

SPIS TREŚCI NUMERU 1(248)

Twierdzenie Ptolemeusza, twierdzenie Carnota i ciekawostka <i>Henryk Pawłowski</i>	str. 1
Krótką opowieść o cieczach ferromagnetycznych <i>Stanisław Bednarek</i>	str. 1
Jeszcze raz o nierówności Ptolemeusza	str. 5
Fale grawitacyjne, kapilarne i przypiływowe	str. 6
Trele-morele	str. 7
Ile kół powinien mieć samochód?	str. 7
Mała Delta	str. 8
Zadania	str.10
Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki	str.11
Niebo przez lornetkę	str.12
Klub 44	str.14
MIS MaP	str.16
Epsilon	str.17

W następnym numerze:

Materia syпка

Okładkę wykonał
Bernard BADZIOCH

Wydawca:
 Uniwersytet Warszawski
 Krakowskie Przedmieście 26/28
 00-927 Warszawa

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny
 Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego
 i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
 wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula
 Bogdan Cichoński
 Roman Duda
 Jan A. Gaj
 Tomasz Hofmökł
 Marta Kicińska-Habior
 – przewodnicząca
 Krzysztof Maślanka
 Andrzej Mąkowski
 – wiceprzewodniczący
 Andrzej Pelczar
 Zbigniew Płochocki
 Zdzisław Pogoda
 Michał Różycki
 Konrad Rudnicki
 Zbigniew Semadeni
 Grzegorz Sitarski
 Mieczysław Subotowicz
 Andrzej Szymacha
 Andrzej Woszczyk
 Wacław Zawadowski

Redaguje kolegium w składzie:

Krzysztof Biesaga
 Piotr Hajłasz
 Jan Kalinowski – z-ca red. nac.
 Krystyna Kordos – sekr. red.
 Marek Kordos – red. nac.
 Tomasz Kwast
 Krzysztof Rejmer
 Paweł Strzelecki
 Joanna Udalska

Adres Redakcji:

ul. Smyczkowa 5/7
 02-678 Warszawa
 tel. 43-02-43 wewn. 21
 PAWELST@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w Zakładach Graficznych
 w Warszawie, ul. Srebrna 16

Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Żuga 12 (tel. 34-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres
 prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena
 jednego numeru w 1995 roku wynosi 15 000,- zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie
 okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena
 numeru wynosi w 1995 r. 30 000,- zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą
 odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! AMOS dostarcza „Deltę” pod wskazany adres nie pobierając dodatkowej
 opłaty. Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje
 dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Blankiet prenumeratowy znajduje się na str. 9/10.

Konto AMOS-u: **PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

- Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
- Cena prenumeraty na II kwartał 1995 r. wynosi 45 000,- zł.
- Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku
 zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa
 prenumeratę.
- Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
 - na teren kraju
 - jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub
 siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób,
 - na zagranicę
 - „Ruch” S.A. Oddział Warszawa, 00-958 Warszawa,
 konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – **dostawa odbywa
 się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty**, z wyjątkiem zlecenia
 dostawy pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni pokrywa
 prenumeratę.
- Terminy przyjmowania prenumeraty:
 - na kraj i zagranicę – do 20 XI na I kwartał roku następnego
 do 20 II na II kwartał
 do 20 V na III kwartał
 do 20 VIII na IV kwartał.

Cena 1 egzemplarza 15 000,- zł

Twierdzenie Ptolemeusza, twierdzenie Carnota i ciekawostka

Henryk PAWŁOWSKI

Twierdzenie Ptolemeusza znamy dobrze. Na łamach *Delty* pojawiało się kilka razy, choć nie przypominam sobie, aby kiedykolwiek towarzyszył mu dowód elementarny, odwołujący się jedynie do wiedzy ucznia szkoły podstawowej.

Warto zatem raz jeszcze wrócić do tego twierdzenia, zwłaszcza że przyda się nam w dalszej części artykułu. A brzmi ono następująco.

W każdym czworokącie wypukłym $ABCD$ iloczyn długości przekątnych nie przekracza sumy iloczynów długości przeciwległych boków,

$$(1) \quad AC \cdot BD \leq AB \cdot DC + BC \cdot AD,$$

przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy czworokąt $ABCD$ można wpisać w okrąg.

Oto elementarny dowód. Obierzmy wewnątrz czworokąta (rys. 1) punkt P tak, by $\angle PAD = \angle CBD$ oraz $\angle ADP = \angle BDC$. Wówczas z podobieństwa trójkątów APD i DBC otrzymujemy równości

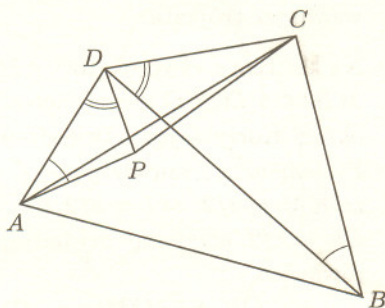
$$\frac{AP}{BC} = \frac{AD}{DB} \quad \text{oraz} \quad \frac{AD}{DP} = \frac{DB}{DC},$$

które są równoważne, odpowiednio, równościom

$$(2) \quad AP = \frac{BC \cdot AD}{DB}$$

oraz

$$(3) \quad \frac{AD}{DB} = \frac{DP}{DC}.$$



Rys. 1

Z równości kątów ADB i PDC oraz proporcji (3) wynika, że trójkąty ABD i PCD są podobne. Stąd

$$(4) \quad PC = \frac{AB \cdot DC}{DB}.$$

A ponieważ $AC \leq AP + PC$, więc uwzględniając (2) i (4) otrzymujemy nierówność Ptolemeusza (1). Zauważmy teraz, że równość w nierówności Ptolemeusza ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $AC = AP + PC$, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy punkt P należy do przekątnej AC . To zaś jest warunek konieczny i wystarczający równości kątów CAD i CBD , czyli warunek konieczny i wystarczający na to, aby czworokąt $ABCD$ można było wpisać w okrąg.

Tak więc czworokąt wypukły $ABCD$ można wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy

$$AC \cdot BD = AB \cdot DC + BC \cdot AD.$$

Z twierdzenia Ptolemeusza skorzystamy przy dowodzeniu twierdzenia Carnota.

Krótką opowieść o cieczach ferromagnetycznych

Stanisław BEDNAREK

Zapewne wszyscy pamiętamy, że magnes silnie przyciąga przedmioty sporządzone z niektórych substancji, np. ze stali, żelaza czy niklu. Substancje te nazywamy ferromagnetykami. Są to ciała stałe. Czy ciecz może być również ferromagnetykiem? Najprostszym sposobem otrzymania takiej cieczy wydawać by się mogło stopienie któregoś z wymienionych ciał stałych o właściwościach ferromagnetycznych. Okazuje się jednak, że silne ogrzanie tych ciał powyżej tzw. temperatury Curie powoduje utratę ich właściwości ferromagnetycznych. Następuje to jeszcze dużo wcześniej, zanim ciało stałe osiągnie temperaturę topnienia i zacznie zmieniać się w ciecz. Dla żelaza np. temperatura topnienia wynosi 1535°C , a temperatura Curie jest znacznie niższa i równa się „tylko” 769°C .

O istnieniu temperatury Curie można się dość łatwo przekonać w warunkach domowych. Weźmy niewielki magnes stały i cienką blaszkę stalową. Bardzo dobrze nadaje się do tego celu żyłtka. Zbliżywszy magnes do zimnej żyłtki. Zauważamy, że jest ona silnie przyciągana. Ujmijmy teraz żyłtkę kombinerkami i ogrzejmy ją do czerwoności w płomieniu kuchenki gazowej lub w zwykłej kuchni węglowej. Gorącą żyłtkę szybko zbliżywszy do magnesu. Okazuje się, że teraz przyciąganie jest bardzo słabe albo nie występuje wcale.

Wyjaśnienie zaobserwowanych efektów w bardzo ogólnym zarysie jest następujące. Atomy niektórych substancji zachowują się jak maleńkie, bardzo słabe magnesyki. Ich orientacja w przestrzeni jest jednak zupełnie przypadkowa i ciało jako całość nie wykazuje właściwości magnetycznych. W ferromagnetykach następuje samoistne uporządkowanie tych atomowych magnesików w niewielkich obszarach o rozmiarach kilku tysięcznych milimetra. Obszary te są nazywane domenami. Jednak i tutaj kierunki uporządkowania dla różnych domen są na ogół zupełnie przypadkowe.

Umieszczenie ferromagnetyka w zewnętrznym polu magnetycznym powoduje, że pole to stara się uczynić kierunek uporządkowania dla wszystkich domen zgodny z kierunkiem linii pola. Ferromagnetyk wciągany jest w obszar silniejszego pola, co obserwujemy jako przyciąganie do biegunów magnesu. Niektóre ferromagnetyki (tzw. magnetycznie twarde) stają się nawet przy tym magnesami trwałymi. Wysoka temperatura

powoduje wzrost szybkości chaotycznych ruchów ciepłych atomów lub cząsteczek i niszczenie samoistnego uporządkowania w domenach, niezbędnego dla wystąpienia właściwości ferromagnetycznych.

Żeby uzyskać ciecz ferromagnetyczną, musiano więc wybrać inną drogę niż topnienie stałych ferromagnetyków. Wykorzystano ciecze, które w normalnych warunkach występują w przyrodzie, ale nie mają właściwości ferromagnetycznych. Takimi cieczami są np. nafta, woda czy oleje. Dalej będziemy je nazywać cieczami dyspersyjnymi. Substancję ferromagnetyczną rozdrobniono na bardzo małe cząstki o rozmiarach od 2 do 100 nm (1 nm – nanometr – to jedna milionowa część milimetra). Cząstki te mieszało z cieczą dyspersyjną otrzymując ich zawiesinę o równomiernym rozproszeniu wewnątrz całej objętości cieczy.

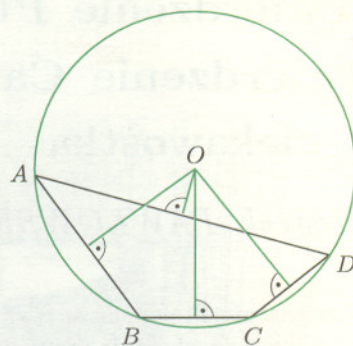
Wydawać by się mogło, że zawiesina taka będzie bardzo niestabilna, ponieważ gęstość znanych ferromagnetyków jest kilkakrotnie większa od gęstości cieczy dyspersyjnych. Na przykład, gęstość żelaza wynosi $7,8 \text{ g/cm}^3$, niklu $8,6 \text{ g/cm}^3$, a gęstość wody jest równa 1 g/cm^3 , nafty zaś $0,8 \text{ g/cm}^3$. Rozproszone cząstki powinny więc szybko opaść na dno naczynia, podobnie jak opada kamień tonący w wodzie. Okazuje się jednak, że cząstki o bardzo małych rozmiarach mogą przez praktycznie dowolnie długi czas uchronić się przed opadaniem, a nawet wędrować w górę wewnątrz cieczy lub gazu.

Przyczyną tego są ruchy Browna. Zasada ich powstawania jest następująca. Cząsteczki cieczy otaczające cząstkę nieustannie w nią uderzają. Prędkości tych cząsteczek podlegają przypadkowemu wahaniom, czyli tzw. fluktuacjom. Od czasu do czasu zdarza się więc silniejsze uderzenie w cząstkę od dołu podrzucające ją do góry. Potem cząstka znów trochę opada, aż trafi na kolejny podzut. Te skokowe ruchy cząstek można obserwować pod mikroskopem. Są to właśnie ruchy Browna. Odkrył je angielski botanik Robert Brown, a ich ilościowe wyjaśnienie podał Albert Einstein i niezależnie od niego polski fizyk Marian Smoluchowski.

Utrzymującą się w ten sposób stabilną zawiesinę bardzo rozdrobnionej substancji stałej w cieczy nazywa się roztworem koloidalnym lub krótko – koloide.

