



SPIS TREŚCI NUMERU 12(247)

Halo, halo...! <i>Krzysztof Rejmer</i>	str. 1
Wybrane elementy zjawiska halo	str. 4
Małe halo	str. 6
Duże halo	str. 7
Słońca poboczne	str. 7
Punkty osobliwe odwzorowań gładkich	str. 8
Zbiory osobliwe, kaustyki i zjawiska halo	str. 10
Zadania	str. 13
Patrz w niebo	str. 13
Klub 44	str. 14
Kącik olimpijski	str. 16
Epsilon	str. 17

W następnym numerze:

Ciecze ferromagnetyczne

Okładkę wykonał
Bernard BADZIOCH

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.

Komitet Redakcyjny:
Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichocki
Roman Duda
Jan A. Gaj
Tomasz Hofmökł
Marta Kicińska-Habior
– przewodnicząca
Krzysztof Maślanka
Andrzej Mąkowski
– wiceprzewodniczący
Andrzej Pelczar
Zbigniew Plochocki
Zdzisław Pogoda
Michał Różyńska
Konrad Rudnicki
Zbigniew Semadeni
Grzegorz Sitariski
Mieczysław Subotowicz
Andrzej Szymacha
Andrzej Woszczyk
Wacław Zawadowski

Redaguje kolegium w składzie:
Krzysztof Biesaga
Piotr Hajlasz
Jan Kalinowski – z-ca red. nac.
Krystyna Kordos – sekr. red.
Marek Kordos – red. nac.
Tomasz Kwast
Krzysztof Rejmer
Paweł Strzelecki
Joanna Udalska

Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7
02-678 Warszawa
tel. 43-02-43 wewn. 21
HAJLASZ@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w Zakładach Graficznych
w Warszawie, ul. Srebrna 16
Skład systemem TeX wykonała Redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY w AMOS-ie

Od stycznia 1993 r. prenumeratę „Deltę” prowadzi również firma AMOS, 01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21). Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 1995 roku wynosi 15 000,- zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru wynosi w 1995 r. 30 000,- zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! AMOS dostarcza „Deltę” pod wskazany adres nie pobierając dodatkowej opłaty. Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136

WARUNKI PRENUMERATY w RUCH-u

- Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
- Cena prenumeraty na II kwartał 1995 r. wynosi 45 000,- zł.
- Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
- Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
 - na teren kraju
 - jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób,
 - na zagranicę
 - „Ruch” S.A. Oddział Warszawa, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – **dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty**, z wyjątkiem zlecenia dostawy pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni pokrywa prenumerator.
- Terminy przyjmowania prenumeraty:
 - na kraj i zagranicę – do 20 XI na I kwartał roku następnego
do 20 II na II kwartał
do 20 V na III kwartał
do 20 VIII na IV kwartał.

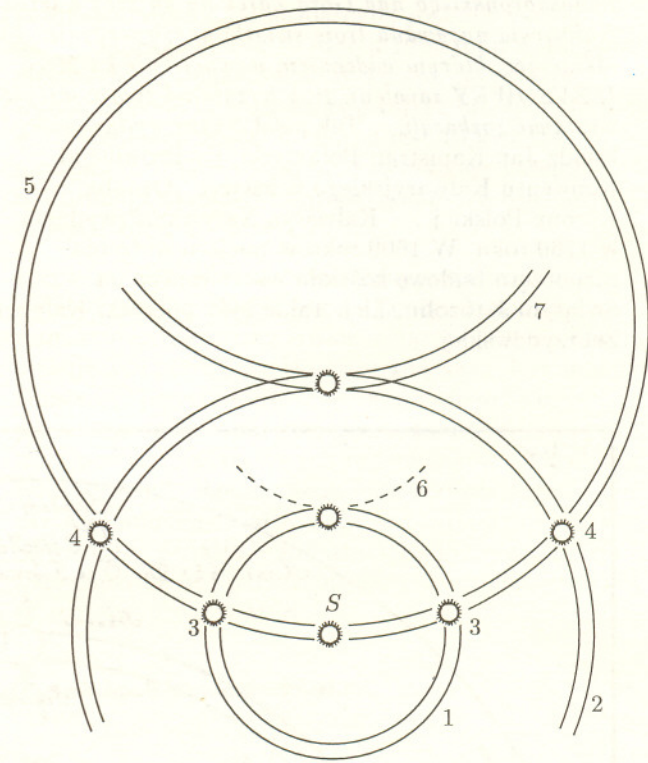
Cena 1 egzemplarza 10 000,- zł

Halo, halo... !

Krzysztof REJMER

W optyce atmosferycznej pojęcie „halo” oznacza cały zespół zjawisk wywołanych załamaniem, rozszczepieniem i odbiciem światła przez kryształki lodu znajdujące się w chmurach (najczęściej *cirrostratus*). Halo ma postać barwnych kręgów, łuków, pionowych słupów świetlnych i pojedynczych, świecących punktów. Takie złożone postacie halo są bardzo rzadkie, najczęściej spotykane jest tak zwane małe halo, mające postać barwnych kręgów otaczających Słońce lub Księżyc w odległości kątowej około 22° . Niektóre statystyki szacują liczbę dni, w których pojawia się małe halo, na 200 w ciągu roku. Jest to zapewne liczba zawyżona. Według Edwarda Stenza w Polsce obserwuje się je średnio kilkadziesiąt razy na rok. Jest więc małe halo zjawiskiem powszechnym, a mimo to nie tak dobrze znanym jak, na przykład, tęcza, którą obserwuje się w naszym kraju zaledwie kilka razy na rok. Prawdopodobnie jest tak dlatego, że obserwacja małego halo wymaga patrzenia w stronę Słońca, podczas gdy tęczę obserwujemy odwróceniem do naszej Gwiazdy Diennej plecami. Halo księżycowe jest z oczywistych względów także trudne do zauważenia. Duże halo wygląda podobnie jak małe, jego barwne kręgi mają jednak większe rozmiary. Znajdują się one w odległości kątowej 46° od Słońca. Jest ono obserwowane z częstotliwością podobną do częstotliwości pojawiania się tęczy.

Zjawiska halo znane są od dawna. Sama nazwa wywodzi się z języka greckiego i oznacza okrągły kształt. Źródłosłowem jest archaiczny termin $\alpha\lambda\omega$ pierwotnie oznaczający klepisko. W starożytności i w średniowieczu zjawiskom halo przypisywano sens profetyczny. Gdy po śmierci Juliusza Cezara w 44 roku przed naszą erą Oktawian wkraczał do Rzymu, dookoła Słońca pokazał się wielki krąg świetlny (a więc prawdopodobnie duże halo) o krwistych barwach, który uważano za „zapowiedź bogów o czekających Oktawiana niepokojach”. W średniowieczu na ludzką wyobraźnię szczególnie silnie oddziaływało zjawisko słońc pobocznych, czyli dwóch jasnych plam świetlnych po obu stronach Słońca. Jeśli towarzyszyły im pionowe słupy świetlne i koło przysłoneczne przechodzące przez Słońce i słońca poboczne, zjawisko to przypominało trzy krzyże gorejące blaskiem. Automatycznie nasuwało to interpretację religijną; tę postać złożonego halo nazywano „krzyżami Golgoty”. Znamiennym wydarzeniem było pokazanie się „krzyży Golgoty” 21 kwietnia 1551 roku podczas toczącej się w Niemczech wojny religijnej. Oblegający Magdeburg cesarz Karol V ujrzał na niebie „trzy Słońca i trzy łuki tęczę”. Najwyraźniej zinterpretowano je jako znak Nieba, gdyż wojsko odstąpiło od oblężenia. Rzadkie zjawisko atmosferyczne ocaliło miasto.



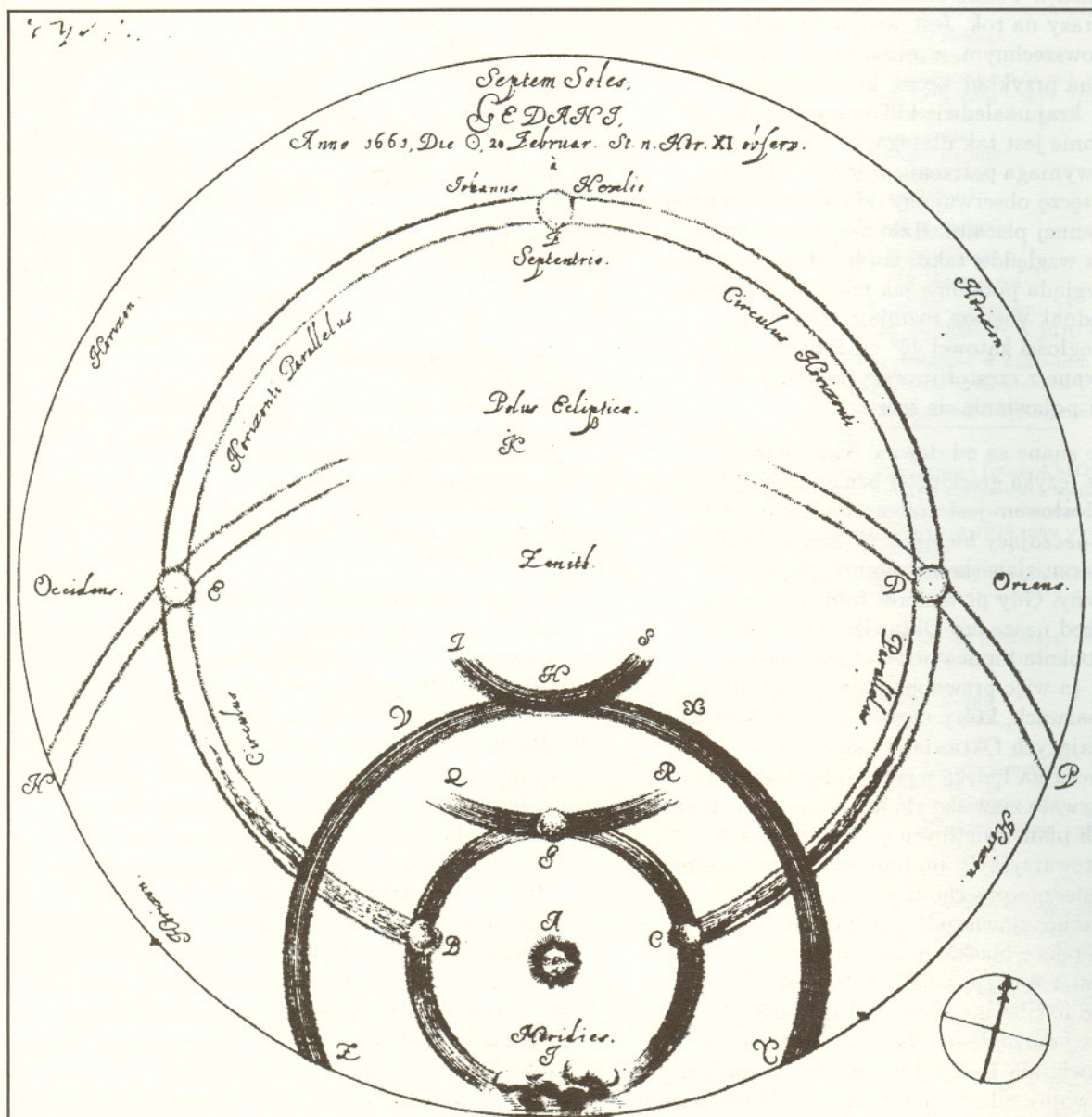
Rys. 1. Zjawisko rzymskie (1630 r.);

- S – Słońce,
- 1 – małe halo (22°),
- 2 – duże halo (46°),
- 3 – słońca poboczne małego halo,
- 4 – słońca poboczne dużego halo,
- 5 – krąg przysłoneczny,
- 6 – górny łuk styczny małego halo,
- 7 – łuk zenitalny.

