryczny dzbanek z dość wąskim otworem napełnia się niegotowanym ryżem, delikatnie potrząsając tak, aby dobrze się ułożył. Nóż kuchenny zanurza się kilkakrotnie do dzbana, za każdym razem coraz głębiej. Po około dwunastu zanurzeniach nóż nagle uwięźnie tak mocno, że w trakcie wyciągania będzie się podnosił cały dzbanek z ryżem.

H.S.M. Coxeter
Wstęp do geometrii dawnej i nowej,1961

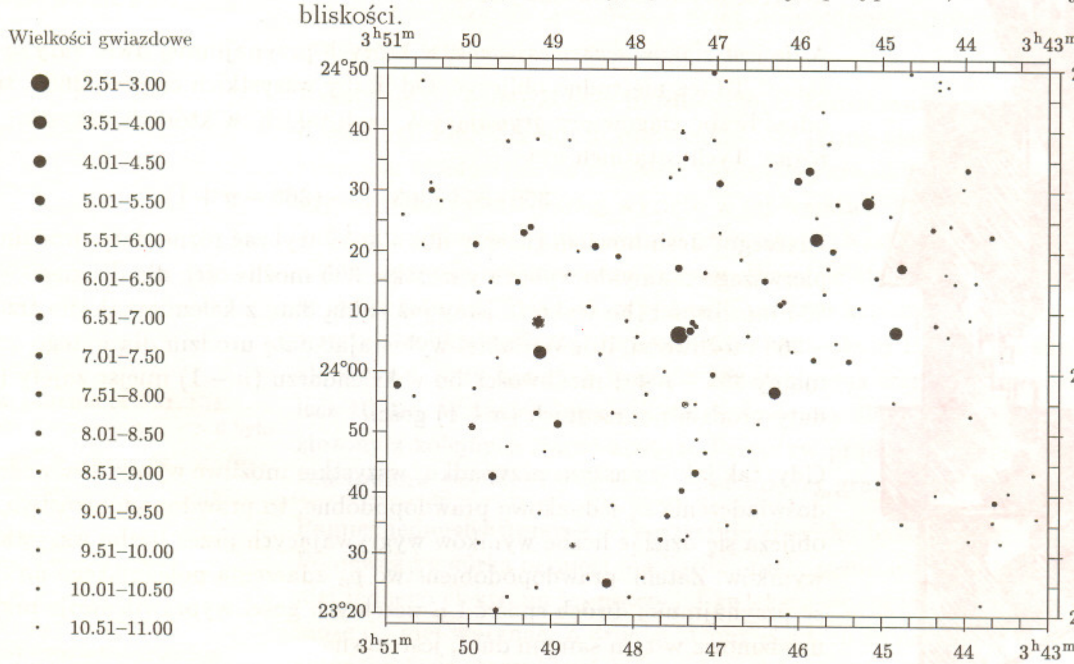
Niebo przez lornetkę

Wczesnym wieczorem zimą, niemal w zenicie widać dwie tzw. gromady otwarte. Tym terminem określa się wyraźnie wyróżniające się z tła zgrupowania gwiazd, w których gwiazdy nie zlewają się w jedną jasną plamę. To jest jakby definicja obserwacyjna gromady otwartej, natomiast fizycznie jest to rzeczywiście grupa gwiazd zazwyczaj w liczbie kilkuset, zajmująca obszar o rozmiarach kilkudziesięciu parseków, stanowiąca całość wskutek wiążących te gwiazdy sił grawitacji. Gwiazdy należące do gromady mają ponadto wspólne pochodzenie, tzn. powstały praktycznie jednocześnie z jednego obłoku materii, mają więc jednakowy skład chemiczny i są jednego wieku, a różnią się jasnością, ponieważ mają różne masy.

Pierwsza z tych gromad to Hyady, położona w sąsiedztwie Aldebarana, najjaśniejszej gwiazdy Byka. Chociaż jest najbliższa, największa i najjaśniejsza z gromad otwartych (gdyby zsumować jasności wszystkich należących do niej gwiazd), nie robi wielkiego wrażenia, ponieważ jest zbyt rozległa. Patrząc gołym okiem można jedynie podejrzewać, że istotnie w pobliżu Aldebarana jest sporo słabych gwiazd, dopiero w lornetce widać ich mrowie. Jest ich tam w przybliżeniu 400 i całość leży w odległości 45 pc. Gromada odegrała ważną rolę w astronomii, ponieważ tak mała jej odległość została wyznaczona metodą trygonometryczną, a więc niezależną od cech fizycznych samych gwiazd ani ośrodka międzygwiazdowego rozciągającego się między nią a nami. To właśnie dzięki znajomości jej odległości można było określić rzeczywiste własności tworzących ją gwiazd.

Druga zimowa gromada otwarta, Plejady (M 45), leży również w Byku w odległości 120 pc od nas. Gołym okiem widać w niej najwyżej 7 słabych gwiazd, w lornetce kilkadziesiąt w polu widzenia, co stwarza wyjątkowo piękny i efektowny obraz. Jest to gromada na tyle młoda, że jej gwiazdy są do dziś zanurzone w resztkach obłoku, z którego powstały, co widać, oczywiście, dopiero na zdjęciach z długą ekspozycją.

Na inne gromady otwarte można natrafić wodząc lornetką wzdłuż Drogi Mlecznej (np. dwie leżące tuż obok siebie w Perseuszu, ledwo widoczne gołym okiem; oznaczane jako h i χ Perseusza). Gromady otwarte w ogóle leżą w pobliżu płaszczyzny równikowej naszej Galaktyki, a to, że Hyady i Plejady widać poza Drogą Mleczną, wynika trochę z przypadku, a bardziej z ich bliskości.



Plejady. Mapka może służyć do określania zasięgu lornetki. Wg. *Atlasu Nieba Gwiaździstego* Jerzego i Adama Dobrzyckich.

Tomasz KWAST

Paradoks urodzin i zakłady na weselach

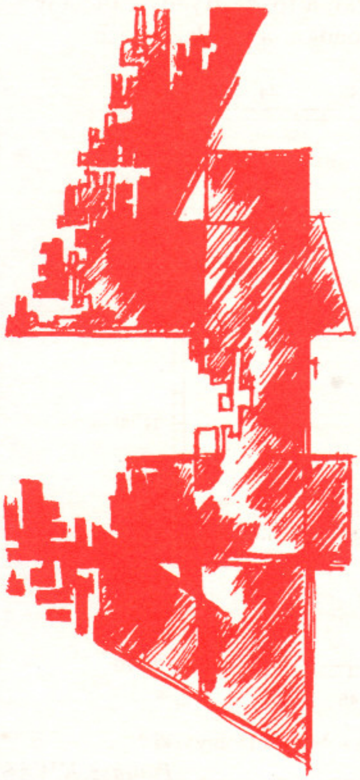
Paweł STRZELECKI

Prawie każdy z nas lubi, choćby od czasu do czasu, założyć się np. o duże lody, szczególnie gdy wie, że ma ogromne szanse na to, by zakład wygrać. Podamy dziś propozycję pewnego zakładu, na którą można nabrać znakomitą większość osób nie znających rachunku prawdopodobieństwa.

Przypuśćmy, że jesteśmy na średniej wielkości rodzinnym weselu, na którym bawi się (lepiej lub gorzej) pięćdziesięcioro gości w najróżniejszym wieku. Załóżmy się z jednym z nich, że wśród wszystkich weselników znajdą się przynajmniej dwie osoby, które obchodzą swoje urodziny tego samego dnia (to znaczy, obie urodziły się np. 19 sierpnia, choć niekoniecznie w tym samym roku). Wielu laików uważa, że to mało prawdopodobne zdarzenie. Gdy się spyta, dlaczego tak sądzą, można na ogół usłyszeć odpowiedzi w rodzaju:

No,... to chyba oczywiste: przecież dni w roku jest **aż** 365, a gości **tylko** 50; można na przykład dla każdego wybierać datę urodzenia w innym tygodniu roku (na **mnóstwo** sposobów), a i tak jeszcze zostaną dwa tygodnie w zapasie.

To jednak złudne wrażenie. Przekonajmy się o tym za pomocą rachunku. Oznaczmy dla wygody liczbę wszystkich gości przez n. Załóżmy też dla uproszczenia, że rok zawsze ma 365 dni i że wszystkie daty urodzenia są jednakowo prawdopodobne. Gdy sprawdzamy, kto wygrał zakład, to musimy z karteczką i ołówkiem w ręku podejść do każdego gościa i zapisać dzień i miesiąc jego urodzenia. Otrzymamy w ten sposób n-wyrazowy ciąg *dat*; każda z tych *dat* może mieć jedną z 365 różnych wartości. Dla $n = 2$ takich ciągów jest 365^2 (wyobraźmy sobie wielką kwadratową tabelę 365×365; par *dat* urodzin jest dokładnie tyle, co pól tabeli). Dla $n = 3$ takich ciągów jest 365^3 (tym razem można pomyśleć o tabeli w kształcie sześcianu). W ogólnym przypadku n-wyrazowych ciągów dat jest 365^n.



A ile jest ciągów *wygrywających*, w których przynajmniej dwie *daty* są takie same? To też nietrudno obliczyć. Od liczby wszystkich ciągów, 365^n, trzeba odjąć liczbę ciągów *przegrywających*, czyli takich, w których wszystkie *daty* są różne. Tych ostatnich jest

$$365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1).$$

Dlaczego? Jeśli bowiem chcemy dla n gości wybrać różne daty urodzin, to dla pierwszego mamy do wyboru wszystkie 365 możliwości, dla drugiego – już tylko 364 możliwości (bo wykreśliliśmy już jedną datę z kalendarza), dla trzeciego – 363 możliwości, itd. Wreszcie, wybierając datę urodzin dla n–tego gościa mamy $365 - n + 1$ możliwości, bo w kalendarzu $(n - 1)$ miejsc zajęły (różne!) daty urodzin poprzednich $(n - 1)$ gości.