Gdy ciecz ferromagnetyczna nie jest umieszczona w zewnętrznym polu magnetycznym, wówczas zachowuje się podobnie jak zwykle ciecz. A więc można ją, na przykład, łatwo przelewać. Przyjmuje przy tym kształt naczynia, do którego zostanie wlana. Jeżeli wlejemy ją do naczyń połączonych, to wysokości słupków cieczy we wszystkich ramionach

Zanim je sformułujemy, potrzebna będzie krótka definicja. Niechaj dany będzie wielokąt wypukły wpisany w okrąg o środku O . Każdemu bokowi AB wielokąta przyporządkowujemy liczbę $f(AB)$ równą odległości środka O od boku AB z minusem, gdy najkrótsza droga z O do AB leży w całości na zewnątrz wielokąta (rys. 2) i z plusem w przeciwnym przypadku.



Rys. 2. Dla tego wielokąta $ABCD$ mamy $f(AD) < 0$, a $f(AB)$, $f(BC)$ i $f(CD)$ są dodatnie.

Definicja funkcji f zależy, oczywiście, od całego wielokąta, a nie od jego poszczególnych boków. Nie uwzględnimy tego w naszej notacji, by nie komplikować zbytnio oznaczeń.

Twierdzenie Carnota. W dowolnym trójkącie ABC suma $f(AB) + f(BC) + f(CA)$

równa jest sumie promienia okręgu wpisanego w trójkąt ABC i promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC .

Dowód. Wprowadźmy oznaczenia takie, jak na rysunku 3. Rozważmy najpierw przypadek, gdy trójkąt ABC jest ostrokątny. Wówczas, jak wiemy, punkt O leży wewnątrz trójkąta.

Na każdym z czworokątów $AMOK$, $MBLO$ i $LCKO$ można opisać okrąg. Korzystając z twierdzenia Ptolemeusza i zauważając, że $KM = a/2$, $ML = b/2$, $LK = c/2$, otrzymujemy następujące równości:

$$c \cdot OK + b \cdot OM = a \cdot R,$$

$$c \cdot OL + a \cdot OM = b \cdot R,$$

$$a \cdot OK + b \cdot OL = c \cdot R.$$

Dodanie ich stronami prowadzi do

$$a(OK + OM) + b(OM + OL) + c(OL + OK) = (a + b + c)R.$$

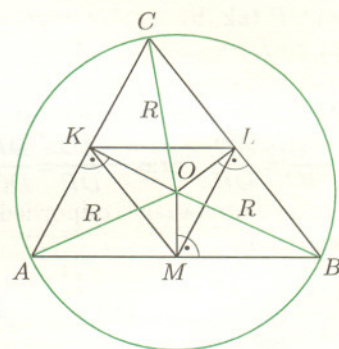
Jednocześnie, obliczając na dwa różne sposoby pole trójkąta ABC przekonujemy się, że

$$a \cdot OL + b \cdot OK + c \cdot OM = (a + b + c)r$$

(r oznacza promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC). Po dodaniu obu ostatnich równości i podzieleniu stron przez obwód trójkąta ABC otrzymamy tezę.

Gdy trójkąt ABC jest prostokątny, to *naprawdę* nie ma czego dowodzić.

Rozważmy wreszcie przypadek trójkąta ABC rozwartokątnego (rys. 4). Wówczas punkt O znajdzie się na zewnątrz trójkąta ABC . Stosując – tak jak poprzednio – twierdzenie Ptolemeusza dostaniemy



Rys. 3. Punkty M, L, K są środkami boków AB, BC i CA . Punkt O to środek okręgu opisanego na trójkącie ABC . Ponadto, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$.

równości

$$c \cdot OK + b \cdot OM = a \cdot R,$$

$$-c \cdot OL + a \cdot OM = b \cdot R,$$

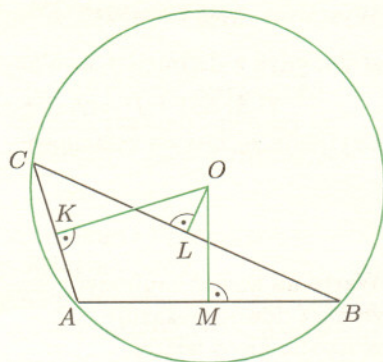
$$a \cdot OK - b \cdot OL = c \cdot R,$$

z których wynika, że

$$(a + b + c)R = (a + b)OM + (a + c)OK - (b + c)OL.$$

Również

$$(a + b + c)r = c \cdot OM + b \cdot OK - a \cdot OL.$$



Rys. 4

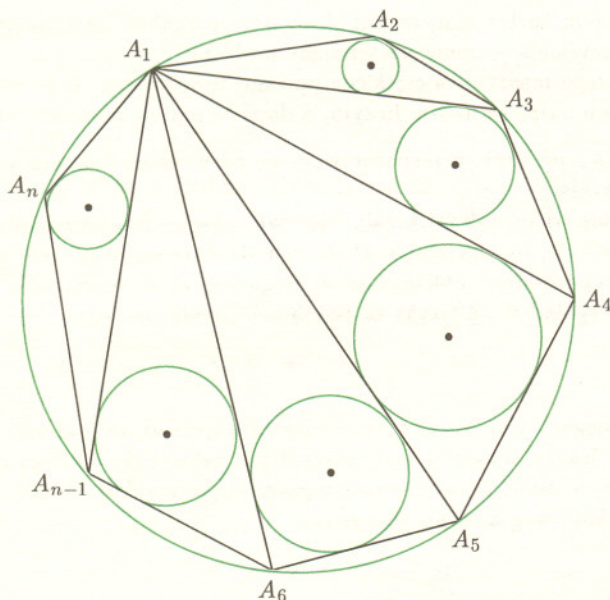
Dodając dwie ostatnie równości i dzieląc obie strony otrzymanego równania przez $(a + b + c)$ otrzymamy

$$R + r = OM + OK - OL = f(AB) + f(CA) + f(BC),$$

czyli tezę twierdzenia Carnota.

Pora na ciekawostkę. Rozważmy wielokąt wypukły $A_1A_2 \dots A_n$, $n \geq 4$, wpisany w okrąg o środku O i promieniu R . Prowadząc z dowolnego wierzchołka tego wielokąta przekątne rozbijemy go na trójkąty. Wpiszmy w każdy z nich okrąg (rys. 5). Okazuje się, że

Suma promieni tych wszystkich okręgów jest stała, tzn. nie zależy od wyboru wierzchołka, z którego prowadzimy przekątne.



Rys. 5

Twierdzenie to liczy sobie około 200 lat (odkrył je na początku XIX wieku nieznanym japońskim matematykiem). Jest tak piękne i proste, że z pewnością nie zasługuje na to, by tkwić w zapomnieniu. A oto jego dowód.

Ponumerujmy trójkąty, na które rozbiły wielokąt jego przekątne wychodzące z ustalonego wierzchołka. Niech r_i będzie promieniem okręgu wpisanego w i -ty trójkąt. Przez a_i , b_i oraz c_i oznaczmy boki i -tego trójkąta. Wtedy, na mocy twierdzenia Carnota,

$$r_i + R = f(a_i) + f(b_i) + f(c_i) \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n - 2.$$

Stąd wynika, że interesująca nas suma jest równa

$$\sum_{i=1}^{n-2} r_i = \sum_{i=1}^{n-2} (f(a_i) + f(b_i) + f(c_i)) - (n - 2)R.$$

tych naczyń będą jednakowe. Ciecz ferromagnetyczną nie poddaną działaniu zewnętrznego pola magnetycznego bez trudu można zamieszać, tak jak miesza się herbatę w szklance łyżeczką. Jeżeli wewnątrz cieczy umieścimy jakieś poruszające się ciało, na przykład obracający się krążek lub mieszadło, to ruch tych przedmiotów będzie hamowany niewiele więcej niż w zwykłych cieczach.

Właściwości i zachowanie się cieczy ferromagnetycznych ulegają jednak radykalnym zmianom pod wpływem zewnętrznego pola magnetycznego. Gdy ciecz zostanie umieszczona w niejednorodnym polu magnetycznym, tzn. takim, które w pewnym obszarze jest silniejsze, wówczas zostanie ona wciągnięta w ten obszar. Jeżeli do jednego z ramion naczyń połączonych, zawierających ciecz ferromagnetyczną, zostanie zbliżony magnes, wtedy poziom cieczy w tym ramieniu podniesie się lub obniży w zależności od położenia magnesu.

Gdy z kolei magnes zostanie umieszczony w pobliżu płynącego strumienia cieczy ferromagnetycznej, strumień ten odchyli się w stronę magnesu. W silnym polu magnetycznym obserwuje się zjawisko nazywane zestalaniem cieczy ferromagnetycznej. Polega ono na tym, że lepkość tej cieczy silnie wzrasta. Poruszające się w niej ciało, na przykład obracająca się tarcza czy mieszadło, są bardzo intensywnie hamowane. Ciecz nabiera pewnych właściwości ciała sztywnego i sprężystego. Próba usunięcia jej z określonego obszaru objętego polem magnetycznym powoduje, że ciecz ferromagnetyczna uparcie wraca w to miejsce.

Przyczyną opisanych zjawisk zachodzących w cieczach ferromagnetycznych jest oddziaływanie rozproszonych w nich cząstek z polem magnetycznym. Właściwości ferromagnetyczne tych cząstek powodują, że ustawiają się one wzdłuż linii pola magnetycznego, podobnie jak dzieje się to w znanym ze szkoły doświadczeniu z opiłkami żelaznymi rozsypanymi na kartce papieru pokrywającej magnes. Przemieszczające się względem cieczy dyspersyjnej cząstki ferromagnetyka dzięki siłom lepkości wprawiają w ruch również otaczające je cząsteczki tej cieczy. W rezultacie tego pole magnetyczne działające na rozproszone cząstki wpływa na zachowanie się cieczy ferromagnetycznej jako całości, którą fizycy traktują tutaj jako tzw. ośrodek ciągły.

W silnym jednorodnym polu magnetycznym rozproszone cząstki ustawiają się wzdłuż jego linii tworząc charakterystyczne równoległe włókna, które w krótkim czasie grupują się w wiązki przypominające grubsze kolumny. Występowanie tych zjawisk zostało bezpośrednio potwierdzone w efektywnych doświadczeniach z oddziaływaniem światła laserowego na cząstkach zestalonej cieczy ferromagnetycznej. Otrzymano wówczas obrazy interferencyjne charakterystyczne dla wspomnianego ustawienia cząstek wzdłuż włókien i kolumn. Uwieszone przez pole magnetyczne cząstki dzięki siłom lepkości skutecznie przeciwdziałają próbom przemieszczenia cieczy dyspersyjnej.

Niezwykłe właściwości cieczy ferromagnetycznych zdecydowały o ich różnorodnych zastosowaniach. Niewielkie ilości tych cieczy uwieszone w pułapkach utworzonych przez odpowiednio ukształtowane pole magnetyczne spełniają rolę łożysk i uszczelek, które nie zużywają się i nie wymagają smarowania ani regulacji. Ciecz ferromagnetyczna umieszczona w zmiennym polu magnetycznym spełnia rolę elementu roboczego w przetwornikach elektromechanicznych lub generatorach ultradźwięków. Ta sama ciecz wprowadzona w szczelinę, w której drga cewka zwykłego głośnika elektrodynamicznego zwiększa strumień magnetyczny przechodzący przez cewkę, ułatwia chłodzenie i tłumi szkodliwe drgania. Dzięki temu zwiększa się moc i poprawia jakość wytwarzanego dźwięku.