Średniowieczne kroniki rejestrują wiele zjawisk halo. Jan Długosz podaje, że 7 września 1169 roku obserwowano w Polsce halo słoneczne, a w ciągu następných lat pokazywały się trzy księżyce. Obecnie uważa się, że wzmianka ta jest zapożyczeniem z kroniki Rolewincka, gdyż brak jej potwierdzenia w innych polskich źródłach. Podobnie brak jest potwierdzenia informacji o pojawieniu się nad Polską halo i trzech księżyców zimą 1314 roku. Jest ona prawdopodobnie zapożyczona z dzieła „Historia ecclesiastica” Ptolemeusza z Lukki. Natomiast dwa niezależne źródła: Rocznik Małopolski i Rocznik Traski podają, że 19 stycznia 1271 roku zaraz po wschodzie Słońca pojawiły się słońca poboczne obserwowane na terenie Małopolski. Podczas krakowskich studiów Mikołaja Kopernika, w grudniu 1491 roku w samo południe obserwowano trzy słońca w Krakowie, co zapewne wywołało tym większe podniecenie, że 8 maja tego roku obserwowano zaćmienie Słońca. Pod koniec XVI stulecia przebywający w Lanckoronie wojewoda krakowski (przyszły rokoszanin) Mikołaj Zebrzydowski ujrzał

na szczycie góry Żar „krzyże Golgoty”, a było to wieczorem w Wielki Czwartek. ... *Gdy álbowiem Iáśnie Wielmożni Woyewodowie Mikolaj y Dorotá ZEBRZYDOWSCY zabawiali się pod ten czas rozmyślaniem Męki Pańskiej, uyrzeli z okien zamku Landskorońskiego nad Gorą Zárek ná on czas á teraz Kalwaryia nazywana troie swiatlá nadzwyczajnie iáśnieiące, którym widzeniem wewnętrznie ku Męce IEZVSOWEY zápaleni, trzy Krzyże ná tymże mieyscu wystáwić rozkázali. ...* Tak pisał o tym wydarzeniu ksiądz Jan Kapistran Połaniecki, Ex-Prowincjał Konwentu Kalwaryjskiego w książce „Ozdoba Korony Polskiej ... Kalwarya Nazywana” wydanej w 1760 roku. W 1600 roku w miejscu widzenia rozpoczęto budowę kościoła wzorowanego na Świątyni Jerozolimskiej. Takie były początki Kalwarii Zebrzydowskiej.

Rok 1630 zapoczątkował nowy sposób obserwacji zjawisk halo. Jezuita Krzysztof Scheiner podczas obserwacji tak zwanego zjawiska rzymskiego jako pierwszy zmierzył rozmiary dużego halo, otrzymując nieco zawyżoną wartość $47^{\circ}40'$. W tym samym roku złożone halo zaobserwowano także w Norymberdze. Na marginesie warto wspomnieć, że Scheiner toczył długi i niezbyt elegancki spór z Galileuszem o pierwszeństwo odkrycia plam na Słońcu. Jako pierwszy wykonał lunetę według pomysłu Keplera, a także przyczynił się do zbudowania przez Karola Malaperta, z pochodzenia Belga, wykładającego w kolegium jezuitów w Kaliszu, nowego typu zawieszenia teleskopu – montażu paralaktycznego. Był współzałożycielem i przez 28 lat rektorem kolegium jezuitów w Nysie na Śląsku.



Rys. 2. Siedem słońc Gdańska (1661 r.) – rysunek Jana Heweliusza. Oprócz elementów widocznych w zjawisku rzymskim rysunek pokazuje: D, E – słońca poboczne 90° (tzw. słońca poboczne Heweliusza) oraz łuki ukośne tych słońc pobocznych – HE i DP. Są to rzadko występujące elementy halo. Z – przeciwśłońce.

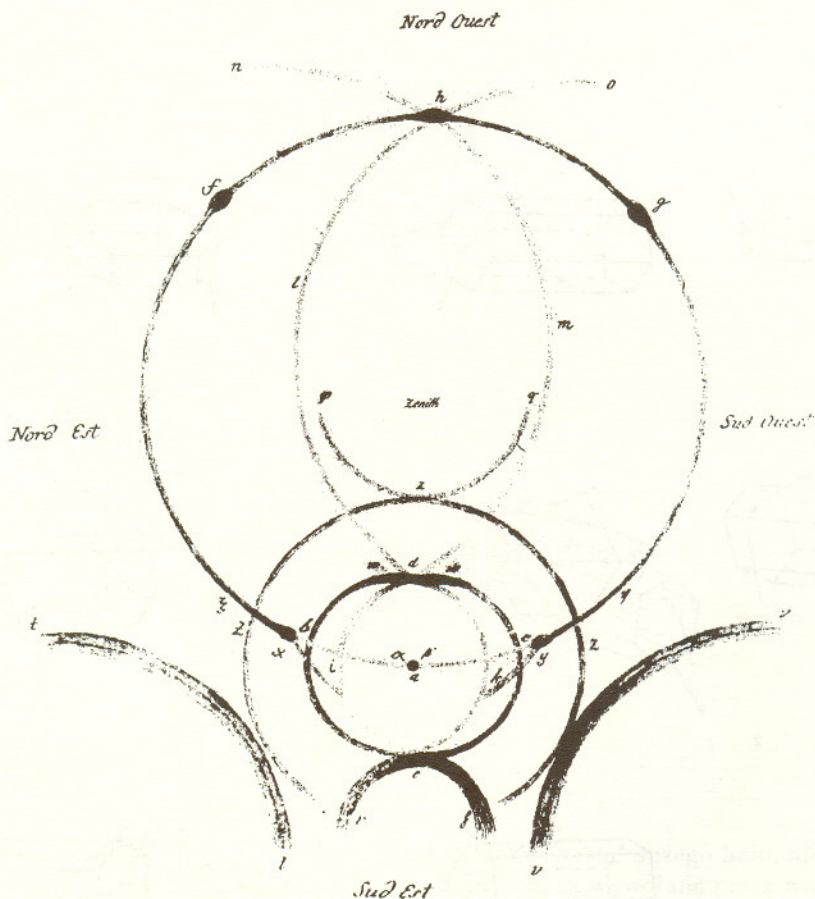
Ponownego pomiaru kątowych rozmiarów dużego halo dokonał 20 lutego 1661 roku w Gdańsku Jan Heweliusz, otrzymując wartość około 45° , nieco zaniżoną. Zjawisko gdańskie było bardzo rozbudowane, pojawiły się, między innymi, rzadko oglądane słońca poboczne znajdujące się w odległości 90° od Słońca. Tę formę halo nazwano później imieniem Heweliusza. Gdański astronom sporządził rysunek zjawiska zatytułowany „Septem soles Gedani” (Siedem słońc Gdańska), który przesłał na polski dwór jeszcze przed publikacją prosząc przy tym Des Noyersa, swego przyjaciela i pośrednika w kontaktach z dworem, a zarazem sekretarza królowej, aby pokazał go królewskiej parze – Ludwice Marii Gonzadze i Janowi Kazimierzowi, zastrzegając jednocześnie staranne baczenie, by jego praca nie wpadła w niepowołane ręce i nie została opublikowana pod cudzym nazwiskiem. W rok później, na zlecenie Jana Kazimierza, przesłano Heweliuszowi rysunek podobnego zjawiska oglądanego we Lwowie.

Do najśłynniejszych zjawisk halo należy tak zwane halo petersburskie, opisane przez Tobiasza Lowitza, które 18 lipca 1794 roku przez pięć godzin podziwiano nad Petersburgiem. Po raz pierwszy zostały wtedy opisane tak zwane łuki Lowitza, będące jedną z najrzadszych postaci halo. Jeszcze rzadszym

zjawiskiem jest „łuk Parry’ego” opisany dokładnie w 1820 roku, choć obserwowano go już w 1630 roku w Norymberdze. Do wybuchu drugiej wojny światowej łuk Parry’ego widziano zaledwie kilkakrotnie. Złożone postacie halo często można obserwować w okolicach podbiegunowych. Do najbardziej rozbudowanych należy zaliczyć halo z 10 marca 1920 roku w Finlandii opisane przez Johanssona. W Polsce, po ostatniej wojnie złożone halo zaobserwował 22 lutego 1948 roku w Dęblinie Jan Kanarek, natomiast 10 kwietnia następnego roku złożone halo księżycowe zarejestrował w Poznaniu dyrektor tamtejszego obserwatorium, profesor Józef Witkowski.

Pierwszą, choć błędną teorię halo podał w swej „Meteorologicie” Arystoteles. Dopiero Mariotte (ten sam, którego nazwisko trwale związane jest z prawem opisującym przemianę izotermiczną gazu doskonałego) tłumaczył powstawanie halo załamaniem światła przez kryształki lodu, które, jego zdaniem, miały mieć postać miniaturyowych pryzmaczków o kącie łamiącym 60° . Rzeczywiście halo wywołane jest przez załamanie światła, odbicie i całkowite odbicie wewnętrzne światła w kryształkach lodu; geometria tego zjawiska jest jednak bardziej skomplikowana niż to sobie wyobrażał Mariotte.

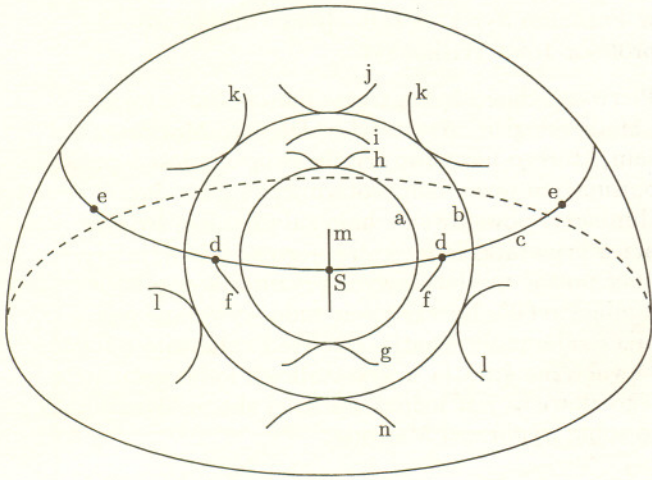
Nova Acta Acad. Imp. Sc. Petropol. Tom VIII, Tab. VII.



Rys. 3. Halo petersburskie (1794 r.). Charakterystycznymi rzadkimi elementami halo, przedstawionymi na rysunku, są łuki Lowitza (i,k) oraz słońca poboczne 120° (f,g).

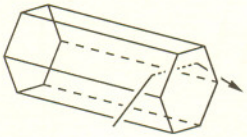
Wybrane elementy

- S – Słońce
- a – małe halo (22°)
- b – duże halo (46°)
- c – krąg przysłoneczny (wywołany odbiciem od ścianek kryształków)
- d – słońce poboczne 22° (widoczne, gdy Słońce znajdzie się na wysokości mniejszej niż 61°)
- e – słońce poboczne 46°
- f – łuki Lowitza (zjawisko rzadkie)
- g – łuk styczny dolny małego halo
- h – łuk styczny górny dużego halo (gdy Słońce znajdzie się na wysokości większej niż 40° , g oraz h łączą się tworząc „halo opisane”)
- i – łuk Parry’ego (zjawisko bardzo rzadkie, od 1630 roku do 1930 roku zarejestrowane tylko 7 razy)
- j – górny łuk styczny dużego halo (łuk zenitalny), gdy Słońce znajduje się na wysokości mniejszej niż 32°
- k – łuki styczne górno-boczne dużego halo (tak jak j)
- l – łuki styczne dolno-boczne dużego halo (dla wszystkich wysokości Słońca)
- m – słup świetlny Słońca (wywołany odbiciem na ściankach kryształków)
- n – dolny łuk styczny dużego halo (łuk horyzontalny), gdy Słońce jest na wysokości większej niż 58°