Gdy, tak jak w naszym przypadku, wszystkie możliwe wyniki losowego doświadczenia są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo wygranej oblicza się dzieląc liczbę wyników wygrywających przez liczbę wszystkich wyników. Zatem, prawdopodobieństwo p_n zdarzenia polegającego na tym, że przynajmniej dwóch spośród n weselnych gości wyprawia swoje przyjęcia urodzinowe w tym samym dniu, jest równe

$$p_n = \frac{365^n - 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n} = 1 - \frac{365!}{(365 - n)!365^n}.$$

Rozwiązanie zadania M 729.
$4(abc+abd+acd+bcd) =$
$= 4ab(c+d)+4cd(a+b) =$
$= [(a+b)^2-(a-b)^2](c+d)+$
$+[(c+d)^2-(c-d)^2](a+b) \leq$
$\leq (a+b)^2(c+d)+(c+d)^2(a+b) =$
$= (a+b+c+d)(a+b)(c+d) =$
$= 4(a+b)(c+d) =$
$= (a+b+c+d)^2-(a+b-c-d)^2 \leq$
$\leq (a+b+c+d)^2 = 16,$
zatem $abc+abd+acd+bcd \leq 4$
i równość zachodzi dla $a=b=c=d=1$.

Dla $n=50$ mamy $p_{50} = 0{,}97\ldots$. Na pytanie, co to właściwie znaczy, Uczony Statystyk powiedziałby dość mętnie, że jeśli będziemy na stu różnych pięćdziesięcioosobowych weselach i na każdym raz założymy się w opisany wyżej sposób, to wygramy, średnio rzecz biorąc, około 97 razy. Można próbować zakładać się i na weselach, na których jest na przykład 40 gości (a na stuosobowym weselu naprawdę warto spróbować kogoś naciągnąć). Dla zainteresowanych podajemy kilka przykładowych wartości p_n dla różnych n.

I jeszcze jedno: najmniejszą liczbą naturalną n, dla której $p_n > \frac{1}{2}$, jest 23. Ci Czytelnicy *Delty*, którzy chodzą jeszcze do szkoły, mogą sprawdzić, czy w ich klasie są dwie osoby obchodzące urodziny tego samego dnia.

n	23	25	30	40	70	100
p_n	$0,507\ldots$	$0,568\ldots$	$0,706\ldots$	$0,891\ldots$	$0,9991\ldots$	$0,9999996\ldots$

Jednoelektronowa komórka pamięci

Rozwiązanie zadania M 730. Każdy wielomian stopnia nieparzystego ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty (bo jest funkcją ciągłą, dla dostatecznie małych argumentów przyjmuje wartości przeciwnego znaku niż dla dostatecznie dużych). Gdyby wielomian W miał więcej niż jeden pierwiastek rzeczywisty, to jako wielomian trzeciego stopnia rozkładałby się na iloczyn dwumianów o współczynnikach rzeczywistych, miałby więc trzy pierwiastki rzeczywiste (licząc z krotnościami). Jednak w przypadku wielomianu W jest to niemożliwe gdyż ze wzoru Viete'a wynika, iż iloczyn pierwiastków byłby równy 1, a $W(x) < 0$ dla $x < 0$ i $W(x) > 0$ dla $x > 1$.

Naukowcy z laboratorium koncernu Hitachi skonstruowali komórkę pamięci komputerowej, która prawdopodobnie przyczyni się do rewolucji w dziedzinie przechowywania informacji. Komórka ta wykorzystuje dokładnie jeden elektron do zapisu jednego bitu informacji. Dla podkreślenia wagi tego osiągnięcia należy dodać, że obecnie stosowane elementy pamięci, aby uzyskać ten sam efekt, potrzebują około 500 000 elektronów. Układy pamięci oparte na zapisie jednoelektronowym będą zużywały milion razy mniej mocy i zajmowały 10 000 razy mniejszą powierzchnię niż obecnie powszechnie dostępne układy pamięci.

Pierwsze doniesienie o komórce pamięci wykorzystującej małą liczbę nośników (100 elektronów do zmagazynowania jednego bitu informacji) pojawiło się na początku 1993 roku. Niestety, ta struktura elektroniczna pracowała tylko w ekstremalnie niskiej temperaturze 0,03 K. Natomiast naukowcy z laboratorium Hitachi twierdzą, że opracowana przez nich jednoelektronowa komórka pamięci pracuje w temperaturze pokojowej.

Uzyskanie tej komórki było możliwe dzięki zastosowaniu nowoczesnych technologii i nowoczesnych materiałów. Strukturę elektroniczną tego elementu zbudowano na warstwie izolacyjnej arsenku galu. Najpierw przy użyciu wiązki elektronowej wycięto w tej warstwie kanały o szerokości 100 nm i głębokości kilku warstw atomowych. Następnie kanały wypełniono cienką warstwą amorficznego krzemu. Wreszcie struktura została wygrzana w temperaturze 750°C. W czasie tego procesu krzem zrekrystalizował tworząc warstwę polikrystaliczną o rozmiarach ziaren około 10 nm. Na skutek efektów złączowych przy brzegach kanałów ich efektywna szerokość wynosiła nie 100, lecz 10 nm. W takich kanałach drogę dostępną dla elektronów stanowi „drut" złożony z kolejnych ziaren krzemu. Przepływ prądu odbywa się tu poprzez tunelowanie pojedynczych elektronów między granicami kolejnych ziaren.

Rozwiązanie zadania M 731. Nie. Gdyby bowiem dla pewnych $a, q > 0$ było
$$a = \sqrt{p_1}, \quad aq^n = \sqrt{p_2}, \quad aq^m = \sqrt{p_3},$$
gdzie $m > n$ są naturalne, to rugując z trzech powyższych równości a i q otrzymalibyśmy
$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^m = \left(\frac{p_3}{p_1}\right)^n$$
lub równoważnie $p_2^m = p_1^{m-n} p_3^n$. To zaś jest sprzeczne z twierdzeniem o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze.

Pamięć jednoelektronowa wykorzystuje zjawisko blokady kulombowskiej. Ponieważ komórka pamięci ma bardzo małe rozmiary, więc po wpuszczeniu do niej jednego elektronu jej potencjał zwiększa się na tyle, że następny elektron nie może do niej wpłynąć. Z drugiej strony elektron samorzutnie nie może opuścić komórki. Dwa stany komórki – z i bez elektronu – mogą reprezentować jedynkę i zero informacji cyfrowej.

Jacek JASIŃSKI

mała delta

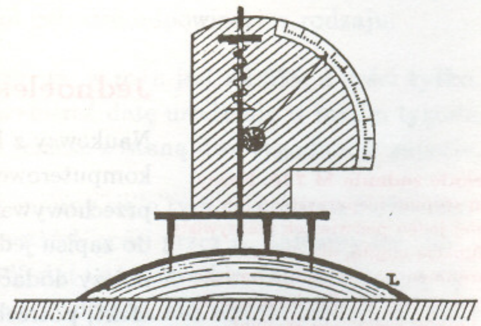
Sferometr

Tytułowy przyrząd służy do mierzenia promienia sfery, względnie kuli, w sytuacji, gdy nie mamy jej do dyspozycji w całości. Może tak być, gdy sfera jest bardzo duża (np. w porównaniu z nami), lub gdy fizycznie istnieje tylko jej część (np. chodzi o soczewkę okularów). Rysunki 1 i 2 przedstawiają właśnie sferometry (rysunki te zostały zaczerpnięte z wydanej w 1917 roku książki H. Bouasse pod tytułem *Appareils de mesure*, czyli *Przyrządy pomiarowe*).

Oba sferometry sam proces pomiaru mają oparty na tej samej zasadzie. Przyrząd stoi na sferze na trzech nóżkach, których końce (oznaczmy każdy z nich przez A) tworzą trójkąt równoboczny. Jego bok – oznaczmy go przez a – jest stałą związaną z danym sferometrem i precyzyjnie zmierzoną; wynik tego pomiaru jest wypisany na samym przyrządzie. Pomysł geometryczny, na którym opiera się działanie sferometru, jest – być może – na pierwszy rzut oka paradoksalny:

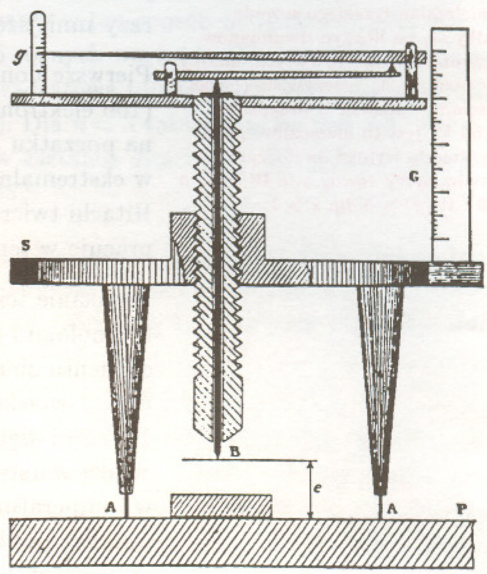
okrąg powstały z przecięcia sfery płaszczyzną przechodzącą przez końce nóżek sferometru ma ten sam promień niezależnie od promienia sfery, na której przyrząd postawiliśmy

(to, oczywiście, nieprawda: trzeba uczynić zastrzeżenie, że średnica sfery jest większa od a).



Rys. 1.

Zatem promień ten (oznaczmy go r) również jest stały dla danego przyrządu – Czytelnikowi nawet ze szkoły podstawowej nie sprawi kłopotu ustalenie, iż jest on równy $\frac{a}{\sqrt{3}}$.



