

## SPIS TREŚCI

### NUMERU 11(246)

O czym wiedzieli Wikingowie...	str. 1
Jak porowaty lód przewodzi ciepło i co to ma wspólnego z kometami <i>Konrad Kossacki</i>	str. 1
Patrz w niebo	str. 2
Czy różnaitości nieorientowalne muszą mieć dziury?	str. 3
Pas Kuipera chyba istnieje <i>Tomasz Kwast</i>	str. 4
Zadania	str. 5
Minimalny czworoscian	str. 6
O liczbach przestępnych	str. 7
Mała Delta	str. 8
Pływanie sitem <i>Krzysztof Rejmer</i>	str.10
Klub 44	str.13
Dear Dr. Ksieźnilacki...	str.14
Kącik olimpijski	str.16
Epsilon	str.17

### W następnym numerze:

#### Zjawisko „Halo”

Okladkę wykonał  
*Bernard BADZIOCH*

Wydawca:  
Uniwersytet Warszawski  
Krakowskie Przedmieście 26/28  
00-927 Warszawa

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego  
i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,  
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.

Komitet Redakcyjny:	Redaguje kolegium w składzie:
Andrzej Białynicki-Birula	Krzysztof Biesaga
Bogdan Cichoński	Piotr Hajłasz
Roman Duda	Jan Kalinowski – z-ca red. nac.
Jan A. Gaj	Krystyna Kordos – sekr. red.
Tomasz Hofmokl	Marek Kordos – red. nac.
Marta Kicińska-Habior	Tomasz Kwast
– przewodnicząca	Krzysztof Rejmer
Krzysztof Maślanka	Paweł Strzelecki
Andrzej Mąkowski	Joanna Udalska
– wiceprzewodniczący	
Andrzej Pelczar	Adres Redakcji:
Zbigniew Plochocki	ul. Smyczkowa 5/7
Zdzisław Pogoda	02-678 Warszawa
Michał Różycka	tel. 43-02-43 wewn. 21
Konrad Rudnicki	HAJLASZ@MIMUW.EDU.PL
Zbigniew Semadeni	Wydrukowano w Zakładach Graficznych
Grzegorz Sitarski	w Warszawie, ul. Srebrna 16
Mieczysław Subotowicz	Skład systemem TeX wykonała Redakcja.
Andrzej Szymacha	
Andrzej Woszczyk	
Wacław Zawadowski	

#### WARUNKI PRENUMERATY w AMOS-ie

Od stycznia 1993 r. prenumeratę „Deltę” prowadzi również firma AMOS, 01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21). Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 1994 roku wynosi 10 000,- zł, a w 1995 roku 15 000,- zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru wynosi w 1994 r. 22 000,- zł, a w 1995 r. – 30 000,- zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** AMOS dostarcza „Deltę” pod wskazany adres nie pobierając dodatkowej opłaty. Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Blankiet pocztowy na prenumeratę „Deltę” w AMOS-ie zamieszczamy na str. 9/10.  
Konto AMOS-u: **PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136**

#### WARUNKI PRENUMERATY w RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na I kwartał 1995 r. wynosi 45 000,- zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
  - na teren kraju
  - jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób,
  - na zagranicę
  - „Ruch” S.A. Oddział Warszawa, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – dostawa odbywa się **pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty**, z wyjątkiem zlecenia dostawy pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni pokrywa prenumerator.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
  - na kraj i zagranicę – do 20 XI na I kwartał roku następnego
  - do 20 II na II kwartał
  - do 20 V na III kwartał
  - do 20 VIII na IV kwartał.

Cena 1 egzemplarza 10 000,- zł

## O czym wiedzieli Wikingowie...

Około 890 roku Wulfstan, podróżujący w misji władającego Anglią Alfreda Wielkiego, wyruszył z Hedeby na Półwyspie Jutlandzkim, by po siedmiu dniach żeglugi dopłynąć do położonego nad jeziorem Drużno pruskiego portu Truso (koło dzisiejszego Elbląga), którego pozostałości odnaleziono dopiero na początku lat osiemdziesiątych naszego stulecia. W relacji podróżnika znajduje się następujący, zagadkowy fragment:

„A Estowie posiadają taką umiejętność, że potrafią wytwarzać zimno. I dlatego nieboszczyk leży tam długo i nie rozkłada się, ponieważ działają na niego zimnem. A jeśli postawi się dwa naczynia pełne piwa lub wody, potrafią oba zamrozić, obojętnie czy jest lato, czy zima.”

Czy słowa te są wyłącznie produktem wyobraźni średniowiecznego wędrowca, czy może kryje się w nich ziarno prawdy? Gdyby chodziło jedynie o nieznaczne obniżenie temperatury, rzecz byłaby prosta, można wykorzystać do tego zjawisko parowania. W krajach Południa znane są naczynia (zwane w Hiszpanii „alcarraze”, a w Egipcie „gole”) wykonane z niewypalanej gliny, mające tę własność, że przechowywana w nich woda ma niższą temperaturę niż otoczenie. Dzieje się tak dlatego, że woda przesącza się przez ścianki naczynia, wykonanego (co ważne) z niewypalanej gliny, i paruje z jego zewnętrznej powierzchni, odbierając ciepło od znajdującej się w nim wody. Im wyższa temperatura powietrza i im mniejsza jest jego wilgotność, tym intensywniejsze jest parowanie, a co za tym idzie – większa różnica temperatur, jaką można osiągnąć. Nie przekracza ona jednak kilku stopni Celsjusza. Tymczasem Wulfstan pisał:

„Gdy umrze tam jakiś człowiek, nie spalony on leży w swoim domu u rodziny i przyjaciół jeden miesiąc lub niekiedy dwa, królowie zaś i inni wysoko postawieni ludzie o tyle dłużej, ile więcej mają bogactw, niekiedy przez pół roku nie są oni spaleni i leżą na wierzchu w swoich domach.”

Obniżenie temperatury pozwalające zahamować biologiczne procesy rozkładu musiałoby być znaczne, wymagałoby temperatur poniżej 0°C. Nie wchodzi tu w grę magazynowanie lodu. Musiałoby go być dużo, co nawet przy założeniu, że 1100 lat temu panował w Europie chłodniejszy klimat, byłoby raczej niemożliwe. Co więcej, mieszkańcy Północy ten sposób byłby znany lepiej niż Bałtom, byłby też dla niego czymś zwyczajnym, a więc niegodnym wzmianki. Wulfstan mówi o „wytwarzaniu zimna”, czyli o jakiejś aktywnej działalności, nieznaney w jego kręgu kulturowym. Wydaje się, że wytworzenie dużej różnicy temperatur wymaga zaawansowanej techniki. Zdrowy sceptycyzm nakazuje potraktować relację Wulfstana jako wytwór fantazji, gdyby nie rozwiązanie innej fascynującej zagadki pochodzącej z tej samej epoki.

Żeglujący po północnych morzach Wikingowie nie znali kompasu, a mimo to byli doskonałymi nawigatorami i potrafili (jak podają stare norweskie sagi) określić położenie Słońca nawet wtedy, gdy nie było ono widoczne. Pieśni mówią, że posługiwali się w nawigacji „kamieniami słonecznymi”. Można rzec: fantazja poety. A jednak...

Zagadka została rozwiązana w latach sześćdziesiątych naszego stulecia. Położenie Słońca można określić na podstawie stopnia polaryzacji światła rozproszonego w ziemskiej atmosferze, zależy on od kierunku obserwacji względem kierunku do Słońca. Polaryzację światła można badać posługując się kryształami dichroicznymi.

## Jak porowaty lód przewodzi ciepło i co to ma wspólnego z kometami

Konrad KOSSACKI

Określenie *porowaty lód* jest bardzo ogólne. Porowatym lodem jest zarówno świeży śnieg, jak i zamrożona woda z kranu (kto nie wierzy, niech zmierzy gęstość i porówna z wartością tablicową dla czystego lodu). Różnica między podanymi przykładami porowatego lodu polega przede wszystkim na wielkości porów i ich łącznej objętości. Zazwyczaj zamiast objętości porów podaje się stosunek objętości porów do objętości całej substancji z porami włącznie, nazywany porowatością. Dodatkową różnicą między śniegiem i zamrożoną wodą jest to, że pory w świeżym śniegu są ze sobą połączone, podczas gdy w zamrożonej wodzie występują w postaci zamkniętych pęcherzyków. Na ogół, przy porowatości poniżej 0,2–0,3 wszystkie pory w lodzie są oddzielone od siebie, a przy porowatości większej procent porów połączonych rośnie ze wzrostem porowatości. Tak więc podstawowe parametry charakteryzujące porowaty lód to jego porowatość i przeciętny rozmiar porów.

Jedną z najciekawszych właściwości porowatego lodu jest jego przewodnictwo cieplne, które w zależności od warunków może być wyższe lub niższe od przewodnictwa cieplnego lodu nieporowatego. Dokładny opis transportu ciepła w śniegu – czy ogólniej – w porowatym lodzie jest bardzo skomplikowany. Aby problem uprościć, można, na przykład, zapomnieć o istnieniu powietrza w porach. Założenie to jest nie tylko wygodnym uproszczeniem, ale dokładnie odpowiada warunkom występującym na powierzchni ciał kosmicznych pozbawionych atmosfery. Takich ciał kosmicznych jest wiele, na przykład są to komety. Wprawdzie w czasie przelotu komety przez centrum Układu Słonecznego jej jądro jest otoczone wyraźnie widocznym obłokiem, ale gęstość tego obłoku jest znikoma. Będziemy więc utożsamiać pojęcia *kometa* i *jądro komety*. Są przynajmniej dwa powody, dla których komety zasługują na szczególną uwagę.

1) Jądro komety składa się prawie wyłącznie z lodu i skały. Przyjmuje się, że przed pierwszą wizytą w centralnej części Układu Słonecznego kometa jest bryłą luźno związanych ziarenek lodu i okruchów skalnych. Gęstość jądra komety Halleya (wyznaczona w czasie jej ostatniego przelotu przez centrum Układu Słonecznego) jest znacznie mniejsza od gęstości lodu – przynajmniej dwukrotnie, to znaczy porowatość jądra wynosi przynajmniej 0,5. Nie jest to wcale rekord. Kometa Du Toit-Hartley ma jądro, w którym aż 80% objętości jest puste. Można więc uznać, że jądro komety jest dobrym przykładem bryły porowatego lodu umieszczonego w próżni (choć zanieczyszczonego skalnymi okruchami). Szczęśliwie przewodnictwa cieplne lodu i skały są zbliżone, a w temperaturze około 140 K są nawet równe. Z tego powodu zaniedbanie obecności ziarenek skały przy analizie przewodnictwa cieplnego nie jest wielkim błędem. Duże porowatości pozwalają przyjmować, że większość porów jest połączona. Jeśli chodzi o rozmiar porów, to będziemy zakładać, że są nie większe niż 0,1 milimetra.

2) Analizy materiału wyrzucanego z jądra komety Halleya, wykonane przez satelitę Giotto podczas jego zbliżenia do tej komety w 1986 roku, pozwalają sądzić, że skład tej komety (a więc prawdopodobnie i innych) pozostał prawie nie zmieniony od powstania Układu Słonecznego. Dokładne zbadanie jądra komety byłoby więc bardzo pouczające.

Najdokładniejszym sposobem poznania budowy komety jest pobranie próbki z jej powierzchni.

Istnieje już projekt wysłania satelity na jedną z lepiej poznanych komet. Program nosi nazwę ROSETTA i prawdopodobnie będzie realizowany wspólnie przez NASA i Europejską Agencję Kosmiczną ESA. Ze względu na koszty tego przedsięwzięcia termin jego realizacji nie jest jeszcze określony.

Wysłanie próbnika lądującego i wykonującego wiercenia wymaga wcześniejszego oszacowania wytrzymałości powierzchni komety. Dobrze by było, gdyby wytrzymałość ta była jak najmniejsza, gdyż ze względu na znikomą siłę przyciągania grawitacyjnego komety (na powierzchni komety Halleya jest ona około dziesięć tysięcy razy mniejsza niż na Ziemi) próbnik może nie zapaść się przy lądowaniu. Wywiercenie otworu w celu pobrania próbki będzie wtedy bardzo trudne, ponieważ znikoma grawitacja uniemożliwi dociśnięcie wiertła.