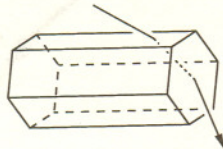


po słonecznej stronie sfery niebieskiej

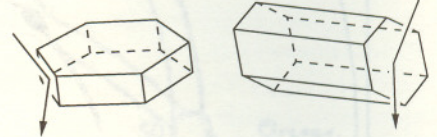
– to, co widać oraz to,



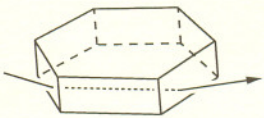
a



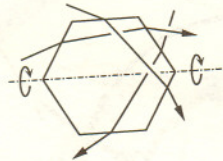
b



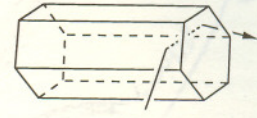
c



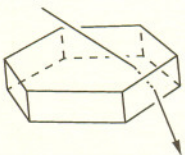
d



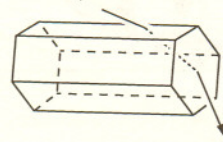
f



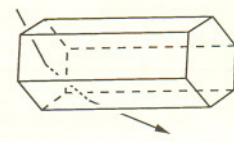
h



j



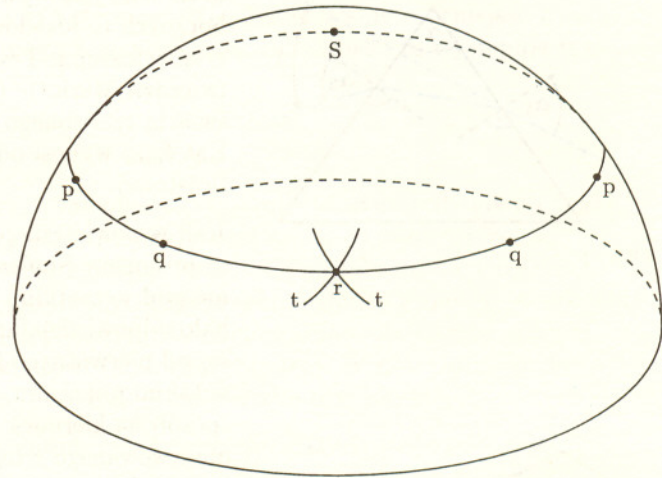
k



l

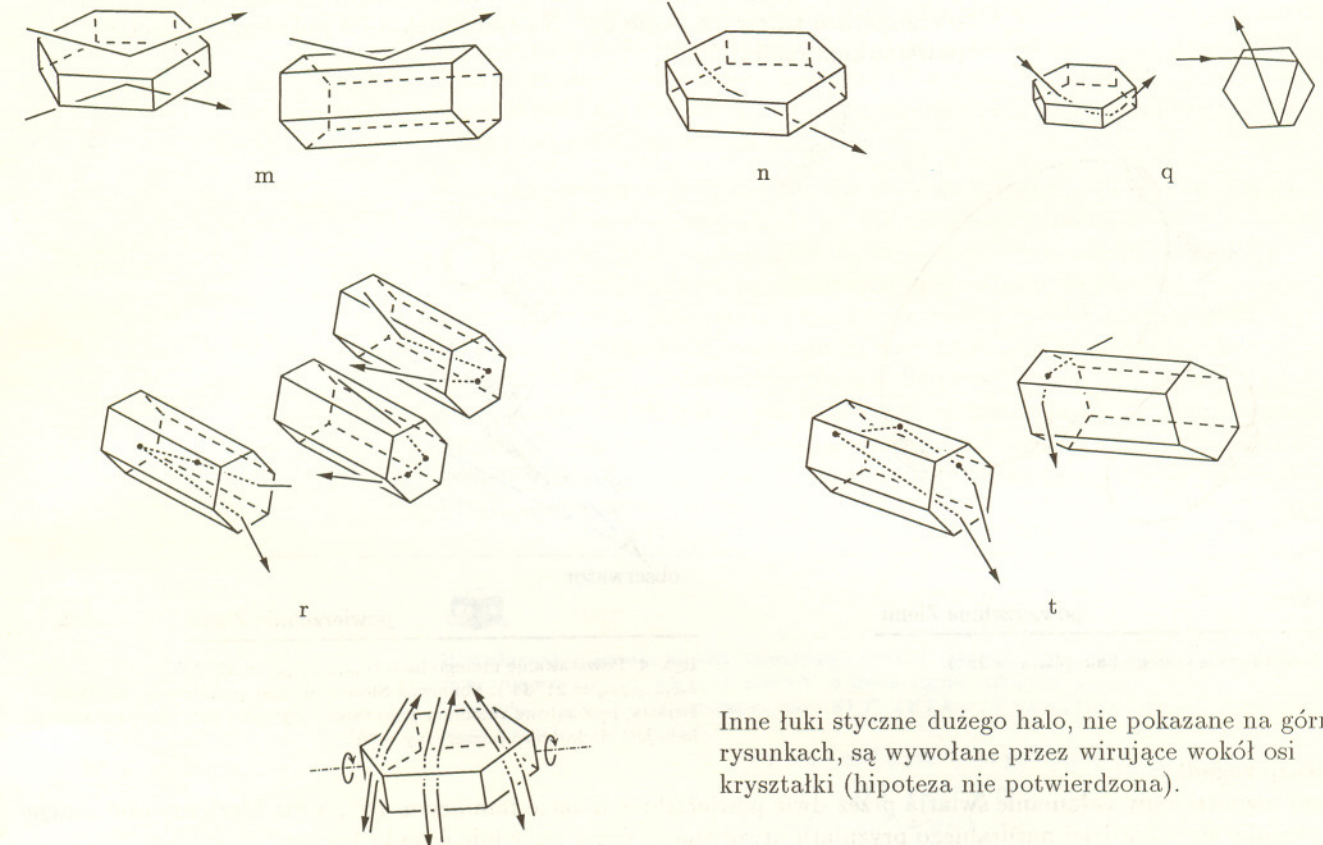
zjawiska halo

- p – słońca poboczne 90° (słońca poboczne Heweliusza)
- q – słońca poboczne 120°
- r – przeciwśłońce
- t – łuki skośne przeciwśloneczne



co jest przyczyną tych zjawisk

– po przeciwnej stronie sfery niebieskiej



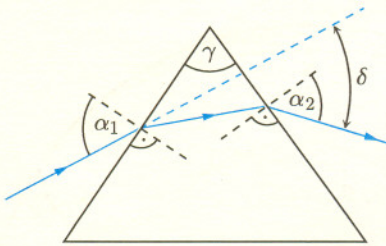
Inne łuki styczne dużego halo, nie pokazane na górnych rysunkach, są wywołane przez wirujące wokół osi kryształki (hipoteza nie potwierdzona).

Małe halo

Zanim przystąpimy do omówienia mechanizmu powstawania małego halo, przypomnijmy sobie, jak wygląda załamanie światła przez pryzmat (rys. 1). Oznaczmy przez γ kąt łamiący pryzmatu oraz przez δ kąt, o jaki załamany promień odchylił się od pierwotnego kierunku. Odchylenie to jest minimalne w przypadku symetrycznego biegu promienia przez pryzmat, to znaczy gdy $\alpha_1 = \alpha_2$. Spełnione są wtedy związki:

$$\sin \frac{1}{2}(\gamma + \delta_{min}) = n \sin \frac{1}{2}\gamma, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}(\gamma + \delta_{min}),$$

gdzie n jest współczynnikiem załamania pryzmatu.

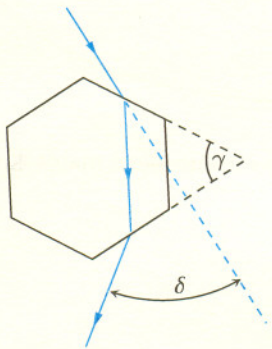


Rys. 1

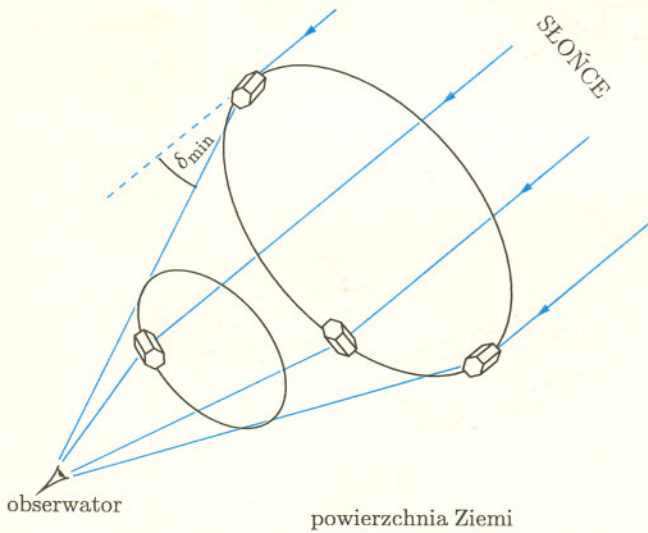
Małe halo jest wywołane załamaniem światła na dwóch prostokątnych ścianach bocznych (oddzielonych jedną) kryształka lodu o kształcie sześciokątnego graniastopłu. Tworzą one pryzmat o kącie łamiącym 60° – tak słusznie twierdził Mariotte (rys. 2), patrz str. 3. Współczynnik załamania lodu dla światła czerwonego jest równy 1,307, natomiast dla światła fioletowego 1,317. Kąt δ_{min} wynosi odpowiednio $21^\circ 34'$ dla barwy czerwonej i $22^\circ 22'$ – dla fioletowej.

Jeśli w powietrzu znajdują się kryształki rozmieszczone w sposób chaotyczny, to promienie Słońca, które możemy uważać za równoległą wiązkę, padają na nie pod wszystkimi możliwymi kątami. Za powstawanie świetlistej obwódki halo odpowiedzialne są te promienie, które w minimalnym stopniu odchylają się od pierwotnego kierunku. Jeśli kryształek lodu znajduje się właśnie w takim położeniu, to niewielka zmiana jego położenia nie wpływa w znaczący sposób na kierunek załamane go promienia, dzięki czemu natężenie światła obserwowanego z tego kierunku jest większe – po prostu większa liczba kryształków wnosi swój wkład do obserwowanego zjawiska. Mówiąc inaczej, kryształki położone tak, że załamane przez nie promienie w minimalny sposób odchylają się od pierwotnego kierunku, tworzą zbiór osobliwy odwzorowania zbioru możliwych położenia kryształków na sferę niebieską, a kręgi halo tworzą kaustykę (zob. np. str. 8) tego odwzorowania.

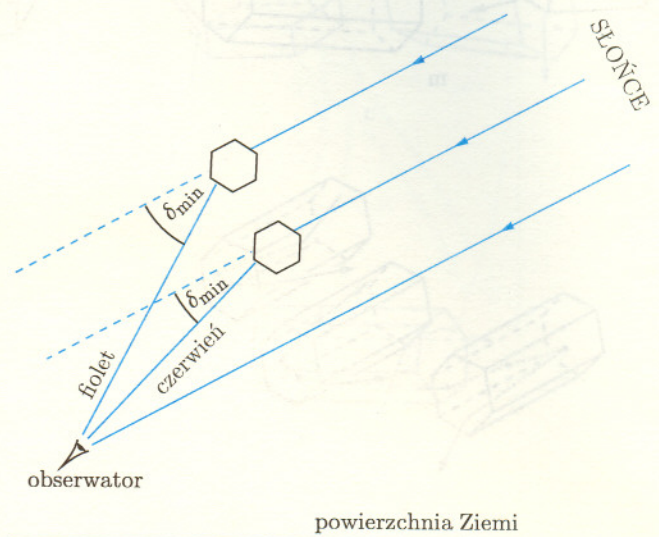
Przy chaotycznym rozkładzie kryształków obserwujemy świetlisty krąg wokół Słońca o fioletowym zewnętrznym i czerwonym wewnętrznym brzegu, o rozmiarach kątowych około 22° . Na rysunkach 3 i 4 pokazano geometrię powstawania małego halo.



Rys. 2



Rys. 3. Powstawanie małego halo ($\delta_{min} \approx 22^\circ$).



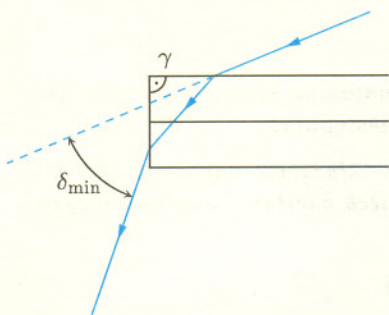
Rys. 4. Powstawanie małego halo ($\delta_{min, fiolet} = 22^\circ 22'$, $\delta_{min, czerw} = 21^\circ 34'$). Ponieważ Słońce nie jest punktowym źródłem światła, lecz kątowe rozmiary jego tarczy wynoszą $30'$, pierścień małego halo jest dodatkowo poszerzony o $30'$.

Przy okazji zagadka.

Dlaczego rozpatrujemy załamanie światła przez dwie powierzchnie o kącie łamiącym 60° , a nie bierzemy pod uwagę – wydawałoby się – bardziej naturalnego pryzmatu utworzonego przez sąsiednie ścianki boczne?

Odpowiedź wewnątrz numeru.

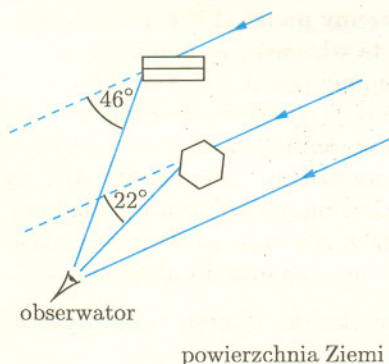
Duże halo



Rys. 5. Powstawanie dużego halo
($\delta_{min} \approx 46^\circ$).