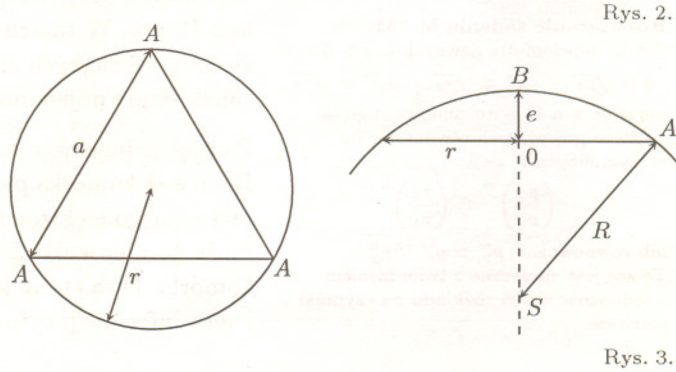
Rys. 2.

Pomiaru dokonuje się przez dotknięcie sfery ostrzem poruszającym się pionowo nad środkiem trójkąta AAA. Okazuje się wtedy, że ostrze to znajduje się o e nad płaszczyzną trójkąta. Prosty rachunek (rys. 3) daje nam promień R badanej sfery:

$$R^2 = AS^2 = AO^2 + SO^2 = AO^2 + (SB - BO)^2 =$$
$$= r^2 + (R-e)^2 = \frac{a^2}{3} + (R-e)^2,$$

skąd $R = \dfrac{a^2 + 3e^2}{6e}$.

Podobno przyrząd przedstawiony na rysunku 2 miał tę przewagę, że podawał nie liczbę e (jak przyrząd z rysunku 1), lecz od razu R. Czy umiałbyś, Czytelniku, zweryfikować ten pogląd?



Rys. 3.

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS

Rozwiązanie zadania F 399. W spadającym strumieniu wody powstaje dźwiękowa fala stojąca o węźle u podstawy wodospadu i strzałce w miejscu, gdzie woda zaczyna spadać. Drgania o najniższej częstotliwości odpowiadają długości fali $\lambda = \frac{1}{4}h$, gdzie h jest wysokością wodospadu. A zatem

$$h = \frac{4v}{f}.$$

Rozwiązanie zadania F 400. Tarcie powoduje ogrzewanie struny, a przez to jej wydłużenie i zmniejszenie siły napięcia, co obniża częstotliwość drgań. Grający na instrumencie dętym ogrzewa swym oddechem powietrze w instrumencie, dlatego rośnie prędkość dźwięku (zmiany rozmiarów instrumentu można zaniedbać). Powoduje to zwiększenie się częstotliwości rezonansowych instrumentu.

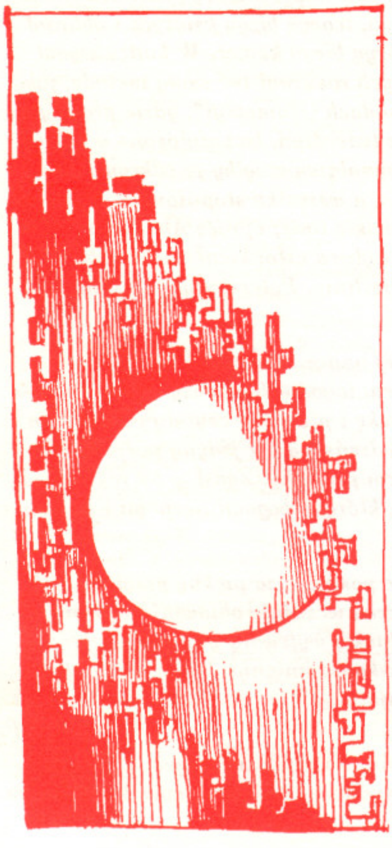
Dziwna materia

Tak, szósty kwark to było coś! Taką okazję można by uczcić – nieśmiało zaproponował student. Jasne – krzyknął Józek i dodał – no co tak stoisz, leć po piwo! Zośka wstawiła do reaktora wczorajszą zupę gluonowo-kwarkową dorzucając szczyptę wysokoenergetycznych pionów, a potem położyła się w pakamerze z maseczką powabnych kwarków na twarzy. Po kwadransie student wrócił z piwem i poszedł schłodzić je w synchrofazotronie. Nagle Zośka wypadła z pakamery krzycząc, że rano puściła dwie wiązki przeciwbieżne i zapomniała wyłączyć. No to po studencie – zmartwił się Józek – kto nam teraz w moździerzu utłucze nieabelowych grup cechowania? Jak się odkrycie potwierdzi, to studentów będziemy mieli na pęczki – próbowałem pocieszyć go. Jednak wszystkim zrobiło się smutno, bo chłopaka żal. Staroświecki licznik Geigera-Müllera, który od rana grał „Odę do radości", teraz zamilkł, Zośka pochlipywała w kącie, nawet twarde promienie gamma trochę zmiękły. I wtedy nieoczekiwanie, w aureoli wirtualnych fotonów, potykając się o zrenormalizowane propagatory, student wyszedł z synchrofazotronu, obwieszony operatorami anihilacji, dzierżąc w dłoni butelkę Kleina pełną złocistego EB. Twarz miał jakąś DZIWNĄ, a z lewego kącika ust sączyła mu się cienka strużka hiperjąder. Hurra – krzyknął Józek i pociągnął tęgi łyk, zanim zdążyłem go ostrzec – uważaj, tam może być antyma...

W tej samej chwili poraziła nas nieziemska jasność: jak w pierwszej minucie – pomyślałem, a potem ujrzałem nad sobą uśmiechniętą twarz P.A.M. Diraca okocim spojrzeniu (był to zresztą uśmiech kota z Cheshire) i z westchnieniem – Wszechświat cieszy – zmieniłem się w migotliwy rój fotonów, które rozproszyły się w najodleglejszych zakamarkach pogrążonego w inflacji Kosmosu.

K.R.

Naprawdę było inaczej



W numerze 9/1994 *Delty* jest tekst na temat Księgi Szkockiej. O samej *Szkockiej* pisze się tam, że *z pewną dowolnością można* [ją] *nazwać kawiarnią*. Jeszcze gorzej zakwalifikowana jest *Szkocka* w *Wykładach z historii matematyki* Marka Kordosa. Tymczasem Pan **Mieczysław Karpiniec**, chemik, ale miłośnik matematyki, obecnie mieszkaniec Kielc, pisze:

Studiowałem w latach 1936–39 na Politechnice Lwowskiej i poznałem Lwów dość dobrze. Kawiarnia Szkocka nie zasługuje na degradującą ją nazwę „kawiarenka", a w żadnym już razie „knajpka".

Przy końcu najbardziej reprezentatywnej ulicy Akademickiej były dwie sąsiadujące, w narożnych kamienicach, kawiarnie – większa Roma i mniejsza Szkocka. Pierwsza miała klientelę, że tak powiem „adwokacką", druga – „profesorską". Szkocka była w stylowej, wybitnie secesyjnej kamienicy. Pomieszczenia jej były szczególnie wysokie, duże szyby były nie tyle oknami, co frontowymi ścianami. Nikt z lwowiaków nie nazwałby Szkockiej kawiarenką !

Podczas oblężenia Lwowa w 1939 r. wstąpiłem kiedyś w południe do Szkockiej i zdumiony byłem, że wojna doprowadziła do tego, iż w tej eleganckiej kawiarni – teraz pustawej – zaproponowano mi zjedzenie ... pierogów. Podczas ich spożywania przeraził mnie łoskot tłuczonego szkła – to jedną z wysokich szyb rozbił zabłąkany pocisk.

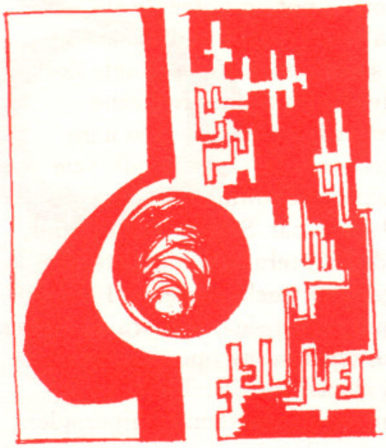
Te „pierogi w kawiarni" i tę rozbitą szybę wspominam jako złowieszczą zapowiedź nadchodzących lat, których przeżycie zawdzięczam głównie matematyce. Ale to już – jak to się mawia – inna opowieść.

Wypada przeprosić za niedbałe opisywanie minionej rzeczywistości właścicieli *Szkockiej*, jej bywalców i wszystkich Czytelników.

I wyrazić serdeczne podziękowania Panu Mieczysławowi Karpińcowi za przypomnienie stanu faktycznego.

Marek KORDOS

Zadania



Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

M 729. Znaleźć największą wartość, jaką może osiągnąć wyrażenie $abc + abd + acd + bcd$, jeśli a, b, c, d są liczbami dodatnimi o sumie 4.
Rozwiązanie na str. 7

M 730. Niech $q > 1 > p > 0$. Udowodnić, że wielomian $W(x) = x^3 - px^2 + qx - 1$ ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty.
Rozwiązanie na str. 7

M 731. Czy pierwiastki kwadratowe z trzech różnych liczb pierwszych mogą być (niekoniecznie sąsiednimi) wyrazami tego samego ciągu geometrycznego?
Rozwiązanie na str. 7

Redaguje Krzysztof REJMER

F 399. Stojąc w pobliżu wodospadu możemy wyczuć drgania powierzchni Ziemi. Jaka jest wysokość wodospadu, jeśli częstotliwość tych drgań jest równa f? Dana jest prędkość dźwięku w wodzie v. Zakładamy, że woda spada pionowo.
Rozwiązanie na str. 9

F 400. Dlaczego podczas rozgrzewki orkiestry wysokość dźwięku instrumentów dętych zwiększa się, a smyczkowych maleje?
Rozwiązanie na str. 9

Gdzież ci autorzy podręczników szkolnych...