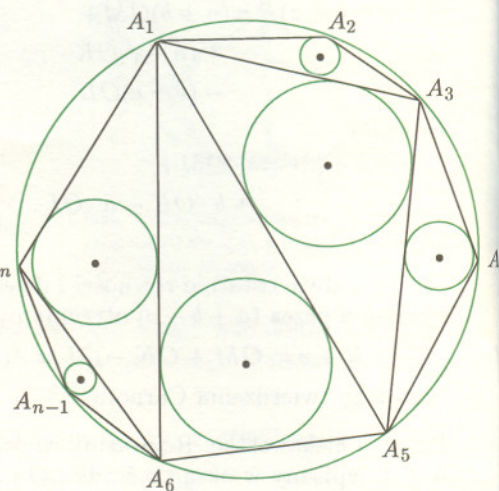
Budowane są również sprzęgła, hamulce i tłumiki drgań zawierające cieczy ferromagnetyczne. W urządzeniach tych wykorzystuje się opisane wcześniej zjawisko zestalania się tych cieczy pod wpływem pola magnetycznego. W sprzęgłach zestalona ciecz ferromagnetyczna powoduje złączenie obracającej się tarczy z napędzanym zespołem, a w hamulcach i tłumikach spowalnia ruchy specjalnie ukształtowanych elementów. Właściwości ferromagnetyczne omawianych cieczy, podobnie jak stałych ferromagnetyków, słabną wraz ze wzrostem temperatury aż do całkowitego ich zaniku w temperaturze Curie. Zależność ta pozwala na wykorzystanie cieczy ferromagnetycznych do pomiaru temperatury. Nie jest to zresztą jedyny przykład ich zastosowania w technice pomiarowej. Ciecze ferromagnetyczne używane są m.in. do ciągłego pomiaru

Wystarczy więc zauważyć, że suma $\sum_{i=1}^{n-2} (f(a_i) + f(b_i) + f(c_i))$ jest stała, gdyż z definicji f wynika, że jest ona równa

$$f(A_1A_2) + f(A_2A_3) + \dots + f(A_{n-1}A_n) + f(A_nA_1).$$

Czytelnik zechce się zastanowić, dlaczego tak jest.

Warto na koniec zauważyć, że nasz dowód pokazuje w istocie nieco więcej. Mianowicie, jeśli wielokąt wypukły $A_1A_2 \dots A_n$, wpisany w okrąg, podzielimy na $(n-2)$ trójkątów przekątnymi niekoniecznie wychodzącymi z jednego wierzchołka (rys. 6), to suma długości promieni okręgów wpisanych w te trójkąty też nie będzie zależeć od sposobu podziału.



Rys. 6

Zadalem kiedyś w pierwszej klasie liceum ogólnokształcącego do przemyslenia w domu następujący problem: Dlaczego maszynista ciężkiego pociągu towarowego chcąc wprawić go w ruch najpierw rusza do tyłu, a dopiero potem we właściwym kierunku?

Jedna z uczennic przespacerowała się na dworzec i zapytała o to maszynistę.

„Ja nie wiem, tak mi kazali, więc tak robie” – odpowiedział fachowiec. Proponuję, by Czytelnicy *Delty* samodzielnie wyjaśnili ten, niezbyt zresztą trudny, problem. Leniwi mogą poszukać rozwiązania w książkach, na przykład w „Z fizyką za pan brat” Hansa Backego.

* * *

W księgach Uniwersytetu w Oxfordzie zapisano, że matematyk G.H. Hardy, wysokiej klasy ekscentryk, założył się z kolegą o pół pensa co dzień, aż do śmierci, że następnego dnia wszędzie Słońce. Sumaryczna wysokość wygranej nie jest znana.

* * *

Kielecka firma SARAD wytwarza produkt o niezwykle oryginalnej nazwie: jest to „Ryż paraboliczny Galant”. Na czym polega paraboliczność ziaren ryżu, zostało wyjaśnione na opakowaniu: „Ryż Galant ... zachowuje swe witaminy i sole mineralne dzięki procesowi paraboiled. ...”. Proces ten polega na zanurzeniu we wrzątku, a następnie poddaniu działaniu pary wodnej pod ciśnieniem. Okazuje się więc, że sensu w tym nie ma za grosz (oczywiście, w nazwie, bo procedura przygotowania ryżu jest całkiem sensowna). Angielski czasownik „to paraboil” oznacza sparzyć, podgotować i nie ma nic wspólnego z parabolą. Paraboliczny po angielsku to parabolic. Być może to matematyczno-gastronomiczne qui pro quo jest najlepszym argumentem za tym, by każdy, także i kucharz znał elementarną matematykę na poziomie wyższym niż tabliczka mnożenia, a poza tym, by znał język angielski.

K.R.

Jeszcze raz o nierówności Ptolemeusza

Podamy tu inny, równie elementarny i prosty dowód nierówności Ptolemeusza. Skorzystamy jedynie z definicji inwersji i pewnej jej własności. Tym, którzy nie słyszeli o inwersji (w geometrii), należy się kilka słów wyjaśnienia.

Rozpatrzmy na płaszczyźnie okrąg Γ o środku O i promieniu r . Każdemu punktowi A tej płaszczyzny, różnemu od O , przyporządkowujemy punkt A' leżący na półprostej OA i spełniający warunek $OA' \cdot OA = r^2$. Tak zdefiniowane przekształcenie nazywamy *inwersją względem okręgu Γ* . Punkt O nazywamy *środkiem inwersji*.

Inwersja ma szereg ciekawych własności, które pomagają w rozwiązaniu niektórych, czasami nietrywialnych zadań. Jedną z nich jest następujące twierdzenie:

Rozpatrzmy inwersję względem pewnego okręgu o środku O . Obrazem dowolnego okręgu przechodzącego przez O , względem tej inwersji, jest prosta nie przechodząca przez O . Ponadto, obrazem dowolnej prostej nie przechodzącej przez O jest okrąg przechodzący przez O .

Zachęcamy niewtajemniczonych Czytelników do udowodnienia tego faktu!

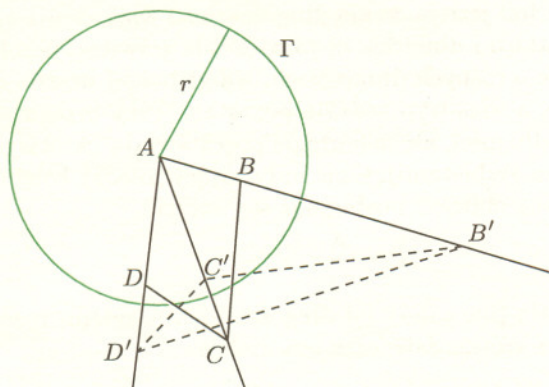
Przystępujemy do dowodu nierówności Ptolemeusza dla dowolnego czworokąta $ABCD$. Niech Γ będzie okręgiem o środku A i promieniu $r = \sqrt{AB \cdot AC \cdot AD}$. Oznaczmy odpowiednio przez B' , C' , D' obrazy punktów B , C , D przy inwersji względem okręgu Γ . Na mocy definicji inwersji $AC \cdot AC' = r^2 = AB \cdot AC \cdot AD$, skąd

$$(*) \quad AC' = AB \cdot AD.$$

Ponieważ $AB \cdot AB' = r^2 = AC \cdot AC'$ oraz $\angle BAC = \angle C'AB'$, więc trójkąty ABC i $AC'B'$ są podobne. To oznacza, że $\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AC'}$. Uwzględniając równość $(*)$ dostajemy $B'C' = AD \cdot BC$.

Analogicznie dowodzimy, że

$$C'D' = AB \cdot CD \quad \text{oraz} \quad B'D' = AC \cdot BD.$$



Na mocy nierówności trójkąta dla trójkąta $B'C'D'$ otrzymujemy

$$B'C' + C'D' \geq B'D',$$

czyli

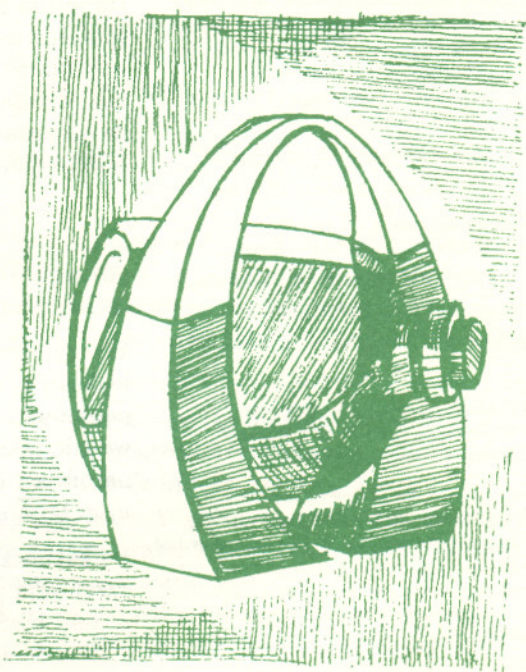
$$AD \cdot BC + AB \cdot CD \geq AC \cdot BD.$$

Kiedy zachodzi równość? Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy punkty B' , C' , D' leżą na jednej prostej, czyli na mocy cytowanej wyżej własności inwersji, wtedy i tylko wtedy, gdy punkty A , B , C , D leżą na jednym okręgu.

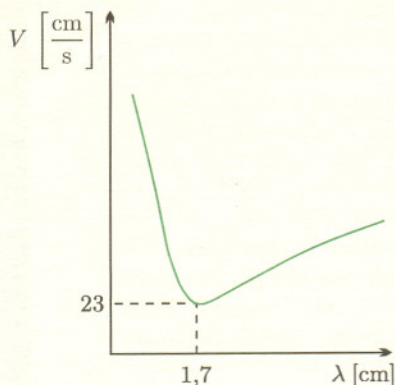
Waldemar POMPE

grubości w procesach produkcyjnych, a także do pomiarów ciśnienia oraz bardzo dużych natężeń prądu elektrycznego. Istnieją również projekty budowy układów do bezpośredniego przetwarzania energii cieplnej na energię elektryczną. W układach tych czynnikiem roboczym będzie przewodząca ciecz ferromagnetyczna poruszająca się w polu magnetycznym pod wpływem różnicy ciśnień spowodowanej ogrzaniem jej powyżej punktu Curie. Prowadzone są także próby wykorzystania specjalnych cieczy ferromagnetycznych w medycynie do zwiększenia koncentracji niektórych leków w wybranych obszarach organizmu.

W warunkach domowych nie uda się, niestety, rozdrobnić substancji ferromagnetycznej do rozmiarów kilkudziesięciu nanometrów i uzyskać stabilnej cieczy ferromagnetycznej. Można natomiast otrzymać jej namiastkę mieszając drobne opilki żelazne z dowolnym, możliwie gęstym olejem. Opilki te powinny być czyste i nie magnesować się trwale. Najlepiej sporządzić je samemu spilowując kilka miękkich gwoździ drobnym pilnikiem, tzw. gładzikiem. Stosunek objętości użytych opilków i oleju powinien być około 4:1. Umieszczając otrzymaną mieszaninę w silnym polu magnetycznym, na przykład pierścieniowego magnesu ferrytowego pochodzącego z uszkodzonego głośnika, można wprawić ją w ruch lub uzyskać stan podobny do zestalenia cieczy ferromagnetycznej.



Fale grawitacyjne, kapilarne i przyływowe



Prędkość fal na głębokiej wodzie w zależności od długości fali. Fale o długości $\lambda = 1,7$ cm możemy uważać za umowną granicę między falami krótkimi i długimi.



Rozwiązanie zadania M 726. Tak.

Na przykład: $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18}$. Ogólnie, jeśli \sqrt{p} jest niewymierny, to trójka $a = m^2 p$, $b = k^2 p$, $c = (k + m)^2 p$ spełnia, dla dowolnych $k, m \in \mathbb{N}$ równość $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$.



Rozwiązanie zadania M 727.

Odpowiedź jest negatywna. Rozważmy ciąg $a_n = n + \sqrt{2}$. Przypuśćmy, że można wybrać z niego trójwyrazowy podciąg geometryczny, a więc, że istnieją parami różne indeksy m, n, k takie, iż $a_n a_m = a_k^2$. Wówczas

$$(n + \sqrt{2})(m + \sqrt{2}) = (k + \sqrt{2})^2,$$

$$(m + n - 2k)\sqrt{2} = k^2 - mn.$$

Z niewymierności $\sqrt{2}$ wynika, że $m + n = 2k$ i $mn = k^2$. Zatem

$$(m - n)^2 = (m + n)^2 - 4mn =$$

$$= 4k^2 - 4k^2 = 0,$$

czyli

$$m = n.$$

Wykazana sprzeczność dowodzi, że z ciągu $\{a_n\}$ nie można wybrać podciągu geometrycznego.

Jeśli jednak dodatkowo zażądamy, by wyrazy ciągu arytmetycznego były liczbami naturalnymi, to łatwo sprawdzić, że można jego różnicę powiększoną o 1 wziąć za iloraz szukanego podciągu geometrycznego i dowolnie wybrać wyraz początkowy.