Mechanizm powstawania dużego halo jest bardzo podobny do sposobu, w jaki powstaje małe halo. Różnica polega na tym, że załamanie zachodzi pomiędzy boczną, prostokątną ścianką i sześciokątną podstawą graniastoslupa (rys. 5). Warunkiem koniecznym jest więc, by kryształki miały płaskie podstawy, co nie zawsze ma miejsce. Kryształki lodu mogą przypominać, na przykład, zatemperowane ołówki. Kąt łamiący pryzmatu z rysunku 5 wynosi 90° . Warunek minimalnego odchylenia promieni prowadzi do wartości kąta δ_{min} równej $45^\circ 44'$ dla barwy czerwonej i $47^\circ 16'$ dla fioletowej. Tak więc błędy pomiarów Scheinera i Heweliusza (patrz str. 2 i 3) były niewielkie. Jednocześnie mocniejsze warunki konieczne do powstania dużego halo powodują, że zjawisko to występuje rzadziej od małego halo.

Słońca poboczne



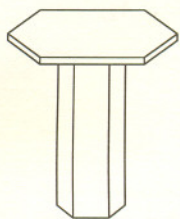
Rys. 6. Mechanizm powstawania dużego i małego halo.

Słońca poboczne są to dwie jasne plamy (czasami widoczna jest tylko jedna) położone symetrycznie względem Słońca, na tej samej co ono wysokości. Najczęściej pojawiają się wraz z małym halo. Istnieją także inne, bardziej egzotyczne odmiany słońc pobocznych, na przykład słońca pojawiające się wraz z dużym halo czy też słońca poboczne Heweliusza. Zjawisko to nosi również nazwę parhelium (gr. *para* – blisko i *Helios* – Słońce). W literaturze anglosaskiej spotyka się również nazwę „sun dogs” – „słoneczne psy”.

Dokładniej omówimy powstawanie najpowszechniejszych słońc pobocznych małego halo. Ich położenie względem jego pierścienia zależy od wysokości horyzontalnej Słońca. Kiedy znajduje się ono na linii horyzontu, słońca poboczne leżą dokładnie na pierścieniu małego halo. W miarę jak Słońce podnosi się ponad widnokrąg, oddalają się od pierścienia i maleje natężenie ich światła. Przy czterdziestostopniowej wysokości Słońca oddalone są one o około $5^\circ 30'$ od małego halo w kierunku na zewnątrz.

Za powstawanie parheliów małego halo odpowiedzialne są kryształki lodu pionowo opadające w atmosferze. Bieg promieni w ich wnętrzu jest taki sam, jak wtedy, gdy powstaje małe halo, tak więc słońca poboczne można uznać za jego część. Jeśli w powietrzu znajdują się kryształki o wszystkich możliwych orientacjach, ale z przewagą ustawionych pionowo, to obserwujemy zarówno małe halo, jak i jego słońca poboczne.

Pozostaje jeszcze wyjaśnić, dlaczego pionowa orientacja długiej osi kryształka miałyby być wyróżniona. Dzieje się tak wtedy, gdy spełnione są dwa warunki: 1) jest bezwietrzna pogoda, 2) część kryształków przypomina kształtem gwoźdźki. Taka budowa kryształka ma miejsce, gdy do płaskiej podstawy sześciokątnego słupka przyklei się płaska, również sześciokątna płytka (rys. 7). Ta płaska płytka działa wtedy mniej więcej tak, jak czasza spadochronu. Pozycja, w której kryształki spadają z długą osią ustawioną pionowo, jest pozycją stabilną. W miarę jak Słońce wznosi się coraz wyżej, bieg promieni we wnętrzu tych kryształków coraz bardziej odbiega od warunków biegu symetrycznego. Z tego powodu słońca poboczne oddalają się od pierścienia halo i tracą swoją intensywność.



Rys. 7

K. R.

Rozwiązanie zadania M 724.

$AC \leq AX + XC = 2$
i $BD \leq BX + XD = 2$, więc
 $0 \leq AC^2 + BD^2 \leq 8$. Aby sprawdzić,
że wyrażenie $AC^2 + BD^2$ może osiągnąć
każdą wartość z przedziału $[0, 8]$,
wystarczy rozważyć punkty $X = (0, 0)$,
 $A = B = (1, 0)$, $C = D = (\cos \alpha, \sin \alpha)$,
gdzie $\alpha \in [0, \pi]$.

Rozwiązanie zadania M 723.

Oznaczmy środek okręgu przez X , punkt wspólny prostych zawierających cięciwy AB i CD przez Y , a środki cięciw AB i CD odpowiednio przez S i T . Czworokąt $XSYT$ jest prostokątem, bo $\angle SYT$, $\angle YTX$ i $\angle YSX$ są kątami prostymi. Zatem, na mocy twierdzenia Pitagorasa,

$$\begin{aligned} AC^2 + BD^2 &= (AY^2 + CY^2) + (BY^2 + DY^2) = (AY^2 + BY^2) + (CY^2 + DY^2) = \\ &= (AS + SY)^2 + (AS - SY)^2 + (CT + TY)^2 + (CT - TY)^2 = \\ &= 2(AS^2 + TY^2) + 2(CT^2 + SY^2) = \\ &= 2(AS^2 + SX^2) + 2(CT^2 + TX^2) = 2AX^2 + 2CX^2 = 4. \end{aligned}$$

Niech f będzie ...

(Złośliwi twierdzą, że gdyby Juliusz Verne był matematykiem, to *Dwadzieścia tysięcy mil podmorskiej żeglugi* zaczynałoby się następująco.

Niech Ned Land będzie oszczepnikiem, a Conseil – służącym narratora. Niech ponadto Nautilus będzie statkiem podwodnym i niech kapitan Nautilusa nazywa się Nemo.

My tego twierdzenia komentować nie będziemy.)

Na odwzorowanie f płaszczyzny \mathbf{R}^2 w siebie możemy patrzeć jak na parę funkcji określonych na \mathbf{R}^2 i o wartościach w zbiorze \mathbf{R} liczb rzeczywistych, symbolicznie $f = (f_1, f_2)$. Mówimy, że odwzorowanie f jest gładkie, gdy każda z funkcji f_1, f_2 jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna.

Czytelnik zechce się zastanowić, czy istotnie każde gładkie odwzorowanie $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ można w ten sposób przedstawić.

Jako się więc rzekło, niech f będzie gładkim odwzorowaniem płaszczyzny \mathbf{R}^2 w siebie. Przy omawianiu własności f nie sposób posłużyć się kartką papieru z wykresem, bo do jego narysowania potrzebne są $2 + 2 = 4$ wymiary. Pomóżmy zatem naszej ubogiej wyobraźni w inny sposób. Pomyślmy mianowicie o dwóch płaszczyznach, poziomej (α) i pionowej (β). Bierzemy punkt $A \in \alpha$ i rzutujemy go pionowo na gładką powierzchnię π , która ma tę własność, że nad każdym punktem α leży dokładnie jeden punkt π . Otrzymany punkt z π rzutujemy poziomo na β i w ten właśnie sposób otrzymujemy $f(A)$. Może się zdarzyć tak, że dwa różne punkty A_1 i A_2 mają ten sam obraz. Punkt A , który ma tę własność, że w dowolnym małym jego otoczeniu znajdziemy takie punkty A_1 i A_2 , nosi nazwę punktu osobliwego odwzorowania f . Posługując się naszą poglądową interpretacją f stwierdzimy bez kłopotu, że płaszczyzna styczna do π w punkcie leżącym pionowo nad punktem osobliwym A jest prostopadła do płaszczyzny β .

Zbiór wszystkich punktów osobliwych f nazwiemy krótko zbiorem osobliwym f , obraz zaś zbioru osobliwego – kaustyką.

Pora na przykłady. Pierwszy z nich, odwzorowanie $g(x, y) = (x^2, y)$, pokazany jest na rysunku 1.



Rozwiązanie zadania M 725.

Rozważmy płaszczyznę P o równaniu

$$z = \frac{c}{a} \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 - b^2}} \cdot x. \text{ Czytelnik}$$

z łatwością sprawdzi, że dla punktów

należących do tej płaszczyzny zachodzi

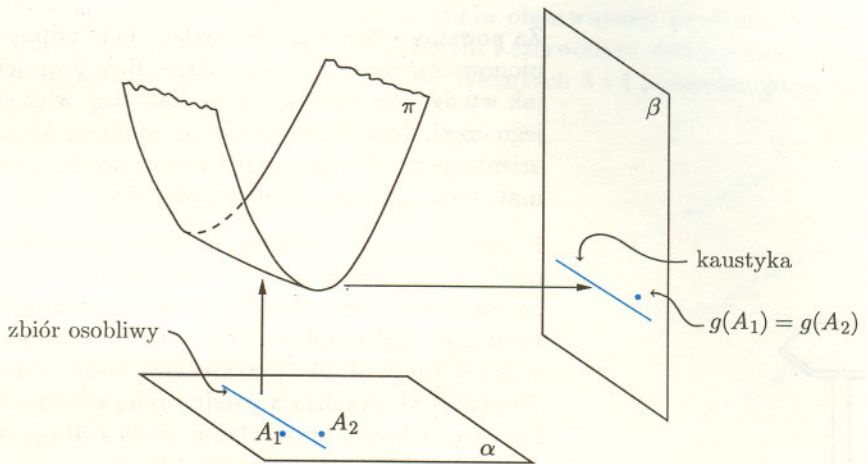
$$\text{równość } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2},$$

zatem jej część wspólna z elipsoidą

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ jest równa}$$

$$\text{przecięciu } P \text{ ze sferą } \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

a więc jest okręgiem.



Rys. 1. Przekształcenie g z osobliwością „fałda”. Gdy np. $g(x, y) = (x^2, y)$, to dowolne dwa punkty A_1 i A_2 , symetryczne względem prostej złożonej z punktów osobliwych g , mają ten sam obraz.



Rozwiązanie zadania F 396.

Masa powietrza o objętości piłki jest równa $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho = 6,7$ g. Porównując siłę dośrodkową do siły Magnusa mamy

$$\frac{Mv^2}{r} = 2m\omega v.$$

Podstawiając prędkość kątową $\omega = \frac{v}{R}$ do powyższego wzoru otrzymujemy

$$r = \frac{MR}{2m\epsilon} \approx 17 \text{ m}.$$

Widzimy tu osobliwość zwaną fałdą. Zbiór osobliwy i kaustyka odwzorowania g to linie proste. Drugi rodzaj osobliwości to tzw. plisa (rys. 2); niech nam krawcy wybaczą terminologię. Obrazowo można powiedzieć, że plisa to fałda, która ma swój początek. Zbiór osobliwy plisy to krzywa przypominająca wyglądem parabolę, a kaustyka ma kształt „dzióbka”.

Okazuje się, że w zasadzie innych osobliwości przekształcenia gładkie płaszczyzny w siebie nie miewają. Co to znaczy? Rozpatrzmy zbiór \mathcal{G} wszystkich przekształceń gładkich $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$. Umówmy się, że dwa przekształcenia z tego zbioru są bliskie, jeśli w każdym punkcie \mathbf{R}^2 mają bliskie wartości (razem z pochodnymi dowolnego rzędu).



Rozwiązanie zadania F 395.

Współczynnik załamania zależy od gęstości powietrza ρ :

$$(n - 1) = (n_0 - 1) \frac{\rho}{\rho_0}, \quad N = \frac{N_A \rho}{\mu},$$

gdzie N_A oznacza liczbę Avogadro. Podstawiając $n - 1$ oraz N do wyrażenia na μ_1 otrzymujemy

$$\mu_1 = \frac{32\pi^3 (n_0 - 1)^2 \rho \mu}{3\lambda^4 \rho_0^2 N_A}.$$

Ponieważ ρ zależy od wysokości, przechodzimy do wzoru całkowego

$$I(x) = I_0 \exp\left(-\int_0^x \mu_1 dh\right).$$

Dla promienia słonecznego padającego pod kątem 0° (prostopadle do powierzchni Ziemi) możemy skorzystać ze wzoru na ciśnienie hydrostatyczne $p = \int \rho g dh$ otrzymując

$$\alpha = \int \rho dh = \frac{p}{g}, \quad p = 1013 \text{ hPa},$$

gdzie g jest przyspieszeniem ziemskim. Ostatecznie otrzymujemy relację

$$I = I_0 e^{-\alpha},$$
$$\alpha = \frac{32\pi^3 (n_0 - 1)^2 p \mu}{3\lambda^4 \rho_0^2 g N_A}.$$

Stosunek natężenia światła rozproszonego do padającego wyraża ułamek

$$k = \frac{I_0 - I}{I_0} = 1 - e^{-\alpha}.$$

Dla światła niebieskiego wynosi on $k \approx 28,6\%$, dla czerwonego $k \approx 3,5\%$.