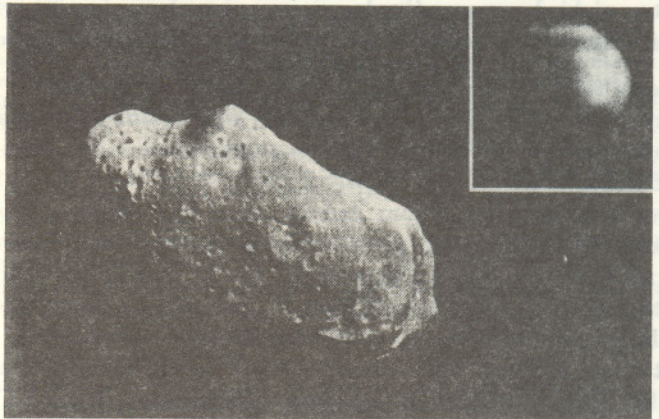
Po przebadaniu naturalnie występujących w Skandynawii kryształów o tej własności stwierdzono, że najlepszym kandydatem do miana „kamienia słonecznego” jest kordieryt  $Mg_2Al_3(AlSi_5O_{18})$ . Piękne, jubilerskie kordieryty znajdowane są w Norwegii i Finlandii, a także w Szwajcarii. W Polsce można je gdzieś spotkać w Sudetach. Kordieryt pozwala znaleźć położenie Słońca z dokładnością do  $2;5$ , nawet jeśli znajduje się ono  $7^\circ$  poniżej linii widnokregu. Dla Wikingów pływających często poza kręgiem polarnym takie kamienie musiały być czymś bezcennym. Ten sposób nawigacji stosowany jest czasem w lotnictwie. Tak zwany kompas zmierzchu, którego istotnym elementem jest filtr polaryzacyjny, stosowany jest do określenia położenia Słońca po jego zachodzie, na podstawie zmian polaryzacji błękitu nieba wraz z kierunkiem obserwacji.

Może więc warto czasem potraktować poważnie stare legendy i kronikarskie zapisy, które w pierwszej chwili wydają się nam wątpliwe i z szacunkiem spojrzeć na umiejętności naszych przodków lub współczesnych nam ludów, które zwykliśmy uważać za dzikie...

Krzysztof REJMER

## Patrz w niebo

Dzięki misjom Pioneerów i Voyagerów odkrytych zostało wiele nowych satelitów planet Układu Słonecznego, stale odkrywane są nowe satelity Słońca, tj. planetoidy (w tym również pozaplutonowe), odkryto satelity pulsara, czyli właściwie planety obiegające inną gwiazdę (nasz rodak, Aleksander Wolszczan pracujący w USA), wreszcie w lutym tego roku odkryto pierwszego satelitę planetoidy. Mianowicie analiza obrazów przesłanych przez sondę Galileo (zmierzającą ku Jowiszowi) wykazała, że planetoida 243 Ida ma małego towarzysza. Sama Ida to nieregularny blok skalny o najdłuższym wymiarze 56 km, jej satelita jest nawet bardziej niż ona zbliżony do kuli o średnicy nie przekraczającej 1 km. Przypuszcza się, że obrazy uzyskane w ciągu kilku następnych miesięcy ukażą go dokładniej.



Za wcześnie jest, oczywiście, dociekać, jakie jest pochodzenie tego satelity. Przechwycenie drobnego okruchu materii przez planetoidę jest niezmiernie mało prawdopodobne ze względu na słabą grawitację planetoidy i konieczność udziału w takim wydarzeniu jakiegoś trzeciego ciała. Raczej można się spodziewać, że satelita jest fragmentem Idy, który od niej niezbyt gwałtownie odpadł wskutek zderzenia z innym okruchem lub wskutek rotacji planetoidy. Cokolwiek zaszło w przeszłości i tak musiało być fenomenem wyjątkowym, bowiem wynikiem jest układ, w którym prędkości względne są rzędu 100 m/s, podczas gdy normalnie tak małych prędkości względnych w Układzie Słonecznym po prostu nie ma.

Tomasz KWAST

## Czy różnorodności nieorientowalne muszą mieć dziury?

Słowniczek:

### Różnorodność

to np. prosta, okrąg, płaszczyzna, sfera albo wstęga Möbiusa. Pierwsze dwie to różnorodności 1-wymiarowe, pozostałe – 2-wymiarowe. Oczywiście, jest dużo innych różnorodności wymiaru 2 i wyższego. Ogólnie, różnorodność  $n$ -wymiarowa to coś, czego każdy odpowiednio mały fragment jest podobny do kawałka (konkretnie – kuli otwartej  $w$ ) przestrzeni  $n$ -wymiarowej  $\mathbf{R}^n$ .

Uwaga: Kula otwarta w  $\mathbf{R}^2$  to koło bez brzegu, w  $\mathbf{R}^1$  (na prostej) to odcinek bez końców.

### $n$ -wymiarowiec

to stwór, który mieszka w przestrzeni  $\mathbf{R}^n$ .

Możemy go też umieszczać w różnorodnościach  $n$ -wymiarowych (w tych małych fragmentach, które wyglądają jak kule).

Uwaga: Zakładamy, że  $n$ -wymiarowiec ma podobną do człowieka budowę anatomiczną, tzn. ma dokładnie dwie  $n$ -wymiarowe ręce zakończone dłońmi i dłoń prawa jest odróżnialna od lewej!

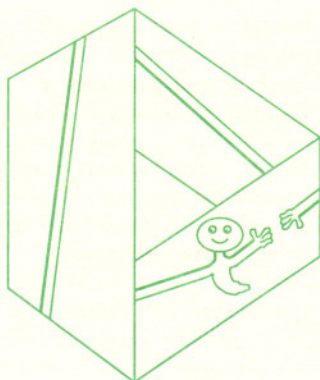
### Różnorodność nieorientowalna

to, na przykład, wstęga Möbiusa, butelka Kleina albo płaszczyzna rzutowa.

Nieorientowalność oznacza tyle, że jeśli umieścimy w różnorodności dwóch  $n$ -wymiarowców, z których jeden jest złośliwy, to może on porwać koleżkę prawą rękawiczką, obiec z nią różnorodność „dookoła”, skutkiem czego rękawiczka zmieni się na lewą.

Wyobraźmy sobie  $n$ -wymiarowca (patrz definicja w słowniczku) i umieścimy go w różnorodności  $n$ -wymiarowej nieorientowalnej.

Jak wiadomo,  $n$ -wymiarowcy są często obdarzeni specjalnymi zdolnościami, na przykład ten nasz potrafi rozciągać ręce, a ponieważ różnorodność jest nieorientowalna, więc może tak rozciągnąć swoją prawą rękę, że jego prawa dłoń wróci do niego jako lewa.



Przypuśćmy, że chwyci się on teraz za dłonie i zacznie „ściągać”. Gdyby w różnorodności nie było dziur, to mogłoby to robić bez przeszkód, aż znalazłby się w kawałku podobnym do przestrzeni  $\mathbf{R}^n$  (a więc orientowalnym).

Ale przecież cały czas trzymał się za ręce, więc po ściągnięciu miałyby dwie lewe dłonie, co jest w kawałku orientowalnym niemożliwe, nawet dla  $n$ -wymiarowca!

Maciej RADZIEJEWSKI

Przed pierwszym wejściem do centrum Układu Słonecznego kometa jest więc bryłą słabo zlepionych ziarenek. Z eksperymentów wiadomo, że ziarenka lodu mają tendencję do zlepiania się pod wpływem ciepła. Gdy kometa zbliża się do Słońca, temperatura powierzchni jądra wzrasta. Wzrost twardości i grubości skorupy zależy od szybkości przenikania ciepła w głąb jądra, a więc od przewodnictwa cieplnego. Gdyby przewodnictwo cieplne jądra było bardzo niskie, ciepło przenikałoby w głąb bardzo powoli, a więc nagrzewałaby się praktycznie sama powierzchnia jądra i zlepianie ziarenek lodu zachodziłoby z zauważalną szybkością tylko w cienkiej warstwie przy samej powierzchni jądra komety. Cienka warstwa zlepionych ziarenek nie wpływałaby istotnie na wytrzymałość mechaniczną jądra komety. Z drugiej strony, przy dużym przewodnictwie cieplnym szybko rosłaby grubość warstwy, w której temperatura wystarczałaby do szybkiego zlepiania ziarenek lodu.

Przepływ ciepła w porowatym lodzie odbywa się generalnie dwiema drogami: w samym lodzie i w porach. Można więc mówić o przewodnictwie cieplnym sieci ziarenek lodu oraz o przewodnictwie cieplnym porów.

### 1. Przewodnictwo cieplne sieci ziarenek lodu

Analiza przewodnictwa cieplnego samej sieci ziarenek lodu jest równoważna założeniu, że pory w ogóle nie przewodzą ciepła. (Założenie to jest dobre tylko w niskich temperaturach. Przy temperaturze wyższej niż około 220–240 K może się nawet okazać, że przewodnictwo cieplne porowatego lodu jest większe niż lodu bez porów.)

Przewodnictwo cieplne porowatej substancji powinno być mniejsze niż tej samej substancji bez porów i różnica powinna być tym większa, im większą część objętości zajmują pory. Założymy, że porowata substancja jest złożona z ziarenek. W takim razie możemy sobie wyobrazić analogię z obwodem elektrycznym złożonym z oporników i przewodów. Powierzchnia styku ziarenek jest, oczywiście, mniejsza niż średnia powierzchnia przekroju samych ziarenek, więc w tej analogii miejsca styku ziarenek będą opornikami, a same ziarenka przewodami łączącymi. Gdyby cała struktura była idealnie regularna, to wypadkowe przewodnictwo można by obliczyć. Niestety, struktura porowata lodu jest bardzo nieregularna. Wykonanie

dokładnych obliczeń wymagałyby znajomości rozmiarów i położenia wszystkich ziarenek. Byłoby to bardzo skomplikowane i czasochłonne. Tymczasem zupełnie zadowalające rezultaty można uzyskać stosując różne przybliżenia.

Omówimy tylko najprostszy, rurkowy model porów. Oddaje on poprawnie charakter zależności przewodnictwa cieplnego sieci ziarenek lodu od porowatości, a przy tym pozwala uniknąć skomplikowanych rachunków.

Wyobraźmy sobie sześcian o krawędzi  $l$  z porami w kształcie rurek o jednakowej średnicy, prostopadłych do jednej z powierzchni. Niech temperatura zmienia się tylko w kierunku równoległym do rurek. Wówczas stosunek przewodnictwa kostki z porami do przewodnictwa kostki nieporowatej będzie równy stosunkowi  $(l^2 - \text{powierzchnia przekrojów rurek})/l^2$ .

Porowatość jest w tym przypadku stosunkiem objętości rurek do objętości kostki. Stosunek przewodnictwa substancji porowatej do nieporowatej wynosi

$$1 - \psi,$$

gdzie przez  $\psi$  oznaczyliśmy porowatość. Tak więc przewodnictwo cieplne sieci ziarenek lodu (przewodnictwo cieplne porowatego lodu, liczone bez uwzględnienia przewodnictwa porów) wyniosłoby

$$\kappa_p = \kappa_l(1 - \psi),$$

gdzie wielkość  $\kappa_l$  jest przewodnictwem cieplnym nieporowatego lodu.

## 2. Przewodnictwo cieplne porów w lodzie

Transport ciepła w porach może się odbywać, na przykład, za pośrednictwem promieniowania elektromagnetycznego (głównie podczerwonego). Podstawową właściwością tego procesu jest to, że zachodzi bez względu na to, czy pory są wypełnione gazem, czy są całkowicie puste. Strumień energii wypromieniowanej przez ścianki poru jest proporcjonalny do czwartej potęgi temperatury (prawo Stefana-Boltzmann). Zatem po cieplejszej stronie poru emisja przeważa nad absorpcją, a po chłodniejszej odwrotnie i w ten sposób energia jest przenoszona ze strony cieplejszej na chłodniejszą. Przy temperaturze niższej niż temperatura topnienia lodu wodnego promienisty transport ciepła jest jednak zaniedbywalny.

Ponieważ pory w lodzie nie są naprawdę puste, nawet gdy lód jest umieszczony w próżni, transport promienisty nie jest jedynym możliwym sposobem transportu ciepła w porach. Żeby znaleźć inne

# Pas Kuipera chyba istnieje

Tomasz KWAST

W 1950 roku Jan Oort wysunął hipotezę, że Układ Słoneczny jest otoczony przez ogromne zbiorowisko drobnych brył, które właściwie są już obiektami międzygwiazdowymi, ale które zbliżając się przypadkowo do Słońca mogłyby w jego pobliżu stawać się kometami. Ten Obłok Oorta rozciągałby się do odległości 50 000 j.a. i zawierałby – powiedzmy – bilion potencjalnych komet. Choć do dziś jest tworem hipotetycznym, uważany jest przez niektórych badaczy za całkiem realny składnik naszego układu planetarnego.

