



SPIS TREŚCI

NUMERU 9(244)

Natura i prawo <i>Krzysztof Rejmer</i>	str. 1
Czy Ptolemeusz miał rację? <i>Andrzej Majhofer</i>	str. 1
Satelity naszej Galaktyki <i>Janusz Kałużny</i>	str. 2
Układy jednostek <i>Jan Kalinowski</i>	str. 2
Przybliżone sumowanie <i>Witold Bednarek</i>	str. 4
Patrz w niebo	str. 7
Mała Delta	str. 8
Zadania	str. 10
Księga szkocka <i>Marek Kordos</i>	str. 11
Klub 44	str. 14
Epsilon	str. 17

W następnym numerze:

Ciekłe kryształy

Okladkę wykonał
Bernard BADZIOCH

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichocki
Roman Duda
Jan A. Gaj
Tomasz Hofmokl
Marta Kicińska-Habior
– przewodnicząca
Krzysztof Maślanka
Andrzej Mąkowski
– wiceprzewodniczący
Andrzej Pelczar
Zbigniew Plochocki
Zdzisław Pogoda
Michał Różyczka
Konrad Rudnicki
Zbigniew Semadeni
Grzegorz Sitarski
Mieczysław Subotowicz
Andrzej Szymacha
Andrzej Woszczyk
Wacław Zawadowski

Redaguje kolegium w składzie:

Krzysztof Biesaga
Piotr Hajlasz
Jan Kalinowski – z-ca red. nac.
Krystyna Kordos – sekr. red.
Marek Kordos – red. nac.
Tomasz Kwast
Krzysztof Rejmer
Paweł Strzelecki
Joanna Udalska

Adres Redakcji:

ul. Smyczkowa 5/7
02-678 Warszawa
tel. 43-02-43 wewn. 21
HAJLASZ@MIMUW.EDU.PL
Wydrukowano w Zakładach Graficznych
w Warszawie, ul. Srebrna 16
Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY w AMOS-ie

Od stycznia 1993 r. prenumeratę „Deltę” prowadzi również firma AMOS, 01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21). Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w pierwszym półroczu 1994 roku wynosi 8 000,-zł, a w drugim półroczu 10 000,-zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru wynosi w pierwszym półroczu 1994 r. 20 000,-zł, a w drugim – 22 000,-zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednia dopłata ponosi zamawiający.

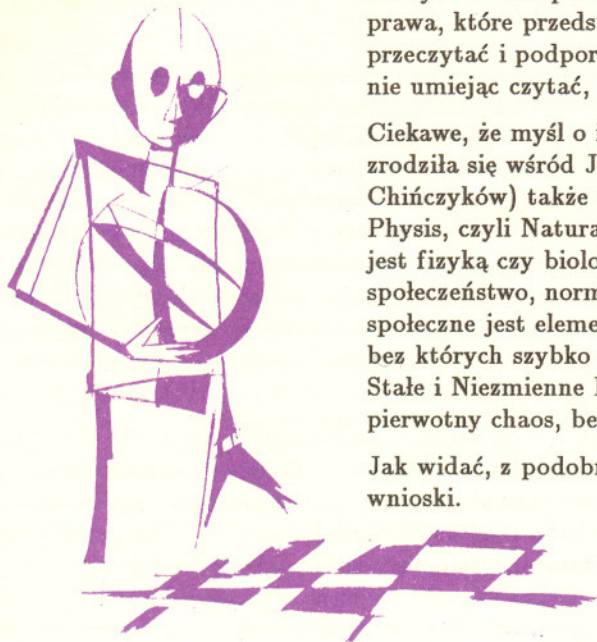
Uwaga! AMOS dostarcza „Deltę” pod wskazany adres nie pobierając dodatkowej opłaty. Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Blankiet pocztowy na prenumeratę „Deltę” w AMOS-ie zamieszczamy na str.9/10. Konto AMOS-u: **PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136**

WARUNKI PRENUMERATY w RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na I kwartał 1995 r. wynosi 45 000,- zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
 - na teren kraju
 - jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób,
 - na zagranicę
 - „Ruch” S.A. Oddział Warszawa, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – **dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty**, z wyjątkiem zlecenia dostawy pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni pokrywa prenumerator.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
 - na kraj i zagranicę – do 20 XI na I kwartał roku następnego
 - do 20 II na II kwartał
 - do 20 V na III kwartał
 - do 20 VIII na IV kwartał.

Cena 1 egzemplarza 10 000,- zł



Podobno gdy jezuita pragnęli otworzyć ośrodek misyjny w Chinach, pośród innych korzyści ofiarowali się wyłożyć Chińczykom wielkie Prawa Przyrody odkryte w Europie. Spotkali się wtedy z odpowiedzią, że Cesarz ustanowił prawa, które przedstawił poddanym w formie drukowanej tak, by mogli je przeczytać i podporządkować się im. Absurdem jest twierdzić, że kije i kamienie nie umiając czytać, mogłyby przestrzegać jakichś praw.

Ciekawe, że myśl o istnieniu stałych i niezmiennych praw przyrody, która zrodziła się wśród Jońskich Filozofów Przyrody, powstała (podobnie jak negacja Chińczyków) także z przesłanek jurydycznych. Dla pierwszych filozofów Physis, czyli Natura, była całością bytów obejmującą zarówno to, co do dziś jest fizyką czy biologią, ale także i to, co jest specyficznie ludzkie, a więc społeczeństwo, normy moralne; należeli do niej także bogowie. Jeśli życie społeczne jest elementem Physis (a jest ono regulowane przez normy prawne, bez których szybko zmieniłoby się w absolutny chaos) przeto muszą istnieć Stałe i Niezmiennie Prawa Przyrody. Inaczej zamiast świata istniałby jedynie pierwotny chaos, bezkresny i nieokreślony apeiron Anaksymandra.

Jak widać, z podobnych przesłanek można wyciągnąć zupełnie odmienne wnioski.

Krzysztof REJMER

Czy Ptolemeusz miał rację?

Przyzwyczajani od wczesnego dzieciństwa do teorii Kopernika na powyższe pytanie odpowiadamy przecząco w sposób niemal automatyczny. Skoro sprawa jest tak oczywista, to może warto od czasu do czasu, chociażby dla zabawy, przyjrzeć się dokładniej istocie sporu posługując się przy tym współczesnym językiem i współczesnymi wyobrażeniami na temat funkcjonowania nauki. Na czym więc polegało odkrycie Kopernika? Umieszczając środek układu w środku Słońca uprościł znacznie konstrukcję systemu. Uproszczenie metod obliczeń położenia planet było przy tym niezbyt duże (o czym przekona się łatwo każdy, kto posługując się teorią Kopernika zechce wyznaczyć chwilowe położenia planet obserwowanych z Ziemi). Dla zachowania zgodności z obserwacjami Kopernik nie mógł całkiem wyeliminować deferensów i epicykli charakterystycznych dla teorii Ptolemeusza. Postęp był jednak duży. Stało się możliwe ustalenie względnych rozmiarów orbit planet.