Alexy Klaudyusz Clairaut urodził się w Paryżu 1713 roku. Ojciec jego, znakomity nauczyciel matematyki widząc w nim od samego dzieciństwa wielką chęć i zdolność do rachunków i rozważania figur geometrycznych sam zajął się początkowém jego kształceniem i z takiém powodzeniem prowadził umysł tego szczególnego dziecięcia, że w 9^{ym} roku życia młody Clairaut rozumiał już dzieło obejmujące zastosowania algebry do geometryi. A po trzykrotném odczytaniu tego traktatu, przejął się do tego stopnia myślą dowodzeń, że sam na kilka zadań prostsze podał rozwiązania.

Dzieckiem jeszcze będąc Clairaut zgłębiał wyższą matematykę: zdołał ująć ducha téj analizy, a obdarzony badawczym i twórczym umysłem, sprobował sił własnych rozwiązując trudne zadanie, dotyczące linij krzywych trzeciego rzędu. Skoro ojciec złożył tę pracę w Akademii Nauk Paryzkiéj, członkowie jej nie chcieli wierzyć, aby była tworem jedénasto-letniego dziecka, i dla przekonania się, prosili o przyprowadzenie autora. Stanął więc młody Clairaut przed tém gronem znamienitych mężów, odpowiedział na wszelkie pytania i zarzuty dotyczące badanego przezeń przedmiotu, a wówczas zdumienie zastąpiło miejsce nieufności: obsypano go pochwałami, polecono wydrukować jego pracę, z zaświadczeniem o wieku autora.

Wkrótce potém wykończył dzieło o liniach krzywych podwójnéj krzywizny, i przesłał je do Akademii Nauk, która oceniając ważność pracy szesnasto-letniego matematyka, prosiła króla, aby dozwolił go wybrać na członka Akademii, chociaż nie posiadał jeszcze lat 20, wieku przepisanego ustawą. W skutek tego wstawienia, młodzieniec został członkiem towarzystwa, złożonego z najznakomitszych mężów Francyi, i do którego świetności przyczynił się później pięknemi swemi odkryciami.

Lecz to wysokie stanowisko naukowe i chwała, nie olśniły młodziana: przeciwnie zwiększyły wrodzoną mu skromność, podwoiły w nim zapał do pracy; przestając bowiem z takimi ludźmi, poznał jak wiele jeszcze mógł skorzystać ze światła znakomitszych od siebie matematyków. I mając ustalone imię nie wahał się udać na naukę do Bazylei, gdzie przebywał podówczas nestor matematyków Jan Bernouilli.

Powróciwszy do kraju, skreślił w 1741 roku „Zasady Geometryi". Następnie zajął się najtrudniejszemi zadaniami astronomii, i tak: napisał teoryą kształtu ziemi według zasad hydrostatyki, teoryą biegu księżyca i obliczył tablice tego satellity, teoryą biegu komet. W końcu wydał początki algebry, w których rozwinął téż samą metodę, jaką znajdujemy w jego „Zasadach Geometryi", gdzie prawdy nie są podawane w kształcie twierdzeń, lecz wyłożone w takiém następstwie, w jakiém wynalazca mógłby je odkrywać: nie ma tam nic narzuconego, a wszystko stopniowo się rozwija. Te prace zjednały mu wielkie imię; oprócz Akademii Paryzkiéj, był jeszcze z wyboru członkiem towarzystw uczonych w Londynie, Berlinie, Petersburgu, Upsalu, Edymburgu i Bolonii.

Clairaut przy gruntownéj nauce, odznaczał się przyjemnością charakteru: łagodność w pożyciu, skromność cechująca prawdziwą naukę i prawość, czyniły pożądaném jego towarzystwo. Dla rodzeństwa był jedyną podporą, dla ojca nieustanném źródłem pociechy. Zgasł w 52 roku życia, zbyt wcześnie dla nauki, którą wzbogacił licznemi i ważnemi pracami.

Dla nas żywot jego może posłużyć za piękny przykład, jak trafne pokierowanie dziecka wcześnie objawiającego wielkie zdolności, połączone jednak z wytrwałą pracą młodzieńczą, może doprowadzić do zyskania imienia, będącego chlubą rodziny i zaszczytem kraju.

S.P.

Jest to życiorys zamieszczony na początku II polskiego wydania podręcznika geometrii Clairauta napisany przez tłumacza podpisującego się Stanisław Przystański, Nauczyciel Matematyki, w 1857 roku (I polskie wydanie, w tłumaczeniu ks. Marcina Poczobuta, ukazało się w 1772 roku).

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Regulamin

1. Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego oraz Redakcja miesięcznika *Delta* organizują konkurs – ligę zadaniową pod nazwą **Klub 44**.

2. Zadania konkursowe są ogłaszane w miesięczniku *Delta*, po cztery zadania w każdym numerze: dwa z matematyki i dwa z fizyki, z dwumiesięczną przerwą (nr 6 i 7 każdego roku).

3. Uczestnikiem ligi może być każdy.

4. Uczestnictwo w lidze polega na rozwiązywaniu zadań konkursowych i przysyłaniu opracowanych rozwiązań do redakcji *Delty*. Uczestnikiem zostaje się po przysłaniu rozwiązania co najmniej jednego zadania.

5. Moment przystąpienia do ligi można wybrać dowolnie. Nie ma konieczności rozwiązywania zadań z każdego miesiąca.

6. Rozwiązania zadań z numeru n należy nadsyłać do końca miesiąca $n+3$ (dodawanie modulo 12; na przykład termin nadsyłania rozwiązań zadań z numeru 11/1994 upływa 28 lutego 1995). W numerze $n+4$ podane są szkicowe rozwiązania.

7. Rozwiązanie każdego zadania powinno być pisane na oddzielnym arkuszu papieru oraz podpisane imieniem i nazwiskiem. Uczniowie proszeni są o podanie klasy, studenci – roku i uczelni. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, z dopiskiem na kopercie: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**.

8. Prace powinny być samodzielne. Jednobrzmiące rozwiązania pisane przez różnych uczestników nie będą brane pod uwagę.

9. Rozwiązanie każdego zadania jest ocenione w skali od 0 do 1, z dokładnością do 0,1. Przy ocenie brana jest pod uwagę nie tylko poprawność merytoryczna i rachunkowa, lecz także pomysłowość metody i elegancja rozwiązania.

10. Każde zadanie otrzymuje współczynnik trudności ustalany po wystawieniu ocen. Współczynnik ten jest liczbą pomiędzy 1 a 4 obliczaną według następującej reguły: jeśli N oznacza liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (matematyka lub fizyka), a S oznacza sumę ocen uzyskanych przez wszystkich uczestników za dane zadanie, wówczas otrzymuje ono współczynnik trudności $WT = 4 - 3S/N$. Za nadesłane rozwiązanie uczestnik otrzymuje w punktacji ligowej liczbę punktów równą iloczynowi uzyskanej oceny przez współczynnik trudności (z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku).

11. Niektóre z zadań można znaleźć (w brzmieniu identycznym lub bardzo zbliżonym) wraz z rozwiązaniami w różnych książkach i czasopismach. Uczestnicy, którzy w takich przypadkach przyślą zamiast własnego rozwiązania dokładny odsyłacz do literatury, otrzymają ocenę maksymalną, pod warunkiem, że w cytowanym źródle istotnie znajduje się pełne rozwiązanie (dowód, obliczenie, konstrukcja).

12. Czytelnicy *Delty* mogą zgłaszać propozycje zadań; jeśli zadanie nie jest własnego autorstwa, należy podawać źródło. Gdy zadanie wykorzystane w lidze pochodzi z propozycji uczestnika ligi (tj. osoby, która przysłała już rozwiązanie jakiegoś zadania – por. p. **4**), a dostarczone zostało wraz z rozwiązaniem (choćby szkicowym, ale poprawnym, ewentualnie odsyłaczem do literatury), uczestnik otrzymuje ocenę maksymalną.

13. Punkty zdobyte przez każdego uczestnika za rozwiązania poszczególnych zadań, obliczone według reguły podanej w p. **10**, są sumowane – oddzielnie dla matematyki i dla fizyki. Z chwilą osiągnięcia sumy **44** punktów w jednej z tych dwóch dziedzin uczestnik staje się członkiem **Klubu 44**.

14. Po zgromadzeniu **44** punktów (i zostaniu członkiem **Klubu 44**) można w dalszym ciągu brać udział w konkursie ligowym. Nadwyżka punktów ponad wartość **44** zostaje zaliczona na poczet ponownego uczestnictwa w lidze.

15. Trzykrotne uzyskanie członkostwa **Klubu 44** daje tytuł **Weterana Klubu 44**.

16. Aby uzyskać informacje o swoich wynikach, należy przysłać do redakcji *Delty* kartkę pocztową (oddzielną dla matematyki i dla fizyki), ofrankowaną i zaadresowaną do siebie, ze sporządzoną tabelką z umieszczonymi w jej rubrykach numerami zadań i z pustymi okienkami do wpisania ocen. Zaleca się przysyłanie takich kartek nie częściej niż co kilka miesięcy, gdy uzbiera się materiał dotyczący rozwiązań kilkunastu zadań.

17. Czołówka listy ligowej jest systematycznie ogłaszana w miesięczniku *Delta*. Nazwisko uczestnika może być wymienione w czołówce z nie zmienioną sumą punktów co najwyżej trzykrotnie; następny raz ukaże się wtedy, gdy uczestnik wykona ruch w górę.

18. Raz do roku, w numerze lutowym, drukowane jest omówienie przebiegu konkursu, prezentowane są w skrócie ciekawsze rozwiązania i uogólnienia oraz ogłaszana jest obszerna czołówka (kilkadziesiąt nazwisk).