W następnym roku Gerard Kuiper wysunął inną hipotezę, mianowicie, że w płaszczyźnie Układu Słonecznego w odległości 40–50 j.a. rozciąga się pas okruchów będących resztkami pozostałymi po uformowaniu się planet, a które wskutek rozrzedzenia nie mogły zebrać się w większe globy. Obłok Oorta mógłby stanowić zapas komet długookresowych, które zbliżają się do Słońca z kierunków przypadkowych, podczas gdy Pas Kuipera byłby źródłem komet krótkookresowych, których orbity istotnie leżą niemal w płaszczyźnie Układu Słonecznego.

Aby omawianie tego tematu wyszło poza same spekulacje, niezbędne było zaobserwowanie owych drobnych mieszkańców peryferii Układu. I tak się wreszcie stało, gdy we wrześniu 1992 roku i w marcu 1993 roku amerykańscy astronomowie – David Jewitt i Jane Luu – odkryli dwa ciała oznaczone odpowiednio 1992 QB1 i 1993 FW, o orbitach obszerniejszych niż orbita Plutona. Dziś liczba znanych nowych ciał pozaplutonowych sięga dziesięciu. W ten sposób realność Pasa Kuipera z pewnością przestała być nieprawdopodobna.

Jednak od dziesięciu obiektów do mrowia jest daleko. Jak odkrywać je masowo? Nie można na ślepo patrolować ogromnych obszarów nieba, choćby nawet skupiwszy się na sąsiedztwie ekliptyki, bo żadne obserwatorium nie udostępni wielkiego teleskopu do tak niepewnego przedsięwzięcia. A bez naprawdę wielkiego teleskopu nie da się zaobserwować czegoś w rodzaju planetoidy w odległości większej niż odległość Plutona. Obiekty znalezione przez Jewitta i Luu miały jasność około 23 mag przy rozmiarach szacowanych na 200 km, natomiast obiekt 10-kilometrowy w odległości Neptuna miałby jasność 26 mag. Należało więc opracować inną metodę umożliwiającą wydajniejsze poszukiwania protokomet. I projekt takiej metody istnieje: polega ona na rejestracji zaćmień gwiazd przez te drobne obiekty.

Pierwsza wzmianka na ten temat pochodzi (podobno) od Marka Baileya, wówczas studenta z Edynburga. Zauważył on, że ciała z Pasa Kuipera mogą przesłaniać gwiazdy. Z prostej geometrii wynika, że 1-kilometrowa bryła w Pasie Kuipera ma rozmiar kątowy 0,000 02 – zbliżony zresztą do rozmiaru piłki golfowej zostawionej przez Amerykanów na Księżycu i oglądanej z Ziemi. Duże lub bliskie gwiazdy mają rozmiary katowe większe, ale protokomet może już całkiem przesłonić przeciętną gwiazdę o jasności 13 mag i słabszą. A takich gwiazd jest mnóstwo. Należałoby więc nieprzerwanie śledzić sąsiedztwo ekliptyki (najlepiej na skrzyżowaniu jej z Drogą Mleczną) teleskopami o całkiem skromnych rozmiarach, zaopatrzonymi tylko w specjalistyczne odbiorniki promieniowania. Zaćmienie gwiazdy w tym przypadku oznacza bowiem, że przez teleskop przeleciał cień planetoidy z prędkością średnią 30 km/s (taka jest wszak prędkość Ziemi), co przy rozmiarach cienia rzędu kilometra daje przygaśnięcie gwiazdy na około 30 ms. Aparatura zdolna mierzyć tak szybkie zjawiska nie jest obecnie trudna do zbudowania. Ocenia się, że jeżeli w Pasie Kuipera jest – podobnie jak w obłoku Oorta – około biliona ciał, to jedna gwiazda powinna być zaćmiewana co kilka dni, ale już śledząc 100 gwiazd można by rejestrować zaćmienie częściej niż co godzinę.

Fałszywe zaćmienia mogą, oczywiście, być powodowane przez ptaki, samoloty, sztuczne satelity i in. Aby móc eliminować takie zjawiska, należy zbudować całą sieć teleskopów. Proponowany jest, na przykład,

system stu teleskopów ustawionych w czterech południkowych rzędach co 2 km. Zaćmienie, to właściwe, powinno zostać zarejestrowane zawsze przez co najmniej cztery teleskopy leżące na jednym równoleżniku i to w odstępach czasu określonych przez prędkość orbitalną Ziemi.

Optymiści uważają, że można by nawet wykorzystać rozmycie cienia planetoidy spowodowane dyfrakcją światła na jej krawędziach. Wprawdzie rozmycie to mogłoby utrudnić samo rejestrowanie zaćmienia, ale mogłoby też dostarczyć innej, niezmiernie ważnej informacji. Mianowicie, dyfrakcyjne ugięcie światła zależy od długości jego fali i od odległości przesłony, a więc śledzenie zaćmień w kilku barwach mogłoby doprowadzić do poznania trójwymiarowej struktury Pasa Kuipera!

Tym, co wywołuje pesymizm w tym projekcie, nie jest bynajmniej koszt stu teleskopów. Zauważmy, że w trakcie pracy kilka (może sto) teleskopów musi wykonywać pomiary jasności kilku (może stu) gwiazd w tempie 100 razy na sekundę, w dodatku może w kilku barwach. Każdy pomiar musi być wzbogacony o informację o czasie. Wszystko to razem daje nieprawdopodobne tempo napływu bajtów informacji do komputera, który musiałby je opracowywać. Komputer musiałby właściwie na bieżąco to robić, aby nie udławić się nadmiarem danych. Dlatego oczekuje się, że najdroższą częścią systemu obserwacyjnego będzie komputer, a dokładniej – jego oprogramowanie. Co prawda, jest to zmartwienie na wyrost, bowiem nie ma jeszcze mowy o tym, kto taką sieć teleskopów będzie budował, kiedy, gdzie itd. Idea projektu wydaje się jednak rokować nadzieje.



## Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

**M 720.** Udowodnić, że dla dowolnej liczby dodatniej  $x$  zachodzi:

$$2^{-x} + 2^{-1/x} \leq 1.$$

Rozwiązanie na str. 13

**M 721.** Funkcja  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  jest dwukrotnie różniczkowalna i istnieją takie stałe  $A, B > 0$ , że

$$|f(x)| \leq A, \quad |f''(x)| \leq B$$

dla każdego  $x \in \mathbf{R}$ . Wykazać, że

$$|f'(x)| \leq \sqrt{2AB}$$

dla każdego  $x \in \mathbf{R}$ .

Rozwiązanie na str. 14

**M 722.** Funkcja  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  jest dwukrotnie różniczkowalna i taka, że  $f(x + \pi) = f(x)$  oraz  $f''(x) + f(x) \geq 0$  dla każdego  $x \in \mathbf{R}$ . Udowodnić, że  $f$  przyjmuje tylko wartości nieujemne.

Rozwiązanie na str. 14

Redaguje Jarosław KULPA

**F 393.** Na brzegu stołu o wysokości 1 m leży kłębek wiotkiego sznurka o długości 100 m. W pewnym momencie jeden z końców sznurka zaczyna zsuwać się na podłogę odwijając się stopniowo z kłęбка. Oszacować, po jakim czasie cały sznurek znajdzie się na podłodze (tarcie pomijamy).  
Rozwiązanie na str. 15

**F 394.** Widmo promieniowania relikтового pokrywa się z widmem promieniowania ciała doskonale czarnego o temperaturze 2,736 K wykazując niewielką anizotropię związaną ze względny ruch układu laboratoryjnego (efekt Dopplera). Oszacować prędkość naszej Galaktyki względem promieniowania relikowego wiedząc, że kierunek, przy którym mierzy się największą anizotropię  $a = \Delta T/T = 13 \cdot 10^{-4}$ , tworzy kąt  $\alpha = 120^\circ$  z kierunkiem prędkości Słońca  $v_S = 250$  km/s w ruchu wokół centrum Galaktyki.

Rozwiązanie na str. 15

możliwości, trzeba najpierw odpowiedzieć na pytanie, co znajduje się w porach, jeśli nie ma tam powietrza. W tym celu zwróćmy uwagę na właściwości procesów sublimacji i kondensacji. Jeśli ciśnienie pary przy powierzchni lodu jest niższe niż pewna wartość równowagowa charakterystyczna dla danej temperatury (nazywana ciśnieniem sublimacji), następuje sublimacja. W przeciwnym przypadku następuje kondensacja. Zatem, gdyby początkowo w porach była próżnia, proces sublimacji wprowadziłby w to miejsce parę. Pozostaje problem, czy ta para nie uciekłaby natychmiast na zewnątrz komety przez połączenia między porami. Jeżeli pory są drobne, to i kanaliki między nimi muszą być bardzo cienkie, więc opory przepływu pary przez system porów są bardzo duże. Odpływ pary jest kompensowany przez sublimację i w porach położonych w głębi lodu utrzyma się ciśnienie bliskie wartości równowagowej.

Ciśnienie równowagi lód–para jest rosnącą funkcją temperatury, więc różnica temperatury towarzyszy różnica ciśnienia i przepływ pary.

Rozpatrzmy ponownie por jako cienką rurkę o długości  $l$  i promieniu  $r$ . Niech przy końcach rurki temperatury będą ustalone i wynoszą  $T_1$  oraz  $T_2$ , a ciśnienia pary odpowiednio  $p_1$  i  $p_2$ . Przy temperaturze 240 K ciśnienie równowagi wynosi około 27 Pa, a przy 140 K – poniżej  $10^{-6}$  Pa. Przy niskim ciśnieniu zderzenia między cząsteczkami pary są rzadkie, a średnia droga swobodna cząsteczek jest duża. Przy ciśnieniu 27 Pa średnia droga swobodna cząsteczek pary wodnej jest rzędu 0,1 mm, a przy ciśnieniu  $10^{-6}$  Pa jest dłuższa od 100 km. Oznacza to, że w temperaturze poniżej 240 K średnia droga swobodna cząsteczek pary jest większa od średnicy rozważanych porów. Wówczas strumień gazu płynący przez rurkę w wyniku istnienia różnicy ciśnienia między jej końcami wynosi w dobrym przybliżeniu

$$\Phi = \left( \frac{32\mu}{9\pi R} \right)^{1/2} \frac{r}{l} \left( \frac{p_1}{(T_1)^{1/2}} - \frac{p_2}{(T_2)^{1/2}} \right) \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}} \right].$$

Wielkości  $\mu$  i  $R$  to masa molowa substancji i stała gazowa. Przepływająca para niesie ze sobą energię, której strumień wyraża się jako

$$E = \Phi \left( \frac{N_A}{\mu} 2kT + L \right) \left[ \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{s}} \right].$$

Czynnik  $(N_A/\mu)2kT$  to energia kinetyczna jednego kilograma pary i w temperaturze 273 K wynosi około  $2,5 \cdot 10^5$  J/kg. Wielkość  $L$  jest ciepłem przemiany fazowej i dla wody wynosi około  $2,8 \cdot 10^6$  J/kg, czyli o ponad rząd więcej niż wartość energii kinetycznej. Można więc przyjąć, że cząsteczki wody sublimujące na jednym końcu rurki, przepływające do drugiego i tam kondensujące przenoszą energię głównie jako energię przemiany fazowej. Jeśli w równaniu na strumień energii zaniedbamy człon z energią kinetyczną, a równanie na strumień pary przepiszemy w postaci różniczkowej i trochę uprościmy, to otrzymamy

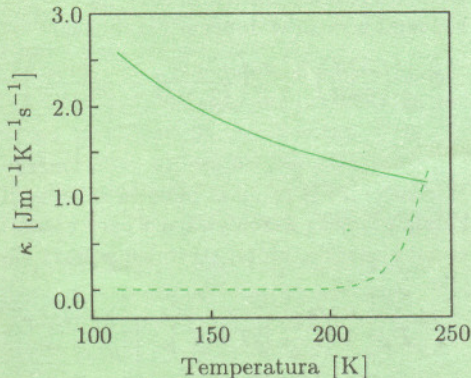
$$E = \left[ L \left( \frac{32\mu}{9\pi RT} \right)^{1/2} r \frac{dp}{dT} \right] \left( -\frac{dT}{dx} \right),$$

gdzie  $x$  jest odległością mierzoną wzdłuż rurki. Znak minus bierze się stąd, że kierunek przepływu pary, a więc i kierunek przepływu energii, jest przeciwny do kierunku, w którym rośnie temperatura. Człon w nawiasie kwadratowym to, jak łatwo zauważyć, przewodnictwo cieplne rurki. Zauważmy, że w rozważanym modelu porowatości stosunek powierzchni przekroju poprzecznego rurek do całkowitej powierzchni przekroju (w kierunku prostopadłym do rurek) jest równy porowatości. Zatem jeśli prawą stronę równania na strumień energii pomnożymy przez porowatość, to otrzymamy równanie na strumień transportowanej w porach energii na jednostkę powierzchni przekroju porowatego lodu.