Mniej więcej sto lat później Kepler odkrył eliptyczny kształt orbit i prawo opisujące prędkości ruchu planet, co ostatecznie usunęło z teorii resztę deferensów i epicykli. W następnym kroku Newton sformułował prawo powszechnego ciążenia i tym samym ogromny system Ptolemeusza zastąpiony został prostym układem równań ruchu planet w polu grawitacyjnym Słońca i planet pozostałych. Największym triumfem teorii było odkrycie w 1846 roku Neptuna (J.G. Galle) dokładnie w miejscu, które wyliczył U.J.J. Leverrier analizując zaburzenia ruchu Urana w stosunku do toru wynikającego z przyciągania Słońca i wcześniej znanych planet. Odkrycie takie było „z definicji”

wykluczone w ramach teorii Ptolemeusza. Sprawa wydaje się więc ostatecznie rozstrzygnięta na korzyść Kopernika.

Paradoksalnie, w tym samym mniej więcej czasie, w którym zaobserwowano Neptuna, dokonane zostało odkrycie potwierdzające słuszność metody Ptolemeusza. Na czym ta metoda polegała? We współczesnym języku należałoby powiedzieć, że Ptolemeusz starał się przedstawić obserwowany okresowy ruch planet jako złożenie „idealnych” ruchów po okręgu ze stałą prędkością kątową. Z naszego punktu widzenia sformułował swoje zadanie nie dość precyzyjnie: nie było wiadomo, w jakim sensie jego konstrukcja miała przybliżać dane obserwacyjne, a sformułowane warunki dopuszczały wiele równoważnych rozwiązań – stąd na przykład nie było możliwe jednoznaczne ustalenie rozmiarów orbit planet. Jeżeli jednak w obronie Kopernika przytaczamy odkrycia Keplera i Newtona, to sprawiedliwość nakazuje uznać w Ptolemeuszu i jego poprzednikach prekursorów analizy Fouriera (czy ogólniej – analizy harmonicznej) i teorii reprezentacji grup. Jeżeli się na to zgodzimy, to musimy też uznać wyższość metody – programu naukowego Ptolemeusza nad odkryciem Kopernika. Ogromna większość obliczeń wykonywanych dziś na potrzeby nauki i techniki bazuje na przybliżaniu funkcji przez sumy innych „idealnych” funkcji. I nawet wspaniałe osiągnięcia teoretyków zgłębiających tajniki budowy cząstek elementarnych to po prostu poszukiwanie, jakie by tu „idealne” funkcje wybrać.

Andrzej MAJHOFER

Satelity naszej Galaktyki

Janusz KAŁUŻNY

W literaturze popularnonaukowej często czytamy, że Słońce jest przeciętną, typową gwiazdą. Jest to w rzeczywistości daleko idące uproszczenie. Zdecydowana większość gwiazd w naszej Galaktyce to obiekty o masach mniejszych niż 0,3 masy Słońca i o mocy promieniowania o ponad 3 rzędy wielkości mniejszej niż słoneczna. W szczególności najbliższa znana gwiazda, Proxima Centauri, jest niepozornym obiektem wysyłającym w dziedzinie wizualnej widma około 10 000 razy mniej energii niż Słońce, a najbliższe znane gwiazdy wysyłają jeszcze kilkadziesiąt razy mniej promieniowania niż Proxima. Na całym niebie mamy około miliona gwiazd o obserwowanej jasności wizualnej większej niż jasność Proximy (przeciętny obserwator może dostrzec około 6000 gwiazd na całej sferze niebieskiej), a spośród 50 najbliższych znanych gwiazd tylko 8 jest widocznych gołym okiem. Jest pewne, że aktualna lista najbliższych gwiazd jest niekompletna. Obiekty bliskie, ale o bardzo niskiej jasności giną w tle milionów bardziej odległych, ale jaśniejszych.

Galaktyki także wykazują duży rozrzut parametrów, takich jak masa, moc promieniowania, rozmiary, co wynika przede wszystkim z faktu, że różnią się znacznie liczbą posiadanych gwiazd. Poniżej postaramy się wykazać, że nie dysponujemy obecnie kompletną listą również galaktyk z naszego najbliższego sąsiedztwa. Nasza Galaktyka należy do układu galaktyk zwanego Grupą Lokalną. Jest to układ związany grawitacyjnie. W jego skład wchodzi trzy stosunkowo masywne i duże galaktyki spiralne (nasza, M31 w Andromedzie i M33 w Trójgacie) oraz co najmniej 23 mniejsze obiekty. Tabela na str. 3 zawiera listę znanych członków Grupy Lokalnej. Ostatnia kolumna tej tabelki podaje całkowitą moc emitowaną w postaci promieniowania widzialnego wyrażoną w jednostkach mocy naszej Galaktyki. Jak widać, w Grupie Lokalnej przeważają galaktyki o ponad dwa rzędy wielkości słabsze niż nasza. Najśłabsze z nich należą do klasy tzw. galaktyk karłowatych sferoidalnych (po angielsku *dwarf Spheroidals*, w skrócie dSph).

Układy jednostek

Jan KALINOWSKI

Od kiedy zapanował w fizyce i technice niepodzielnie układ jednostek SI (skrót od francuskiego terminu *Système International d'Unités*), życie (szczególnie w szkole) stało się znacznie prostsze. Kto teraz z młodzieży wie, co to jest erg, jeśl, kaloria, albo że pojemność elektryczną mierzy się w cm? Kiedyś przeliczanie jednostek było postrachem wszystkich klasówek z fizyki. Obliczenia numeryczne bez przeliczenia jednostek nie miały najmniejszego sensu, bo nie wiadomo było, w jakich jednostkach wychodził wynik. W układzie SI każda wielkość fizyczna jest mierzona w raz na zawsze ustalonych jednostkach i w rachunkach można o nich właściwie „zapomnieć”.