Gdy światło pada pod kątem 90° (stycznie do powierzchni Ziemi), możemy skorzystać ze wzoru barometrycznego

$$\rho = \rho_0 e^{-ah}, \quad a = \frac{\rho_0 g}{p}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa mamy

$$x^2 + R^2 = r^2 = (R + h)^2.$$

Zaniedbując h^2 mamy $h \approx \frac{x^2}{2R}$ (bo grubość atmosfery $h \approx 20 \text{ km} \ll R$).

$$\beta = \int_0^\infty \rho dx = \int_0^\infty \rho_0 e^{-\frac{ax}{2R}} dx = \frac{\rho_0}{2} \sqrt{\frac{2\pi R}{\rho_0 g}};$$

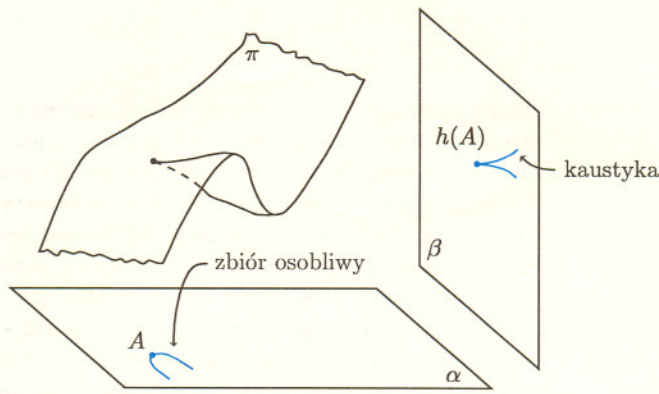
$$\beta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi R g \rho_0}{p}} \cdot \alpha = 10,9 \cdot \alpha.$$

Stąd też $k = \frac{I_0 - I}{I_0} = 1 - e^{-\beta}$,

dla światła niebieskiego $k \approx 97,5\%$, a dla światła czerwonego $k \approx 32,5\%$.

Z powyższych rezultatów jasno wynika, że kolor zachodzącego Słońca jest czerwony. W istocie wynik uzyskany dla promienia stycznego jest zaniżony, gdyż nie uwzględniliśmy wydłużonej (na skutek załamania drogi) światła w atmosferze.

O ilości rozmaitych prób stosowania teorii katastrof w innych naukach można się przekonać wertując książkę „Catastrophe theory for scientists and engineers” autorstwa Roberta Gilmore’a pracującego w Institute for Defense Analyses w Arlington w USA.



Rys. 2. $h(x, y) = (x^3 - xy, y)$ to jeden z najprostszych przykładów odwzorowania z osobliwością zwaną plisą. W tym konkretnym przypadku zbiór osobliwy to parabola o równaniu

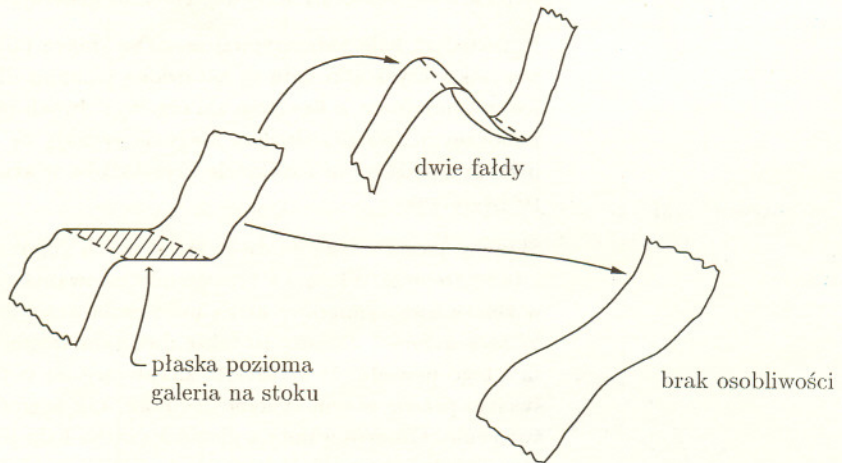
$$\frac{\partial}{\partial x}(x^3 - xy) \equiv 3x^2 - y = 0.$$

Czytelnik może łatwo sprawdzić, że kaustyka tego odwzorowania to krzywa z dzióbkiem składająca się z dwóch połówek paraboli półsześciennej.

W zbiorze \mathcal{G} wyróżnimy mniejszy podzbiór \mathcal{D} przekształceń „dobrych”: takich, które mają wyłącznie punkty osobliwe odpowiadające fałdzie lub wierzchołkowi plisy. Amerykański matematyk Hassler Whitney udowodnił w 1955 roku następujące

Twierdzenie. \mathcal{D} jest otwartym i gęstym podzbiorem \mathcal{G} .

Gęstość \mathcal{D} oznacza tyle, iż blisko każdej funkcji $f \in \mathcal{G}$ leży pewna funkcja „dobra”, z otwartości \mathcal{D} zaś wynika, że każda funkcja „dobra” ma małe otoczenie składające się wyłącznie z innych funkcji „dobrych”. Przykłady niedobrych osobliwości Czytelnik Wnikliwy zechce sobie sam wyobrazić, a Czytelnik Leniwy może zerknąć na rysunek 3.



Rys. 3. Blisko przekształcenia „stok z płaską galerią” ze zbioru osobliwym w postaci nieskończonego pasa leżą rozmaite przekształcenia ze zbioru \mathcal{D} : na przykład f_1 z dwiema fałdami i f_2 bez żadnych osobliwości.

Twierdzenie Whitneya fizycy stosują do wyjaśniania zjawiska halo (można o tym przeczytać w tym numerze *Delty*). Ten fakt oraz ukuta przez Stanisława Lema, przy okazji porównywania matematyki z fizyką, przenośnia o szalonych krawcach usprawiedliwiają po części użycie terminów fałda i plisa.

Twierdzenie Whitneya uogólnił na przypadek wymiaru ≥ 3 Francuz, René Thom, medalista Fieldsa z 1958 roku. Moment ukazania się w 1971 roku jego pracy *Stabilność strukturalna i morfogeneza* to narodziny słynnej teorii katastrof, którą z różnym powodzeniem usiłowano stosować w biologii, socjologii, medycynie, aerodynamice, termodynamice, klimatologii itd. To już jednak temat na zupełnie inny artykuł.

P.S.

Teoria osobliwości odwzorowań, a w szczególności twierdzenie Whitneya, bardzo dobrze nadają się do analizy zjawisk halo. Zajmijmy się znajdującym się w atmosferze ziemskiej kryształkiem lodu, który ma kształt graniastosłupa sześciokątnego. Najczęściej jest to jeden z wielu milionów kryształków tworzących chmurę typu *cirrostratus*. Będziemy interesować się dwiema ściankami kryształka: tą, przez którą promień światła słonecznego doń wnika i tą, przez którą go opuszcza po załamaniu. W naszej analizie pominiemy zjawiska takie, jak odbicie światła, rozszczepienie światła białego czy też całą gamę zjawisk falowych, które mogą wystąpić; skoncentrujemy się więc na uproszczonym opisie geometrycznym. Światło słoneczne potraktujemy jak wiązkę promieni równoległych, będziemy te promienie utożsamiać.

Odwzorowanie zbioru położenia kryształka lodu w sferę niebieską zdefiniowane jest mniej więcej tak: kryształek lodu o danym położeniu załamuje światło słoneczne, w wyniku czego otrzymamy promień biegnący w kierunku zależnym od położenia kryształka. Kierunek owego promienia wyznacza punkt na sferze niebieskiej, z którego obserwujemy świecenie. W ten sposób każdemu położeniu kryształka przyporządkowaliśmy punkt na sferze niebieskiej. Zauważmy, że tak określone odwzorowanie (tzw. funkcja Halo) zależy od położenia Słońca, dlatego też obserwowane na niebie zjawisko, będące kaustykami funkcji Halo, zależy od położenia Słońca.

Jeden kryształek da, oczywiście, tylko jeden promień załamany pomiędzy wybraną parą ścianek. Możemy zbudować odwzorowanie wszystkich możliwych położenia kryształków w sferę niebieską; różne położenia kryształka dadzą na ogół różne kierunki załamanych promieni, które możemy utożsamiać z punktami sfery niebieskiej. Sfera niebieska jest zbiorem dwuwymiarowym, natomiast zbiór możliwych położenia kryształków lodu jest zbiorem trójwymiarowym. Kryształek ma trzy stopnie swobody: dwa z nich są związane z położeniem jego długiej osi symetrii, trzeci z obrotem wokół niej (translacyjne stopnie swobody nie wnoszą nic nowego). Tak więc odwzorowanie zbioru możliwych położenia kryształków w sferę niebieską jest odwzorowaniem zbioru trójwymiarowego w dwuwymiarowy. To odwzorowanie nazwiemy funkcją Halo.

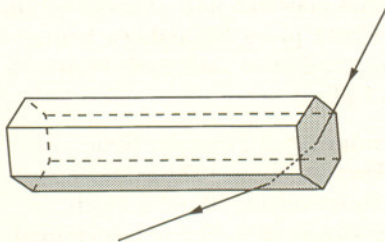
Może się zdarzyć, że kryształki lodu znajdujące się w przestrzeni rozmieszczone są w sposób przypadkowy i chaotyczny. Wtedy dziedziną funkcji Halo jest rzeczywistość trójwymiarowa. Może być jednak i tak, że niektóre orientacje kryształków będą uprzywilejowane (na przykład, przez warunki meteorologiczne), inne zaś nie wystąpią, tak więc dziedziną funkcji Halo nie będzie pełnym zbiorem możliwych położenia kryształków. Jeśli jest ona zbiorem jedno-, dwu- lub trójwymiarowym, mówimy odpowiednio o halo jedno-, dwu- lub trójwymiarowym. W dalszym ciągu dziedzinę funkcji Halo będziemy nazywać zbiorem generującym.

Przykładem halo jednowymiarowego są słońca poboczne, które powstają, gdy wszystkie kryształki lodu są ustawione pionowo długimi osiami; tworzą one wtedy zbiór jednowymiarowy, a kaustyka składa się z dwóch punktów, które są właśnie słońcami pobocznymi. Na przeciwnym biegunie sytuują się małe i duże halo, które powstają przy przypadkowym rozkładzie kryształków w atmosferze. Zbiór generujący jest wtedy trójwymiarowy.

Skupmy naszą uwagę na dwuwymiarowych zbiorach generujących. Zgodnie z twierdzeniem Whitneya typowe odwzorowania gładkie zbiorów dwuwymiarowych w zbiory dwuwymiarowe mogą mieć osobliwości dwójakiego rodzaju: fałdy i plisy. W szczególności dotyczy to także dwuwymiarowej funkcji Halo. Jej osobliwości ważne są z tego powodu, że kryształki znajdujące się w pobliżu punktu osobliwego załamują światło prawie w tym samym kierunku, tak więc obserwujemy z tego kierunku silne świecenie. Obserwowane na niebie zjawisko halo jest więc kaustyką odwzorowania zbioru położenia kryształków lodu w sferę niebieską.

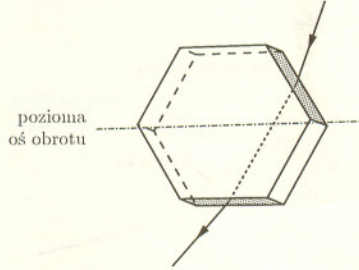
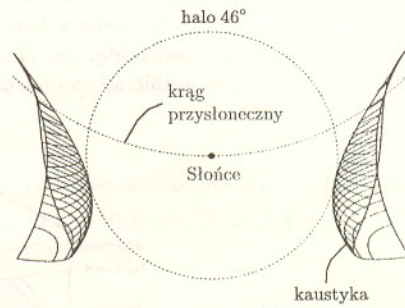
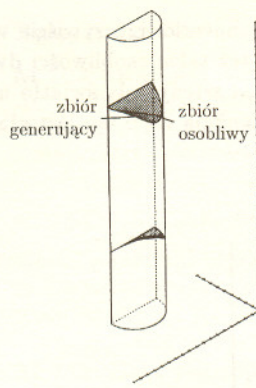
Halo dwuwymiarowe

Pierwszym przykładem niech będą kryształki lodu o kształcie sześciokątnych kolumnienek, spadające w ten sposób, że ich główna oś pozostaje w płaszczyźnie poziomej (rys. 1). Taki kryształek ma dwa stopnie swobody. Pierwszy związany jest z obrotami jego długiej osi w płaszczyźnie poziomej, drugi z obrotami wokół tej osi. Interesują nas promienie wchodzące przez jedną z sześciokątnych podstaw kryształka i wychodzące przez prostokątną ściankę boczną. Zbiór generujący jest dwuwymiarowy. Jest on niespójny, gdyż składa się z dwóch osobnych kawałków odpowiadających dwóm sześciokątnym podstawom kryształka. Również niespójna jest kaustyka funkcji Halo. Tworzy ona łuki styczne dolno-boczne dużego halo (rys. 2). Osobliwość jest w tym przypadku fałdą.