Oznaczając porowatość przez  $\psi$  możemy napisać, że przewodnictwo cieplne porów w lodzie wynosi w przybliżeniu

$$\kappa_p = \psi L \left( \frac{32\mu}{9\pi RT} \right)^{1/2} r \frac{dp}{dT} \quad \left[ \frac{\text{J}}{\text{m K s}} \right].$$

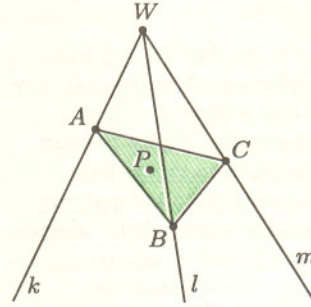
Powyższe rozważania może zilustrować wykres temperaturowej zależności przewodnictwa cieplnego sieci ziarenek lodu (linia ciągła) oraz przewodnictwa cieplnego samych porów (linia przerywana).



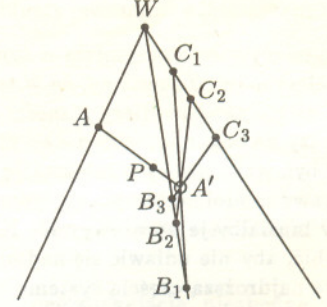
## Minimalny czworościan

*Jak znaleźć płaszczyznę, która przechodzi przez dany punkt we wnętrzu danego (wypukłego) naroża trójściennego i odcina od niego czworościan o najmniejszej objętości?*

Przyjmijmy oznaczenia z rysunku 1. Przypuśćmy, że punkt  $A$  został wybrany właściwie. Oznaczmy przez  $A'$  punkt przecięcia prostej  $AP$  z nie zawierającą  $A$  ścianą naroża. Poszukajmy takiego odcinka  $BC$  leżącego w tej ścianie i przechodzącego przez  $A'$ , by pole trójkąta  $ABC$  było najmniejsze z pól możliwych trójkątów  $AB_iC_i$  (rys. 2).



Rys. 1



Rys. 2

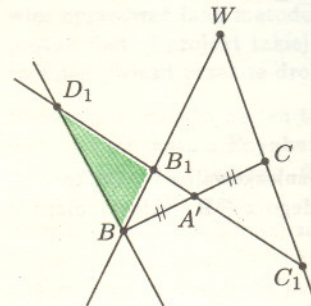
Właściwy wybór  $B$  i  $C$  to taki, gdy  $A'$  jest środkiem  $BC$ . Istotnie, każdy inny wybór powiększa pole: na rysunku 3

$$\begin{aligned} P_{WBC} = P_{WB_1A'} + P_{BB_1A'} &< P_{WB_1A'} + P_{BD_1A'} = \\ &= P_{WB_1A'} + P_{CC_1A'} = P_{WB_1C_1}. \end{aligned}$$

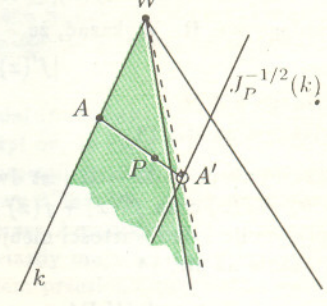
Pozostaje zatem pytanie, dla jakiego punktu  $A$  otrzymuje się najmniejszą objętość czworościanu  $WABC$ . Skoro jednak prosta  $AP$  ma przecinać odcinek  $BC$  w jego środku, to – z symetrii zadania wynika, że  $BP$  przechodzi przez środek  $AC$ , natomiast  $CP$  przez środek  $AB$ . Słowem:

*$P$  ma być środkiem ciężkości trójkąta  $ABC$ .*

W szczególności powinno więc być  $AP = 2 \cdot PA'$ , co jednoznacznie określa  $A'$ .



Rys. 3



Rys. 4

Co więcej, rozwiązanie zadania jest konstruktywne. Oto algorytm:

- przecinamy obraz prostej  $k$  w jednokładności o środku  $P$  i stosunku  $-\frac{1}{2}$  z płaszczyzną  $mk$  otrzymując punkt  $A'$  (rys. 4);
- przecinamy obraz prostej  $l$  w symetrii środkowej względem punktu  $A'$  z prostą  $m$  otrzymując punkt  $C$ ;
- przecinamy proste  $A'P$  i  $k$  otrzymując punkt  $A$ ;
- przecinamy proste  $A'C$  i  $l$  otrzymując punkt  $B$ .

Uzasadnienie tego, że algorytm daje  $ABC$ , którego środkiem ciężkości jest  $P$ , można łatwo uzyskać przeglądając *Małą Deltę* w tym numerze. Potrzebna jest także informacja, że poszukiwany minimalny czworościan musi istnieć. Zdobycie jej też nie jest trudne, ale to pozostawię już wyłącznie inwencji Czytelnika.

Marek KORDOS

## O liczbach przestępnych

W artykule Roberta Hajłasza „Dowody niewymierności pewnych liczb” (*Delta* 10/1994) wspomniane zostało, że liczba  $\sqrt{2}\sqrt{2}$  jest niewymierna. Okazuje się, że w pewnym sensie jest ona nawet „bardzo niewymierna”. Co przez to rozumiemy – okaże się za chwilę. Ale najpierw pewna definicja.

Liczbą algebraiczną nazywamy dowolny pierwiastek równania algebraicznego

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

o współczynnikach całkowitych.

I tak dowolna liczba wymierna  $p/q$  jest algebraiczna, jako że jest ona pierwiastkiem równania  $qx - p = 0$ . Można też wykazać, że wszystkie liczby wyrażające się za pomocą czterech podstawowych działań oraz pierwiastkowania, wykonywanych na liczbach całkowitych, są algebraiczne, tj. algebraiczne są wszystkie liczby postaci  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt[3]{3 + \sqrt{5}}$ ,  $\sqrt{\sqrt{2} + 5} / \sqrt[3]{9}$ ... itd. Liczby, które nie są algebraiczne, nazywamy *przestępnymi*. Ponieważ liczby wymierne są algebraiczne, więc liczby przestępne są niewymierne. A skoro liczb przestępnych nie da się również przedstawić za pomocą czterech podstawowych działań oraz pierwiastkowania, wykonywanych na liczbach całkowitych, więc liczby przestępne są w pewnym sensie nawet „bardzo niewymierne”. Ale, czy liczby przestępne... istnieją? Innymi słowy, czy istnieje choć jedna liczba, która nie jest pierwiastkiem równania algebraicznego o współczynnikach całkowitych?

Choć problemem istnienia liczb przestępnych interesował się już Leonhard Euler, to jednak pierwszym, który udowodnił (w 1844 r.) ich istnienie, był Joseph Liouville (patrz *Delta* 1/1993). Konkretnie liczby, o których udowodnił, że są przestępne, były jednak nieciekawe – w tym sensie, że zapewne nikt nigdy ich nie użył przy rozpatrywaniu innych problemów matematycznych. Istotny postęp nastąpił, gdy w 1873 roku Charles Hermite udowodnił, że liczba  $e$  jest przestępna, i gdy dziewięć lat później Ferdinand Lindemann uczynił to samo w stosunku do liczby  $\pi$ . O ważności liczb  $e$  oraz  $\pi$  nikogo nie trzeba przekonywać. Co więcej, z przestępności liczby  $\pi$  wynika niewykonalność kwadratury koła cyrklem i linijką.

Pod koniec XIX wieku było też wiadomo, że liczb przestępnych jest bardzo, bardzo dużo, choć nie wiadomo było (poza pewnymi konkretnymi przypadkami), jak rozstrzygnąć, czy konkretnie wskazana liczba jest przestępna.

Taki był mniej więcej „stan meczu” w chwili, gdy David Hilbert w 1900 roku na II Międzynarodowym Kongresie Matematycznym wśród słynnych 23 problemów sformułował problem następujący:

*Udowodnić, że jeżeli  $a \neq 0$ ,  $a \neq 1$  jest liczbą algebraiczną,  $b$  zaś jest liczbą algebraiczną i niewymierną, to liczba  $a^b$  jest przestępna.*

Dowód został podany dopiero w 1934 roku (niezależnie) przez

A.O. Gelfonda oraz T. Schneidera. W szczególności wynika stąd, że  $\sqrt{2}\sqrt{2}$  jest liczbą przestępna, a więc również niewymierną. Mimo iż wydaje się, że problem Hilberta dotyczy liczb bardzo szczególnej postaci, to jednak ma on daleko nieoczywiste konsekwencje, bowiem wynika z niego, między innymi, następujący fakt:

*Jeśli w trójkącie równoramiennym stosunek kąta przy podstawie do kąta przy wierzchołku jest liczbą algebraiczną niewymierną, to stosunek długości podstawy do długości ramienia jest liczbą przestępna.*

Z rozwiązania wspomnianego problemu Hilberta wynika również, że wszystkie wartości logarytmów, których przybliżenia możemy znaleźć w tablicach, są albo wymierne, albo przestępne.

Opracował P.H.

Wykres ten został sporządzony na podstawie rozważanego do tej pory przybliżonego geometrycznego modelu porowatości. Jest więc także przybliżony. Użyte wartości parametrów są następujące: porowatość  $\psi = 0,5$ , promień porów  $r = 10^{-4}$  m, masa molowa  $H_2O$  wynosi  $\mu = 0,018$  kg/mol, a stała gazowa  $R = 8,314$  J/K.mol. Przewodnictwo cieplne nieporowatego lodu jest funkcją temperatury. Została przyjęta typowa dla dielektryków zależność typu  $\kappa \sim \frac{1}{T}$ :

$$\kappa_l = 567/T \left[ \frac{J}{m K s} \right],$$

ze współczynnikami proporcjonalności wyznaczonym doświadczalnie.

Omówiony sposób obliczania przewodnictwa cieplnego porowatego lodu można zastosować do jądra komety i obliczyć szybkość przenikania ciepła w głąb jądra. Okaże się wówczas, że w przypadku niektórych komet stwardniała skorupa zlepionych ziarenek lodu grubieje na tyle szybko, że pobranie próbki z powierzchni jądra może być trudne i wymagać zastosowania nietypowych metod.

Na koniec warto zastanowić się, w jaki sposób przewodnictwo cieplne porowatego lodu zmienia się po wprowadzeniu do porów powietrza (gazu innego niż para). W najbardziej interesującym przypadku, czyli na Ziemi, ciśnienie pary w porach jest małe w porównaniu z ciśnieniem powietrza. Z tego względu decydującym czynnikiem ograniczającym szybkość przepływu pary jest nie rozmiar porów, ale zderzenia z cząsteczkami powietrza. W konsekwencji przewodnictwo cieplne porów jest znacznie mniejsze i nie należy się spodziewać, aby porowaty lód miał większe przewodnictwo niż nieporowaty.

Liczby Liouville'a to liczby postaci

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{10^{i!}},$$

gdzie  $c_i$  są dowolnie wybieranymi cyframi różnymi od zera.

Dowód, że są one przestępne, jest bardzo podobny do dowodu przestępności liczby

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i!}}$$

zamieszczonego w *Delcie* 1/1993.

Ciekawostka:

Liczba 0,12345678910111213..., w której po przecinku występują jedna za drugą kolejne liczby naturalne, jest przestępna (Kurt Mahler). Czytelnikom pozostawiamy jako nietrudne ćwiczenie dowód, że powyższa liczba jest niewymierna (bezpośrednio, bez korzystania z faktu, że jest przestępna).



# 8

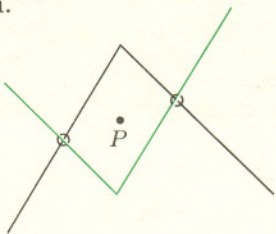
# mała delta

## Uogólniamy

W 1993 roku ukazała się książka *Szkoła geometrii. Odczyty kaliskie*, która zasługuje na uwagę co najmniej z dwóch względów. Po pierwsze stanowi ona dowód, że uczenie się może być efektywne – napisali ją warszawscy nauczyciele (oddajmy sprawiedliwość: przeważnie nauczycielki) na podstawie notatek, jakie zrobili podczas zajęć doszkalających, jakie sami sobie zorganizowali. Po drugie jest w tej książce wiele ciekawej geometrii, co będzie widać za chwilę, gdyż tę *Małą Deltę* chcę zaczerpnąć z tej książki właśnie, a dokładniej z jej rozdziału *Przekształcenia geometryczne w zadaniach*.