Przejęcie do układu SI zostało zarekomendowane na XI Generalnej Konferencji Miar i Wag w 1960 roku. Podstawowymi jednostkami mechanicznymi tego układu są: metr, m; kilogram, kg; sekunda, s. (Były one też bazą układu MKS, prekursora SI.) Wszystkie pozostałe wielkości mechaniczne mają jednostki pochodne – wyrażane jako pewna kombinacja podstawowych. Na przykład: siła, newton, $N = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$; praca, dżul, $J = N \cdot \text{m}$; ciśnienie, paskal, $\text{Pa} = N \cdot \text{m}^{-2}$ itp. Pozostałe jednostki podstawowe SI to: amper, A; kelwin, K; mol; kandela, cd; ponadto uzupełniające: radian i steradian. Jednostkami pochodnymi są: kulomb, wolt, om, weber, tesla itd. Oprócz tych jednostek układ SI dopuszcza używanie jednostek będących ich dziesiątą częścią lub krotnością przez dodanie odpowiedniego przedrostka:

10^{-1}	decy	d	10	deka	da
10^{-2}	centy	c	10^2	heкто	h
10^{-3}	mili	m	10^3	kilo	k
10^{-6}	mikro	μ	10^6	mega	M
10^{-9}	nano	n	10^9	giga	G
10^{-12}	piko	p	10^{12}	tera	T
10^{-15}	femto	f	10^{15}	peta	P
10^{-18}	atto	a	10^{18}	eksa	E

Jedynym wyjątkiem od tej reguły jest kg, który jest jednostką podstawową, zamiast grama. Jest to również pozostałość historyczna. (Zabawne(?) jest, że coraz częściej używa się przedrostków k, M, G i T w połączeniu ze złotówką, na przykład reklama Lotto mówi: Gzł w środę, Gzł w sobotę.)

W Polsce układ SI obowiązuje od 1966 roku. Pomimo tego stopnie Celsjusza są ciągle w użyciu, chociaż może niektórzy pamiętają gorliwców podających prognozy pogody w telewizji w kelwinach. Niestety, atmosfery, milibary i milimetry rtęci zginęły ze słownika. Zastąpiły je hektopaskale. Przyzwyczailiśmy się w końcu do dziwołagów typu *ciśnienie wynoszące 1000 hektopaskali*. A przecież nikt nie powie, że z Warszawy do Koluszek jest w przybliżeniu 1000 hektometrów, tylko 100 kilometrów. Hektopaskale to spuścizna po wprowadzaniu na siłę jednostek SI. Spróbujcie zresztą poprosić w warsztacie o wyregulowanie ciśnienia w oponach podając żądane ciśnienie w hektopaskalach. Przegonią!

Główną zaletą układu SI jest jego wygoda w użyciu w wielu zastosowaniach w nauce i technice. Wielorodność tradycyjnie i historycznie tworzonych jednostek dla tej samej wielkości fizycznej została zastąpiona przez jedną jednostkę z jasnymi regułami

tworzenia jej części lub wielokrotności. Ale nie ma róży bez kolców. Układ SI ma również swoje wady i używanie go w każdej sytuacji może być czasami bardziej niewygodne od użycia innego układu.

Podstawową wadą układu SI jest to, że w wielu prawach fizycznych pojawiają się wtedy dziwne współczynniki wymiarowe, których pochodzenie jest bardziej historyczne niż fizyczne i które utrudniają zrozumienie istoty zjawisk. Na przykład przenikalność dielektryczna ϵ_0 i magnetyczna μ_0 próżni są wymiarowe (i wynoszą $\epsilon_0 = (10^{11}/4\pi\bar{c}^2)$ (F/m), $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (H/m), gdzie \bar{c} jest wartością prędkości światła w próżni wyrażoną w cm/s, a jednostka pojemności elektrycznej F (farad) ma wymiar $s^4 A^2 m^{-2} kg^{-1}$, H (henr) zaś $kg m^2 s^{-2} A^{-2}$). Stąd też natężenia pól elektrycznego E i magnetycznego H (również indukcji elektrycznej D i magnetycznej B) mają różne wymiary. Jest to spuścizna przedrelatywistycznego sformułowania elektrodynamiki, która jest sprzeczna z duchem równań Maxwella, w których pola E i H są składowymi tego samego tensora pola elektromagnetycznego.

Inną wadą układu SI jest, paradoksalnie, jego powszechność użycia. Przyzwyczajeni do układu SI zapominamy o swobodzie, jaką mamy w wyborze jednostek, a umiejętność dobrania odpowiednich jednostek do danego problemu jest jednym z istotnych narzędzi badawczych. Skrajnym tego przykładem jest fizyka mikroświata. Mamy tutaj do czynienia z cząstkami, których ładunki są rzędu ładunku elektronu, a nie kulomba, który zawiera ponad $6 \cdot 10^{18}$ elektronów. Cząstki te poruszają się zwykle z prędkościami rzędu prędkości światła $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, a naturalną jednostką momentu pędu i działania jest porcja równa stałej Plancka $\hbar = 10^{-34}$ J·s. Dlatego też bardziej „naturalnym” układem jednostek jest układ, w którym \hbar i c są jednostkami podstawowymi, a nie m, kg i s. Stąd już tylko krok do przyjęcia, że $\hbar = c = 1$. Jest to tak zwany naturalny układ jednostek. W tym układzie czas i długość mają ten sam wymiar, energia i pęd mają wymiar będący odwrotnością położenia, prędkość, działanie i moment pędu są bezwymiarowe. Jednostką energii jest wtedy elektronowolt, eV, gdzie $1 \text{ J} = 6,24 \cdot 10^{18} \text{ eV}$, lub $1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$. O tym, że ten układ jest bardziej „naturalny” niż SI, może przekonać nas porównanie stałej grawitacji G_N określającej siłę oddziaływań grawitacyjnych ze stałą Fermiego G_F odpowiedzialną za oddziaływania słabe. W układzie SI stałe te wynoszą odpowiednio

$$G_N = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2},$$

$$G_F = 1,4 \cdot 10^{-62} \text{ J} \cdot \text{m}^3.$$

Spojrzenie na te liczby mogłoby sugerować, że oddziaływania grawitacyjne są o wiele silniejsze niż słabe. Jeśli przepiszemy je w jednostkach naturalnych, wtedy dostaniemy, że

$$G_N = 6,7 \cdot 10^{-39} \hbar c^5 \text{ GeV}^{-2},$$

$$G_F = 1,2 \cdot 10^{-5} \hbar c^3 \text{ GeV}^{-2}.$$

W układzie $\hbar = c = 1$ obie stałe mają ten sam wymiar i dopiero teraz można je porównać! Widzimy, że stała Fermiego jest 33 rzędu wielkości większa od stałej grawitacji, co jest w doskonałej zgodności z doświadczeniem, że w warunkach laboratoryjnych oddziaływania grawitacyjne można kompletnie pominąć w porównaniu ze słabymi. Z drugiej strony, stosowanie jednostek naturalnych w codziennym życiu lub w astronomii też byłoby bez sensu.

Jak widać, przymusowa standaryzacja jednostek może być czasem szkodliwa. Jak we wszystkim, tak i tutaj należy zachować umiar. Warto o tym pamiętać ucząc (się) fizyki.

Znani członkowie Lokalnej Grupy Galaktyk

Odległość D podana jest w kiloparsekach. L_V jest mocą promieniowania. LMC i SMC to odpowiednio Wielki i Mały Obłok Magellana. Ostatnie 6 obiektów jest prawdopodobnie satelitami M31.