Po jeziorze przepłynęła motorówka. Kilka minut później fale, które wywołała, docierają do brzegu. Kolejne ich grzbiety osiągają ląd najpierw w dużych, potem w coraz krótszych odstępach czasu. Jakie jest wytłumaczenie tego zjawiska?

Żeby je zrozumieć, musimy najpierw poznać podstawowe własności fal na wodzie. Jeśli długość fali jest mała w porównaniu z głębokością wody – mówimy o falach na głębokiej wodzie, jeśli jest porównywalna lub większa – o falach na płytkiej wodzie, czyli o falach przyływowych. W tym drugim przypadku przyjął się obrazowy zwrot: „fale czują dno”. Sam termin „płytką wodą” może być nieco mylący. Dla fal o długościach centymetrowych płytką wodą będzie kałuża, dla fal o długościach kilometrowych płytki będzie nawet ocean. Prędkość fazowa fal na płytkiej wodzie nie zależy od długości fali, a tylko od głębokości h wody, zgodnie ze wzorem

$$v_f = \sqrt{gh}.$$

Zupełnie inaczej przedstawia się sytuacja w przypadku fal na głębokiej wodzie. Zachowanie się fal krótkich zależy od napięcia powierzchniowego, fal długich – od sił grawitacji. Prędkość fazowa fal na głębokiej wodzie zależy od ich długości. Opisuje to wzór

$$v_f = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}},$$

gdzie ρ jest gęstością wody, natomiast σ współczynnikiem napięcia powierzchniowego. Dla długich fal (zwanymi falami grawitacyjnymi) decydujące znaczenie ma pierwszy wyraz sumy występującej pod pierwiastkiem, a zatem możemy napisać

$$v_f \approx \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}.$$

Widzimy więc, że prędkość fali rośnie z jej długością jak $\lambda^{1/2}$. W przypadku fal krótkich, zwanych kapilarnymi, w sumie występującej pod pierwiastkiem dominuje drugi wyraz, tak więc

$$v_f \approx \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}}.$$

Oznacza to, że prędkość fal kapilarnych maleje z ich długością jak $\lambda^{-1/2}$.

Możemy teraz powrócić do naszego problemu z motorówką. Fale, które obserwujemy na powierzchni jeziora, mają długości dużo większe niż 1,7 cm (umowna granica fal krótkich i długich), są to więc fale grawitacyjne. Płynąca motorówka wytwarza fale o różnych długościach. Na głębokiej wodzie te najdłuższe są najszybsze, a więc wyprzedzają pozostałe. Przy brzegu prędkość fali przestaje zależeć od długości, ale fale długie pozostawiają „krótszych rywali za plecami” (czy raczej za grzbietami). Czas upływający między kolejnymi uderzeniami o brzeg można obliczyć posługując się wzorem

$$T = \frac{\lambda}{v_f},$$

gdzie prędkość v_f jest stała (nie zależy od długości fali). A zatem, w miarę jak do brzegu docierają coraz krótsze fale, czas ten maleje.

Wzory określające prędkość fal są wzorami przybliżonymi, nie uwzględniają lepkości i tarcia o dno. Zjawiska związane z lepkością możemy zaniedbać, ponieważ lepkość wody jest mała. Tarcie o dno w przypadku fal na głębokiej wodzie także można pominąć ze względu na małą amplitudę fali przy dnie, natomiast na płytkiej wodzie może mieć ono istotne znaczenie. Mimo to wzór $v_f = \sqrt{gh}$ na ogół dobrze opisuje własności tych fal.

Na zakończenie zagadka dla Czytelników. Dlaczego, jeśli brzeg jest płaski, fale przybijają prostopadle do niego? Jako wskazówkę należy wykorzystać fakt, że jeśli brzeg jest płaski, to głębokość wody jest niewielka i w sposób ciągły maleje do zera, a wraz z nią także prędkość fali.

K.R.



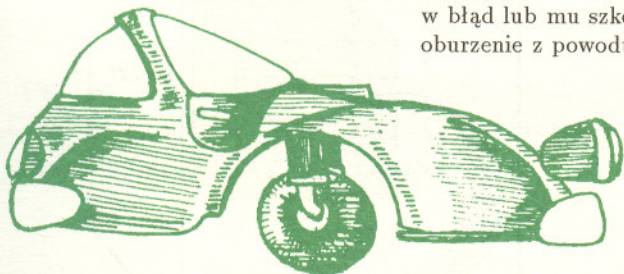
Rozwiązanie zadania M 728. Gdyby $p - 1$ miało nieparzysty dzielnik właściwy n (czyli $1 \neq n \neq p - 1$), to równość

$$a^{p-1} + b^{p-1} = \left(a^{\frac{p-1}{n}} + b^{\frac{p-1}{n}} \right) \cdot \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s (a^s b^{n-1-s})^{\frac{p-1}{n}}$$

przeczylaby temu, że $a^{p-1} + b^{p-1}$ jest liczbą pierwszą. Zatem zachodzi $p - 1 = 2^m$ dla pewnego m naturalnego. Gdyby m miało nieparzysty dzielnik właściwy l , to

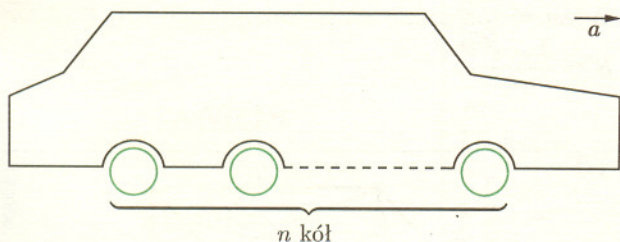
$$p = (2^{m/l} + 1) \cdot \sum_{s=0}^{l-1} (-1)^s (2^s)^{m/l}$$

nie byłoby liczbą pierwszą. Zatem $m = 2^k$ dla pewnej liczby całkowitej k .



Ile kół powinien mieć samochód?

Obliczmy, jaki jest związek między współczynnikiem tarcia statycznego f opon o jezdnię, liczbą kół n , promieniem r , masą m i momentem bezwładności I pojedynczego koła oraz masą M samochodu bez kół a teoretycznym maksymalnym przyspieszeniem samochodu a_{\max} . Zakładamy, że wszystkie koła są jednakowe, masa zaś reszty samochodu rozkłada się równomiernie na wszystkie koła.



Rozważmy pojedyncze koło. Gdy toczy się ono bez poślizgu, wtedy

$$Tr = \varepsilon I \quad \text{lub} \quad Tr^2 = aI,$$

$$a_{\max} = \frac{T_{\max} r^2}{I}, \quad T_{\max} = fN = fg \left(\frac{M}{n} + m \right);$$

czyli

$$a_{\max} = \frac{fgr^2}{I} \left(\frac{M}{n} + m \right);$$

Jedynie fakty z jego książek, na których odważyłbym się polegać, to numery stron...

James Randi o Dänikenie

Lódzkie wydawnictwo Pandora wydało dwie godne odnotowania książki. Pierwsza z nich to *Däniken, tajemnica Syriusza, parapsychologia i inne trele-morele* Jamesa Randiego, druga to *New Age. Notatki o pograniczu nauki* Martina Gardnera. Rzecz o tyle znamienita, że wcześniej wydawnictwo to karmiło swych czytelników papką o Trójkącie Bermudzki, UFO, parapsychologii, a także *Ilustrowaną księgą rekordów seksualnych*. James Randi jest zawodowym iluzjonistą, a więc osobą bezcenną w badaniach możliwości tak zwanych parapsychików, ponieważ – jak powiada Gardner – fizycy należą do grupy ludzi dającej się najłatwiej nabierać na sztuczki. Martin Gardner jest matematykiem i niestrudzonym popularyzatorem nauki, jednym z założycieli Komitetu ds. Naukowego Badania Twierdzeń o Zdarzeniach Paranormalnych i redaktorem kwartalnika *Skeptical Inquirer* wydawanego przez ten komitet.

Fakt, że wydawnictwo, które dotąd propagowało umysłowe barbarzyństwo, przedstawia obecnie krytyczne opinie na temat zjawisk paranormalnych, należy uznać za pomyślny prognostyk. W zamysle wydawnictwa książki te mają zapoczątkować serię opracowań krytycznych. Raz jeszcze zacytujmy Martina Gardnera: „... niemal każde ze znanych wydawnictw w USA wypuściło na rynek księgarski książkę lub książki poświęcone okultyzmowi, o których wszyscy wiedzą, że są to po prostu śmieci... problematyka ta była gwarancją zysków... stanowczo sprzeciwiam się ingerencji rządu w kwestię publikacji. Istnieją wszakże pewne normy moralne. Tak jak wydawnictwa mają demokratyczne prawo do wydawania książek, nawet tych, które wprowadzają czytelnika w błąd lub mu szkodzą, tak my, czytelnicy, mamy pełne prawo wyrażać swoje oburzenie z powodu gwałcenia norm etycznych.” Jak mawiają Anglicy – no comments.

James Randi

Däniken, tajemnice Syriusza, parapsychologia i inne trele-morele

Pandora 1994

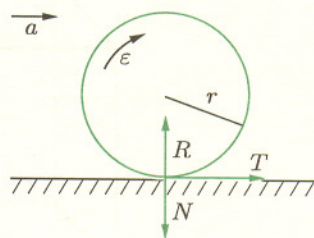
Martin Gardner

New Age. Notatki o pograniczu nauki

Pandora 1994

a_{\max} jest wprost proporcjonalne do f . Oczywiście, gdy $f = 0$, wówczas $a_{\max} = 0$. Wtedy samochód nie mógłby wcale przyspieszać.

R – siła reakcji podłoża,
 N – siła nacisku, siła ciężkości,
 T – tarcie,
 ε – przyspieszenie kątowe,
 a – przyspieszenie liniowe.



Jak widać, im mniejsze n , tym większe a_{\max} dla danych f, r, I, m, M . Z tego wynikałoby, że najlepszy do jazdy po śliskim podłożu byłby monocykl (pojazd z jednym kołem). Ale jazda takim pojazdem nie jest łatwa.

Jeśli założymy dodatkowo, że moment bezwładności kół jest równy momentowi bezwładności jednorodnego walca $I = \frac{1}{2} m r^2$, wzór uprości się do postaci $a_{\max} = 2fg \left(\frac{M}{nm} + 1 \right)$. Wynika stąd wniosek, że dla osiągnięcia dużego przyspieszenia samochód powinien spełniać następujące warunki:

- mieć jak najmniej kół o jak najmniejszej masie,
- masa jego samego (bez kół) powinna być jak największa.

Bartosz ZIELIŃSKI

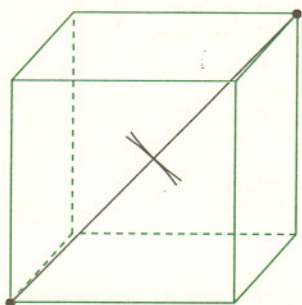
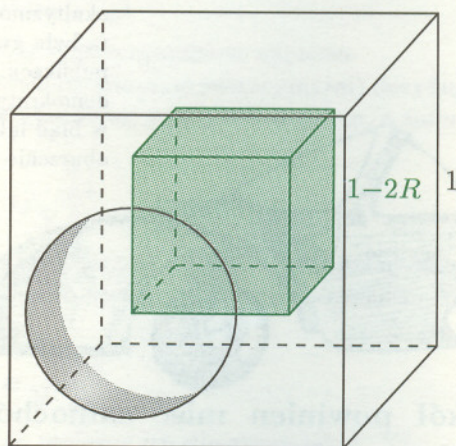


mała delta

Jeśli do sześcianu da się wrzucić 3 jednakowe kulki,
to zmieści się w nim i czwarta taka sama

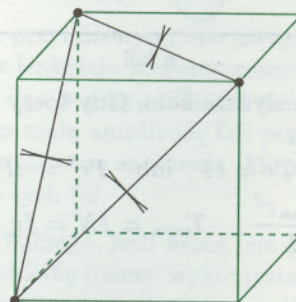
Jeśli do sześcianu o krawędzi 1 wrzucimy kulkę o promieniu R , to jej środek będzie mógł się poruszać we wnętrzu sześcianu o krawędzi $1 - 2R$.