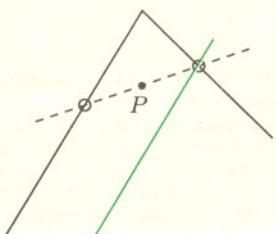
**Zadanie 1.** Dany jest kąt (wypukły) i punkt  $P$  w jego wnętrzu. Znaleźć taki odcinek  $AB$  o końcach na ramionach kąta, by  $P$  był środkiem  $AB$ .

Rozwiązanie jest proste: odbijamy symetrycznie kąt względem punktu  $P$  – otrzymane w przecięciu starego kąta z nowym punkty (rys. 1) to właśnie szukane punkty  $A$  i  $B$ . Istotnie, przy symetrii względem  $P$  zamieniają się one miejscami, a to ma miejsce tylko dla punktów, dla których  $P$  jest środkiem.



Rys. 1

Zadanie to można rozwiązać oszczędniej, co da widoczne pole do uogólnień. Odbijamy mianowicie tylko jedno ramię kąta (rys. 2). To oczywiście daje tylko jeden punkt, ale drugi z łatwością znajdujemy linijką.

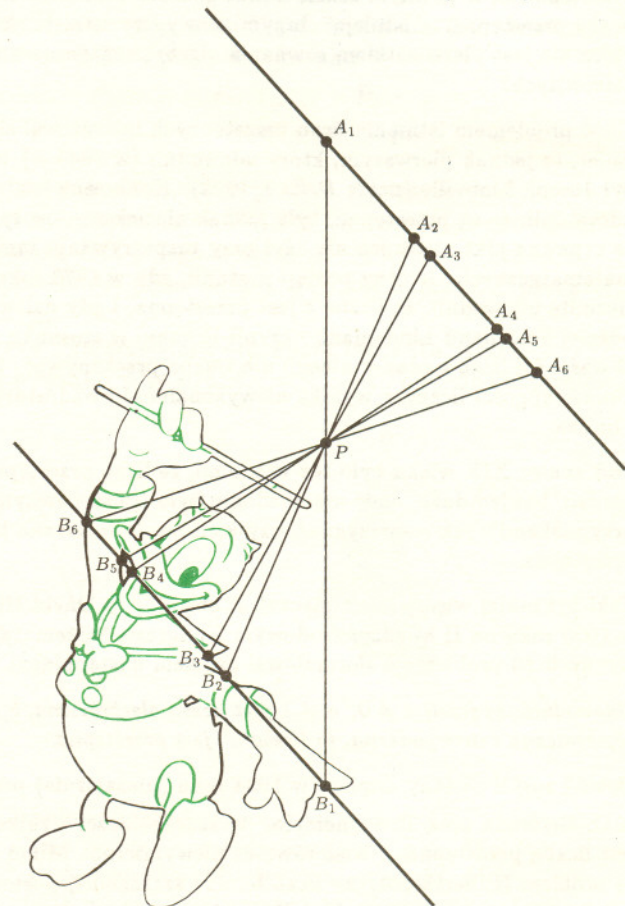


Rys. 2

A oto możliwe uogólnienie.

**Zadanie 2.** Dana jest prosta  $k$ , punkt  $P$  i kaczor Donald. Znaleźć taki odcinek, którego jeden koniec będzie na  $k$ , drugi na brzegu kacзора Donald, a którego środkiem jest punkt  $P$ .

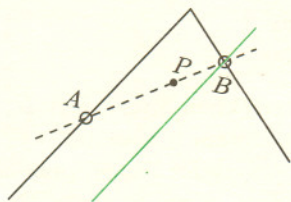
Odbijamy teraz  $k$  symetrycznie względem  $P$  i otrzymujemy tyle rozwiązań, ile przecięć ma jej obraz z brzegiem kacзора Donald (rys. 3).



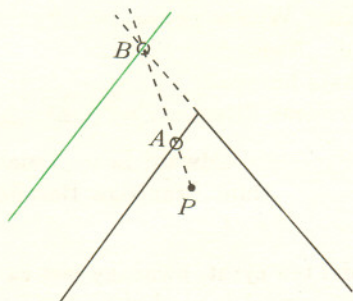
Rys. 3

Ostatecznie ten kierunek uogólniania daje nam sposób, by rozwiązać

**Zadanie 3.** Dane jest  $c$  o  $s$ , co umiemy odbijać symetrycznie, punkt  $P$  i zupełnie dowolne  $c$  u  $s$ . Znaleźć wszystkie odcinki, których jeden koniec leży na  $c$  o  $s$  i u, drugi na  $c$  u  $s$  i u i których środkiem jest punkt  $P$ .



Rys. 4



Rys. 5

Inny kierunek uogólniania polega na zastanowieniu się, co jeszcze może zachowywać się równie przyzwoicie, jak symetria środkowa używana w poprzednich zadaniach. Najprostsza odpowiedź to: jednokładność. Zresztą symetria środkowa jest szczególnym przypadkiem jednokładności (mianowicie jest to jednokładność o stosunku  $-1$ ).

Teraz możemy rozwiązać również

**Zadanie 4.** *Dane są dwie proste i punkt  $P$  oraz liczba  $\lambda$ . Znaleźć taki odcinek, którego końce leżą na tych prostych i który jest dzielony przez punkt  $P$  (odpowiednio wewnątrz i zewnątrz) w stosunku  $\lambda$ .*

Na rysunku 4 jest przedstawiony podział wewnętrzny odcinka w stosunku 2:1 – użyta jednokładność ma stosunek  $-\frac{1}{2}$ , a na rysunku 5 podział zewnętrzny w stosunku 1:3 – użyta jednokładność ma stosunek  $+2$ .

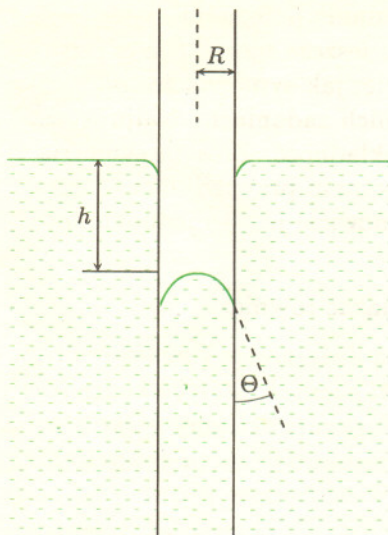
I to znów można dalej uogólniać. Można też stosować do innych problemów. Jeden taki jest nawet opisany w tym numerze *Delty*.

*Małą Deltę przygotował Marek KORDOS*

<p>Odcinek dla poczty</p> <p>Zł .....</p> <p>słownie złotych</p> <p>wplacający</p>	<p>Odcinek dla posiadacza rachunku</p> <p>Zł .....</p> <p>słownie złotych</p> <p>Dokładny adres wplacający</p>	<p>Potwierdzenie dla wplacającego</p> <p>Zł .....</p> <p>słownie złotych</p> <p>Dokładny adres wplacający</p>
<p><b>AMOS</b></p> <p>01-806 Warszawa</p> <p>ul. Zuga 12</p>	<p>na <b>AMOS</b></p> <p>r-k 01-806 Warszawa</p> <p>Dokładna nazwa ul. Zuga 12</p>	<p>na <b>AMOS</b></p> <p>r-k 01-806 Warszawa</p> <p>Dokładna nazwa ul. Zuga 12</p>
<p>wa ku <b>PKO VIII O/W-wa</b></p> <p>r ku 1586-77578-136</p>	<p>nazwa banku <b>PKO VIII O/W-wa</b></p> <p>Nr r-ku 1586-77578-136</p>	<p>nazwa banku <b>PKO VIII O/W-wa</b></p> <p>Nr r-ku 1586-77578-136</p>
<p>.....</p> <p>podpis przyjmującego</p> <p>Pobrano opłatę</p> <p>zł .....</p>	<p>.....</p> <p>podpis przyjmującego</p> <p>Pobrano opłatę</p> <p>zł .....</p>	<p>.....</p> <p>podpis przyjmującego</p> <p>Pobrano opłatę</p> <p>zł .....</p>

# Pływanie sitem

Krzysztof REJMER



Rys. 1. Zjawisko kapilarne z meniskiem wypukłym. Ciśnienie cieczy pod zakrzywioną powierzchnią jest większe od ciśnienia atmosferycznego. Ta nadwyżka ciśnienia jest równoważona przez ciśnienie hydrostatyczne słupa cieczy o wysokości  $h$ . Zgodnie z prawem Laplace'a

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R} \cos \theta,$$

gdzie  $R$  jest promieniem rurki, a  $\sigma$  współczynnikiem napięcia powierzchniowego cieczy. Mechaniczna równowaga wymaga, by

$$\Delta p = \rho gh,$$

gdzie  $\rho$  jest gęstością cieczy.

Wyłynęli na morze zwykłym Sitem, o Boże,  
Popłynęli Sitem w siną dal!  
Wbrew przestrogom przyjaciół (Rodzin też oczywiście),  
Rankiem ósmego grudnia, w wyciu wichru i świcie  
Popłynęli Sitem w siną dal!  
A gdy Sito się dziko kolebało na fali,  
I wołano im z brzegu: „Wyście powariowali!”  
Oni tak odkrzyknęli: „Nasze Sito nieduże,  
Ale niech się wypchają huragany i burze –  
My płyniemy Sitem w siną dal!”

Edward Lear „Dziąble”  
tłum. Stanisław Barańczak

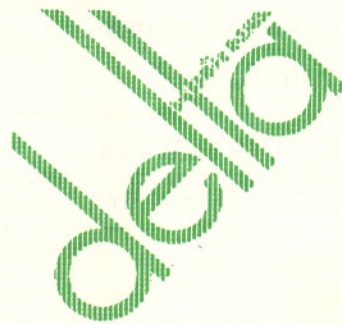
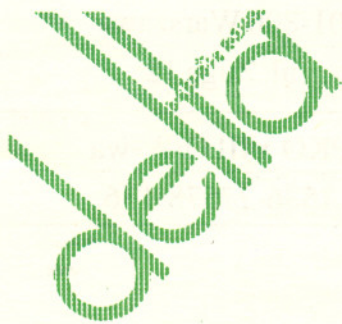
Edward Lear, z którego wiersza pochodzi ten cytat, uważany jest za mistrza poezji absurdu, jednak możliwość pływania w sicie nie jest nonsensem, choć zrealizowanie tego śmiałego projektu byłoby dość trudne! Warunki pływania sita są dwa: jego oczka nie mogą być zbyt duże, a woda nie może zwilżać siatki. Chcąc pływać sitem, musimy je odpowiednio przygotować, na przykład zanurzyć w płynnej parafinie. Może to spowodować zaklejenie wszystkich oczek sita. W tej sytuacji, aby sito było sitem, musimy ogrzać je nad świecą.

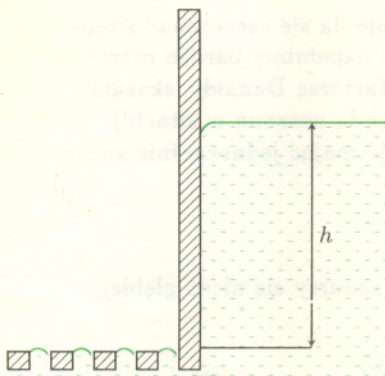
Powszechnie znane są zjawiska kapilarne. Jeśli ciecz nie zwilża ścianek, jej poziom w rurce jest niższy niż w naczyniu, do którego zanurzono koniec rurki (rys. 1). Przyczyną tego jest działanie sił napięcia powierzchniowego,

Prenumerata „Deltą”  
za okres:

Prenumerata „Deltą”  
za okres:

Prenumerata „Deltą”  
za okres:





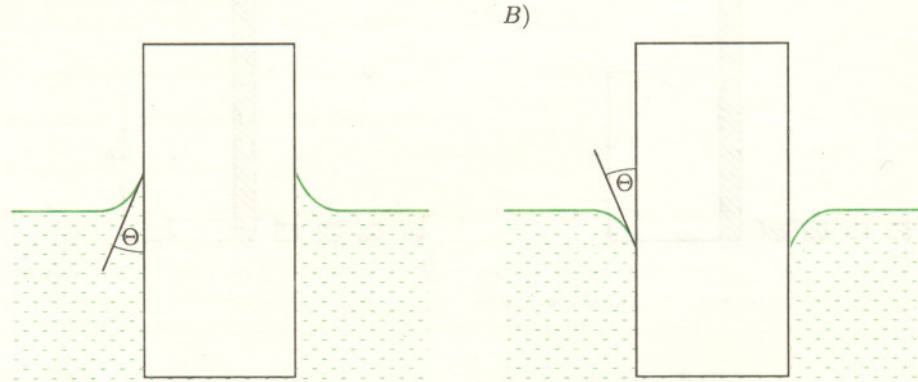
Rys. 2. Jeśli ciecz nie zwilża sita, w każdym jego oczku powstaje menisk wypukły.

zwiększających ciśnienie pod wypukłą powierzchnią cieczy. Każde z oczek sita jest niczym innym, jak bardzo krótką rurką o małej średnicy, w każdym oczku sita powstaje menisk wypukły (rys. 2), jeśli tylko woda nie zwilża sita.