19. Członkowie **Klubu 44** są zapraszani na spotkania **Klubu 44**.

20. Organizatorzy zastrzegają sobie wyłączne prawo interpretacji i możność zmian regulaminu.

Lista uczestników
ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 281 (WT=2,73) i 282 (WT=1,45)
z numeru 5/1994

Lesław Skrzypek	– 1- 46,78
Waldemar Pompe	– 43,89
Mirosław Matlęga	– 40,30
Krzysztof Jedziniak	– 2- 39,72
Krystyna Witek	– 1- 32,00
Marek Karaś	– 31,81
Adam Czornik	– 2- 31,25
Henryk Kornacki	– 2- 30,44
Tadeusz Józefczyk	– 2- 30,24
Krzysztof Zapisek	– 29,41
Janusz Olszewski	– 2- 28,19
Tomasz Wietecha	– 2- 25,76
Mikołaj Rotkiewicz	– 1- 25,42
Piotr Żmijewski	– 21,75
Krzysztof Parol	– 21,26
Piotr Lipiński	– 21,24

Legenda (przykładowo): stan konta 2-39,72 oznacza, że uczestnik już dwukrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (trzeciej) rundzie ma 39,72 punktów.

Jak przed rokiem, listę otwiera pan Skrzypek, po raz drugi przekraczając próg 44 punktów (gratulujemy tej regularności: runda/rok).

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:

– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;

– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 1992, 1993 lub 1994.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani **Klubu 44 M** (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana): J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik, M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (4), M. Prauza, P. Kumor, P. Gadziński

(jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to cyfra w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie; nie powtarzamy nazwisk figurujących na liście powyżej):

„dwukrotni": Z. Bartold, P. Jędrzejewicz, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, D. Kurpiel, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Pióro, S. Solecki, G. Zakrzewski;

„jednokrotni": T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, P. Figurny, M. Fiszer, Z. Galias, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Kasperski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, P. Kubit, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lizak, J. Mańdziuk, M. Marczak, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, W. Olszewski, M. Roman, A. Ruszel, J. Siwy, A. Smolczyk, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, K. Trautman, P. Wach, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski.

Termin nadsyłania rozwiązań
31 V 1995

Zadania z matematyki nr 295, 296

Redaguje Marcin E. KUCZMA

295. Dana jest liczba naturalna n. Wyznaczyć najmniejszą liczbę m o następującej własności: z każdego m-elementowego podzbioru zbioru $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ można wybrać liczby a, b, dla których $n < a - b < 2n$.

296. Wewnątrz trójkąta ABC znajduje się punkt P. Jego odległości od wierzchołków A, B, C równe są odpowiednio R_a, R_b, R_c, a od prostych BC, CA, AB – odpowiednio r_a, r_b, r_c. Dowieść, że

$$8(\sqrt{R_bR_c} + r_a)(\sqrt{R_cR_a} + r_b)(\sqrt{R_aR_b} + r_c) \leq 27\, R_aR_bR_c\,.$$

Kiedy zachodzi równość?

Zadanie **296** zaproponował pan Jan Ciach z Ostrowca Świętokrzyskiego.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/1994

Przypominamy treść zadań:

287. Czy istnieje trójkąt, w którym dwusieczna jednego z kątów wewnętrznych jest prostopadła do jednej ze środkowych, a długości boków są trzema kolejnymi liczbami naturalnymi?

288. Przyjmijmy $a_n = \prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Wykazać istnienie i obliczyć wartość granicy $\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n^2}$.

287. W trójkącie ABC o bokach długości $|AC| = 2$, $|BC| = 3$, $|AB| = 4$ dwusieczna kąta A jest prostopadła do środkowej poprowadzonej z wierzchołka C. Aby się o tym przekonać, można na przykład umieścić ten trójkąt w układzie współrzędnych, przyjmując $A = (0, \sqrt{27/8})$, $B = (-\sqrt{5/2}, -\sqrt{27/8})$, $C = (\sqrt{5/8}, 0)$; odcinki, o które chodzi, są zawarte w osiach układu.

288. Wygodnie będzie powołać się na *wzór Stirlinga*:

$$\text{(1)} \qquad n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n \mathrm{e}^{-n} \alpha_n\,, \qquad 1 < \alpha_n < \frac{n+1}{n} \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots\,;$$

można podać znacznie dokładniejsze oszacowanie współczynnika α_n, ale w tym zadaniu wystarczy takie, jak wyżej – wynika z niego, że

$$\text{(2)} \qquad \beta_n = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n < n+1.$$

Korzystając z (1) obliczamy:

$$c_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \prod_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}\binom{n-1}{k}^{-1} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n-k} = \frac{n^n}{n!} = \frac{\mathrm{e}^n}{\sqrt{2\pi n}\cdot\alpha_n}$$

(równość słuszna także dla $n = 1$, jeśli przyjąć $a_0 = 1$). Zatem

$$a_n = c_1c_2\ldots c_n = \frac{\mathrm{e}^{1+2+\ldots+n}}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{4\pi}\cdot\ldots\cdot\sqrt{2n\pi}\cdot\beta_n} = \frac{\mathrm{e}^{n(n+1)/2}}{(2\pi)^{n/2}(n!)^{1/2}\beta_n}\,,$$

skąd

$$\text{(3)} \qquad a_n^{2/n^2} = \mathrm{e}^{(n+1)/n}\cdot(2\pi)^{-1/n}\cdot(n!)^{-1/n^2}\cdot\beta_n^{-2/n^2}.$$

Korzystając jeszcze raz z (1) widzimy, że

$$\text{(4)} \qquad \lim_{n\to\infty}(n!)^{1/n^2} = \lim_{n\to\infty}\left((2\pi n)^{1/2n^2}\cdot n^{1/n}\cdot \mathrm{e}^{-1/n}\cdot\alpha_n^{1/n^2}\right) = 1.$$

Z oszacowania (2) otrzymujemy $1 < \beta_n^{2/n^2} < (n+1)^{2/n^2}$, więc na mocy twierdzenia o trzech ciągach

$$\text{(5)} \qquad \lim_{n\to\infty}\beta_n^{2/n^2} = 1.$$

Równość (3), po uwzględnieniu związków (4) i (5), daje wynik:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{2/n^2} = \mathrm{e}\,, \qquad \text{czyli} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n^{1/n^2} = \sqrt{\mathrm{e}}.$$

* * *

W dorocznym omówieniu, tradycyjnie, drukujemy znalezione przez uczestników ligi dowody i wyprowadzenia ogólniejsze lub bardziej pomysłowe od naszych „firmowych". Tym razem sytuacje takie są rzadkie, wykaz jest skromniejszy niż w latach ubiegłych – ku niekłamanemu ukontentowaniu Redaktora Naczelnego (…miejsca w numerze nigdy za dużo…), lecz ku zatroskaniu prowadzącego Ligę. Bo przecież jej sympatyczni uczestnicy (a są to w dużej mierze nazwiska powtarzające się od paru lat) nie utracili nagle inwencji. Wniosek: zadania były mniej udane niż poprzednio, mniej dawały możliwości różnorodnych dróg ataku, matematycznego „wyżycia się". Zobaczymy, jak to będzie za rok…

Oto ciekawsze rozwiązania zadań oraz uogólnienia i komentarze (uczestników ligi oraz nasze). Gdy zadanie zostało zrobione przez nie więcej niż sześć osób, podajemy ich nazwiska.

Zadanie **263.** [Kółka i krzyżyki w tabeli 10×2; krzyżyki nie sąsiadują; ile takich rozmieszczeń?] (współczynnik trudności WT=2,50; liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 9$). Były różne odpowiedzi. Jako ciekawostkę podajemy największy oraz najmniejszy uzyskany wynik: 12470603 oraz 17 (prawidłowy wynik: 8119). Zwykła metoda polegała na znalezieniu wzoru rekurencyjnego na liczbę a_n dopuszczalnych rozmieszczeń w tabeli o wymiarach $n \times 2$. Jest to prosta rekurencja liniowa, więc pozwala znaleźć jawny wzór $a_n = \frac{1}{2}\left((1-\sqrt{2})^{n+1} + (1+\sqrt{2})^{n+1}\right)$. Podają go **P. Gadziński**, **L. Gasiński**, **T. Kulpa**, a także (w nieco mniej czytelnej postaci) **J. Olszewski** i **L. Skrzypek**.

Zadanie **269.** [Rozważamy liczby $n \in \mathbf{N}$ takie, że dla każdych zbiorów $T_1, \ldots, T_n$:

$$\Big(|T_i| = 3 \ \ (1 \le i \le n), \quad |T_i \cap T_j| = 1 \ \ (1 \le i < j \le n)\Big) \implies \Big(\Big|\bigcap T_i\Big| = 1\Big);$$

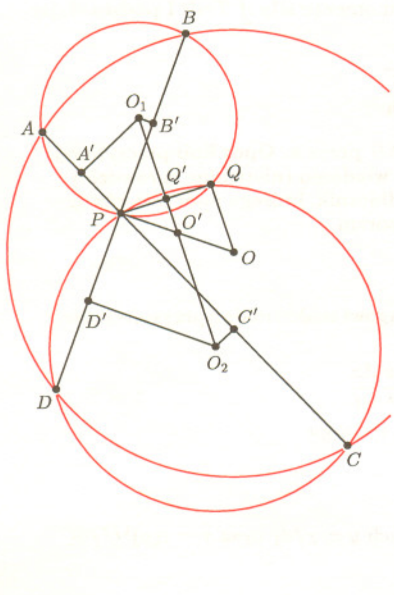
$\min n = ?$] (WT=1,81; LPR=13). **M. Lewandowski** i **T. Wietecha** rozważają analogiczne zagadnienie dla zbiorów k-elementowych ($k \ge 3$; w zadaniu mamy $k = 3$) i pokazują, że szukana minimalna wartość n nie przekracza $k(k-1)+2$; pan Lewandowski zwraca też uwagę, że wydane przez PWN książki: M. Kordos, *Podstawy geometrii rzutowej i rzutowo-metrycznej* (1984) oraz W. Lipski, W. Marek, *Analiza kombinatoryczna* (1986) podają pewne warunki dostateczne na to, by powyższe oszacowanie było (lub nie było) dokładne.