Rys. 1

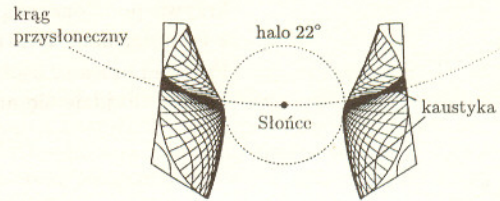
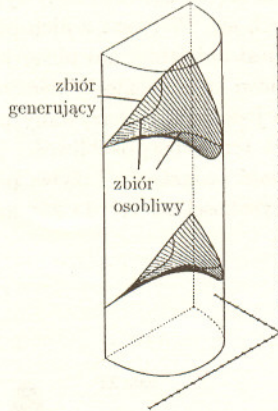
Rys. 2. Zbiór generujący i zbiór osobliwy łuku stycznego dolno-bocznego dużego halo (po lewej stronie). Kaustyka funkcji halo (po prawej stronie). Osobliwość ma charakter faldy. Rysunek odpowiada wysokości Słońca równej 28° .



Rys. 3. Sześciokątne lodowe płytki wirujące wokół długiej osi symetrii sześciokąta odpowiadają za powstawanie łuków Lowitza.

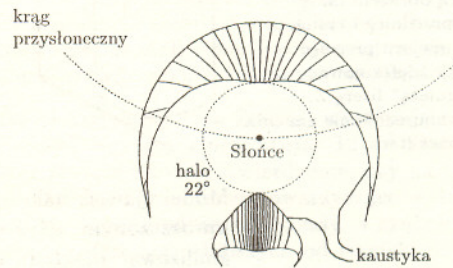
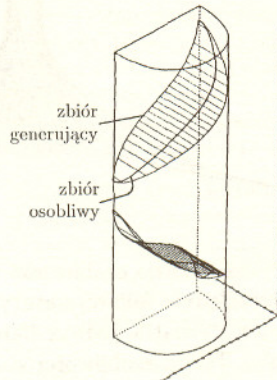
Drugim przykładem jest jedna z rzadszych postaci halo, tak zwane łuki Lowitza. Tworzone są one przez promienie załamane pomiędzy dwiema ściankami płaskiego, sześciokątnego kryształka, wirującego wokół poziomej, dłuższej osi symetrii sześciokąta (rys. 3). Powstanie łuków Lowitza wymaga bardzo szczególnych warunków, dlatego są one tak rzadkie. Podobnie jak poprzednio, zbiór generujący jest dwuwymiarowy i niespójny, jednak osobliwości odwzorowania Halo są bardziej złożone, gdyż równocześnie istnieje i faldy, i plisy (rys. 4). Jak pokazują symulacje komputerowe wykonane w 1980 r. przez Roberta Greenlera i jego współpracowników z Uniwersytetu Wisconsin w Milwaukee, część kaustyki odpowiadająca plisie cechuje się bardzo małym natężeniem światła, dlatego w większości przypadków, gdy łuki Lowitza są widoczne, plisa pozostaje niezauważona.

Rys. 4. Zbiór generujący i zbiór osobliwy łuków Lowitza (po lewej stronie) oraz kaustyka (po prawej). Zbiór osobliwy składa się z dwóch krzywych. Osobliwości mają charakter zarówno faldy, jak i plisy. Rysunek odpowiada wysokości Słońca równej 20° .



Kolejnym, trzecim przykładem dwuwymiarowego halo są (dużo powszechniejsze od łuków Lowitza) górny i dolny łuk stycznego małego halo (rys. 5).

Rys. 5. Zbiór osobliwy, zbiór generujący i kaustyka łuku stycznego górnego i dolnego małego halo. Osobliwości mają charakter faldy. Rysunek odpowiada wysokości Słońca równej 28° .

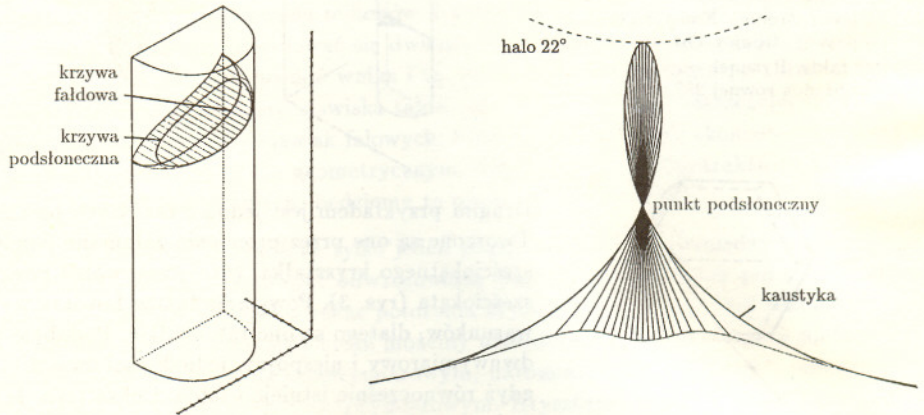


Osobliwości wyjątkowe

Twierdzenie Whitneya mówi, że typowymi osobliwościami gładkiego, dwuwymiarowego odwzorowania są faldy i plisy. Zostało analitycznie dowiedzione, że poza kilkoma wyjątkami, o których za chwilę, osobliwości górnego i dolnego łuku stycznego są faldą. Jednak w przypadku pewnych rodzajów dwuwymiarowego halo nie istnieje dowód gładkości funkcji Halo, która jest wymagana przez założenia twierdzenia Whitneya.

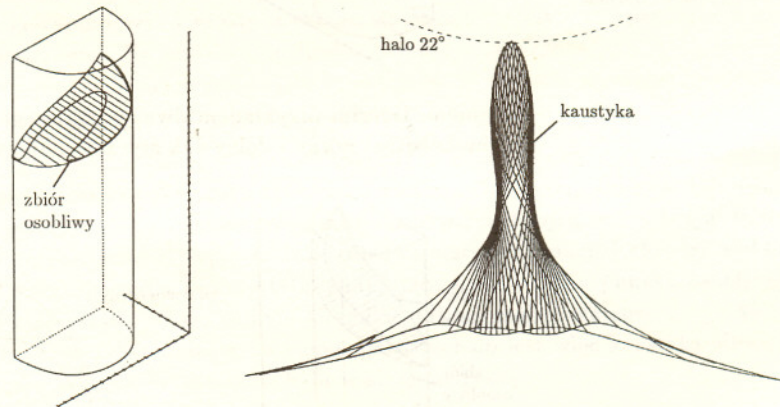
Fakt, że większość tych osobliwości rzeczywiście wygląda jak fałda lub plisa, nie jest jeszcze dowodem. Istnieją też takie osobliwości dwuwymiarowych halo, które nie są ani fałdą, ani plisą. Tak jest wtedy, gdy światło ulega nie tylko załamaniu, ale również odbiciu, co powoduje, że funkcja Halo nie jest gładka.

Rys. 6. Zbiór generujący, zbiór osobliwy i kaustyka dolnego łuku styczności małego halo dla wysokości Słońca równej 17° . Zbiór osobliwy składa się z dwóch przecinających się krzywych, fałdowej i podslonecznej. Krzywa podsloneczna jest osobliwością innego rodzaju niż fałda czy plisa.



Wierzchołek dolnego łuku styczności, pokazanego na rysunku 6, położony jest wówczas na wysokości $22^\circ - 17^\circ$, czyli 5° ponad linią horyzontu. Taki łuk styczności można oglądać z pokładu samolotu, ale nie z ziemi. Zbiór osobliwy jest w tym przypadku bardzo szczególny. Składa się on z dwóch krzywych, fałdowej i podslonecznej, dwukrotnie przecinających się. Pierwsza z nich odpowiada osobliwości typu fałda, jednak druga nie jest ani fałdą, ani plisą, jest czymś zupełnie innym niż osobliwości, o których mówi twierdzenie Whitneya. Funkcja Halo odwzorowuje krzywą podsloneczną na jeden punkt nazywany punktem podslonecznym. Zgodnie z twierdzeniem Whitneya ten rodzaj osobliwości jest jednak czymś wyjątkowym. Powyżej opisana osobliwość związana z krzywą podsloneczną może się pojawić gdy Słońce znajdzie się na wysokości od 11° do 25° nad horyzontem.

Rys. 7. Odpowiednio dobrane małe zaburzenie odwzorowania z rysunku 6 daje kaustykę będącą obrazem fałdy. Zbiór osobliwy z poprzedniego rysunku został rozerwany w miejscu przecięcia dwóch krzywych. Tak zdeformowany przypomina „wyciągniętą” literę Z. Odpowiednio małe zaburzenie nie zmienia jego jakościowego charakteru.



Model zjawisk halo oparty na analizie osobliwości odwzorowań jest modelem uproszczonym, gdyż nie uwzględnia falowej natury światła, a zatem nie pozwala analizować rozkładu natężenia światła, jednak bardzo dobrze daje sobie radę z opisem geometrii zjawiska. Teoria osobliwości stosuje się do odwzorowań gładkich. I choć w każdym przypadku funkcji Halo problem ten należy analizować osobno, to wydaje się, że „na ogół”, poza pewnymi wyjątkowymi sytuacjami rzeczywiście jest to odwzorowanie gładkie. Z tego powodu Walter Tape, matematyk amerykański zajmujący się zastosowaniami matematyki w naukach przyrodniczych, takich jak geologia czy meteorologia (na którego pracach opiera się ten tekst) powiada z lekką przesadą: Czemu zawdzięcza swoje istnienie zjawisko halo? Istnieje ono dzięki różniczkowalności (oczywiście, funkcji Halo)!



M 723. Dany jest okrąg o promieniu 1. Jakie wartości może przyjmować wyrażenie $AC^2 + BD^2$, jeśli AB i CD są prostokądnymi cięciwami tego okręgu?

(Zadanie z egzaminu wstępnego na Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego)

Rozwiązanie na str. 7

M 724. Jakie wartości może przyjmować wyrażenie $AC^2 + DB^2$, jeśli A, B, C, D, X są takimi punktami płaszczyzny, że $AX = BX = CX = DX = 1$ i $\overline{AB} \perp \overline{CD} = 0$ ($v \circ w$ oznacza iloczyn skalarny wektorów)?

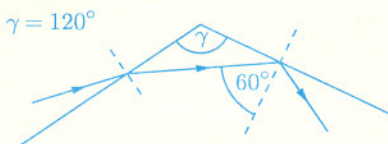
Rozwiązanie na str. 7

M 725. Dana jest elipsoida o równaniu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, 0 < a < b < c$. Udowodnić, że pewien przekrój tej elipsoidy płaszczyzną jest okręgiem.

Rozwiązanie na str. 8

Odpowiedź na zagadkę.

Sąsiednie ścianki sześciokąta tworzą pryzmat o kącie łamiącym 120° . Przy symetrycznym biegu promienia kąt padania wynosi 60° . Tymczasem kąt graniczny (dla $n = 1,31$) wynosi około 50° . Promień światła ulegnie nie załamaniu, lecz całkowitemu odbiciu wewnętrznemu.



Redaguje Jarosław KULPA

F 395. Światło słoneczne o mniejszej długości fali jest silniej rozpraszane w atmosferze niż światło o większej długości. Dzięki temu zjawisku niebo ma kolor niebieski, a zachodzące Słońce jest czerwone. Ocenic, jaka część światła niebieskiego ($\lambda = 400$ nm), a jaka czerwonego ($\lambda = 700$ nm) padającego pionowo na Ziemię ulega rozproszeniu w atmosferze. Przeprowadzić analogiczne rachunki w przypadku promieni pochodzących od zachodzącego Słońca i padających na Ziemię stycznie. Gęstość powietrza przy powierzchni Ziemi wynosi $\rho_0 = 1,2$ kg/m³, masa molowa powietrza $\mu = 0,029$ kg/mol. Rozpraszanie światła w jednorodnym ośrodku opisuje wzór

$I = I_0 e^{-\mu_1 x}$, gdzie $\mu_1 = \frac{32\pi^3 (n-1)^2}{3\lambda^4 N}$, n jest współczynnikiem załamania światła, przy powierzchni Ziemi współczynnik załamania dla powietrza wynosi $n_0 = 1,00028$, N oznacza liczbę cząsteczek powietrza w jednostce objętości, I_0 jest początkowym natężeniem światła, I zaś natężeniem światła po przejściu drogi x . Promień Ziemi wynosi $R \approx 6400$ km.