Zajmiemy się teraz siłami działającymi na sito. Oczywiście, działa na nie siła ciężkości  $P = mg$  oraz siła wyporu, której wartość wynosi:

$$F_w = \Delta p \cdot S_s = \frac{2\sigma}{R} S_s \cos \theta,$$

gdzie  $S_s$  jest hydrostatycznie czynnym polem powierzchni sita, to znaczy całkowitym polem powierzchni  $S$  pomniejszonym o pole powierzchni otworków. Na sito działa jeszcze jedna siła skierowana (w przypadku cieczy niezwilżającej) pionowo do góry, a więc wspomagająca siłę wyporu, jej źródłem jest napięcie powierzchniowe (rys. 3).



Rys. 3. Na pływające ciało działają nie tylko siły ciężkości i wyporu hydrostatycznego, ale dodatkowo siła wynikająca z istnienia napięcia powierzchniowego. Składowa pionowa tej siły ma wartość  $\sigma L \cos \theta$ , gdzie  $L$  jest obwodem pływającego ciała. Kąt  $\theta$  (kąt  $90^\circ - \theta$  w przypadku (B)) nazywany jest kątem zwilżania. Jeśli ciecz zwilża powierzchnię pływającego ciała (A), siła ta zmniejsza siłę wyporu. Jeśli ciecz nie zwilża powierzchni pływającego ciała (B), siła ta zwiększa siłę wyporu. Najczęściej siła ta jest znikomo mała w porównaniu z ciężarem i siłą wyporu. Natomiast dla ciał o małej masie i dużym obwodzie może ona mieć wartość na tyle dużą, że nie można o niej zapomnieć.

Zwykle jest ona pomijana, ponieważ jest bardzo mała w porównaniu z pozostałymi siłami działającymi na pływające ciało, jednak w przypadku sita o bardzo wielu otworkach jest wystarczająco duża, byśmy musieli ją uwzględnić. Siłę pochodzącą od napięcia powierzchniowego, działającą na zewnętrznym obwodzie sita, szczęśliwie możemy zaniedbać. Ta dodatkowa siła dla jednego otworka ma wartość

$$F_\sigma = 2\pi R \sigma \cos \theta = \frac{2\sigma}{R} S_{otw}^1 \cos \theta,$$

gdzie  $S_{otw}^1$  jest polem powierzchni oczka sita (dla prostoty przyjmijmy, że wszystkie otworki są kołami o promieniu  $R$ ). Mnożąc jej wartość przez liczbę oczek i dodając do hydrostatycznej siły wyporu otrzymamy efektywną siłę wyporu działającą na sito

$$F_w^{ef} = \frac{2\sigma}{R} (S_s + S_{otw}) \cos \theta = \frac{2\sigma}{R} S \cos \theta,$$

gdzie  $S_{otw}$  jest łącznym polem powierzchni oczek sita. Siła ta musi równoważyć ciężar sita i płynących w nim Dziaźbli:

$$mg = \frac{2\sigma}{R} S \cos \theta.$$

Głębokość, na jaką zanurzy się sito, możemy obliczyć z równania

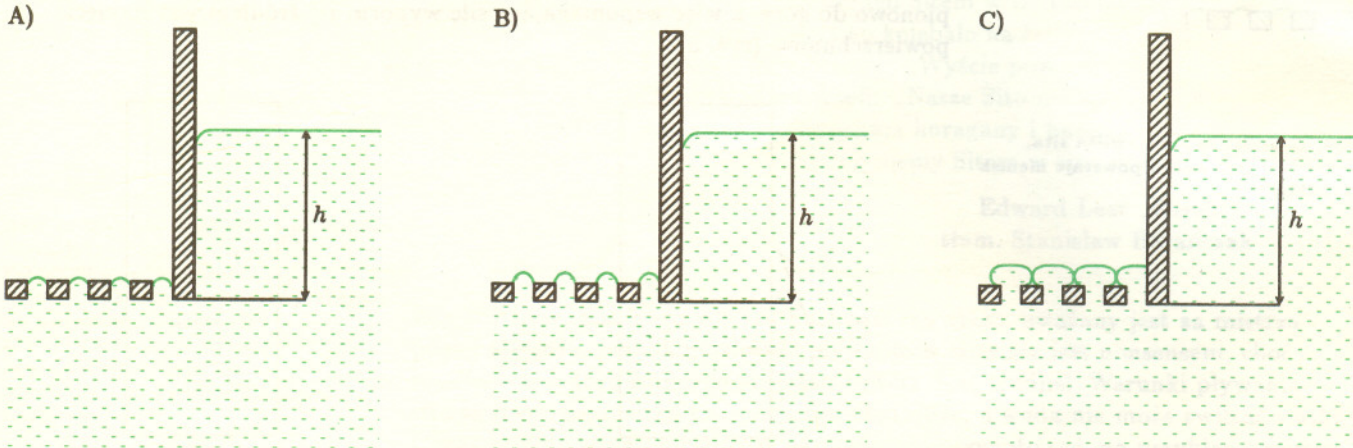
$$\rho g h = \frac{2\sigma}{R} \cos \theta.$$

Podróż sitem przez wzburzony ocean byłaby jednak bardzo niebezpieczna; warunkiem możliwości jej odbycia jest powstanie w oczkach sita stabilnej, wypukłej powierzchni cieczy, co nie jest możliwe w niestacjonarnych

warunkach. Z tego samego powodu praktycznie nie da się zaczerpnąć sitem wody, ale można w nim przenieść wodę, o ile sito napełnimy bardzo ostrożnie. (Z zagadnieniem tym od wieków zmagają się w Tartarze Danaidy, skazane za morderstwo na napełnianie dziurawej beczki wodą noszoną w sitech!) Maksymalna głębokość, na jakiej sito może pływać mając jednocześnie suche dno, wynosi

$$h_{max} = \frac{2\sigma}{\rho g R},$$

co odpowiada zerowej wartości kąta  $\theta$ . Jeśli sito zanurzy się nieco głębiej, zaistnieje sytuacja pokazana na rysunku 4.



Rys. 4. Jeśli zanurzymy sito zbyt głęboko, na jego wewnętrznej powierzchni pojawiają się kropelki cieczy, które zaczynają się zlewać (C).

Kropelki wody znajdujące się na wewnętrznej powierzchni dna sita zleją się ze sobą tworząc w środku płaską powierzchnię i efekt wywołany działaniem sił napięcia powierzchniowego zniknie. Jeśli masa sita jest większa niż

$$\frac{2\sigma S}{Rg},$$

sito zatoni. Lekkie sito będzie pływać w częściowym zanurzeniu, jednak będzie wypełnione wodą. Przewidział to już Lear:

Naturalnie, że w łódce mokro było już wkrótce,  
Woda ciekła przez dno wszędy i wzdłuż;  
Żeby więc nie zamoczyć nóg (bo chorób stąd szereg),  
Owinęli je schludnie w woskowany papierek,  
Na agrafkę zapięli i już.

Przyjmując standardowe wartości gęstości i napięcia powierzchniowego wody:  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$  i  $\sigma = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$  oraz zakładając, że otworki w dnie sita mają średnicę pół milimetra, możemy łatwo obliczyć maksymalną głębokość zanurzenia sita; jest ona równa 6 cm. Odpowiada to powierzchni  $170 \text{ cm}^2$  na każdy kilogram masy sita i pasażerów. Oczywiście, głębokość, na jakiej może pływać sito, którego dno pozostaje suche, zależy od średnicy otworków. W praktyce średnice te są bardzo różne, dlatego przeciek wywołany zwiększeniem się zanurzenia sita rozpocznie się tam, gdzie są największe otworki.

Na zakończenie przypomnijmy, że brezentowy namiot (dziś chyba już rzadkość) podczas deszczu zaczyna przeciekać w miejscu dotknięcia spodniej strony. Uważny Czytelnik bez trudu odpowie na pytanie dlaczego, a potem pobiegnie na najbliższą przystań, bo może właśnie przybiło do brzegu sito pełne Dziąbli, gdyż:

Daleko stąd jest taki ład,  
Skąd się Dziąbła wywodzą obficie;  
Zielona ich skroń i niebieska ich dłoń,  
A w Dal Siną jeśli płyną, to w sicie.

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 3$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1994.

Termin nadsyłania rozwiązań: 28 II 1995

### Zadania z matematyki nr 289, 290

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**289.** W pewnej grupie ludzi żadna para osób znających się wzajemnie nie ma żadnego wspólnego znajomego, natomiast każda para osób nie znających się wzajemnie ma dokładnie dwóch wspólnych znajomych. Dowieść, że każda osoba w tej grupie ma tyle samo znajomych. (Zakładamy, że jeśli jedna osoba zna drugą, to druga zna pierwszą, oraz że nikt nie zalicza siebie samego do grona swoich znajomych.)

**290.** Dany jest ciąg liczb dodatnich  $(a_n)$ . Określamy ciąg  $(b_n)$  wzorem

$$b_n = \left( \frac{1 + a_n}{a_{n-1}} \right)^n.$$

Wykazać, że ciąg  $(b_n)$  nie może być zbieżny do granicy mniejszej od  $e$ .

Zadanie **290** zaproponował pan Adam Czornik z Bytomia.

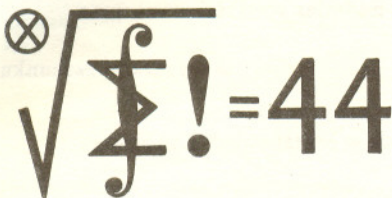
### Zadania z fizyki nr 187, 188

Redaguje Jerzy B. BROJAN

**187.** W jednostce objętości powietrza znajdowało się  $n_A$  jonów  $A^+$ ,  $n_B$  jonów  $B^+$ ,  $n_X$  jonów  $X^-$  i  $n_Y$  jonów  $Y^-$ . Jeśli od pewnej chwili początkowej następowała tylko rekombinacja jonów (nie zaś jonizacja), a współczynniki rekombinacji są jednakowe dla każdej pary jonów, to ile przybyło w jednostce objętości po długim czasie cząsteczek  $AX$ , ile - cząsteczek  $AY$ , ile  $BX$ , a ile  $BY$ ?

Wskazówka: Liczba par jonów ulegających rekombinacji w jednostce czasu jest proporcjonalna do iloczynu koncentracji jonów dodatnich i ujemnych danego rodzaju, a stała proporcjonalności nazywa się współczynnikiem rekombinacji.

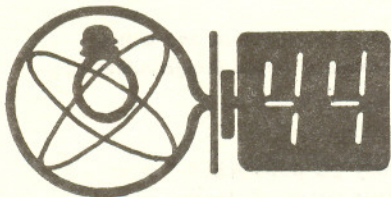
**188.** Precyzyjny woltomierz wielozakresowy (nie elektroniczny) dołączono do dwóch punktów  $A$  i  $B$  pewnego obwodu liniowego (tzn. składającego się ze źródeł napięcia i oporników stosujących się do prawa Ohma). Gdy woltomierz był nastawiony na zakres 10 V, wskazywał 8,92 V, a gdy przestawiono go na zakres 30 V, jego wskazanie wzrosło do 9,04 V. Jakie napięcie występowało między  $A$  i  $B$  przed dołączeniem woltomierza?