Zadanie **270.** [$f(x) = x^{x^x}$; $\lim\limits_{x \to 0+} (f(\sin x)/f(x)) = ?$] ($WT$=3,16; LPR=5). Zadanie okazało się trudniejsze niż oczekiwaliśmy. Autorzy dobrych rozwiązań: **P. Gadziński**, **L. Skrzypek**, **T. Wietecha**, **H. Kornacki**, **J. Ciach**. Uogólnienie: T. Wietecha dowodzi, że określając $f_1(x) = x$, $f_{n+1}(x) = x^{f_n(x)}$ mamy $\lim\limits_{x \to 0+} (f_n(\sin x)/f_n(x)) = 1$ dla każdego $n \in \mathbf{N}$.

Zadanie **275.** [$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ różniczkowalna; $(f(f(x))) = f(x) \ge 0$; $f(x) = ?$] (WT=2,57; LPR=5). Efektowne rozwiązanie znaleźli **M. Kasperski** i **P. Gadziński**:

Funkcja $g(x) = f(f(x))$ spełnia warunki $g(g(x)) = g(x) \ge 0$, czyli $(*)\ g(y) = y \ge 0$ dla $y \in g(\mathbf{R})$. Przyjmując $a = \inf\{g(y)\colon y \in \mathbf{R}\}$ mamy (wobec ciągłości) $a \in g(\mathbf{R})$, a stąd $g(a) = a = \min\{g(y)\colon y \in \mathbf{R}\}$, więc (wobec różniczkowalności) $g'(a) = 0$; jest to sprzeczność z $(*)$, jeśli tylko zbiór $g(\mathbf{R})$ zawiera liczby większe od a. Zatem $g(\mathbf{R}) = \{a\}$, skąd $f(x) = f(g(x)) = f(a)$; tzn. f jest funkcją stałą.

Ponadto dobre rozwiązania podali: **T. Kulpa**, **L. Skrzypek** oraz **Z. Sewartowski**, który zauważa, że założenie różniczkowalności funkcji f na zbiorze $\mathbf{R}$ można zastąpić koniunkcją warunków: własność Darboux (na zbiorze $\mathbf{R}$) oraz różniczkowalność w punktach a i b, gdzie $a = \inf f$, $b = f(a)$.



Zadanie **276.** [P – punkt przecięcia cięciw AC i BD okręgu o środku O; okręgi PAB i PCD przecinają się w punktach P i Q $(O \ne Q \ne P) \implies OQ \perp QP$] ($WT$=2,38; LPR=5 (8 ?)). Niewygodę stanowiła w tym zadaniu spora liczba możliwych konfiguracji (por. niezgrabne rozwiązanie „firmowe”). Część rozwiązań „poprawnych, ale nie całkiem” została tak zakwalifikowana właśnie z powodu oparcia rozumowania na rysunku przedstawiającym jeden z możliwych układów, bez dołączenia uwagi, jakie modyfikacje (i w których miejscach) są konieczne w innych sytuacjach. Na tym tle zasługuje na wyróżnienie śliczne rozwiązanie **Przemka Gadzińskiego**, krótkie i całkiem niezależne od przypadku:

Oznaczmy przez A', B', C', D', O', Q' środki odcinków PA, PB, PC, PD, PO, PQ. Punkty A' i C' są, odpowiednio, rzutami środka O_1 okręgu PAB oraz środka O_2 okręgu PCD na prostą AC; zatem środek odcinka O_1O_2 leży na symetralnej odcinka $A'C'$; leży on też (analogicznie) na symetralnej odcinka $B'D'$ – pokrywa się więc ze środkiem okręgu $A'B'C'D'$, czyli z punktem O'. Tak więc O' leży na prostej O_1O_2. Także Q' leży na prostej O_1O_2. Stąd $OQ \| O_1O_2 \perp PQ$.

Bezbłędne rozwiązanie podał także **T. Kulpa**, a rozwiązania nieznacznie („wybaczalnie”) zależne od rysunku – **A. Dudek** i **M. Rokicki**; ponadto **M. Sarniak** – przez odesłanie do literatury (W. W. Prasołow, *Zadaczi po płanimetrii*, Moskwa 1991, zad. 2.86).

Zadanie **277.** [$a_0 = 1$, $a_{n+1} = (a_1 + \ldots + a_n)^{-1} - \sqrt{2} \implies$ szereg $\sum a_n$ jest zbieżny] (WT=3,46; LPR=4). Nie chce się wierzyć – tylko cztery dobre rozwiązania (zresztą nie prostsze od „firmowego”): **P. Gadziński**, **T. Kulpa**, **P. Żmijewski**, **L. Skrzypek**.

Autorzy wielu prac znajdują właściwą wartość sumy szeregu $(1/\sqrt{2})$, wszelako wykorzystując w rachunkach (w sposób jawny lub ukryty) fakt jego zbieżności – czyli tezę zadania!

Zadanie **281.** [Liczby parzyste i nieparzyste w sześciu komórkach; ciąg zmian zawartości losowo wybranych komórek (start: same zera); średni czas ponownego dojścia do sześciu liczb jednakowej parzystości = ?] (WT=2,73; LPR=3 (5 ?)). I tu rozwiązania bezbłędne (**T. Kulpa**, **H. Kornacki**, **L. Skrzypek**) nie różniły się istotnie od „firmowego”; były jeszcze dwa rozwiązania zasadniczo poprawne, ale z dość istotnymi lukami w uzasadnieniach.

Zadania z fizyki nr 193, 194

Redaguje Jerzy B. BROJAN

193. Siły przypływowe działające na Ziemię ze strony Księżyca powodują stopniowe spowalnianie obrotu Ziemi (wydłużanie dnia). Gdy w odległej przyszłości obrót Ziemi zsynchronizuje się z obiegiem Księżyca, pływy ustaną. Ile będzie wtedy wynosiła jednakowa długość dnia i miesiąca, a ile – odległość Księżyca od Ziemi? Przyjąć, że moment bezwładności Ziemi jest równy 0,33 MR^2 (pamiętajmy, że Ziemia nie jest jednorodną kulą – średnia gęstość jądra jest większa niż płaszcza i skorupy). Pozostałe niezbędne dane wziąć z tablic. Pominąć siły pływowe działające ze strony Słońca.

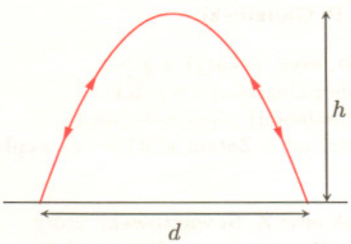
194. Dwa mikrofony umieszczono we wzajemnej odległości 0,5 m. Nietoperz leci w kierunku równoległym do prostej, na której leżą mikrofony i w danej chwili znajduje się w odległości 10 m od każdego z nich. Stwierdzono, że częstotliwość „pisku" nietoperza wynosi 100 kHz, a łączny sygnał (otrzymany z dodania sygnałów odbieranych przez oba mikrofony) pulsuje z częstotliwością 50 Hz. Z jaką prędkością leci nietoperz? Prędkość dźwięku w powietrzu wynosi 330 m/s.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/1994

Przypominamy treść zadań:

185. Odpowiednio rzucona jednorodna sprężysta piłeczka może skakać tam i z powrotem po poziomej powierzchni (rys. 1) na skutek ruchu obrotowego. W rozwiązaniu zadania pomijamy poślizg występujący na początku zderzenia, powodujący straty energii i w konsekwencji powrót piłeczki po nieco innym torze. Jaka jest minimalna wartość współczynnika tarcia piłeczki o podłoże, jeśli maksymalna wysokość lotu jest równa h, a punkty odbicia są odległe od siebie o d? Ile wynosi prędkość kątowa piłeczki w czasie lotu? Promień r piłeczki jest dany.

186. Odcinek kolejowej trakcji elektrycznej jest zasilany w punktach A i B napięciem $U = 1000$ V, a oporność przewodów wynosi $\varrho = 2\ \Omega$ na każde 100 m długości. Pociąg o masie $m = 100$ ton stoi w chwili początkowej w punkcie C odległym o $d_1 =$ 500 m od podstacji AB (rys. 2). Pociąg rusza z maksymalnym przyspieszeniem w prawo i po czasie t mija punkt D leżący w odległości $d_2 = 2$ km od AB. Ile razy zmaleje ten czas, gdy podwoimy napięcie U? Obliczyć numerycznie wartość t dla podanych wartości stałych. Czy w bardzo dużej odległości od AB ($d_2 \to \infty$) prędkość pociągu rośnie nieograniczenie, czy tylko do pewnej granicy?