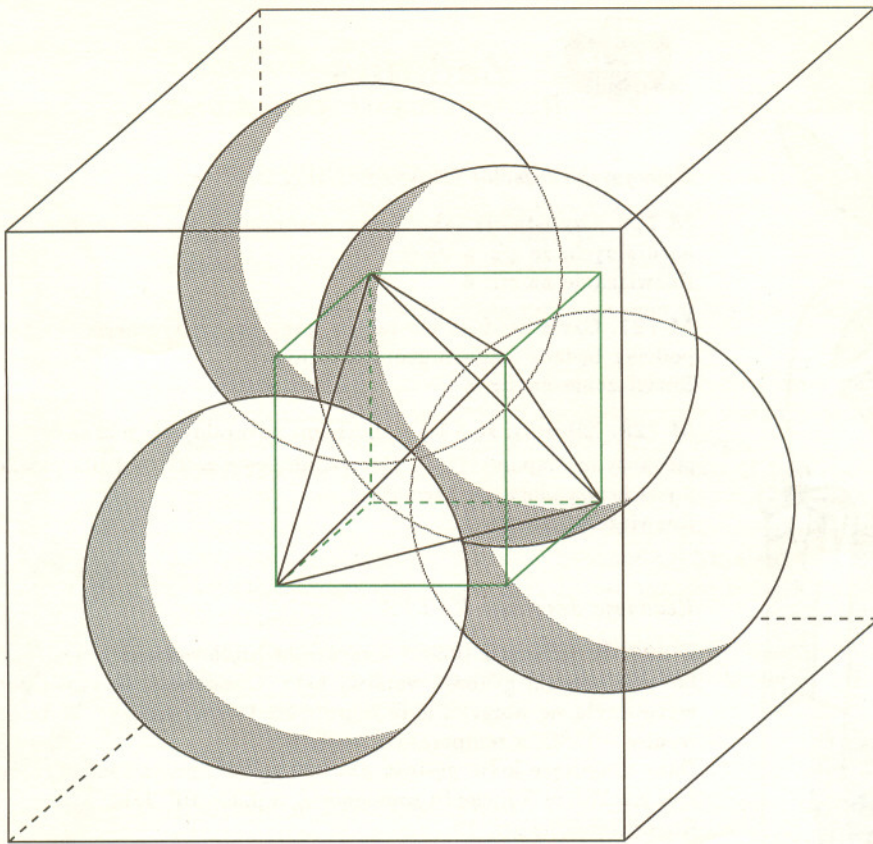
Stąd, największa pojedyncza kulka mieszcząca się w sześcianie odpowiada sytuacji, gdy tego mniejszego sześcianu nie ma. Czyli, gdy jest $R = \frac{1}{2}$, co i tak wiedzieliśmy.



Gdy kulki są dwie, to ich środki mogą się najbardziej oddalić na długość przekątnej mniejszego sześcianu, czyli $(1 - 2R)\sqrt{3}$. Jeśli są to największe mieszczące się równocześnie w sześcianie kulki, to przekątna ta jest równa sumie ich promieni, czyli $2R$. Daje to $R = \frac{3 - \sqrt{3}}{4}$.

Dla trzech kulek należy poszukać trzech punktów małego sześcianu jak najdalej od siebie odsuniętych. Punkty takie są oddalone o $(1 - 2R)\sqrt{2}$. I znów, gdy kulki są największe, jest to $2R$. Wówczas $R = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. Zauważmy jednak, że wtedy w dużym sześcianie zmieści się jeszcze jedna taka kulka. Tym bardziej zmieści się, gdy kulki te nie będą maksymalne.



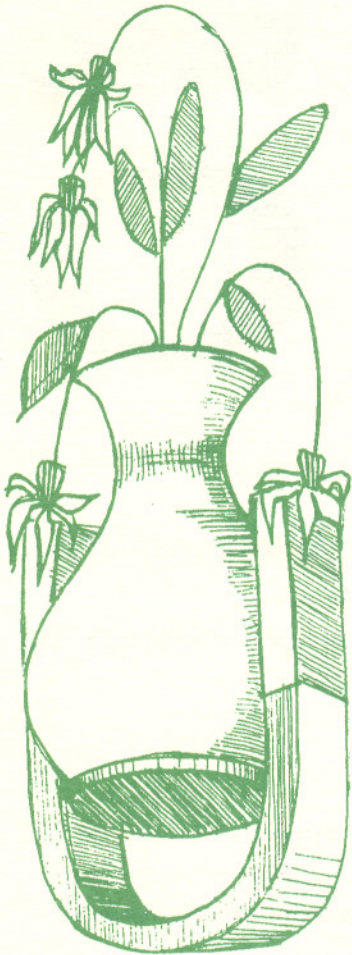


Czy jest prawdziwe jeszcze choćby jedno zdanie postaci:
jeśli do sześcianu da się wrzucić n jednakowych kulek, to zmieści się w nim jeszcze jedna taka sama?
 Może dla n równego 5? A może 7?

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS



Odcinek dla poczty	Odcinek dla posiadacza rachunku	Potwierdzenie dla wpłacającego
Zł	Zł	Zł
słownie złotych	słownie złotych	słownie złotych
adres wpłacający	Dokładny adres wpłacający	Dokładny adres wpłacający
na r-k AMOS 01-806 Warszawa ul. Zuga 12	na r-k AMOS 01-806 Warszawa ul. Zuga 12	na r-k AMOS 01-806 Warszawa ul. Zuga 12
nazwa banku PKO VIII O/W-wa	nazwa banku PKO VIII O/W-wa	nazwa banku PKO VIII O/W-wa
Nr r-ku 1586-77578-136	Nr r-ku 1586-77578-136	Nr r-ku 1586-77578-136
Pobrano opłatę	Pobrano opłatę	Pobrano opłatę
stempel zł	stempel zł	stempel zł
..... podpis przyjmującego podpis przyjmującego podpis przyjmującego



Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

M 726. Czy istnieją takie liczby naturalne a, b, c nie będące kwadratami liczb naturalnych, że $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$?

Rozwiązanie na str. 6

M 727. Czy z każdego niestałego ciągu arytmetycznego można wybrać nieskończony podciąg będący ciągiem geometrycznym?

Rozwiązanie na str. 6

M 728. Załóżmy, że a i b są liczbami naturalnymi, p oraz $a^{p-1} + b^{p-1}$ są liczbami pierwszymi nieparzystymi. Udowodnić, że $p = 2^{2^k} + 1$ dla pewnego k całkowitego (czyli p jest liczbą pierwszą Fermata).

Rozwiązanie na str. 7

Redaguje Jarosław KULPA

F 397. W jednym z filmów Krzysztofa Kieślowskiego z serii „Dziesięć Przykazań” bohater obliczał grubość warstwy lodu. Oszacować, ile czasu potrzeba, aby na jeziorze wytworzyła się warstwa lodu o grubości 15 cm. Założyć, że temperatura powietrza wynosi -15°C , a temperatura wody 0°C .

Dane dotyczące lodu: gęstość $\rho = 920 \text{ kg/m}^3$, przewodność termiczna $k = 2,2 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$, ciepło topnienia $L = 3,33 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$.

Rozwiązanie na str. 12

F 398. Ważnymi parametrami samochodu są czas, w jakim może on osiągnąć prędkość $v = 90 \text{ km/h}$ i minimalna droga hamowania. Zależą one od wielu czynników, wśród których tarcie opon o podłoże odgrywa bardzo dużą rolę. Wiedząc, że dla większości materiałów (nieklejących się do podłoża) współczynnik tarcia jest nie większy od jedności, oszacować

a) jaki (teoretycznie) może być minimalny czas osiągnięcia prędkości 90 km/h ?

b) jaka może być minimalna droga hamowania samochodu o prędkości 90 km/h ?

Rozwiązanie na str. 12



Prenumerata „Deltę”
za okres:

Prenumerata „Deltę”
za okres:

Prenumerata „Deltę”
za okres:



Protokół posiedzenia Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki obradując 23 czerwca 1994 r. w Jachrance w składzie: Jerzy Bednarczuk, Krzysztof Chełmiński, Antoni Leon Dawidowicz – przewodniczący, Piotr Hajłasz, Marek Kordos, Andrzej Mąkowski, Agnieszka Wojciechowska, Jarosław Wróblewski

biorąc pod uwagę dobór tematu pracy, poziom pracy i przebieg obrony postanowiło przyznać:

1. srebrny medal i nagrodę w wysokości 2.200.000,- zł **Piotrowi Wojciechowi Śniademu** z XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu za pracę *Geometryczne dowody dwóch twierdzeń dotyczących ułamków Fareya*,
2. brązowy medal i nagrodę w wysokości 1.700.000,- zł **Piotrowi Matusiewiczowi** z Technikum Hutniczo-Mechanicznego w Ostrowcu Świętokrzyskim za pracę *Ilustracja geometryczna najczęściej spotykanych średnich algebraicznych*,
3. dyplom uczestnictwa w finale **Krzysztofowi Smalskiemu** z Zespołu Szkół Ogólnokształcących im. Jana III Sobieskiego w Nysie za pracę *Zadanie z kombinatoryki*,
4. nagrody pieniężne w wysokości 700.000,- zł każda opiekunom prac: Augustynowi Kałuży, Sławomirowi Kopańskiemu i Janowi Sosulskiemu.
[Złotego medalu nie przyznano.]

(-) podpisy członków Jury

Tradycyjnym zwyczajem redakcja *Delty* ogłasza Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki. Zachęcamy uczniów zainteresowanych matematyką do opracowywania swoich matematycznych rozważań i nadsyłania rezultatów do redakcji *Delty*. Poniżej przypominamy szczegółowy regulamin konkursu.

Regulamin Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

1. Konkurs organizowany jest corocznie przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i redakcję miesięcznika *Delta*, przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
2. W konkursie mogą brać udział uczniowie wszystkich typów szkół.
3. Konkurs składa się z eliminacji i finału.
4. W eliminacjach bierze udział każdy uczeń, który w terminie do 1 maja prześle pod adresem redakcji *Delty* jeden egzemplarz swojej pracy matematycznej. Do pracy należy dołączyć następujące informacje: adres prywatny autora, klasa, nazwa i adres szkoły; imię, nazwisko i adres opiekuna pracy.
5. Praca powinna zawierać samodzielny wkład ucznia i pełną informację o źródłach, z których korzystał jej autor. Prace czysto kompilacyjne nie będą dopuszczone do finału konkursu.
6. Prace nadesłane na eliminacje zostaną ocenione przez Jury Konkursu i kompetentnych recenzentów. Te spośród prac, które spełniają warunki konkursu, zostaną zakwalifikowane przez Jury do finału. Finał odbędzie się w trakcie dorocznej Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego.
7. Zawiadomienia o zakwalifikowaniu do finału zostaną przesłane autorom prac i ich opiekunom przed końcem roku szkolnego.
8. Finałiści i opiekunowie ich prac otrzymają od Zarządu Głównego PTM zaproszenia do udziału w Sesji na koszt Towarzystwa.
9. Finał polega na wygłoszeniu (nie odczytaniu) przez ucznia, podczas specjalnego otwartego posiedzenia sesji, referatu (trwającego nie dłużej niż 15 minut) i wzięciu udziału w dyskusji na temat, któremu poświęcona była praca.
10. Rezultaty finału oceni Jury Konkursu. Jury będzie brało pod uwagę, oprócz merytorycznej wartości pracy, również samodzielność i oryginalność ujęcia tematu oraz przebieg referatu i dyskusji. Jury przyznaje medale: złoty, srebrny i brązowy, wyróżnienia oraz nagrody pieniężne ufundowane przez Ministerstwo Edukacji Narodowej.
11. Ogłoszenie wyników finału następuje w trakcie Walnego Zgromadzenia Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Medale wręcza Prezes Towarzystwa. Wszyscy uczestnicy finału otrzymują dyplomy.
12. Wyniki konkursu i skrót zwycięskiej pracy będą opublikowane w miesięczniku *Delta*.
13. Jury Konkursu jest powoływane przez Zarząd Główny PTM na wniosek Komitetu Redakcyjnego *Delty*.