Czołówka ligi zadaniowej  
**Klub 44 M**

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 275 ( $WT=2,57$ ) i 276 ( $WT=2,38$ )  
z numeru 2/1994

Przemysław Gadziński - Środa Śląska	42,43
Paweł Lizak - Puławy	41,71
Waldemar Pompe - Warszawa	38,83
Krzysztof Jedziniak - Katowice	38,31



Czołówka ligi zadaniowej  
**Klub 44 F**

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 177 ( $WT=4,00$ ) i 178 ( $WT=1,96$ )  
z numeru 4/1994

Andrzej Nowogrodzki - Chocianów	37,44
Andrzej Borowski - Aleksandrów K.	32,85
Aleksander Surma - Myszków	20,52

**Rozwiązanie zadania M 720.** Oznaczmy  $f(x) = 2^x$ ,  $g(x) = f\left(x + \frac{1}{x}\right) - f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right)$  dla  $x \geq 1$ . Wówczas

$$g'(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) f'\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) - f'(x) \geq f'\left(\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x}\right) - f'(x) = f'(x) - f'(x) = 0.$$

Powyższa nierówność wynika stąd, że  $f'(x) = 2^x \ln 2$  jest funkcją wypukłą. Zatem

$$2^{x+1/x} - 2^x - 2^{1/x} = g(x) \geq g(1) = 0$$

dla  $x \geq 1$ , stąd dzieląc obie strony nierówności przez  $2^{x+1/x}$  otrzymamy

$$2^{-x} + 2^{-1/x} \leq 1$$

dla  $x \geq 1$ . Ponieważ lewa strona ostatniej nierówności nie zmienia się, gdy zamiast  $x$

wstawimy  $\frac{1}{x}$ , nierówność jest prawdziwa także gdy  $0 < x < 1$ .



# Dear Dr. Ksieznilacki...

## Rozwiązanie zadania M 721.

Zalóżmy, że dla pewnego  $x_0 \in \mathbb{R}$  zachodzi  $|f'(x_0)| > \sqrt{2AB}$ . Wówczas dla funkcji  $g(x) = f(x_0 + x)$  założenia zadania także są spełnione i  $|g'(0)| > \sqrt{2AB}$ . Możemy przyjąć, że  $g'(0) > \sqrt{2AB}$  (w przeciwnym przypadku wystarczy zamiast funkcji  $g(x)$  rozpatrzyć funkcję  $-g(x)$ ) i  $g(0) \geq 0$  (w przeciwnym razie zamiast  $g(x)$  wystarczy wziąć funkcję  $-g(-x)$ ).  
Niech

$$h(x) = g(x) - \sqrt{2AB}x + \frac{B}{2}x^2.$$

Wówczas

$$h(0) = g(0) \geq 0,$$

$$h'(0) = g'(0) - \sqrt{2AB} > 0,$$

$$h''(x) = g''(x) + B > 0,$$

zatem  $h(x) > 0$  dla  $x > 0$ . Weźmy

$$x = \sqrt{\frac{2A}{B}}. \text{ Wtedy}$$

$$\begin{aligned} 0 < h\left(\sqrt{\frac{2A}{B}}\right) &= \\ &= g\left(\sqrt{\frac{2A}{B}}\right) - \sqrt{2AB} \cdot \sqrt{\frac{2A}{B}} + \\ &\quad + \frac{B}{2} \cdot \frac{2A}{B} \leq \\ &\leq A - 2A + A = 0. \end{aligned}$$

Uzyskana sprzeczność dowodzi tezy zadania.

(Przekłady fragmentów korespondencji młodego matematyka, mgra Zenona Ksieżnilackiego, z redakcjami pism matematycznych)

Szanowny Panie Profesorze,  
Załączam pracę „O pewnych własnościach funkcjonałów Matthews’a” z uprzejmą propozycją opublikowania jej w „Journal of...”

Z poważaniem  
Zenon Ksieżnilacki

(po siedmiu miesiącach)

Dear Dr. Ksieznilacki,

Z przykrością informuję, że pana praca nie została przyjęta do druku w „Journal of...”. Kolegium Redakcyjne uznało rezultaty zawarte w pracy jako niewątpliwie interesujące i warte publikacji, jednakże z uwagi na nadmiar wartościowych prac musimy zrezygnować z publikacji wielu artykułów.

Z wyrazami szacunku

Szanowny Panie Profesorze,  
Załączam pracę „O pewnych własnościach funkcjonałów Matthews’a” z uprzejmą... w „Bulletin of...”

(po jedenastu miesiącach)

Dear Dr. Ksieznilacki,

Z przykrością informuję, że recenzent nie zarekomendował Pańskiej pracy do druku. Załączam kopię recenzji.

Z wyrazami szacunku

Praca zawiera rezultaty... [osiem linijek tekstu]. Twierdzenia przedstawione w pracy wydają się być prawdziwe. Niestety, nie widzę możliwości dalszego zastosowania zaprezentowanych wyników. Nie sądzę zatem, by praca nadawała się do publikacji w „Bulletin of...”

Szanowny Panie Profesorze,  
Załączam pracę... w „Acta...”

(po czterech miesiącach)

Dear Dr. Ksieznilacki,

Uprzejmie informuję, że recenzja Pana pracy „O pewnych...” jest negatywna. Załączam recenzję.

Praca „O pewnych...” nie nadaje się do druku. Podstawowe znaczenie ma w niej Lemat 2.1, z którego Autor wielokrotnie w toku pracy korzysta, lemat ten jednakże nie zostaje w pracy udowodniony.

Szanowny Panie Profesorze,  
Uprzejmie dziękuję za odesłany maszynopis mojej pracy „O pewnych...” wraz z recenzją. Proszę o ponowne rozważenie wydrukowania pracy. Jedynym zarzutem Recenzenta jest brak dowodu Lematu 2.1. Pozwolę sobie zauważyć, że przed sformułowaniem tego lematu w pracy znajduje się informacja, że Lematy 2.1 i 2.2 udowodnione zostaną łącznie. Dowód Lematu 2.1 przeprowadzony został zatem po sformułowaniu Lematu 2.2.

Z poważaniem

(po dwóch miesiącach)

Dear Dr. Ksieznilacki,

List Pana przesłany został Recenzentowi. Podtrzymuje on jednak swą opinię, że praca nie nadaje się do druku w „Acta...”. W związku z tym ponownie zwracam Panu maszynopis pracy.

Z wyrazami szacunku

Szanowny Panie Profesorze,  
Załączam pracę... w „Mathematica...”

(po czterech miesiącach)

Dear Dr. Ksieznilacki,

Przesyłam recenzję Pana pracy „O pewnych...”. Miło mi zakomunikować, że recenzent uznał Pana rezultaty za wartościowe. Uważa jednak, że dowody są zbyt szczegółowe i za długie, w związku z czym pracę należałoby skrócić o około 1/3. W recenzji zawarte są szczegółowe uwagi. Po otrzymaniu poprawionej wersji Pana pracy prześlę ją,



## Rozwiązanie zadania M 722. Dla $\alpha \in \mathbb{R}$ zdefiniujemy

$$g_\alpha(x) = f'(x + \alpha) \sin x - f(x + \alpha) \cos x.$$

Dla  $x \in [0, \pi]$  mamy

$$g'_\alpha(x) = (f(x + \alpha) + f''(x + \alpha)) \sin x \geq 0,$$

więc

$$\begin{aligned} 0 \leq g_\alpha(\pi) - g_\alpha(0) &= \\ &= f(\alpha + \pi) + f(\alpha) = 2f(\alpha), \end{aligned}$$

czego należało dowieść.



### Rozwiązanie zadania F 393.

Niech  $\rho$  oznacza gęstość liniową sznurka, jego całkowita długość wynosi  $l$ , a  $h$  oznacza wysokość stołu. Po pewnym czasie od początku zsuwania się sznurek będzie zsuwał się ze stałą prędkością. Wówczas zwisająca część sznurka ma długość  $h$  (reszta leży na stole lub podłodze) i działająca na niego siła ciężkości wynosi

$$F = mg = \rho gh.$$

Z drugiej zasady dynamiki mamy

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot v,$$

albowiem w tym stanie sznurek zsuwa się ze stałą prędkością. Ale

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho v,$$

więc

$$\rho v^2 = \rho gh \Rightarrow v = \sqrt{gh}$$

Ponieważ  $h \ll l$ , czas ruchu sznurka będzie w przybliżeniu równy czasowi ruchu sznurka ze stałą prędkością, tj.

$$t \approx \frac{l}{v} = \frac{l}{\sqrt{gh}} \approx 30 \text{ sekund.}$$



### Rozwiązanie zadania F 394.

Z prawa Wiena  $T \cdot \lambda = \text{const}$  otrzymujemy proporcję

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda},$$

z efektu Dopplera wiadomo, że prędkość  $v$  względem źródła promieniowania proporcjonalna jest do zmiany długości emitowanej fali

$$v = \frac{\Delta \lambda}{\lambda} c = \frac{\Delta T}{T} c = ac = 390 \text{ km/s.}$$

Jest to prędkość Układu Słonecznego względem promieniowania reliktoowego. Niech  $v_G$  oznacza prędkość Galaktyki względem promieniowania, wtedy

$$\vec{v} = \vec{v}_G + \vec{v}_S,$$

stad

$$v_G = \sqrt{v^2 + v_S^2 - 2v v_S \cos \alpha} \approx 560 \text{ km/s.}$$

zgodnie ze zwyczajem naszego czasopisma, innemu recenzentowi i wtedy powiadomimy Pana o ostatecznej decyzji w sprawie przyjęcia pracy.

Serdecznie pozdrawiam,

[załączona recenzja]

Szanowny Panie Profesorze,  
Przesyłam zmienioną wersję pracy...

(po trzech miesiącach)

Dear Dr. Ksieznilacki,

Z przykrością informuję, że drugi recenzent nie zarekomendował poprawionej wersji Pana pracy do publikacji. Jego zdaniem wiele dowodów jest niejasnych, zaś niektóre wnioski biorą się nie wiadomo skąd. W tej sytuacji opublikowanie Pana pracy „O pewnych...” w naszym piśmie nie jest możliwe. Prosimy nie zapominać o naszym piśmie przy swoich przyszłych publikacjach.

Serdecznie pozdrawiam,

[załączona recenzja]

Szanowny Panie Profesorze,  
Załączam pracę... w „Mathematical...”

(po trzynastu miesiącach)

Dear Dr. Ksieznilacki,

Załączam recenzję Pana pracy „O pewnych...”. Przykro mi poinformować Pana, że Recenzent odrzucił pracę.

*Praca zawiera rezultaty... [półtoręj liniiki tekstu]. Moim zdaniem praca nie nadaje się do druku w „Mathematical...”. W pracy omawiane są zagadnienia analizy funkcjonalnej, powinna ona zatem zostać opublikowana w specjalistycznym piśmie z analizy funkcjonalnej, by dotrzeć do właściwego czytelnika.*

Szanowny Panie Profesorze,

Dziękuję za przesłaną recenzję mojej pracy. Nie wiedziałem, że „Mathematical...” publikuje jedynie prace z wybranych działów matematyki. Nie rozumiem jednak, dlaczego zauważenie, jakiej tematyki dotyczy praca, zajęło redakcji ponad rok.

Z wyrazami szacunku  
Zenon Księżniński

(bez odpowiedzi)

Szanowny Panie Profesorze,  
Załączam pracę... w „Pure and Applied...”

(po dwunastu miesiącach)

Dear Dr. Ksieznilacki,

Przykro mi poinformować Pana, że Pana praca nie została przyjęta do druku w „Pure and Applied...”. Recenzent uznał wprawdzie pracę za wartą publikacji, ale recenzja składała się zaledwie z jednego zdania rekomendującego pracę do druku. Ze względu na dużą liczbę prac do nas przysyłanych Kolegium Redakcyjne publikuje jedynie te prace, których opublikowanie zostaje w recenzji szeroko i dokładnie, mocno uzasadnione. Tym samym, niestety, Pana praca nie spełnia kryteriów publikacji w „Pure and Applied...”. Przykro mi, że spotkał Pana zawód z naszej strony.

Z wyrazami szacunku

Szanowny Panie Profesorze,  
Załączam pracę... w „Annals of...”

(po czterech miesiącach)

Dear Prof. Ksieznilacki,

Niestety, Pana praca nie zostaje u nas przyjęta do druku. Kilka miesięcy temu J.A. Smith i E.D. Brown nadesłali nam pracę, której wyniki w dużej części pokrywają się z Pana rezultatami. Wprawdzie miejscami Pana dowody są prostsze, nie na tyle jednak, by uzasadniało to powtórne opublikowanie tych samych rezultatów.

Załączam przyjętą do druku pracę Smitha i Browna; nie wątpię, że Pana zainteresuje.