Rys. 1

185. Nietrudno z danych d i h obliczyć poziomą składową v_x prędkości piłeczki tuż przed odbiciem (lub tuż po nim) i analogiczną składową pionową v_y. Otrzymuje się $v_x = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{g}{2h}}$, $v_y = \sqrt{2gh}$. Oznaczmy siłę tarcia (poziomą składową siły reakcji podłoża) przez T, a siłę nacisku (składową pionową) przez N. Uwzględniając, że obie te siły zmieniają się w czasie odbicia piłeczki i przyrównując ich popęd do zmiany odpowiedniej składowej pędu mamy równania

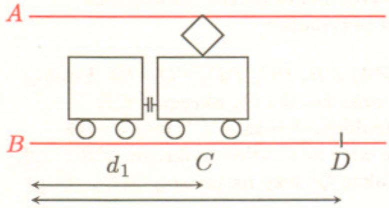
$$\int T\,\mathrm{d}t = 2mv_x\,, \qquad \int N\,\mathrm{d}t = 2mv_y\,.$$

Ponieważ $T \le Nf$ (gdzie f – współczynnik tarcia statycznego), więc f spełnia nierówność

$$f \ge \frac{v_x}{v_y} = \frac{d}{4h}\,.$$

Aby znaleźć prędkość kątową ω, należy zauważyć, że w czasie odbicia piłeczka zmienia zwrot obrotu, czyli zmiana momentu pędu względem środka wynosi $\Delta K = 2I\omega = 2\cdot\frac{2}{5}mr^2\omega$, gdzie I – moment bezwładności. Przyrównując ΔK do całki z momentu siły $\int Tr dt$ i podstawiając $\int T dt = 2mv_x$ otrzymujemy

$$\omega = \frac{5}{2}\frac{v_x}{r} = \frac{5}{4}\frac{d}{r}\sqrt{\frac{g}{2h}}\,.$$



Rys. 2

186. Oznaczmy bieżącą odległość pociągu od podstacji AB przez x. Opór linii przesyłowej $R = \varrho x$ jest dołączony szeregowo do źródła napięcia. Jak wiadomo (nietrudno sprawdzić), maksymalna moc jest w takiej sytuacji czerpana przez odbiornik, którego opór jest równy oporowi R, a wartość tej maksymalnej mocy jest dana wzorem

$$P = \frac{U^2}{4R} = \frac{U^2}{4\varrho x}\,.$$

Taką właśnie moc osiągnie lokomotywa, która nada pociągowi maksymalne przyspieszenie. Podstawiając

$$P = Fv = mav = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

dochodzimy do równania różniczkowego opisującego ruch pociągu

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}x = p\,,$$

gdzie $p = \dfrac{U^2}{4\varrho m}$. Wprowadzenie zmiennych bezwymiarowych $y = x/d_1$ oraz $\tau = t(p)^{1/3}/d_1$ prowadzi do prostszej postaci

$$(*) \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\tau^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}y = 1\,.$$

Funkcja $y(\tau)$ spełniająca to równanie (z warunkami początkowymi $y_0 = 1$, $y_0' = 0$) nie zależy od p ani d_1, czyli danej końcowej wartości $y = \dfrac{d_2}{d_1}$ odpowiada ustalona wartość τ.

Stąd mamy odpowiedź na pierwsze pytanie: t jest proporcjonalne do $p^{-1/3}$, czyli do $U^{-2/3}$ (szybciej można dojść do tego wyniku na podstawie samej analizy wymiarowej). Rozwiązując numerycznie równanie (*) stwierdzamy, że wartość $y = 4$ jest osiągana dla $\tau \approx 2{,}46$, zatem $t \approx 2{,}46 \cdot p^{-1/3}d_1 = 246$ s. Wreszcie ostatnie pytanie wymaga zbadania asymptotycznej postaci funkcji $y(\tau)$; Czytelnik może sprawdzić, że dla τ dużych $y \approx \tau(3\ln\tau)^{1/3}$, czyli prędkość rośnie nieograniczenie – jak $(\ln t)^{1/3}$. Jest to jednak wzrost bardzo powolny.

Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po 180 zadaniach

Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	38,37
Andrzej Borowski	– Aleksandrów K.	1–37,73
Tomasz Wietecha	– Tarnów	1–37,09
Dzierżysław Lipniacki	– Lublin	3–29,11
Aleksander Surma	– Myszków	2–21,49
Dariusz Wilk	– Rzeszów	19,43
Konrad Banaszek	– Gdynia	13,70
Paweł Perkowski	– Szczecin	2–13,02
Artur Gawryszczak	– Dubeczno	12,30
Jacek Piotrowski	– Rzeszów	12,08
Przemysław Gadziński	– Środa Śląska	11,70
Przemysław Gworys	– Częstochowa	2–11,69
Roman Wencel	– Komprachcice	11,60
Sławomir Oszwałdowski	– Grudziądz	9,70
Jarosław Łazuka	– Warszawa(?)	8,07
Adam Sikorski	– Lublin	3–6,95
Andrzej Rostworowski	– Kraków	6,77
Piotr Wasylczyk	– Warszawa	6,59
Stanisław Świątek	– Kłodzko	6,50
Artur Stępień	– Bełchatów	5,97
Arkadiusz Kowalski	– Lublin	5,63

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 1992–1994 oraz mają w bieżącej rundzie na swoim koncie co najmniej 5 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już **44** punkty.

Pozostali członkowie **Klubu 44F** (alfabetycznie; liczby w nawiasach oznaczają wielokrotność przekroczenia **44** punktów): Piotr Bała (3), Anna Gluza (1), Wiesław Kacprzak (1), Jerzy Lipkowski (2), Bogusław Mikielewicz (1), Leszek Motyka (1), Roman Musiał (1), Tomasz Rawlik (1), Robert Repucha (1), Jacek Stelmach (1), Leszek Szalast (1), Piotr Wach (1).

W tym „roku sprawozdawczym" wśród nadesłanych rozwiązań znalazło się sporo bardzo interesujących, lepszych od zaproponowanych w *Delcie*. Oto niektóre z nich.

Zadanie **163.** [Jak odróżnić puszkę z cieczą od puszki z ciałem stałym?] ($WT = 2{,}24$, $LPR = 4$). Zamiast porównywać szybkości staczania się puszek z pochylni można było potoczyć puszkę, zatrzymać na krótką chwilę i puścić – wirująca w środku ciecz wprawi wtedy puszkę w ruch, podczas gdy puszka z ciałem stałym pozostanie w spoczynku. Na taki prostszy pomysł wpadli **P. Gworys**, **P. Perkowski**, i **A. Borowski**, natomiast rozwiązanie zbliżone do „wzorcowego" przysłał **J. Konieczny**.

Zadanie **164.** [Lewitujący naładowany krążek] ($WT = 3{,}27$, $LPR = 2$). To zadanie jest najgrubszą – jak dotąd – wpadką prowadzącego ligę fizyczną, gdyż w pionowym polu magnetycznym kierunek sił działających na krążek jest, oczywiście, *poziomy* (radialny) i o żadnej lewitacji nie ma mowy. Panu **A. Borowskiemu**, który nie mogąc zrozumieć sensu zadania napisał list dopiero po opublikowaniu błędnego rozwiązania w *Delcie*, należy się, oprócz wyrazów uznania, także uwzględnienie tego w punktacji. Zdecydowaliśmy przyznać mu maksimum punktów za to zadanie (3,27), chociaż regulamin takiego przypadku nie przewiduje. Swoją drogą, aż dziwne, że tak oczywisty błąd został dostrzeżony tylko przez jednego Czytelnika, a inni dali się zmylić i przysłali zasugerowane „rozwiązania". Oczywiście, zaliczonych punktów już potem im nie odebrano.

Zadanie **165.** [Czy można kraść energię z napowietrznych linii energetycznych?] ($WT = 1{,}40$, $LPR = 3$). Bardzo głęboką analizę tego problemu (zaiste godną inspektora Wnikliwego) przysłał **J. Konieczny**. Zwrócił on uwagę na fakt, że pola magnetyczne trzech przewodów linii trójfazowej na ogół się znoszą przy ziemi i większe nadzieje stwarza wykorzystanie pola elektrycznego. Uzyskiwane napięcie mogłoby – według obliczeń p. Koniecznego – wynosić kilkadziesiąt woltów, jednak czerpany z ogrodzenia prąd wynosiłby poniżej 1 mA. Uff... aczkolwiek uczciwość Czytelników *Delty* powinna być ponad wszelkim podejrzeniem, to miło jest uzyskać pewność, że nie przysłużyliśmy się jakiejś czarnej owcy... Pozostałe dwa dobre rozwiązania przysłali **A. Nowogrodzki** i **J. Łazuka**.

Zadanie **166.** [Pręt wpada do środka pierścienia; czy przeleci na drugą stronę?] ($WT = 3{,}70$, $LPR = 0$). Eleganckie rozwiązanie nadesłał **P. Perkowski** – niestety, po ustalonym terminie. Szkoda!

Zadanie **167.** [Oddziaływanie przewodnika z prądem z płaszczyzną nadprzewodzącą] ($WT = 1{,}99$, $LPR = 4$). Pan **A. Borowski** znalazł rozwiązanie w literaturze – okazuje się, że ten problem był na jednej z Olimpiad Fizycznych.

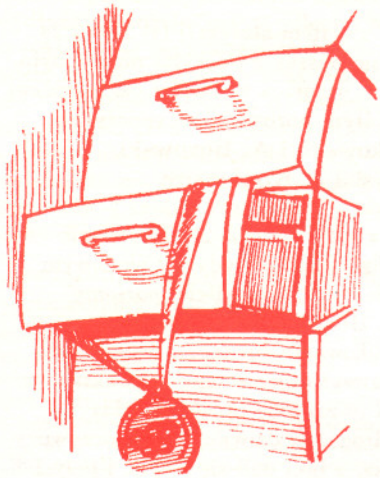
Zadanie **168.** [Promień krążący po okręgu] ($WT = 2{,}59$, $LPR = 3$). Obok zależności $n(r)$ częścią rozwiązania miało być znalezienie toru promienia, jeśli początkowo jest on dowolnie skierowany. Gdy wskutek pomyłki to pytanie zostało pominięte, z zadania niewiele zostało. W przysłanych rozwiązaniach godne uwagi u **T. Wietechy** i **J. Łazuki** jest eleganckie zastosowanie zasady Fermata. Trzecie bezbłędne rozwiązanie – **P. Gworys**.