Niebo przez lornetkę

Rozwiązanie zadania F 397. Ciepło oddane przez wodę przy powstawaniu lodu jest równe

$$dQ = L dm = L \rho S \cdot dh,$$

gdzie S oznacza powierzchnię lodu, a dh przyrost grubości. Z równania przewodnictwa mamy

$$dQ = (kS(T_2 - T_1)/h) \cdot dt,$$

gdzie $T_2 - T_1$ jest różnicą temperatur. Przyrównując obie wielkości i wyznaczając dt otrzymujemy

$$dt = L \rho h \cdot dh / (k(T_2 - T_1)).$$

Całkując powyższe równanie przy założeniu zerowej początkowej grubości lodu otrzymujemy

$$t = L \rho h^2 / (2k(T_2 - T_1)) = 29 \text{ godzin.}$$

Tytuł naszego nowego cyklu (jak długo będzie trwał – zobaczymy) jest tytułem wydanej w 1947 roku przez Bibliotekę Uranii książeczki Jana Pagaczewskiego. Co prawda ani niebo, ani lornetki nie zmieniły się specjalnie od tamtego czasu. Jednak podejrzewamy, że większość Czytelników *Delty* w roku 1947 jeszcze nie istniała i dlatego może być interesujące przypomnienie, co na niebie ciekawego można zobaczyć za pomocą stosunkowo prostego i taniego sprzętu. Nie wynika z tego, że skopiujemy tutaj książkę Jana Pagaczewskiego – trzeba w końcu przyznać, że wiemy teraz o niebie trochę więcej niż pół wieku temu.

Lornetki są obecnie łatwo dostępne i w sklepach, i na bazarach. Ceny również są chyba znośne (kilkaset tysięcy złotych) i średnio zamożny entuzjasta obserwacji nieba może sobie raz na taki wydatek pozwolić. Najlepiej, gdyby to była lornetka polowa, inaczej – pryzmatyczna. A możliwości obserwacji stają się dzięki lornetce znacznie bogatsze niż przy patrzeniu nieuzbrojonym okiem. Tak więc, skierujmy czasem lornetki *na niebo gwiazdziste. Wszak jest tam tyle cudownych i ciekawych obiektów, w które wpatrywać się można godzinami ku pożytkowi umysłu i zadowoleniu ducha.* – to cytat z książki Pagaczewskiego. Co tu więcej dodać?

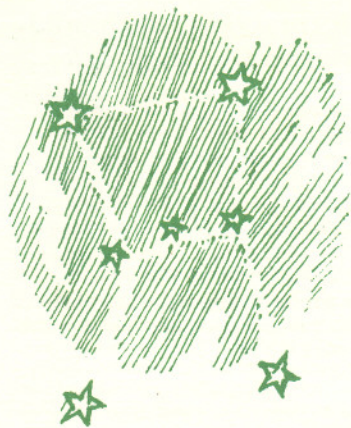
Na początek radzimy jednak popatrzeć trochę w niebo nawet gołym okiem, za to z całą świadomością. Chodzi o to, by uzyskać orientację na niebie, czyli by nauczyć się rozpoznawać choćby najokazalsze gwiazdozbiory i najjaśniejsze gwiazdy. Doskonale może w tym pomóc tzw. obrotowa mapka nieba, która ma jeszcze tę zaletę, że pokazuje niebo akurat widoczne nad horyzontem danego dnia i o zadanej porze. Mapki są dostępne w siedzibach oddziałów Polskiego Towarzystwa Miłośników Astronomii i w planetariach (np. w Warszawie w Muzeum Techniki). Są też atlasy nieba – patrz np. *Delta* rocznik 1985, a o inne należy pytać w księgarniach naukowych i technicznych. Ale żadna teoria nie nauczy orientacji na niebie – by tę sztukę osiągnąć, trzeba koniecznie popatrzeć w prawdziwe niebo. Co jakiś czas pół godziny w pogodny wieczór z mapką nieba lub atlasem to doskonałe połączenie przyjemnego z pożytecznym. Dla mieszkańców dużych miast może to nie być tak doskonałe, bo na ogół przez kurz i hałas miasta mało co widać. Trudno, trzeba sobie wtedy znaleźć miejsce możliwie szczelnie osłonięte przed światłami latarni i domów i zadowalać się tym, co jest dostępne.

Zanim zaczniemy systematyczne śledzenie nieba, warto pomyśleć o jakimś statywie dla naszej lornetki. Nie ma mowy o wpatrywaniu się w niebo godzinami, gdy jego obraz stale skacze, a ręce mdleją już po pięciu minutach trzymania lornetki nad głową. A przecież w tej pozycji mamy pracować permanentnie! Dlatego warto mieć choćby kij (może nawet o zmiennej długości) z poprzeczką na końcu, na której lornetkę można by oprzeć. Taki statyw ma tę zaletę, że jest tani i przenośny, ale jeżeli ktoś ma balkon z widokiem najlepiej na południe i żadnych świateł przed sobą, może postarać się o lepszy nieprzenośny.

Tak uzbrojeni (no i jeszcze w ciepły strój, bo zima) zaczynamy śledzić gwiazdziste niebo. A właśnie teraz wieczorami w kierunku południowo-wschodnim widać jeden z najłatwiej zauważalnych gwiazdozbiorów, Oriona. Cztery jego najjaśniejsze gwiazdy tworzą w przybliżeniu prostokąt, w którego środku widać trzy nieco słabsze, ale jednakowo jasne, ustawione ukosem na jednej linii – to tzw. Pas Oriona. W lewo w dół od niego (na przedłużeniu Pasa Oriona) świeci nisko nad horyzontem biały Syriusz, najjaśniejsza gwiazda Wielkiego Psa i w ogóle najjaśniejsza gwiazda całego nieba. Wreszcie w lewo w górę od Syriusza znajduje się jeszcze jedna bardzo jasna gwiazda, Procyon, najjaśniejsza w Małym Psie. Cała ta trójka, tzn. myśliwy Orion i dwa Psy, poluje na Byka – to gwiazdozbiór położony w prawo w górę od Oriona. Najjaśniej świeci w nim czerwony Aldebaran

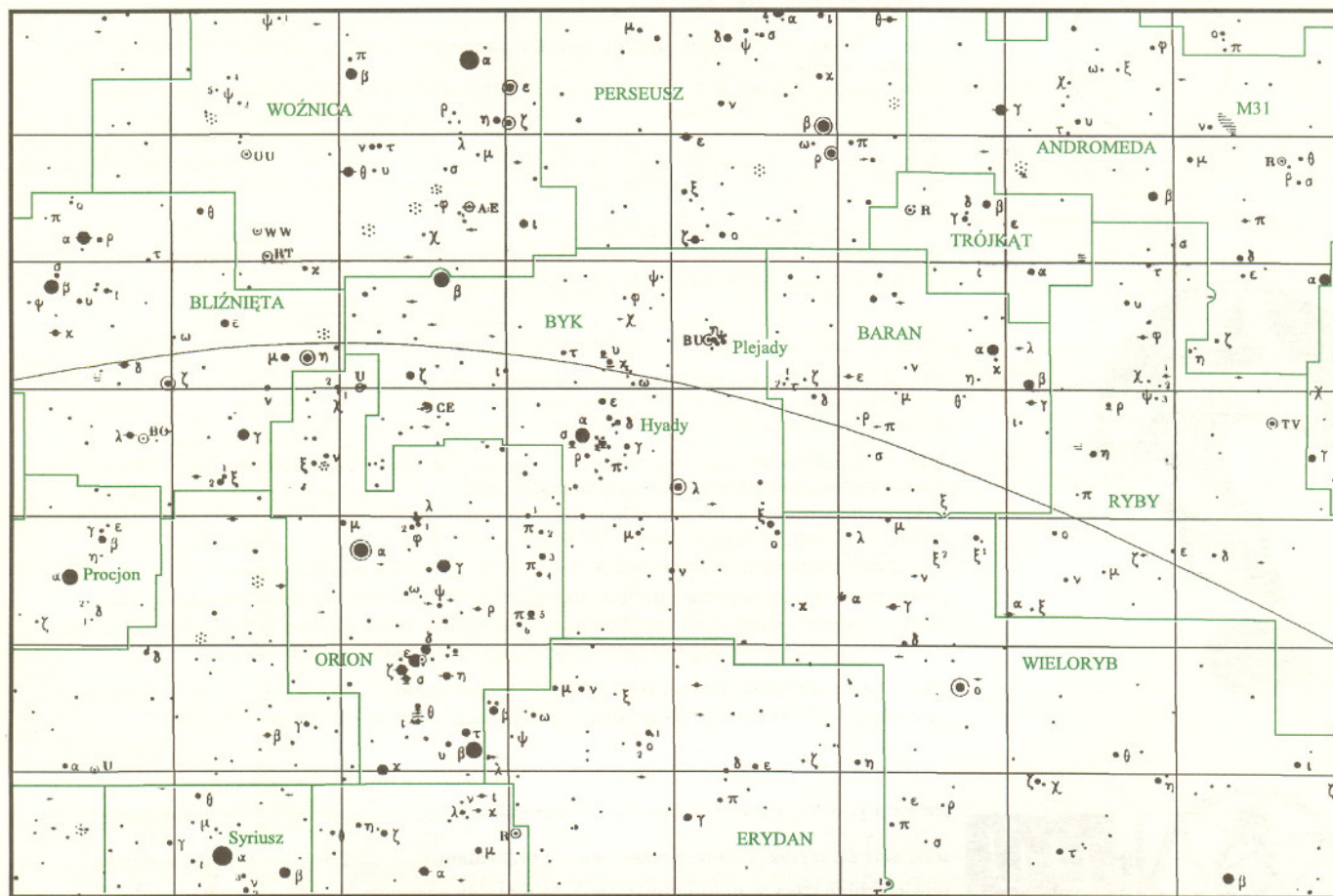


Rozwiązanie zadania F 398. Zarówno przyspieszeniem, jak i hamowaniem rządzi siła tarcia. Jeśli współczynnik tarcia nie jest większy od jedności, to maksymalna siła przyspieszająca i hamująca pojazd jest równa ciężarowi samochodu i maksymalne przyspieszenie, bądź opóźnienie, wynosi $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Z prostych wzorów kinematycznych otrzymujemy:
a) $t = v/g = 2,55 \text{ s}$,
b) $d = v^2/2g = 32 \text{ m}$.



otoczony luźną grupą gwiazd stanowiących gromadę Hyad. A jeszcze dalej od Oriona, formalnie na obszarze Byka, widać wysoko na niebie gołym okiem grupkę 5-7 słabych gwiazdek, która w lornetce staje się gromadką kilkudziesięciu białych gwiazd! To Plejady, gromada otwarta gwiazd tak młoda, że do dziś zanurzona w resztkach gazu, z którego powstała – co widać, oczywiście, dopiero na zdjęciach. Więcej o niej powiemy sobie w przyszłości.

Podążając dalej wzrokiem w kierunku od Oriona przez Hyady i Plejady (mniej więcej drugie tyle od Plejad co od Oriona do Plejad) ujrzymy niezbyt rzucający się w oczy gwiazdozbiór Andromedy (patrz mapka). Słabo widoczna w nim mgiełka to tzw. Wielka Mgławica Andromedy, czyli galaktyka M31 (NGC 224), jedyna galaktyka widoczna gołym okiem na północnej półkuli nieba. Tym samym jest ona najodleglejszym dla polskiego obserwatora obiektem widocznym nieuzbrojonym okiem. Prawdę mówiąc, przez lornetkę nie zobaczymy wiele więcej – samą plamę światła będziemy widzieć wyraźniej, ale nadal bez żadnych szczegółów budowy. Wspominamy jednak o niej, ponieważ warunki jej widoczności z każdym miesiącem będą coraz gorsze, a wręcz nie wypada nie wiedzieć, gdzie leży ta najbliższa sąsiadka naszej Galaktyki (jeśli pominąć Obłoki Magellana z Polski niewidoczne). M31 jest galaktyką spiralną, masą i rozmiarami zbliżoną do naszej, leży w odległości 700 kpc (okrażło 2 miliony lat świetlnych) i tak jak nasza ma kilka satelitów w postaci innych małych galaktyk oraz wykazuje słabą aktywność. Z racji swojej bliskości była jedną z pierwszych galaktyk, w których bezpośrednio udało się zobaczyć poszczególne gwiazdy (Edwin Hubble, 1924), co stało się ostatecznym dowodem, że „mgławice spiralne” są w istocie ogromnymi zgrupowaniami gwiazd.