Nazwa	D	L_V
Galaktyka	—	1
LMC	55	0.048
SMC	66	0.016
Ursa Minor	70	0.00002
Sculptor	83	0.0002
Draco	100	0.00004
Carina	170	0.00004
Fornax	250	0.001
Leo II	230	0.00004
Leo I	280	0.00006
Sextans	80	?
NGC 6822	460	0.003
NGC 147	570	0.002
NGC 185	570	0.003
M33	900	0.14
M31	830	1.20
NGC 205	830	0.016
M32	830	0.016
IC 1613	830	0.003
Andromeda I	830	0.0001
Andromeda II	830	0.0001
Andromeda III	830	0.0001

Pierwsze dwa obiekty tego typu zostały odkryte w roku 1938 przez Harolda Shapleya jako skupiska bardzo słabych gwiazd widoczne na zdjęciach fragmentów nieba w gwiazdozbiorach Pieca i Rzeźbiarza. Po łacinie gwiazdozbiory te nazywają się Fornax i Sculptor i taką też nazwę nadano nowo odkrytym galaktykom. Następne cztery galaktyki dSph znaleziono w roku 1955 podczas przeglądania klisz świeżo wykonanego atlasu fotograficznego północnej półkuli nieba. Obiekty te otrzymały nazwy Leo I, Leo II, Draco i Ursa Minor (od nazw gwiazdozbiorów Lwa, Smoka i Małej Niedźwiedzicy). Tak jak i dwie wcześniej odkryte galaktyki karłowate są one satelitami naszej Galaktyki.

Na dalsze odkrycia trzeba było czekać do roku 1972, kiedy to udało się odkryć trzy galaktyki typu dSph będące satelitami M31. Otrzymały one nazwy Andromeda I, Andromeda II i Andromeda III. Przy okazji kompletowania atlasu fotograficznego dla południowej półkuli nieba znaleziono w 1977 roku kolejną galaktykę dSph, nazwaną Carina od gwiazdozbioru Kil. W latach 80. powstały różnorakie katalogi zawierające dane dla milionów galaktyk położonych w odległości nawet wielu miliardów lat świetlnych. W tej sytuacji dużym zaskoczeniem było odkrycie kolejnej galaktyki położonej „tuż za miedzą”. Co ciekawsze, ten kolejny satelita naszej Galaktyki odkryty został przypadkowo i bez bezpośredniego udziału człowieka. W roku 1990 grupa astronomów z Cambridge (Anglia) analizowała zdjęcia

Przybliżone sumowanie

Witold BEDNAREK

Zacniemy od zadania: Wyznacz wartości sum

$$(1) \quad \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{9999}},$$

$$(2) \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{9999}$$

z możliwie jak najlepszym przybliżeniem.

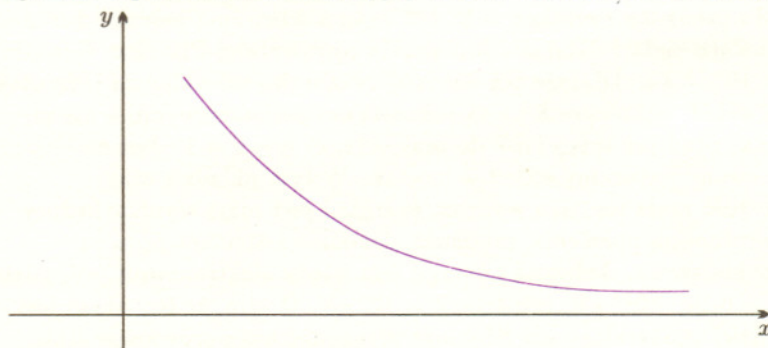
Na pierwszy rzut oka rozwiązanie wydaje się żmudnym procesem rachunkowym, bowiem w tych przypadkach nie istnieją powszechnie znane wzory sumacyjne (jak na przykład dla ciągu arytmetycznego i geometrycznego).

Spróbujmy inaczej podejść do problemu.

Rozważmy funkcję f określoną na zbiorze liczb dodatnich, która jest

1. dodatnia,
2. malejąca,
3. wypukła w dół,
4. różniczkowalna.

Rysunek 1 przedstawia orientacyjny kształt wykresu takiej funkcji.



Niech $A_k = (k, 0)$, natomiast $B_k = (k, f(k))$ dla $k \in \mathbb{N}$.

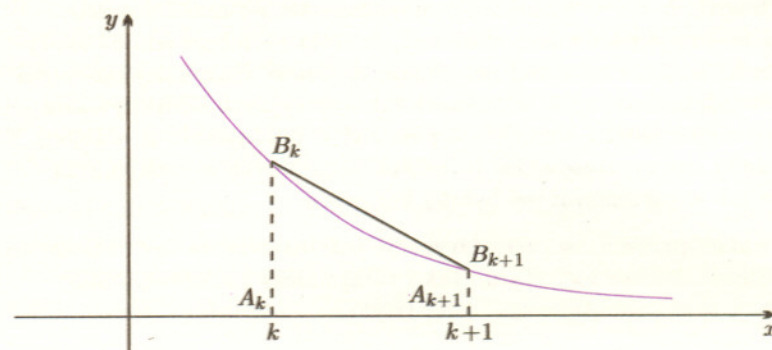
Niech P_k oznacza pole trapezu $A_k A_{k+1} B_{k+1} B_k$, a T_k – pole trapezu krzywoliniowego o tych samych wierzchołkach, to jest figury ograniczonej prostymi $y = 0$, $x = k$, $x = k + 1$ i wykresem funkcji f .

Mamy

$$(3) \quad P_k = \frac{f(k) + f(k+1)}{2}.$$

Ponieważ funkcja f jest wypukła w dół, więc odcinek $B_k B_{k+1}$ leży powyżej wykresu f w przedziale $(k; k+1)$. Zatem (rys. 2)