Łączę uprzejme wyrazy

*Ostatni list nie dotarł już do Zenona Księżnińskiego. Dwa miesiące wcześniej przestał on pracować na wyższej uczelni. Nie przedłużono mu okresu zatrudnienia z powodu braku odpowiedniej liczby publikacji naukowych.*

(Listy „do i od” Księżnińskiego odnalazł przypadkowo

Krzysztof CIESIELSKI)





Zawody olimpiady matematycznej w Niemczech (będące kontynuacją zawodów w RFN) odbywają się od 1970 roku. Na początku każdego roku kalendarzowego rozsyłane są do szkół druki z zadaniami pierwszego etapu. Uczniowie zainteresowani zawodami przysyłają rozwiązania zadań do komitetów okręgowych odpowiadających poszczególnym landom. W kwietniu najlepsi z nich zostają zakwalifikowani do drugiego etapu i otrzymują kolejne cztery zadania do rozwiązania – już nieco trudniejsze. Spośród najlepszych uczestników drugiego etapu wybierana jest niewielka grupka finalistów. Finał to egzamin ustny przed niemieckimi profesorami matematyki. Na podstawie tych rozmów zostaje wybrana sześciuosobowa drużyna na międzynarodową olimpiadę matematyczną.

Na Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej w Turcji w 1993 roku drużyna Niemiec zajęła drugie miejsce (4 złote i 2 srebrne medale) za niepokonaną już od wielu lat drużyną Chin (6 złotych medali). Proponujemy więc Czytelnikom przygotowującym się do zawodów Olimpiady Matematycznej, aby stawili czoło zadaniom, które rozwiązywali najlepsi (nie licząc Chin). Czytelnikom życzymy miłej zabawy!

**I etap – styczeń 1993**

1. Dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 3$  oznaczmy przez  $m$  taką największą liczbę naturalną, że  $n = a_1 + a_2 + \dots + a_m$ , gdzie  $a_1, a_2, \dots, a_m$  są różnymi liczbami naturalnymi. Wyrazić  $m$  jako funkcję zmiennej  $n$ .

2. Skończony zbiór  $M$  punktów płaszczyzny ma następującą własność: dla dowolnych dwóch punktów  $A, B \in M$  istnieje taki punkt  $C \in M$ , że trójkąt  $ABC$  jest równoboczny. Znaleźć zbiór  $M$  o największej liczbie elementów mający ową własność.

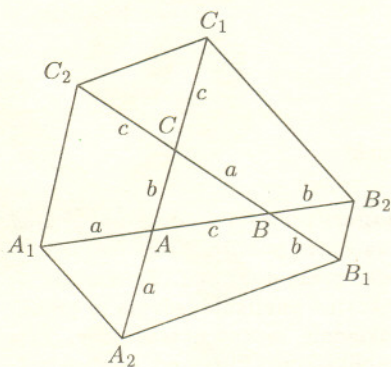
3. Istnieją pary liczb kwadratowych (kwadraty liczb naturalnych) o następujących własnościach:

- ich rozwinięcia dziesiętne mają tę samą liczbę cyfr (zakładamy tu, że pierwsza cyfra rozwinięcia jest różna od zera),
- gdy napiszemy te liczby jedna za drugą, to otrzymamy nową liczbę kwadratową.

Przykład:  $16 = 4^2$  i  $81 = 9^2$ ,  $1681 = 41^2$ .

Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele takich par.

4. Dany jest trójkąt  $ABC$  o polu  $F$ . Konstruujemy sześciokąt wypukły o wierzchołkach  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ . Oznaczmy jego pole przez  $G$  tak, jak pokazano na rysunku. Wykazać, że  $G \geq 13F$ .



**II etap – kwiecień 1993**

1. Każdy wierzchołek dziewięciokąta foremnego malujemy na zielono lub czerwono. Udowodnić, że istnieją dwa przystające trójkąty (o wierzchołkach wybranych spośród wierzchołków dziewięciokąta), z których każdy ma wszystkie wierzchołki jednakowego koloru.

2. O liczbie rzeczywistej  $a$  wiemy, że istnieje dokładnie jeden kwadrat, którego wierzchołki leżą na krzywej  $y = x^3 + ax$ . Znaleźć długość boku tego kwadratu.

3. Dany jest trójkąt  $ABC$ .  $A'$  jest punktem przecięcia dwusiecznej kąta  $A$  i symetralnej boku  $AB$ ,  $B'$  jest punktem przecięcia dwusiecznej kąta  $B$  i symetralnej boku  $BC$ ,  $C'$  jest punktem przecięcia dwusiecznej kąta  $C$  i symetralnej boku  $CA$ . Udowodnić, że trójkąt  $A'B'C'$  jest równoboczny wtedy i tylko wtedy, gdy  $A' = B'$ . Jeżeli punkty  $A', B', C'$  są różne, to wykazać, że  $|\angle B'A'C'| = 90^\circ - |\angle BAC|/2$ .

4. Czy istnieje taka liczba naturalna  $n$ , że  $n!$  w systemie dziesiętnym zaczyna się od układu cyfr 1993?

Krzysztof CHEŁMIŃSKI, Waldemar POMPE



W dniu 26.03.1994 r. odbyło się uroczyste spotkanie, stanowiące moment kulminacyjny w obchodach stulecia Koła Matematyków Studentów UJ. Przybyło nań bardzo wiele osób związanych z Kolem w różnych latach; niektórzy od dawna nie zajmujący się matematyką, niektórzy mieszkający daleko od Krakowa.

Pierwsze Walne Zgromadzenie Kółka Matematyczno-Fizycznego w Krakowie (taka była pierwotna nazwa) odbyło się 22 kwietnia 1894 roku. Jako moment powstania Kółka należy chyba jednak uznać dzień 3 grudnia 1893 roku, kiedy to miało miejsce zebranie przedwstępne, gdzie m.in. wybrano pierwszy Zarząd ze Zdzisławem Krygowskim jako przewodniczącym. Właśnie Z. Krygowski i T. Łopuszański byli głównymi animatorami powstania Kółka. Wkładki (taka nazwa figuruje w sprawozdaniach) miesięczne wynosiły 40 groszy. Pierwszym kuratorem kółka był prof. Władysław Natanson.

Istotę pracy Kółka trudno zrozumieć bez znajomości organizacji studiów matematycznych na UJ w tych czasach. W danym roku odbywało się kilkanaście wykładów (dla wszystkich studentów) i kilka seminariów, czasami ćwiczenia (a i to nieliczne). Przy przechodzeniu z roku na rok nie obowiązywały żadne rygory poza zaliczeniem ćwiczeń, co było zwykle formalnością. Praktycznie należało zdać tylko jeden egzamin, na zakończenie studiów – nauczycielski lub doktorski. W efekcie profesorowie nie znali większości studentów, a i kontakty między studentami bywały dość luźne. Dopiero w roku 1926 zostały na UJ wprowadzone studia magisterskie.

Początkowo działalność Kółka sprowadzała się do organizowania licznych zebrań naukowych, połączonych ze studenckimi odczytami. W posiadaniu Kółka było też kilkadziesiąt książek, stanowiących początek ogromnej później biblioteki. Aktywna praca trwała jednak tylko parę lat; Krygowski wyjechał na pewien czas za granicę i Kółko „zasnęło”. Ponownie „na dobre” ruszyło w 1900 roku, w czym ogromna zasługa Antoniego Hoborskiego. On właśnie został przewodniczącym i pełnił tę funkcję przez dwa lata. Wznowiono liczne odczyty, dotyczące także i wyników ostatnich lat; naukowe zebrania Kółka Matematyczno-Fizycznego Uczniów UJ w Krakowie (takiej nazwy wówczas używano) były ogłaszane w lokalnych gazetach. Przygotowywano także zadania do rozwiązania dla członków Kółka. Może warto wspomnieć, że dość oryginalnie notowano w sprawozdaniach godziny: „O godzinie 6 $\frac{1}{4}$  otwarto zebranie(...)”. W 1902 roku Hoborski zaproponował, „aby Kółko podjęło się wydawania autografowanych wykładów profesora Zaremby”. Studenci wykłady te (a potem i inne) starannie notowali, po czym skrypty były drukowane lub odbijane techniką litograficzną. Na wydawnictwach Kółka umieszczano emblemat, który w powiększeniu przedstawiamy na okładce *Delta*. Odnotujmy, że od 1903 roku Kółko miało nie przewodniczących, lecz prezesów.

Akcja wydawnicza rozwinęła się po I wojnie światowej jeszcze bardziej, stanowiąc główny aspekt pracy Kółka. Liczne wykłady krakowskich profesorów redagowano, po czym drukowano lub litografowano w kilkuset egzemplarzach i sprzedawano – także i poza Krakowem, jako że Kółko współpracowało z bratnimi organizacjami innych uczelni. W latach dwudziestych takich kółek było 5 – poza krakowskim w Warszawie, Lwowie, Poznaniu i Wilnie. Co roku odbywały się zjazdy Kółek – z dokumentów wynika, że w działalności naukowej żadne z nich nie dorównywało warszawskiemu, ale w wydawniczej Kółko krakowskie nie miało konkurencji. Budżet regularnie znacznie przewyższał budżety czterech pozostałych kół w sumie! Biblioteka Kółka wzbogacała się o liczne książki. Oprócz referatów organizowano też herbatki zapoznawcze i zabawy (czasami dochodowe), a także sporadycznie wycieczki. Wśród wielu aktywnie pracujących w Kółku były liczne osoby później bardzo znane, m.in. Stanisław Gołąb, Stanisław Krystyn Zaremba, Andrzej Turowicz i Stanisław Turski (wszyscy oni byli prezesami Kółka), a także Zofia Czarkowska (później Krygowska) i Ryszard Wasserberger, zmarły tragicznie w Tatrach. Kuratorami Kółka byli profesorowie Stanisław Zaremba (do 1927) i Witold Wilkosz.

Po II wojnie światowej Kółko (które w 1949 roku zmieniło nazwę na Koło) skupiało się na referatach i organizowaniu korepetycji dla studentów I roku, a także odczytów dla młodzieży szkół średnich; nie zdążyło jednak rozwinąć skrzydeł, gdy je w roku 1950 zlikwidowano w ramach reorganizacji ruchu naukowego. Lokal zaplombowano; protokoły z lat ubiegłych ocalił sprytnie Jan Babecki, później odzyskano większość książek z biblioteki.

Przez 10 lat Koło działało sporadycznie, w mniej lub bardziej formalnych ramach; w dniu 20.03.1959 r. zostało reaktywowane jako Koło Matematyków Studentów UJ (fizycy reaktywowali samodzielne Naukowe Koło Fizyków trochę później). Odtąd, przez całe 35 lat, Koło (od 1974 roku noszące imię prof. Stanisława Zaremby) działa niesłuchanie aktywnie, i to na różnych frontach. Kadra zmienia się niemal całkowicie co kilka lat, ale zawsze wiele osób poświęca Kołu „nieprzeliczalną ilość wolnych chwil”, w Kole panuje znakomita, niepowtarzalna atmosfera. Organizowane są liczne referaty, a także stałe seminaria. Tradycyjne „herbatki” bywają też poświęcane stawianiu otwartych problemów, (niektóre zadania do dziś czekają na rozwiązanie). Dłuższych wyjazdów turystyczno-naukowych, nazywanych Zimowymi i Letnimi Szkołami Koła Matematyków było już 45, przy czym od 1975 roku odbywają się one regularnie co pół roku – nie przeszkodził nawet stan wojenny... A bywają i krótsze – wyjazdowe seminaria (nazywane często quasinariumi). Prócz działalności naukowej kwitnie i inna: zabawy, bale matematyków, od 1985 coroczne mecze piłkarskie „Pracownicy – Studenci”. W archiwum Koła znajduje się mnóstwo różnorodnych utworów matematyczno-humorystycznych, wierszy, rysunków, kalendarzy Koła Matematyków, jak i innych efektownych prac – i wciąż tworzone są nowe, regularnie prezentowane w gablotce Koła. Drobną część z nich została wydana w skryptach „Rozmaitości absurdalne” i „Rozmaitości uśmiechnięte”. Wydrukowano własny papier firmowy, legitymacje, plakaty, są też odznaki dla członków Koła (emblemat Koła Matematyków umieszczamy obok winyety *EPSILONA*). Koło stanowi ważny element życia Instytutu Matematyki UJ. W imprezach Koła, organizowanych przez studentów, udział biorą także pracownicy Instytutu, czasem i inni absolwenci. Koło współpracuje z wieloma instytucjami, od niedawna także i z *Delta*, kolportując pismo.

PS. Wśród 6 osób, które są (lub były) w redakcji *EPSILONA* jest 3 byłych prezesów i 3 byłych wiceprezesów Koła Matematyków.