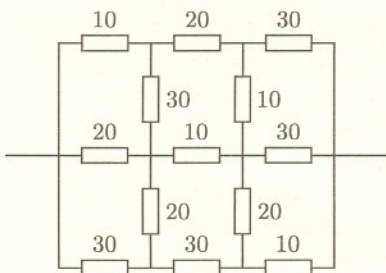
Gwiazdozbiory (nie wszystkie) i najjaśniejsze gwiazdy obszaru nieba omawianego w tekście.

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin drukujemy w numerze lutowym każdego roku.

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 1995

Zadania z fizyki nr 191, 192

Redaguje Jerzy B. BROJAN



Rys. 1

191. Obliczyć przybliżoną wartość oporu zastępczego obwodu przedstawionego na rysunku 1 (liczby oznaczają oporności w omach). Należy podać ocenę dokładności przybliżenia i uzasadnić ją. Rozwiązanie powinno być możliwie dokładne, a jednocześnie jak najmniej pracochłonne. Użycie komputera do obliczeń jest wykluczone.

192. Małe ciało o masie m przymocowano do cienkiej obręczy o masie M i promieniu r . Obręcz postawiono pionowo (rys. 2) i bardzo lekko pchnięto w lewo lub w prawo. Jeśli podczas ruchu obręczy nie występuje poślizg ani straty energii, to jaka musi być wartość stosunku M/m , aby obręcz „podscożyła”, tzn. oderwała się od podłoża?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/1994

Przypominamy treść zadań:

183. Dr Crimeon Falsegrant, skazany za defraudację neutrin słonecznych na 10^{100} lat więzienia, kręcił się w kółko po celi.
– Jakoś muszę się stąd wydostać! – powtarzał. – Z pewnością istnieje możliwość! Na początek zastosować przekształcenie konforemne w 11-wymiarowej przestrzeni spinorowej... albo lepiej nie, można nie powrócić już na oś rzeczywistą... A gdyby tak spróbować przejścia tunelowego? Ta ściana nie wygląda na bardzo grubą, chyba nie więcej niż metr... Trzeba tak rozepchnąć cząsteczki ściany, aby przeszły między nimi cząsteczki mojego ciała, powinno wystarczyć jakieś 20 eV na atom. To jest szansa!

Oceń orientacyjnie szansę dr. Falsegranta.

Wskazówka: W mechanice kwantowej prawdopodobieństwo przejścia tunelowego cząstki o masie m przez barierę potencjału o szerokości d wyraża się wzorem

$$p \approx e^{-2\kappa d},$$

gdzie $\kappa = \sqrt{2mE}/\hbar$, $\hbar = h/2\pi$, h – stała Plancka, E – deficyt energii.

184. Większą ilość rtęci nalano na płaską poziomą powierzchnię nie „zwilżaną” przez rtęć (np. szklaną). Obliczyć grubość warstwy rtęci.

Dane: gęstość rtęci $\rho = 13,6 \text{ g/cm}^3$, napięcie powierzchniowe $\sigma = 0,54 \text{ N/m}$.

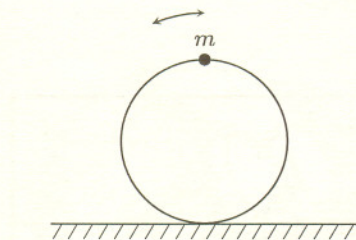
183. Przyjmijmy, że masa więźnia wynosi 75 kg, a średnia masa atomowa jego ciała jest równa 10 (oczywiście, w skład ciała wchodzi lekki wodór, ale także i cięższe pierwiastki). Przy tych założeniach więzień składa się z $7500 \text{ moli} = 7500 \cdot 6 \cdot 10^{23} = 4,5 \cdot 10^{27}$ atomów, a całkowity deficyt energii jest równy $E = 9 \cdot 10^{28} \text{ eV} \approx 1,4 \cdot 10^{10} \text{ J}$. Parametr $\kappa = \sqrt{2mE}/\hbar$ ma zatem wartość $1,4 \cdot 10^{40} \text{ m}^{-1}$, a prawdopodobieństwo przejścia $p \approx \exp(-2\kappa d) \approx \exp(-2,8 \cdot 10^{40}) \approx 10^{-1,2 \cdot 10^{40}}$. Jest to wielkość tak niewyobrażalnie mała, że właściwie nie ma żadnej różnicy, czy więzień dokona jednej tylko próby przejścia tunelowego, czy będzie je powtarzał milion razy na sekundę przez 10^{100} lat.

184. Oznaczmy masę nalanej rtęci przez m , a szukaną grubość warstwy przez d . Pomijając „zaokrąglenie” przy brzegach możemy wyrazić powierzchnię warstwy S wzorem

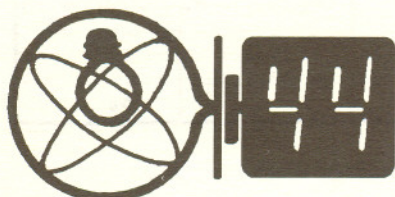
$$S = \frac{m}{\rho d}.$$

Energia grawitacyjna rtęci dana jest wyrażeniem $E_{\text{grav}} = \frac{1}{2}mgd$ (gdyż średnia wysokość wynosi $\frac{1}{2}d$), a energia powierzchniowa – wyrażeniem $E_{\text{pow}} = 2S\sigma$ (uwzględniamy górną i dolną powierzchnię rtęci, a pomijamy brzegi). Minimalną energię całkowitą otrzymamy dla

$$d = 2 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \approx 4,0 \text{ mm}.$$



Rys. 2



Zadania z matematyki nr 293, 294

293. Ciąg wielomianów $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots$ jest określony wzorami

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x,$$

$$nP_{n+1}(x) = (n+1)xP_n(x) - P_{n-1}(x) \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Dowieść, że wszystkie pierwiastki rzeczywiste każdego z wielomianów $P_n(x)$ są liczbami z przedziału $(-1; 1)$.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/1994

Przypominamy treść zadań:

285. W przestrzeni danych jest 10 punktów (w położeniu ogólnym). Łączymy pewne pary punktów odcinkami tak, aby każde dwa spośród rozważanych punktów łączyła dokładnie jedna linia łamana utworzona z narysowanych odcinków. Ile jest różnych układów odcinków spełniających ten warunek?

294. Udowodnić, że wewnątrz dowolnego czworokąta wypukłego $ABCD$ istnieje punkt, którego rzuty na proste AB, BC, CD, DA leżą na jednym okręgu.

Zadanie **294** zaproponował pan Waldemar Pompe z Warszawy.

286. Dla każdej rzeczywistej wartości parametru t wyznaczyć wszystkie trójki liczb rzeczywistych (x, y, z) spełniające układ równań

$$\begin{cases} (x^2 - yz)(x+t) + (y^2 - zx)(y+t) + (z^2 - xy)(z+t) = 0 \\ (t+2)(x+y+z) = 1. \end{cases}$$

285. Oznaczmy przez $f(n)$ liczbę grafów o podanej w zadaniu własności („drzew spójnych”), których zbiorem wierzchołków jest ustalony zbiór n punktów; przyjmujemy $f(1) = 1$. Wybierzmy i ustalmy dwa różne punkty A i B z tego zbioru.

Niech będzie dany graf, o jakim mowa. Na jedynej drodze wiodącej z A do B oznaczmy przez X ostatni napotkany wierzchołek przed B (może się zdarzyć, że $X = A$). Pomalujmy krawędź XB na żółto. Wszystkie wierzchołki osiągalne z punktu A drogami nie przechodzącymi przez B , a także wszystkie krawędzie na tych drogach, malujemy na czerwono. Pozostałe wierzchołki i krawędzie malujemy na zielono; w szczególności punkty A i X otrzymują kolor czerwony, a punkt B – zielony. Niech k będzie liczbą wierzchołków czerwonych ($1 \leq k \leq n-1$).

Zauważmy, że dowolny dopuszczalny graf jest wyznaczony jednoznacznie przez:

- Wybór liczby $k \in \{1, \dots, n-1\}$.
- Wybór zbioru $k-1$ punktów (spośród $n-2$ punktów różnych od A i B), które wraz z punktem A zostaną pomalowane na czerwono (a pozostałe punkty – na zielono).
- Wybór jednego z k czerwonych punktów – punktu X – i połączenie go żółtą krawędzią z B .
- Połączenie pewnych czerwonych punktów czerwonymi krawędziami tak, aby powstało czerwone spójne drzewo ($f(k)$ możliwości).
- Połączenie pewnych zielonych punktów zielonymi krawędziami tak, aby powstało zielone spójne drzewo ($f(n-k)$ możliwości).

Wynika stąd wzór rekurencyjny

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} kf(k)f(n-k).$$

Znając wartość $f(1) = 1$ wyznaczamy: $f(2) = 1, f(3) = 3, f(4) = 16, f(5) = 125, f(6) = 1296, f(7) = 16807, f(8) = 262144, f(9) = 4782969$, i wreszcie $f(10) = 100000000$ (sto milionów – jest to szukana liczba).

[Uwaga. Widzimy, że $f(n) = n^{n-2}$ dla $n \leq 10$. Ta równość zachodzi dla wszystkich n . Można ją uzyskać stosując zaawansowane metody teorii grafów lub też dowodząc, że funkcja $f(n) = n^{n-2}$ spełnia znaleziony powyżej wzór rekurencyjny; patrz: J. Riordan, *Combinatorial Identities*, New York 1968, rozdział 1.5, wzór (13a), z podstawieniem $x=y=1$.]

286. Skorzystamy z tożsamości

$$(1) \quad x^3 + y^3 + z^3 = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy) + 3xyz.$$

Dowód: oznaczając sumę $x+y+z$ przez s mamy

$$\begin{aligned} s^3 &= x^3 + y^3 + z^3 + 3(y^2z + yz^2) + 3(z^2x + zx^2) + 3(x^2y + xy^2) + 6xyz = \\ &= x^3 + y^3 + z^3 + 3yz(s-x) + 3zx(s-y) + 3xy(s-z) + 6xyz = \\ &= x^3 + y^3 + z^3 + 3s(yz + zx + xy) - 3xyz, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{skąd} \quad x^3 + y^3 + z^3 &= s^3 - 3s(yz + zx + xy) + 3xyz = \\ &= s(s^2 - 3yz - 3zx - 3xy) + 3xyz = s(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy) + 3xyz. \end{aligned}$$

Pierwsze równanie danego w zadaniu układu

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + t(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy) = 0$$

możemy dzięki tożsamości (1) przepisać w postaci

$$(2) \quad (x+y+z+t)(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy) = 0,$$

drugie zaś – w postaci

$$(3) \quad x+y+z = \frac{1}{t+2}.$$

Drugi czynnik iloczynu (2) jest zerem, tylko gdy liczby x, y, z są równe; aby równanie (3) było spełnione, ta wspólna wartość musi być równa $1/(3t+6)$. Natomiast jeśli układ (2), (3) ma rozwiązanie (x, y, z) , w którym nie wszystkie trzy liczby są równe, wówczas pierwszy czynnik iloczynu (2) musi być zerem, co w połączeniu z równaniem (3) daje równość $-t = 1/(t+2)$, słuszną tylko dla $t = -1$. Każda trójka liczb x, y, z o sumie równej 1 jest wtedy rozwiązaniem.

Reasumując:

- Jeżeli $t = -2$, to układ nie ma rozwiązań.
- Jeżeli $t = -1$, to rozwiązaniem jest każda trójka (x, y, z) taka, że $x+y+z = 1$.
- Jeżeli $t \neq -1, t \neq -2$, to układ ma jedyne rozwiązanie $x = y = z = 1/(3t+6)$.

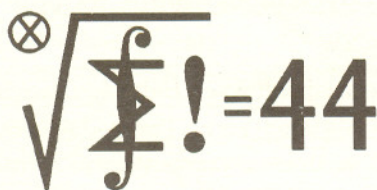
Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 279 (WT=1,93) i 280 (WT=2,20)
z numeru 4/1994

Paweł Lizak – Puławy 45,40
Waldemar Pompe – Warszawa 42,44
Lesław Skrzypek – Rzeszów 40,80
Krzysztof Jedziniak – Katowice 39,72

Pan Lizak: numer 76 w matematycznym
Klubie 44.