$$(4) \quad T_k < P_k.$$



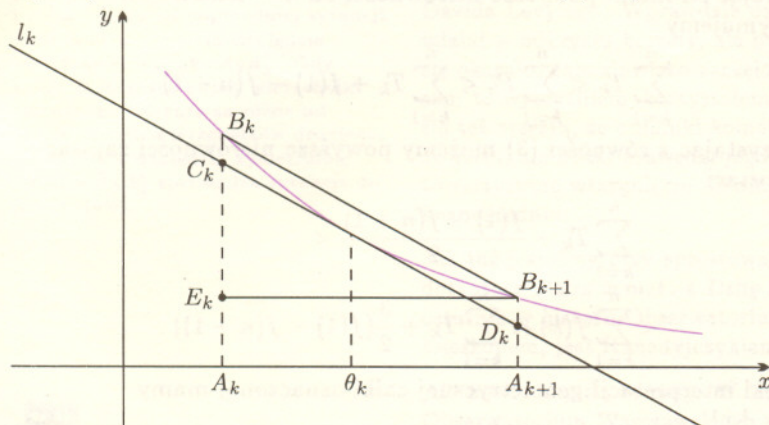
fragmentów nieba południowego. Celem programu było badanie wielkoskalowej struktury Wszechświata na podstawie analizy korelacji położenia odległych galaktyk. Takie odległe galaktyki mają rozmiary kątowe rzędu kilku sekund łuku i ich obrazy trudno jest odróżnić od obrazów słabych gwiazd, przez co wyznaczanie położenia i klasyfikacja setek tysięcy obiektów jest zajęciem niezwykle nudnym i czasochłonnym. Dlatego do tej pracy zaprzęgnięto komputer. Na jednym ze zdjęć fragmentu nieba w gwiazdozbiore Sekstansa „zauważył” on obszar o średnicy kilkunastu minut łuku, w którym gęstość słabych gwiazd była wyraźnie wyższa niż w obszarach sąsiednich. Wyszło wniosek, że te „dodatkowe” słabe gwiazdy są w rzeczywistości najjaśniejszymi gwiazdami pobliskiej, dotychczas nie znanej galaktyki karłowatej. Szybko wykonano dodatkowe obserwacje i już po roku było wiadomo, że nowo odkryty obiekt jest kolejnym słabym towarzyszem naszej Galaktyki. W 1992 roku doniesiono o znalezieniu jeszcze jednego takiego obiektu w gwiazdozbiore Tukana.

W najbliższych latach planowane jest wykonanie nowego atlasu całego nieba. Atlas ten będzie wykonany nie na kliszach fotograficznych, jak to było dotychczas, ale za pomocą detektorów CCD. Obrazy nieba będą zapisywane i przechowywane w postaci cyfrowej. Dzięki temu będzie możliwa ich bardzo dokładna i szybka analiza za pomocą komputerów. Nowy atlas pozwoli też na identyfikację gwiazd znacznie słabszych, niż było to możliwe w przypadku atlasów zrobionych techniką fotograficzną. Głównym celem autorów planowanego przeglądu jest klasyfikacja i badanie rozkładu przestrzennego kilkudziesięciu milionów galaktyk. Można jednak oczekiwać, że przy okazji odkryte zostaną dalsze galaktyki wchodzące w skład Grupy Lokalnej.

Pomimo podobnego wyglądu karłowate galaktyki będące satelitami Drogi Mlecznej nie stanowią jednorodnej grupy. Niektóre z nich zawierają wyłącznie bardzo stare gwiazdy o wieku zbliżonym do wieku najstarszych gwiazd w Galaktyce. Wszystkie gwiazdy, obserwowane w obiektach takich jak Scultor czy Ursa Minor, powstały mniej więcej jednocześnie w momencie tworzenia się tych galaktyk przed około 15 miliardami lat. Z kolei w obiektach takich jak Carina czy Leo I mamy mieszaninę gwiazd bardzo starych i stosunkowo młodych, utworzonych 5–7 miliardów lat temu. Obserwujemy w nich nawet gwiazdy o wieku nie przekraczającym 3 miliardów lat. Najwyraźniej ewolucja galaktyk karłowatych przebiegała na wiele sposobów.

Z twierdzenia Lagrange'a wynika, że przez pewien punkt o odciętej $\theta_k \in (k; k+1)$ można poprowadzić styczną l_k do wykresu f równoległą do prostej $B_k B_{k+1}$.

Niech C_k i D_k będą punktami przecięcia stycznej l_k odpowiednio z prostymi o równaniach $x = k$ oraz $x = k+1$ (rys. 3).



Z wypukłości w dół funkcji f wynika, że punkty C_k i D_k leżą odpowiednio poniżej punktów B_k i B_{k+1} . Niech wreszcie $E_k = (k, f(k+1))$. Łatwo zauważyć (jak?), że prosta l_k przecina odcinek $\overline{E_k B_k}$, a zatem

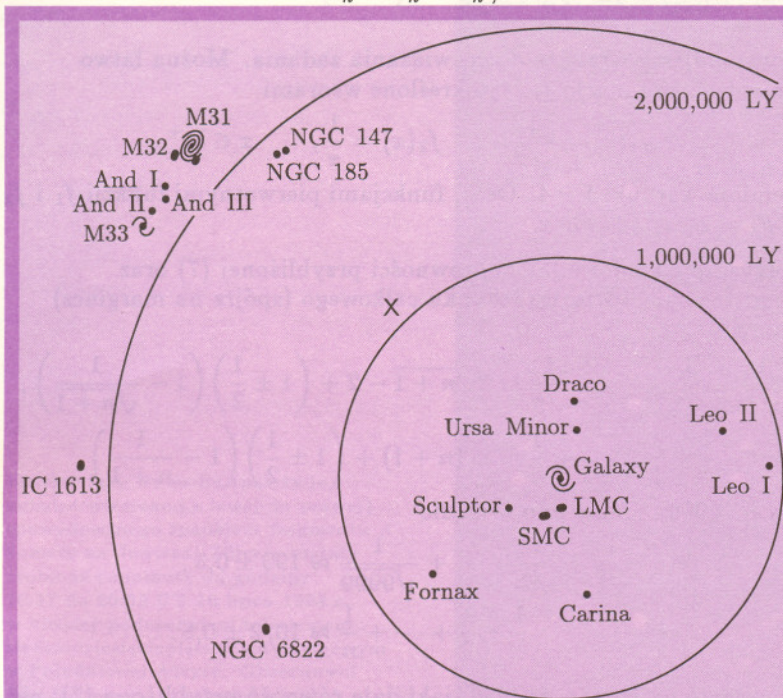
$$|B_k C_k| < |B_k E_k| = f(k) - f(k+1).$$

Czworokąt $C_k D_k B_{k+1} B_k$ jest równoległobokiem. Jeśli odcinek $B_k C_k$ przyjmiemy za podstawę, to wysokość będzie równa 1. Z ostatniej równości wynika, że pole R_k tego równoległoboku szacuje się następująco:

$$(5) \quad R_k = |B_k C_k| \cdot 1 < f(k) - f(k+1).$$

Prosta l_k dzieli trapez $A_k A_{k+1} B_{k+1} B_k$ na dwie figury. Jedną z nich jest równoległobok. Pole $P_k - R_k$ pozostałej części jest mniejsze od pola T_k trapezu krzywoliniowego $A_k A_{k+1} B_{k+1} B_k$:

$$P_k - R_k < T_k,$$



Grupa Lokalna Galaktyk w rzucie na płaszczyznę trzech najbardziej masywnych. X oznacza przybliżone położenie środka masy układu.