Zadanie **175.** [Poziomo wieje wiatr, którego prędkość rośnie liniowo z wysokością; po jakim czasie dźwięk dotrze z A do B?] ($WT = 2{,}26$, $LPR = 3$). Zadanie zostało sformułowane jako numeryczne, gdyż autorowi nie udało się – mimo prób – znaleźć rozwiązania analitycznego. Zaproponowane rozwiązanie opiera się na dość radykalnym uproszczeniu problemu – wprowadzono dwie warstwy, w których prędkość wiatru uznano za stałą. Jak jednak wykazał **P. Gadziński**, jeśli zamiast szukać drogi minimalizującej czas będziemy maksymalizować przesunięcie poziome w ciągu zadanego czasu, to odpowiadającą temu całkę można po dość zawiłych przekształceniach obliczyć analitycznie bez żadnych przybliżeń! Chapeau bas, panie Przemysławie! Pozostałe dobre rozwiązania (czysto numeryczne) przysłali **A. Gawryszczak** i **P. Gworys**.

Zadanie **179.** [Moc silnika helikoptera] ($WT = 2{,}80$, $LPR = 2$). Choć zadanie było dość proste, wyniki są nienajlepsze. Dlaczego tak wielu rozwiązujących nie wzięło pod uwagę, że nawet gdy helikopter wisi nieruchomo ($v = 0$), moc silnika nie może być równa zeru? Prawidłowe rozwiązanie – **A. Gawryszczak**, niezłe – **P. Gworys**, grubych błędów udało się uniknąć jeszcze **P. Wasylczykowi**.

Kącik olimpijski (8)

Zasada szufladkowa Dirichleta (2)



Poprzedni kącik olimpijski był poświęcony zadaniom algebraicznym wykorzystującym zasadę szufladkową Dirichleta. Ten kącik zawiera zadania geometryczne, przy rozwiązywaniu których może być pomocna owa zasada.

1. Udowodnić, że w dowolnym $2n$-kącie wypukłym istnieje przekątna nierównoległa do żadnego z boków tego wielokąta.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że każda spośród $\frac{1}{2}(2n)(2n-3) = n(2n-3)$ przekątnych danego $2n$-kąta jest równoległa do pewnego z jego boków. Ponieważ

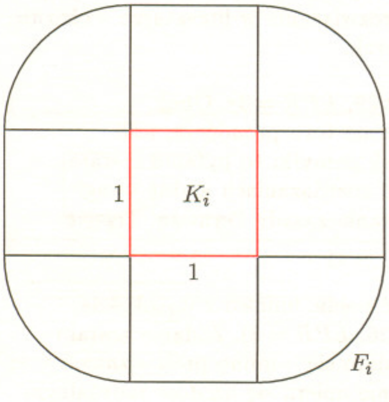
$$\frac{n(2n-3)}{2n} = n - \frac{3}{2} > n - 2,$$

więc na mocy zasady szufladkowej Dirichleta istnieje bok, do którego jest równoległych co najmniej $n-1$ przekątnych. Stąd wynika, że dany wielokąt ma co najmniej $2n+1$ wierzchołków (dlaczego?). Uzyskana sprzeczność dowodzi tezy zadania.

2. Pięciokąt wypukły ma wierzchołki w punktach kratowych. Wykazać, że zawiera on w swoim wnętrzu co najmniej jeden punkt kratowy.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że dany pięciokąt nie zawiera w swoim wnętrzu punktów kratowych. Oznaczmy przez S zbiór wszystkich pięciokątów wypukłych o wierzchołkach w punktach kratowych leżących na obwodzie danego pięciokąta. Zbiór S jest niepusty i skończony, a więc w zbiorze tym istnieje pięciokąt o najmniejszym polu. Oznaczmy go przez P, a jego wierzchołki przez $P_1, \ldots, P_5$. Każdy z punktów P_i ma współrzędne jednego z czterech typów: (p,p), (p,n), (n,p), (n,n), gdzie p i n oznaczają odpowiednio liczby: parzystą i nieparzystą. Wierzchołków pięciokąta jest pięć, skąd, na mocy zasady szufladkowej, istnieją dwa różne punkty P_k, P_l tego samego typu. Dowodzi to, że środek M odcinka P_kP_l jest punktem kratowym. Obwód pięciokąta P nie zawiera jednak punktów (nie licząc wierzchołków) o współrzędnych całkowitych (dlaczego?). Punkt M należy więc do wnętrza P, wbrew uczynionemu wcześniej założeniu.

3. W kwadracie K o boku 130 znajduje się 1995 kwadracików o boku 1. Udowodnić, że w kwadracie K można umieścić koło o promieniu 1 rozłączne z owymi kwadracikami.



Rozwiązanie. Oznaczmy małe kwadraciki przez $K_1, K_2, \ldots, K_{1995}$. Niech F_i $(i = 1, 2, \ldots, 1995)$ będzie figurą złożoną z punktów odległych od kwadratu K_i o nie więcej niż 1 (rys.). Środek koła o promieniu 1, który ma być rozłączny z kwadracikami K_i, musi być odległy od brzegu kwadratu K o więcej niż 1, czyli musi należeć do wnętrza kwadratu o boku 128. Jeśli przez $|X|$ oznaczymy pole figury X, to

$$\sum_{i=1}^{1995} |F_i| = 1995 \cdot (\pi + 5) < 128^2 .$$

Stąd istnieje w K punkt O nie należący do żadnej z figur F_i i odległy od brzegu kwadratu K o więcej niż 1. Zatem koło o środku O i promieniu 1 jest zawarte w kwadracie K i nie ma punktów wspólnych z żadnym z kwadracików K_i.

Następne zadania pozostawiamy Czytelnikom do samodzielnego rozwiązania.

4. W kwadracie o boku długości 1 danych jest 101 punktów. Wykazać, że pewne trzy spośród tych punktów tworzą trójkąt o polu nie większym niż 1/100.

5. Każdy punkt kratowy na płaszczyźnie pomalowano na jeden z dwóch kolorów. Udowodnić, że istnieje prostokąt o bokach równoległych do osi układu współrzędnych i wierzchołkach w punktach kratowych jednakowego koloru.

6. W kwadracie o boku długości 1 danych jest 51 punktów. Wykazać, że pewne trzy spośród tych punktów można przykryć kołem o promieniu 1/7.

7. W prostokącie o wymiarach 3×4 danych jest 6 punktów. Wykazać, że wśród nich istnieją takie dwa, których odległość jest nie większa niż $\sqrt{5}$.

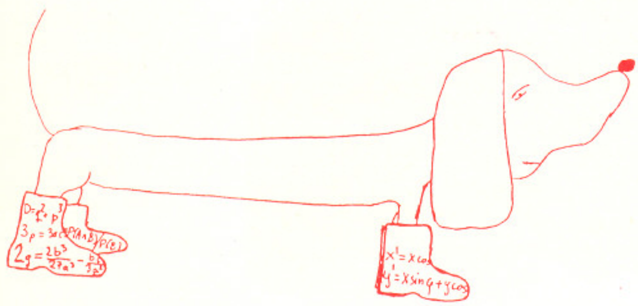
8. Dowieść, że w dowolnym sześciokącie wypukłym pewna przekątna odcina trójkąt o polu nie większym niż 1/6 pola sześciokąta.

Krzysztof CHEŁMIŃSKI
Waldemar POMPE

2/95
(48)

– *Dystrybucje są dla elektryków szczególnie ważne.*

– *On jest w jakimś sensie różny od tych wszystkich delt.*



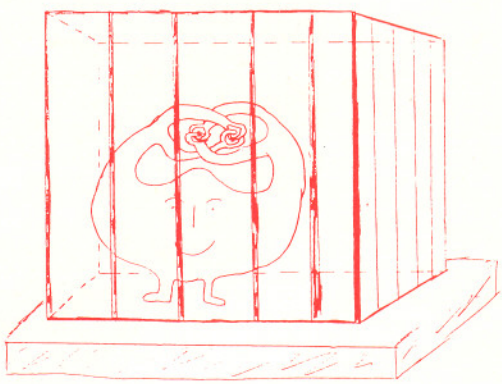
– *Te wzory są psu na buty.*

– *Zero dodajemy do zera i dostajemy coś większego od zera.*

W sierpniu 1994 roku część redakcji *EPSILONA* uczestniczyła w XIII Szkole Matematyki Poglądowej zorganizowanej przez Ośrodek Kultury Matematycznej. Było bardzo miło, wysłuchaliśmy niezwykle ciekawych referatów, dowiedzieliśmy się różnych rzeczy. Ale oprócz tego zanotowaliśmy (podczas prelekcji matematycznych) wiele bardzo interesujących cytatów, część z nich zilustrowaliśmy. Oto niektóre:

Gdy się zajmuje kobietami i polityką, to się potem ginie w pojedynku.
Analiza pełzała w mętnościach Cauchy'ego i innych.
Jeśli się dużo grzebie w różnych rzeczach, to na ogół się coś znajdzie.
Dowód – to było jakieś takie machanie rękami.
W jakimś tam sensie to powinien być każdy z dokładnością do czegoś.
Wszystkiemu jest winna żądza.
Jak się wypuściło diabła z pudełka, to trzeba się liczyć z dalszymi konsekwencjami.
Pogłaskał Hilberta tak, że mu w pięty poszło.
Różnica między dydaktyką matematyki a forsingiem jest, moim zdaniem, zauważalna.

– *Jak się spieszę, to mi się krzywe plączą.*



– *To jest taki przykład, że tylko włożyć do klatki i pokazywać.*

Przy okazji zagadka dla Czytelników: jeden z zaprezentowanych cytatów pochodzi z ust Redaktora Naczelnego *Delty*. Spróbujcie zgadnąć, który? Odpowiedzi prosimy przysyłać pocztą do *EPSILONA* lub e-mailem: ciesiels@im.uj.edu.pl.

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski, Marcin Poźniak.
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ε.