Rozwiązanie na str. 9

F 396. Piłka kopnięta przez piłkarza niemal poziomo uzyskuje prędkość obrotową na obwodzie równą $\epsilon = 20\%$ prędkości ruchu postępowego. Oś obrotu piłki jest pionowa. Oszacować początkowy promień krzywizny toru, po którym porusza się piłka. Na piłkę obracającą się w powietrzu z prędkością kątową ω działa siła związana z efektem Magnusa określona przybliżonym wzorem $F = 2m\mathbf{v}\omega$, gdzie m jest masą powietrza o objętości piłki. Siła ta jest prostopadła do prędkości piłki \vec{v} i wektora $\vec{\omega}$. Gęstość powietrza wynosi $\rho = 1,2$ kg/m³. Dane dotyczące piłki futbolowej: promień $R = 11$ cm, masa $M = 0,42$ kg.

Rozwiązanie na str. 8

Patrz w niebo

Niejeden raz podkreślaliśmy w *Delcie*, że ciała Układu Słonecznego nie są do końca „martwe” – życia tam, oczywiście, nie ma (poza Ziemią), ale chodzi o to, czy na powierzchni danego globu coś się w ogóle dzieje. Na Księżycu akurat mało co. Poza powolną termiczną erozją skał, ciągłym działaniem promieniowania kosmicznego, wiatru słonecznego i ciał meteorowych zdarzają się czasami słabe wpływy niewielkich porcji gazów z głębi gruntu. Na Marsie natomiast wieją bardzo silne wiatry, na planetach olbrzymich wiatry te są w skali ziemskiej niewyobrażalne, na ich satelitach widać efekty ruchów górotwórczych i działalność wulkaniczną (Io, Tryton).

A pioruny? Otóż wyładowania elektryczne, poza Ziemią, występują na Jowisz i zapewne na Saturnie oraz Uranie. Voyager 1 przelatując 12 XI 1980 r. w pobliżu Tytana wykonał m.in. pomiary mające na celu stwierdzenie, czy na tym satelicie Saturna błyska się. Mówiąc w skrócie, fale radiowe towarzyszące wyładowaniom powinny zostać zarejestrowane przez radioodbiorniki sondy, a czułość aparatury umożliwiała zauważenie błyskawic 1000 razy słabszych od ziemskich.

Obserwacje nie dały żadnego wyniku, rejestrowane były tylko sygnały z Saturna. A sprawa jest poważniejsza, niż zwyczajne stwierdzenie, czy na Tytanie biją pioruny. Otóż zawartość rozmaitych węglowodorów obecnych w atmosferze Tytana częściowo może być wytłumaczona działaniem promieniowania słonecznego. Jednak zawartość np. etylenu C₂H₄ przekracza możliwości tego mechanizmu. Produkcja etylenu mogłaby być wspomagana właśnie przez błyskawice, a skoro ich nie stwierdzono, to znaczy, że teoretycy powinni poszukiwać jeszcze innych mechanizmów. Następną natomiast szansą zbadania tego problemu „na miejscu” pojawi się nie wcześniej niż w XXI wieku, gdy do Saturna ewentualnie dotrze sonda Cassini i zrzuci na Tytana próbnik zdolny zarejestrować błyskawice 100 razy słabsze, niż mógł to zrobić Voyager 1.

Tomasz KWAST

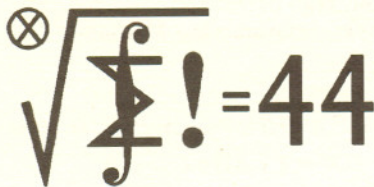
Tak, kiedy Jowisz poprzedzimy grzmiotem

I rażącymi błyski świat uciska,
Trzęsie się Atlas okropnym łoskotem,
Jęczą pieczary i Etny łożyska,
Pełne cyklopów; pod hartownym młotem
Grom się rozżarza i iskrami pryska,
Wulkan je nagli, a z swego warsztatu
Raz wraz pociskiem straszonym grozi

światu.

Ignacy Krasicki

Monachomachia, pieśń III, LVIII.



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 III 1995

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 277 ($WT=3,46$) i 278 ($WT=1,41$)
z numeru 3/1994

Przemysław Gadziński	- Środa Śląska	47,30
Paweł Lizak	- Puławy	43,47
Waldemar Pompe	- Warszawa	40,24
Krzysztof Jedziniak	- Katowice	39,72
Lesław Skrzypek	- Rzeszów	36,67

Pan Przemysław Gadziński jest
czternastym Weteranem matematycznego
Klubu 44.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1994.

Zadania z matematyki nr 291, 292

Redaguje Marcin E. KUCZMA

291. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite x , dla których $x^2 + 19x + 94$ jest kwadratem liczby całkowitej.

292. Udowodnić, że dla każdych liczb $x_1, x_2, \dots, x_n \in \langle 0; \pi/4 \rangle$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{\operatorname{tg} x_1 \cdot \operatorname{tg} x_2 \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} x_n} \leq \sqrt{\frac{\sin^2 x_1 + \sin^2 x_2 + \dots + \sin^2 x_n}{\cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 + \dots + \cos^2 x_n}}$$

Zadanie **292** zaproponował pan Lesław Skrzypek z Rzeszowa.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 8/1994

Przypominamy treść zadań:

283. Wyznaczyć wszystkie liczby dodatnie a , dla których funkcja $f(x) = ax(1-x)$ ma następującą własność: istnieje taka liczba $c \in (0; 1)$, że $f(f(c)) = c \neq f(c)$.

284. Na bokach AB i AC trójkąta ostrokątnego ABC obrano odpowiednio punkty M i N . Okręgi, których średnicami są odcinki BN i CM , przecinają się w punktach P i Q . Udowodnić, że ortocentrum trójkąta ABC leży na prostej PQ .

283. Jeśli liczba $c \in (0; 1)$ spełnia postulowane warunki

$$a^2c(1-c)(1-ac+ac^2) = c \neq ac(1-c),$$

czyli

$$a^2(1-c)(1-ac+ac^2) = 1 \neq a(1-c),$$

to liczba $b = 1 - c$ spełnia warunki

$$(1) \quad a^2b(1-ab+ab^2) = 1 \neq ab.$$

Pierwszy z nich zapisujemy w postaci równania

$$a^2b(1-ab) = 1 - a^3b^3,$$

które następnie dzielimy stronami przez różny od zera czynnik $(1-ab)$:

$$(2) \quad a^2b = 1 + ab + a^2b^2.$$

Traktując to jako równanie kwadratowe z niewiadomą b (i „parametrem” a), obliczamy wyróżnik $\Delta = a^2(a+1)(a-3)$, który musi być nieujemny. Stąd $a \geq 3$.

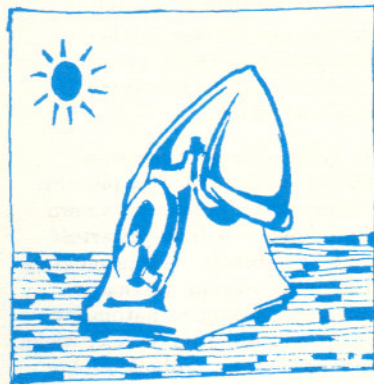
Gdy $a = 3$, równanie (2) ma pierwiastek podwójny $b = 1/3$, niedopuszczalny, w myśl warunku $ab \neq 1$. Gdy $a > 3$, równanie (2) ma dwa pierwiastki rzeczywiste, których suma równa się $(a^2 - a)/a^2 > 0$, a iloczyn równa się $1/a^2 \leq 1/9$ (Viète); zatem co najmniej jeden z pierwiastków leży w przedziale $(0; 1)$. Z postaci równania (2) widać, że ab nie może być jedynką (dla $a > 3$); są więc spełnione warunki (1).

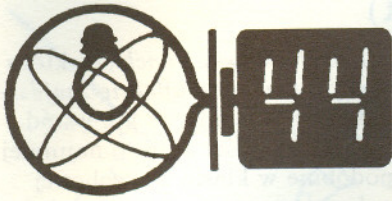
Wniosek: funkcja f ma omawianą własność wtedy i tylko wtedy, gdy $a > 3$.

284. Niech B' i C' będą spodkami wysokości poprowadzonych odpowiednio z wierzchołków B i C na przeciwległe boki. Oznaczmy rozważane w zadaniu okręgi (o średnicach BN i CM) odpowiednio przez k_1 i k_2 , a okrąg, którego średnicą jest bok BC - przez k_3 ; przechodzi on przez punkty B' i C' . Tak więc

$$k_1 \cap k_3 = \{B, B'\}, \quad k_2 \cap k_3 = \{C, C'\}, \quad k_1 \cap k_2 = \{P, Q\}.$$

Zatem prosta PQ przechodzi przez punkt przecięcia prostych BB' i CC' , czyli ortocentrum trójkąta ABC .





Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 173 (WT=3,23), 174 (WT=3,23),
179 (WT=2,80) i 180 (WT=3,95)
z numerów 2/1994, 5/1994 i 6/1994

Andrzej Nowogrodzki	- Chocianów	38,37
Andrzej Borowski	- Aleksandrów K.	34,46
Aleksander Surma	- Myszków	21,49
Dariusz Wilk	- Rezsów	19,43
Artur Gawryszczak	- Dubeczno	12,30
Przemysław Gadziński	- Środa Śląska	11,70
Przemysław Gworys	- Częstochowa	11,69

189. Gdy włączono rotacyjną pompę próżniową, ciśnienie pod kloszem spadło w czasie $t_1 = 30$ s od ciśnienia atmosferycznego p_{atm} do wartości $(1/2)p_{atm}$. Po długim czasie praca pompy doprowadziła do obniżenia ciśnienia do wartości $p_k = (1/100)p_{atm}$; niższego ciśnienia nie udało się osiągnąć ze względu na nieszczelności klosza. Jeśli pompę wyłączyć (i zamknąć zawór prowadzący do niej), to po jakim czasie dopływ powietrza przez nieszczelności spowoduje wzrost ciśnienia do $\frac{1}{2}p_{atm}$?

Wskazówka: Przyjmijmy, że ilość gazu przepływającego przez mały otwór jest proporcjonalna do różnicy ciśnień (jest to uzasadnione wtedy, gdy o szybkości przepływu decyduje lepkość, tzn. w praktyce dla bardzo małych szczelin).

190. Ocenic orientacyjnie maksymalną wysokość, na jaką może się wzbic latawiec o powierzchni płatu $S = 0,5$ m² i masie $m = 400$ g uwiązany na lince o masie na jednostkę długości $\sigma = 10$ g/m, jeśli prędkość wiatru wynosi $v = 15$ m/s. Gęstość powietrza jest równa $\rho = 1,3$ kg/m³.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 8/1994

Przypominamy treść zadań:

181. Cienka powłoka kulista o masie m i promieniu r znajdująca się w próżni i naładowana ładunkiem Q rozpadła się nagle na małe kawałeczki. Obliczyć prędkość uzyskaną przez odpryski w wyniku ich wzajemnego odpychania.

182. Siła sprężystości wywierana przez sprężynę dana jest wzorem $F = kx$ (x – wydłużenie), przy czym stała sprężystości k maleje ze wzrostem temperatury. Udowodnić, że adyabatycznemu rozciąganiu tej sprężyny towarzyszy spadek temperatury.

181. Powłoka ma początkowo energię elektrostatyczną równą $E = \frac{Q^2}{2C}$, gdzie C jest pojemnością kuli równą $C = 4\pi\epsilon_0 r$. Energia ta przechodzi w energię kinetyczną odprysków, zatem

$$\frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{2} m v^2,$$

czyli $v = \frac{Q}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 r m}}$.