Niejednokrotnie w *Delcie* było wspomniane, że wielkość całkowitej masy Galaktyki jest przedmiotem kontrowersji. Z jednej strony sumaryczna masa gwiazd oraz obłoków gazu i pyłu wynosi około 10^{10} mas Słońca. Z kolei analiza orbit gwiazd oraz obłoków gazu wskazuje na wartość o rząd wielkości większą. W takiej sytuacji około 90% masy Galaktyki ukryte byłoby w obiektach niedostępnych obserwacji. Sugerowano, że ukryta masa występuje w postaci nieznanymi cząstek elementarnych (np. masywne neutrino) lub gwiazdopodobnych obiektów o masach zbyt małych, aby mogły zainicjować reakcje termojądrowe w swoim wnętrzu (takie hipotetyczne obiekty o masach rzędu kilku mas Jowisza nazywane są brązowymi karłami). Masy galaktyk karłowatych są znacząco mniejsze niż masa Drogi Mlecznej i dlatego możemy traktować je jako cząstki próbne orbitujące w jej polu grawitacyjnym. Dzięki temu może stać się wykonalne nowe wyznaczenie masy naszej Galaktyki.

Załóżmy na początek, że dany satelita ma tylko radialną składową prędkości (v) względem centrum Galaktyki, którą potrafimy wyznaczyć dzięki efektowi Dopplera. Oczywiście, prędkość radialną wyznaczamy nie względem środka masy Galaktyki, lecz względem Słońca, znając jednak orbitę Słońca w Galaktyce potrafimy stosowną poprawkę uwzględnić. Aby galaktyka-satelita pozostawała związana grawitacyjnie z Drogą Mleczną, jej energia kinetyczna powinna być mniejsza niż wartość bezwzględna jej energii potencjalnej. Oznaczając przez M masę Galaktyki, przez R odległość satelity, a przez m jego masę, dostajemy zależność:

$$\frac{1}{2}mv^2 < \frac{GMm}{R}.$$

W rezultacie mamy dolne ograniczenie na masę Galaktyki: $M > (Rv^2)/(2G)$. Musimy jeszcze wyznaczyć odległość satelity. Wykorzystujemy w tym celu fakt, że w galaktykach karłowatych występuje pewna klasa gwiazd zmiennych o znanej mocy promieniowania. Są to gwiazdy pulsujące typu RR Lyrae. Są one stosunkowo jasne i dzięki zmienności blasku możliwe do identyfikacji nawet w galaktykach odległych o miliony lat świetlnych. Ich jasność absolutna uśredniona względem okresu pulsacji (typowe okresy wynoszą kilkanaście godzin) jest w przybliżeniu taka sama dla wszystkich obiektów tego typu i znana dzięki pomiarom odległości i obserwowanych jasności zmiennych RR Lyrae położonych blisko Słońca. Mierząc teraz obserwowane jasności tych gwiazd leżących w innych galaktykach możemy wyznaczać odległości tych właśnie odległych systemów gwiazdowych.

Najsilniejsze ograniczenie masy Drogi Mlecznej otrzymujemy podstawiając do wyprowadzonego wzoru dane dla galaktyki Leo I. Jej odległość i prędkość radialna względem centrum Galaktyki wynoszą odpowiednio 230 kpc oraz 177 km/s (dodatnia wartość v oznacza, że galaktyka oddala się), co daje $M_G > 2 \times 10^{11}$ mas Słońca.

W rzeczywistości satelity naszej Galaktyki nie muszą poruszać się radialnie. Aby wyznaczyć pełen wektor prędkości, należy zmierzyć również składową prędkości prostopadłą do kierunku widzenia obiektu (tę składową nazywamy prędkością tangencjalną, styczną). Nie jest to łatwe. Gdyby bowiem prędkość tangencjalna galaktyki Leo I była taka jak jej prędkość radialna (co do wartości bezwzględnej), to jej położenie na sferze niebieskiej zmieniłoby się o 0,0001 sekundy łuku na rok. Aby zmierzyć tak mały kąt, musimy zaobserwować zmianę położenia gwiazd galaktyki względem obiektów, co do których możemy założyć, że stanowią dobre przybliżenie nieruchomego układu odniesienia. Takimi obiektami są jądra odległych galaktyk oraz kwazary. Program obserwacyjny mający za cel wyznaczenie prędkości tangencjalnych dla galaktyk karłowatych z Grupy Lokalnej jest obecnie w zaawansowanym stadium realizacji. Jego autorzy wykorzystują zdjęcia wykonane największymi teleskopami w latach 50. oraz nowe ekspozycje robione tymi samymi teleskopami obecnie. Dzięki bazie czasowej sięgającej 40 lat obrazy gwiazd w badanych pobliskich galaktykach karłowatych wykazują mierzalne przesunięcia względem tła odległych galaktyk i kwazarów. Można mieć uzasadnioną nadzieję, że już niedługo zostaną wyznaczone pełne wektory prędkości satelitów naszej Galaktyki, co w konsekwencji pozwoli wyznaczyć jej masę.

Wiadomość z ostatniej chwili:

W pierwszych dniach kwietnia 1994 roku grupa 3 astronomów z Cambridge (Anglia) doniosła o odkryciu nowej galaktyki karłowatej. Nowo odkryta galaktyka znajduje się w gwiazdozbiore Strzelca i jest ukryta za rojem gwiazd z centralnych obszarów naszej Galaktyki. Na niebie zajmuje obszar o rozmiarze około 10×5 stopni. Galaktyka Strzelec jest położona w odległości zaledwie 15 kpc od centrum Galaktyki i w odległości 24 kpc od Słońca. Odległości te są ponad dwa razy mniejsze niż odległości Wielkiego Obłoku Magellana, uważanego dotychczas za najbliższego satelitę naszej Galaktyki.

Jeżeli funkcja f jest ciągła na odcinku $[a; b]$, to istnieje taka funkcja F , że $F'(x) = f(x)$ dla $x \in (a; b)$. Funkcję F nazywamy funkcją pierwotną funkcji f . Okazuje się, że

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Jest to tzw. podstawowy wzór rachunku całkowego. Można to zapisać również w postaci

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x).$$

czyli

$$P_k < T_k + R_k.$$

Z powyższej nierówności oraz nierówności (4) i (5) mamy

$$T_k < P_k < T_k + f(k) - f(k+1).$$

Sumując stronami powyższe nierówności od $k=1$ do $k=n$ otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^n T_k < \sum_{k=1}^n P_k < \sum_{k=1}^n T_k + f(1) - f(n+1).$$

Korzystając z równości (3) możemy powyższe nierówności zapisać w postaci

$$(6) \quad \sum_{k=1}^n T_k + \frac{f(1) - f(n+1)}{2} < < \sum_{k=1}^n f(k) < \sum_{k=1}^n T_k + \frac{3}{2}(f(1) - f(n+1)).$$

Dzięki interpretacji geometrycznej całki oznaczonej mamy

$$T_k = \int_k^{k+1} f(x) dx \text{ i stąd} \quad \sum_{k=1}^n T_k = \int_1^{n+1} f(x) dx.$$

Nierówność (6) przyjmie teraz postać

$$\int_1^{n+1} f(x) dx + \frac{f(1) - f(n+1)}{2} < < \sum_{k=1}^n f(k) < \int_1^{n+1} f(x) dx + \frac{3}{2}(f(1) - f(n+1))$$

lub w formie przybliżonej

$$(7) \quad \sum_{k=1}^n f(k) \approx \int_1^{n+1} f(x) dx + \left(1 \pm \frac{1}{2}\right)(f(1) - f(n+1)).$$

Przystępujemy wreszcie do rozwiązania zadania. Można łatwo sprawdzić, że funkcje f_1, f_2 określone wzorami

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad f_2(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbf{R}^+,$$

spełniają warunki 1-4. Otóż, funkcjami pierwotnymi funkcji f_1 i f_2 są $F_1 = 2\sqrt{x}, F_2 = \ln x$.