Międzywydziałowe Indywidualne Studia Matematyczno-Przyrodnicze (MIS MaP) w Uniwersytecie Warszawskim

Rekrutacja w roku 1995

Już trzeci rok w Uniwersytecie Warszawskim prowadzona jest jedyna w Polsce forma studiów pod nazwą Międzywydziałowe Indywidualne Studia Matematyczno-Przyrodnicze (MIS MaP). Od 1992 roku przyjęto na MIS MaP łącznie około 200 osób. W czerwcu 1995 planowane jest przyjęcie około 100 osób.

Udział w MIS MaP bierze siedem wydziałów Uniwersytetu: Wydział Biologii, Wydział Chemii, Wydział Fizyki, Wydział Geografii i Studiów Regionalnych, Wydział Geologii, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki oraz Wydział Psychologii.

Międzywydziałowe Indywidualne Studia są normalnymi studiami dziennymi, nie przewiduje się prowadzenia studiów w trybie zaocznym ani wieczorowym. Studenci MIS MaP są, formalnie rzecz biorąc, studentami wszystkich wymienionych wydziałów jednocześnie. Każdego ze studentów obejmuje opieką profesor lub adiunkt reprezentujący kierunek najbliższy jego zainteresowaniom. Studenci wraz ze swoimi opiekunami ustalają własne, w pełni indywidualne programy studiów złożone przede wszystkim z przedmiotów prowadzonych na wymienionych wyżej wydziałach oraz pewnych przedmiotów uzupełniających z innych wydziałów Uniwersytetu. Nie ma obowiązku wybierania zajęć ze wszystkich wydziałów tworzących MIS MaP. Do najbardziej popularnych należą, jak dotąd, programy matematyczno-fizyczne, biologiczno-chemiczne oraz biologiczno-psychologiczne. Studia indywidualne są zarazem ciekawsze i trudniejsze, gdyż wymagają od studentów większej odpowiedzialności. Można je zalecać zarówno w przypadkach trudności z podjęciem decyzji wyboru kierunku studiów uniwersyteckich, jak i w przypadku dobrze sprezykowanych zainteresowań.

Kwestia dyplomów magisterskich studentów MIS MaP pozostaje otwarta. Należy sądzić, że zdecydowana większość będzie dążyć do uzyskania dyplomów konkretnych specjalności istniejących na UW. W szczególnych przypadkach mogą, oczywiście, pojawić się konkretne propozycje magisterskich dyplomów interdyscyplinarnych. Część spośród studentów MIS MaP łączy studia w UW ze studiami w Akademii Medycznej, jest to poważne obciążenie czasowe i trudno wyobrazić sobie, aby wszyscy zdołali zdobyć dyplomy lekarskie i magisterskie.

W celu stworzenia studentom jak najszerszych możliwości wyboru Senat UW podjął w czerwcu 1994 roku decyzję o wprowadzeniu po trzech latach studiów nowego dyplomu Licencjata MIS MaP. Dyplom ten będzie dyplomem pośrednim dla osób dążących do tytułu magistra i pozostających na MIS MaP lub przechodzących na jeden z Wydziałów tworzących MIS MaP. Będzie to również dyplom kończący studia uniwersyteckie, na przykład dla osób studiujących na innych uczelniach.

Prawo przystąpienia do egzaminu wstępnego ma każdy absolwent szkoły średniej posiadający świadectwo maturalne. Ze względu na konkursowy charakter wcześniej organizowanego egzaminu należy również składać dokumenty na inne Wydziały lub Uczelnie. Oceny na świadectwie maturalnym nie będą brane pod uwagę przy kwalifikacji na MIS MaP.

Egzamin (wyłącznie pisemny) odbędzie się 20 czerwca 1995 roku i obejmie dwa wybrane spośród pięciu testów z matematyki, fizyki, chemii, biologii i geografii. Testy będą zawierać po 50 pytań, każde z czterema odpowiedziami. W celu dopuszczenia do egzaminu należy złożyć lub nadesłać do Sekretariatu MIS MaP dokumenty w terminie do 1 czerwca 1995 roku. Laureaci dowolnej olimpiady szczebla centralnego przyjmowani będą bez egzaminu, finaliści olimpiad będą zwolnieni z egzaminu odpowiadającego treści olimpiady i otrzymają z niego ocenę maksymalną. Ostateczne wyniki rekrutacji zostaną podane do 23 czerwca 1995 roku. Limit miejsc wyniesie około 100. Pozytywny wynik egzaminu uprawnia do przyjęcia bez dalszych egzaminów na Wydział Chemii UW oraz, w przypadku pojawienia się wolnych miejsc, może umożliwić przyjęcie na Międzywydziałowe Studia Ochrony Środowiska. Obok listy osób przyjętych, zostanie stworzona lista rezerwowa. W przypadku rezygnacji osób z pierwszej listy Komisja Rekrutacyjna będzie proponować podjęcie studiów osobom znajdującym się na liście rezerwowej.

Osoby zainteresowane dalszymi informacjami o MIS MaP mogą począwszy od stycznia 1995 roku zakupić INFORMATOR zawierający między innymi wszystkie pytania testowe z lat 1992-94 po zgłoszeniu listownym, telefonicznym lub osobistym do Sekretariatu MIS MaP, ul. Pasteura 7, 02-093 Warszawa, we wtorki w godz. 9-12 oraz w czwartki w godz. 12-15, telefon (2) 658-22-52 (czynna całą dobę sekretarka automatyczna). Osoby zamieszkałe poza Warszawą mogą zamówić wysyłkę za zaliczeniem pocztowym.

Gorąco zachęcam również wszystkich do wzięcia udziału w konkursie (informacje na okładce) poświęconym opracowaniu oryginalnych pytań testowych przeznaczonych na egzaminy wstępne na MIS MaP.

Kierownik Międzywydziałowych Indywidualnych
Studiów Matematyczno-Przyrodniczych
w Uniwersytecie Warszawskim
prof. dr hab. Andrzej HENNEL

Przypadek Brouwera

Ucząc się matematyki lub ją studiując poznajemy rozmaite twierdzenia. Niektóre z nich noszą nazwy, przy innych umieszcza się nazwiska autorów. Mamy więc np. twierdzenie Weierstrassa, Darboux albo lemat Nakayamy. Czy zastanawialiśmy się kiedyś, kim byli ludzie, którzy wymyślili bądź udowodnili te czy inne twierdzenia? W topologii znane jest twierdzenie Brouwera o punkcie stałym. Często, oprócz podkreślania znaczenia, przy twierdzeniu tym można znaleźć komentarz, iż jest to przykład tzw. trudnego twierdzenia topologii, w dowodach których specjalizował się Brouwer. I rzeczywiście, Luitzen Egbertus Jan Brouwer rozstrzygnął szereg ważnych problemów nurtujących młodą, dopiero rozwijającą się dziedzinę matematyki. Były to hipotezy dość naturalne, które jakoś nie chciały poddać się specjalistom, na przykład: czy przestrzenie \mathbf{R}^n i \mathbf{R}^m są rzeczywiście różne z punktu widzenia topologii dla $m \neq n$? czy iniekcja ciągła, określona na otwartym podzbiórze \mathbf{R}^n i o wartościach w \mathbf{R}^n , musi już być homeomorfizmem na obraz?

Brouwer odpowiedział pozytywnie na oba pytania. Podał też precyzyjny (i wreszcie bezbłędny) dowód twierdzenia Jordana o rozciananiu oraz jego uogólnienia. Wskazał na możliwość wykorzystania metod teorii mnogości dla celów geometrii i analizy. Tym samym stworzył podstawy topologii przestrzeni euklidesowych. Dowody twierdzeń Brouwera wykorzystują bardzo zaawansowane techniki, choć są precyzyjne i przejrzyste. Ścisłość rozumowania prerażała współczesnych Brouwerowi, stała się jednak wzorem w dalszych badaniach. Zdziawiający jest fakt, iż wszystkie swoje ważne topologiczne rezultaty Brouwer uzyskał praktycznie w ciągu czterech lat pomiędzy rokiem 1909 a 1912. Później nie zerwał z tą dziedziną matematyki, jednak znaczących faktów już nie publikował.

Nie znaczy to, że Brouwer zajmował się matematyką tylko przez kilka lat. Faktycznie, na początku swej drogi naukowej zastanawiał się, czy nie zostać pianistą. Lecz matematyka zwyciężyła i Brouwer zainteresował się... podstawami matematyki. To właśnie tej tematyki dotyczył jego doktorat (1907) i do niej powrócił, gdy osiągnął sukcesy w topologii. Brouwer jest najważniejszym przedstawicielem intuicjonizmu, kierunku filozoficznego odnoszącego się do podstaw matematyki. Intuicjoniści poddawali ostrej krytyce dowody niekonstruktywne (egzystencjalne), które wskazują istnienie jakichś obiektów bez podania sposobów ich konstrukcji.

Matematycy i inni

Do pustej windy wsiadły na parterze cztery osoby i pojechały na pierwsze piętro. Na piętrze wysiadło z windy pięć osób; zaskakujące to zjawisko obserwowali matematyk, fizyk i biolog.

Biolog: – *Klasyczny przykład naturalnej reprodukcji.*

Fizyk: – *Nic dziwnego, po prostu błąd pomiaru.*

Matematyk: – *Jeżeli ktoś teraz wejdzie do windy, to nikogo tam nie będzie.*

Wręczamy fizykowi napelniony zimną wodą czajnik i prosimy, by zrobił herbatę. Fizyk stawia czajnik na kuchence, gotuje wodę i robi herbatę. Drugi pełny czajnik dajemy matematykowi i prosimy o to samo; reakcja jest identyczna.

Po pewnym czasie prosimy fizyka o zrobienie herbaty, dając mu tym razem czajnik pusty; fizyk nalewa wodę, gotuje ją i zaparza herbatę. Gdy jednak prosimy o to samo matematyka, ten napelni czajnik i zamiast gotować wodę powie, że teraz zadanie sprowadza się do poprzednio rozwiązanego problemu...

Inna wersja mówi, że najpierw delikwentom wręczono czajniki puste, ci nalali wodę i zrobili herbatę, a potem dano im czajniki pełne – i wtedy matematyk sprowadził problem do poprzedniego, wylewając wodę.

Krytykowano zbyt swobodne posługiwanie się pojęciem nieskończoności oraz zasadę wyłączonośrodku (tj. prawo postaci $p \vee \neg p$, o którym popularnie się mówi „trzeciego wyjścia nie ma”). Brouwer sugerował, że całą matematykę należy zbudować od nowa wyrzucając z niej wszystkie dowody nie wprost. Jego artykuły poświęcone podstawom matematyki i intuicjonizmowi pisane są z taką samą bezwzględną ścisłością i wewnętrzną logiką jak artykuły topologiczne.

Pomysły Brouwera nie spotkały się ze zbyt przychylnym przyjęciem u współczesnych. Lecz w drugiej połowie XX wieku zainteresowano się nimi na nowo. Niektórzy próbują wyjaśnić „fenomen topologiczny” Brouwera tym, że, być może, próbował on przetestować swoje intuicjonistyczne pomysły właśnie na topologii – miał to być zakrojony na szeroką skalę eksperyment. Trudno stwierdzić, czy ta, jednak dość śmiała, hipoteza może być prawdziwa. Faktem jest natomiast, iż po roku 1920 Brouwer w zasadzie nie zajmował się topologią, choć uważany był w świecie za jeden z największych autorytetów w tej dziedzinie.

Zdzisław POGODA

Luitzen Egbertus Jan Brouwer urodził się 27 lutego 1881 roku w Overschie w Holandii. Matematykę studiował na uniwersytecie w Amsterdamie, gdzie w 1907 roku uzyskał doktorat, a od 1912 roku był profesorem. Był członkiem wielu towarzystw naukowych. Otrzymał doktoraty honorowe uniwersytetów w Cambridge i Oslo. Zginął w wypadku samochodowym 2 grudnia 1966 roku.

Oj, każdy Brouwerowi winien bić pokłony,
Że wreszcie zlikwidował środek wyłączony.

Stworzył nowe możliwości
Współczesnym i potomności.

z „Hymnu Matematyków”
(pisaliśmy o nim w poprzednim *EPSILONIE*)