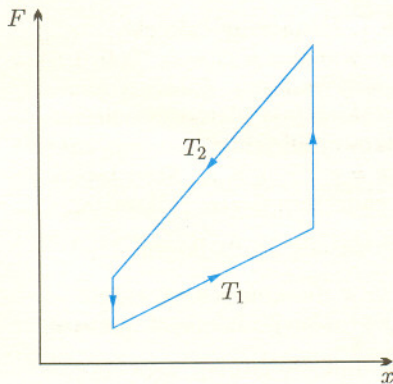
182. a) Załóżmy na początek, że przy adyabatycznym rozciąganiu sprężyny nie ma zmiany temperatury, tzn. adiabata jest jednocześnie izotermą. Z dwóch takich „adiabato-izoterm” odpowiadających temperaturom T_1 i T_2 oraz dwóch „izochor” (przemian prowadzących od jednej temperatury do drugiej, przy stałym wydłużeniu x) możemy zbudować cykl przedstawiony na rysunku. Jeśli obieg cyklu jest lewoskrętny, to kurcząc się (wzdłuż „adiabato-izoterm” T_2) sprężyna wykonuje większą pracę, niż trzeba włożyć w jej rozciąganie (wzdłuż T_1), zatem mamy do czynienia z silnikiem. Z założenia o wzroście siły przy spadku temperatury wynika, że $T_1 > T_2$. Energia jest dostarczana silnikowi w formie ciepła przekazywanego na pionowych „izochorach”: wzdłuż lewej „izochory” temperatura rośnie, czyli ciepło jest dostarczane, a wzdłuż prawej ciepło jest odbierane. Zauważmy jednak, że nie zmieniając lewej części cyklu możemy dowolnie odsunąć prawą „izochorę”, czyli dowolnie zwiększyć pracę silnika nie zmieniając dostarczonego ciepła. Jest to sprzeczne z pierwszą zasadą termodynamiki. Założyliśmy tu, że ciepło dostarczone na lewym odcinku jest ograniczone, czyli ciepło właściwe sprężyny ma skończoną wartość.

b) Skoro adiabata nie pokrywa się z izotermą, to zbudujmy cykl Carnota z dwóch izoterm i dwóch adiabat. Aby go zilustrować graficznie, wystarczy zastąpić pionowe odcinki na rysunku bardziej skomplikowanymi krzywymi (adiabatami), podczas gdy izoterm T_1 i T_2 pozostaną nie zmienione. Zgodnie z drugą zasadą termodynamiki ciepło musi odpywać przy wyższej temperaturze, czyli wzdłuż dolnej izoterm T_1 . Skoro utrzymanie stałej temperatury przy rozciąganiu sprężyny wymaga dostarczania ciepła, to jasne jest, że zaprzestanie dopływu ciepła spowoduje spadek temperatury, c.b.d.o.

Posługując się nieco bardziej zaawansowanymi metodami można udowodnionemu powyżej twierdzeniu nadać postać ilościową:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_{adiab} = T x \frac{dk}{dT} \frac{1}{c_x},$$

gdzie c_x jest pojemnością cieplną sprężyny przy stałym wydłużeniu, tzn. ilorazem dostarczonego ciepła i przyrostu temperatury.



Częstym motywem zadań olimpijskich jest *zasada szufladkowa Dirichleta*, która mówi, że jeżeli $kp + 1$ kul wrzucimy do p szuflad, to w pewnej szufladzie znajdzie się co najmniej $k + 1$ kul. Stąd na mocy tej zasady stwierdzamy, że np. wśród 13 liczb naturalnych jest co najmniej 7 jednakowej parzystości oraz co najmniej dwie, których różnica jest podzielna przez 12; podobnie w klasie 25-osobowej znajdziemy co najmniej troje uczniów urodzonych w tym samym miesiącu itd. Mamy nadzieję, że podane przykłady pokazują, jak prosta jest sama zasada szufladkowa Dirichleta. Dlaczego trafia więc ona do zadań olimpijskich? Otóż przy rozwiązywaniu zadania, w którym chcemy zastosować zasadę szufladkową, najtrudniej jest stwierdzić, czym w zadaniu są „kule”, a czym „szuflady”.

Zadanie 1. (Bundeswettbewerb Mathematik – Olimpiada Niemiecka, 1994)

Danych jest 11 liczb rzeczywistych. Udowodnić, że co najmniej dwie spośród nich mają rozwinięcia dziesiętne pokrywające się w nieskończonej ilości miejsc po przecinku. (Jeśli liczba ma skończone rozwinięcie dziesiętne, to uzupełniamy je zerami.)

Rozwiązanie.

Przypuśćmy, wbrew tezie, że każda para rozważanych liczb pokrywa się na skończonej ilości miejsc po przecinku. Par tych liczb jest równie skończenie wiele (dokładnie $\binom{11}{2} = 55$). Zatem dla dostatecznie dużej liczby naturalnej n , na n -tym miejscu po przecinku żadna para nie będzie się pokrywać. To jednak jest niemożliwe – liczb mamy 11, cyfr w układzie dziesiętnym 10, więc – na mocy zasady szufladkowej Dirichleta – pewne dwie liczby pokrywają się na n -tym miejscu po przecinku. Uzyskana sprzeczność dowodzi tezy zadania.

Zadanie 2. (Olimpiada Japońska, 1991)

Dany jest szesnastowy ciąg liczb jednocyfrowych różnych od zera. Wykazać, że spośród wyrazów tego ciągu można wybrać kilka kolejnych, których iloczyn jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie.

Niech a_1, \dots, a_{16} będzie rozważanym ciągiem. Dla każdego $i \in \{1, \dots, 16\}$ niech $p_i = a_1 \cdot \dots \cdot a_i$. Rozłóżmy liczbę p_i na czynniki pierwsze:

$$p_i = 2^{2\alpha_i + w_i} \cdot 3^{2\beta_i + x_i} \cdot 5^{2\gamma_i + y_i} \cdot 7^{2\delta_i + z_i},$$

gdzie każda z liczb w_i, x_i, y_i, z_i jest równa 0 lub 1. Oznaczmy czwórkę uporządkowaną (w_i, x_i, y_i, z_i) przez s_i . Jeśli dla pewnego i jest $s_i = (0, 0, 0, 0)$, to liczba p_i jest pełnym kwadratem, co dowodzi tezy zadania. Załóżmy więc, że dla każdego i mamy $s_i \neq (0, 0, 0, 0)$. Czwórek takich jest piętnaście, liczb zaś p_i szesnaście. Zatem na mocy zasady szufladkowej Dirichleta istnieją takie dwie liczby k, l należące do zbioru $\{1, \dots, 16\}$, że $k < l$ i $s_k = s_l$. Stąd łatwo dostajemy, że liczba $p_l/p_k = a_{k+1} \cdot \dots \cdot a_l$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Poniższe zadania można rozwiązać wykorzystując zasadę szufladkową. Jak?

3. Dana jest liczba pierwsza $p > 5$. Udowodnić, że w nieskończonym ciągu 1, 11, 111, 1111, ... istnieje nieskończenie wiele wyrazów podzielnych przez p .

4. Dane są liczby całkowite a_1, a_2, \dots, a_{11} . Udowodnić, że istnieje taki ciąg x_1, x_2, \dots, x_{11} o wyrazach ze zbioru $\{-1, 0, 1\}$ nie złożonych z samych zer, dla którego liczba $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_{11}x_{11}$ jest podzielna przez 1994.

5. Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej $k > 1$ istnieje wielokrotność liczby k , mniejsza od k^4 , którą można zapisać za pomocą co najwyżej czterech różnych cyfr (w dziesiętnym układzie pozycyjnym).

6. Określamy rekurencyjnie ciąg $\{F_n\}$: $F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Udowodnić, że w zbiorze $\{F_1, F_2, \dots, F_{1000001}\}$ istnieje liczba zakończona co najmniej trzema zerami.

7. Dowieść, że z $(k^2 + 1)$ -wyrazowego ciągu różnych liczb rzeczywistych można wybrać $(k + 1)$ -wyrazowy podciąg monotoniczny.

Krzysztof CHEŁMIŃSKI
Waldemar POMPE



Rok temu ogłosiliśmy kolejny konkurs świąteczny (zatytułowany: „Czy Pan istnieje?”). Tym razem otrzymaliśmy sporo odpowiedzi, ale jedynie Panowie: Przemysław Gadziński ze Środy Śląskiej, Hubert Klekowicz z Warszawy i Janusz Olszewski z Suwałk nadesłali poprawne rozwiązania wszystkich pięciu zadań. Serdecznie gratulujemy! Przypominamy, że rozwiązania podaliśmy w numerach 2/1994 i 3/1994.

Znowu nadchodzą Święta, chcielibyśmy więc zaproponować Czytelnikom kolejną zabawę – tym razem innego rodzaju.

Ostatnio często spotykamy się z tym, że rozmaite firmy, instytucje itp. używają w swej nazwie słowa „Delta”. Istnieje więc Radio DELTA (w Bielsku-Białej), Przedsiębiorstwo Produkcji Spożywczej DELTA (w Tarnowie Podgórnym), Wydawnictwo DELTA (nie wiemy, gdzie ma swoją siedzibę, ale wydało co najmniej jedną książeczkę – „Sportowcy”, przeznaczoną dla małych dzieci, ISBN 83-900628-0-1 – na okładce jest chłopak lecący na lotni, na której jest wielki napis: „I ♥ DELTA”), w wypożyczalniach wideo znajdują się kasety z filmem „DELTA Force”... Stop! Znamy jeszcze parę, ale na razie ich nie podamy. Mamy natomiast prośbę do Czytelników. Jeśli zauważycie gdziekolwiek wykorzystującego w nazwie słowo „DELTA” – napiszcie do nas! Po pewnym czasie wydrukujemy wszystkie nadesłane informacje. A może ktoś dostrzeże wykorzystanie słowa „EPSILON”? Nam się nie udało...

Wszyscy, którzy trochę bliżej zetknęli się z matematyką (i nie tylko oni), wiedzą, że liczba e jest niewymierna. Gdy jednak zapytałem parę znajomych osób, zajmujących się matematyką, czy znają dowód tej własności, usłyszałem „musiał(a)bym się zastanowić... to chyba nie jest elementarne?” czy coś w tym rodzaju. Może warto więc przypomnieć prosty dowód niewymierności e .

Najbardziej zaawansowanym faktem, który wykorzystamy, będzie dobrze znana już studentom I roku (a i niektórym młodszym) informacja, że $e = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$. Przypuśćmy teraz, że e da się przedstawić w postaci ułamka $\frac{p}{q}$, gdzie p i q są naturalne. Wobec tego $p = eq$, więc $eq!$ jest liczbą naturalną. Ale $eq! = q! + \frac{q!}{2!} + \dots + \frac{q!}{q!} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \dots$, czyli $\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \dots$ jest liczbą naturalną. To jest jednak niemożliwe, gdyż $0 < \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \dots \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots < \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} + \dots = 1$, jako suma nieskończonego ciągu geometrycznego.

Niewymierność liczby e dowiódł Leonhard Euler w 1748 roku. Powyższy dowód podał w 1815 roku Jean Baptiste Fourier. (KC)

Oj, myślę sobie czasem, że sam się śmieję,
Dlaczego to zbiór wszystkich zbiorów nie istnieje.
Oj, byłby to hałas spory,
Gdyby zebrać wszystkie zbiory.
Oj, dana, dana...

Tak brzmi pierwsza spośród osiemnastu zwrotek znakomitego „Hymnu Matematyków”. Piosenka (śpiewać ją należy na znaną melodię „Umarł Maciek, umarł”) powstała w latach sześćdziesiątych w środowisku warszawskim. Nie czujemy się upoważnieni do umieszczenia w *EPSILONIE* całości (ale może *Delta*...?). Cały hymn został opublikowany w „Rajdowym śpiewniku matematyków” (wydanym w Warszawie pod koniec lat siedemdziesiątych), a 10 zwrotek w słynnym śpiewniku „Bazuna” (wyd. II poprawione i rozszerzone, tom I, Gdańsk 1977).

Przez wiele lat w Krakowie różne osoby próbowały dopisać dalsze zwrotki, ale im się to nie udawało. Co się jednak odwlecze... Poniżej zamieszczamy osiem zwrotek, których autorem jest Jacek Szybowski, student matematyki UJ.

Oj, czy ktoś zna odpowiedź? Ja się ciągle waham:
Jak szybko można biegać w przestrzeni Banacha?
Oj, zapytam się Cauchy’ego,
Bo w niej zbieżne ciągi jego.

Oj, ludzie mi wmawiają rzeczy niepojęte
Że wszystkie zbiory zwarte muszą być domknięte.
A ja chętnie się założę –
Łomem każdy zbiór otworzę.

Oj, mógłby mi MKOl zrobić frajdę świetną
Pomiarów dokonując metryką dyskretną.
W pchnięciu kulą i w trójskoku
Miałbym medal już co roku.

Oj, widząc C do trzeciej wieli tak myślało:
„Ta przestrzeń jest normalna i ma piękne ciało”.
Lecz niejeden się przekonał,
Że w połowie urojona.

Oj, była dzisiaj w barze draka nadzwyczajna,
Barmankę klient prosił o butelkę Kleina.
Ona się tym nie zraziła:
Czas do ceny doliczyła!

Oj, jest to dla kierowców teza niebanalna,
Że nie ma drogi, która nie jest prostowalna.
Ale ja się zapytuję:
Kto nam drogi wyprostuje?

Oj, miałem ja ostatnio wyraz twarzy dziwny,
Gdym w ciele C element znalazł prymitywny.
Więc zadanie się szykuje:
Ja go ucywilizuję.

Oj, straszny to wypadek, acz pouczający:
Raz zero w siebie wchłonął zbiór pochłaniający.
Otoczenie się nadeło
I zbiór cały pochłonęło.