Korzystając z udowodnionej równości przybliżonej (7) oraz z podstawowego wzoru rachunku całkowego (spójrz na margines) mamy

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \approx 2\sqrt{n+1} - 2 + \left(1 \pm \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right),$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \approx \ln(n+1) + \left(1 \pm \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

Dla $n = 9999$ mamy odpowiednio

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{9999}} \approx 199 \pm 0,5,$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \approx 10,2 \pm 0,5.$$

Zauważmy na koniec, że błąd, jaki daje równość przybliżona (7), nie przekracza, niezależnie od wartości n , liczby $\frac{1}{2}f(1)$.



Patrz w niebo

Rozwiązanie zadania M 714. Jeśli $A_1 = A'_1$, $A_2 = A'_2$ i $A_3 \neq A'_3$, to g jest symetrią względem symetralnej odcinka $A_3A'_3$, czyli względem prostej A_1A_2 . Gdy $A_1 = A'_1$ i $A_2 \neq A'_2$, to do poprzedniej sytuacji doprowadza symetria względem symetralnej odcinka $A_2A'_2$. Gdy wreszcie wszystkie trzy wierzchołki pierwszego trójkąta są różne od odpowiednich wierzchołków drugiego, to symetria względem symetralnej odcinka $A_1A'_1$ sprowadza sytuację do poprzedniej.



Rozwiązanie zadania M 715. Ponieważ f jest izometrią, więc dla każdego punktu X zachodzi $|XA| = |f(X)f(A)| = |f(X)A|$. Gdyby więc było $X \neq f(X)$, to punkt A musiałby leżeć na symetralnej odcinka $Xf(X)$. Podobnie B i C . Zatem punkty A, B, C leżałyby na jednej prostej wbrew założeniu. Musi więc być $X = f(X)$.

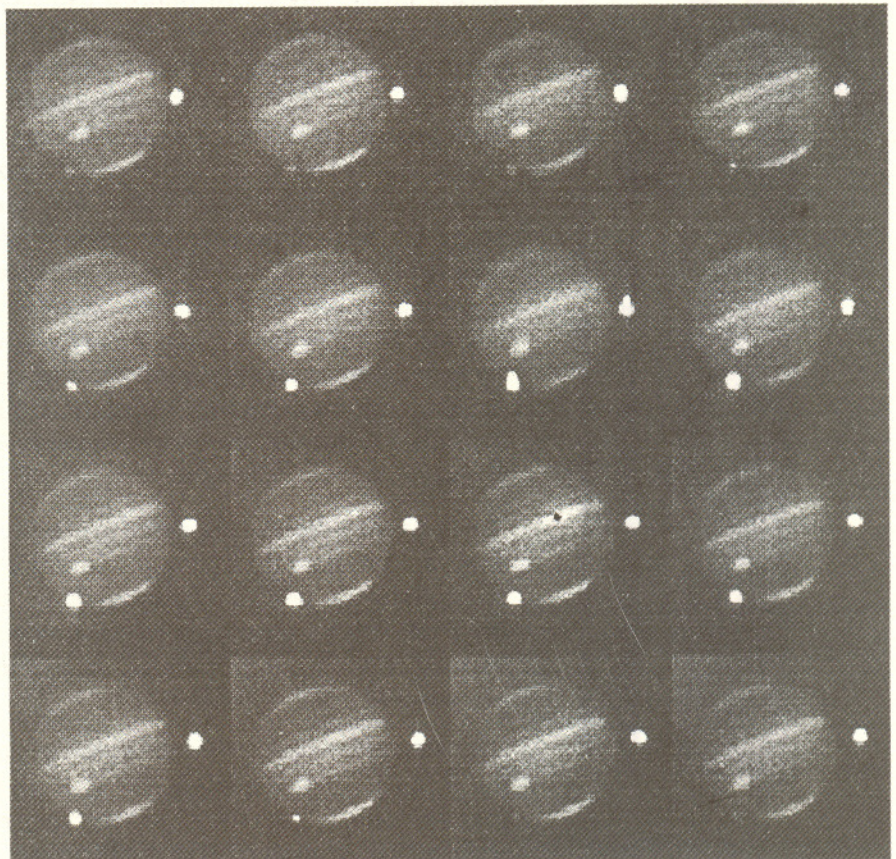
Skończyło się bombardowanie Jowisza. Jowisz nadal świeci na naszym niebie, a co – dokładnie – stało się w jego atmosferze, dowiemy się po opracowaniu obserwacji wykonanych w ciągu tygodnia 16–23 lipca 1994 r. Na początek sprostowanie. Pisząc w *Delcie* 6/1994 o oczekiwanym kataklizmie popełniłem przynajmniej dwa błędy. Po pierwsze, kometa powinna nazywać się kometa pani Carolyn Shoemaker i pana Davida Levy'ego. Wprawdzie państwo Shoemaker (Carolyn i Eugene) brali razem udział w odkryciu komety, ale pani Carolyn ma w tym pierwszeństwo. Po drugie, jak się okazało, całe zjawisko zaczęło się 2 dni wcześniej niż zapowiadałem – co prawda, nie sam to wymyśliłem, korzystałem z istniejących kilka miesięcy temu danych. Okazało się też zresztą, że odłamki komety spadają wprawdzie na niewidoczną z Ziemi stronę Jowisza, ale bliżej krawędzi jego tarczy, niż wcześniej oceniano. Dzięki temu eksplozje towarzyszące wtargnięciu odłamków do atmosfery planety dały się obserwować niemal bezpośrednio.

Jak już jesteśmy przy sprostowaniach, to winienem jestem Czytelnikom jeszcze jedno, dotyczące *Patrz w niebo* z *Delty* 5/1994. Otóż Sidney van den Bergh, który wykonał ostatnie w historii Obserwatorium Palomarskiego fotograficzne zdjęcia 5-metrowym teleskopem, jest Kanadyjczykiem, a nie Amerykaninem.

Ale powróćmy do komety. W katastroficznym tygodniu przychodziły do Obserwatorium Warszawskiego pocztą komputerową liczne komunikaty o spadku kolejnych brył, o pomiarach jasności wybuchów, ich widmach, zaburzeniach promieniowania radiowego planety i inne. Otrzymaliśmy też tą drogą kilka obrazów zjawiska, z których widać np., że wybuch towarzyszący spadkowi kilkukilometrowej bryły trwa około kwadransa, a gorąca plama po takim wydarzeniu ma po upływie jednego obrotu Jowisza rozmiary Ziemi. Niosą one – zagmatwane na razie – informacje o składzie chemicznym atmosfery Jowisza, jej własnościach termodynamicznych itd. Naukowa interpretacja tych wszystkich faktów pojawi się zapewne niedługo. Trudno przypuszczać, że dowiemy się czegoś rewelacyjnego. Niemniej jednak tak wyjątkowe sondowanie jowiszowej atmosfery dostarczy wielu szczegółowych informacji, które przyczynią się do zbudowania wierniejszego modelu planety.

Tomasz KWAST

Kolejne fazy wybuchu (należy je oglądać wierszami z lewej do prawej) spowodowanego spadkiem fragmentu A komety na Jowisza. Zdjęcia zostały zrobione co minutę od godziny 20:17 do 20:32 UT 16 lipca 1994 r. w bliskiej podczerwieni teleskopem siedemdziesięciopięć centymetrowym w Południowej Afryce. Obserwował Kaz Sekiguchi. Na Jowiszu widać Wielką Czerwoną Plamę i eksplozję tuż pod nią. Jasny obiekt na prawo od planety to satelita Io.



Skok wzwyż

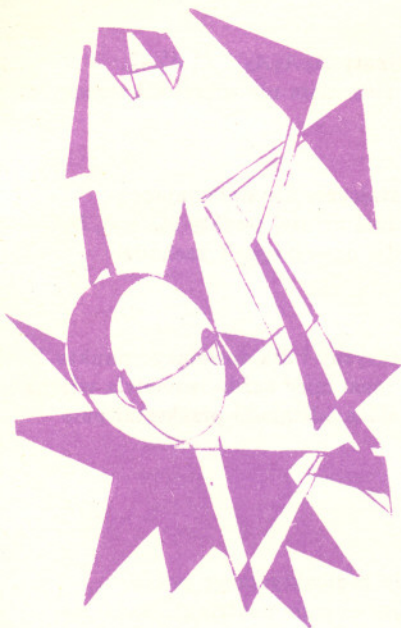
Nie można skoczyć wzwyż bez uprzedniego ugięcia kolan (spróbuj!). Trzeba najpierw trochę przykucnąć obniżając w ten sposób środek ciężkości ciała o pewien dystans (oznacmy go przez d ; \mathbf{d} to wektor przesunięcia w dół). Na tym dystansie w trakcie wyskoku mięśnie mogą wykonać pracę (w momencie utraty kontaktu z podłożem nie możemy już nic więcej zrobić) wyrzucając ciało na pewną wysokość h . Z zasady zachowania energii znajdujemy związek między wykonaną pracą i wysokością skoku

$$(*) \quad W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = mg(h + d),$$

gdzie \mathbf{F} oznacza średnią siłę (wektor) wywieraną przez mięśnie, a m oznacza masę ciała. Stąd wysokość skoku $h + d = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} / mg$. Zauważmy, że korzystając wyłącznie z argumentów wymiarowych uzyskujemy wynik niezależny od rozmiarów skoczka. Istotnie, dystans d jest rzędu rozmiarów osobnika, $d \sim l$, siła mięśni jest proporcjonalna do przekroju poprzecznego mięśni, a więc l^2 , a masa do objętości osobnika, $m \sim l^3$. Stąd $d + h \sim l^2 l / l^3 = \text{const}$. Większość zwierząt może skoczyć znacznie wyżej niż d , to znaczy $h \gg d$. Możemy wówczas stwierdzić, że zwierzęta mogą skoczyć na tę samą wysokość niezależnie od ich rozmiarów. Na przykład pchła, konik polny, kot, pies, koń skaczą na wysokość rzędu 1 – 2 m. Człowiek jest tutaj wyjątkiem. Może skoczyć jedynie na wysokość około 60 cm. Kucając przed skokiem obniżamy swój środek ciężkości o około 30 cm. (Ze wzoru (*) wynika, że w trakcie wyskoku średnia siła F wynosi około 3 razy ciężar ciała.) Doliczając do tego 1 m (w przybliżeniu na tej wysokości znajduje się środek ciężkości ciała) uzyskujemy maksymalną wysokość 1,6 m, jaką może pokonać człowiek. Jedynie bardzo dobrze wysportowani osobnicy mogą wyskoczyć trochę wyżej.

Tutaj mogą odezwać się głosy protestu. Przecież rekord w skoku wzwyż wynosi około 2,4 m, a więc 80 cm więcej niż wyliczyliśmy. Tak, to prawda, ale jest to wynik uzyskany przy skoku z rozbiegu, a do tej pory mówiliśmy o skoku z miejsca. Co ma jednak rozbieg do skoku wzwyż? Łatwo jest zrozumieć, że rozbieg jest ważny przy skoku w dal, ale wzwyż?

Aby skoczyć wyżej, potrzebna jest większa energia niż ta, jaką możemy uzyskać ze skoku z miejsca. W tym celu można spróbować wykorzystać przynajmniej część energii kinetycznej rozbiegu. Otóż talent skoczka wzwyż tkwi w umiejętnym wykorzystaniu tej energii.



Zobaczmy najpierw, jakie są teoretyczne możliwości. Najwyższa osiągnięta prędkość w sprincie to 10 m/s. Taką prędkość uzyskuje ciało spadające z wysokości 5 m i na taką wysokość wzniesie się ciało wyrzucone z tą prędkością. Pewnie wszyscy zauważyli jednak, że skoczek zbliża się do poprzeczki ze znacznie mniejszą prędkością. Powód jest prosty. Skoczek obowiązuje nie tylko zasada zachowania energii, ale też i pędu. Żeby zmienić kierunek prędkości z poziomego na pionowy, w momencie wysoku trzeba podziałać na ciało olbrzymią siłą (tym większą, im krótszy jest czas wybicia) i nogi skoczka nie wytrzymują po prostu tego obciążenia. Warto przy tym pamiętać, że przepisy zabraniają wybicia z dwóch nóg. Przyjmijmy więc, że skoczek zbliża się do poprzeczki z prędkością 5 m/s. Energia kinetyczna siedemdziesięciokilogramowego skoczka wynosi wtedy $E = mv^2/2 = 875 \text{ J}$. Aby uzyskać dodatkowe 80 cm do skoku na wysokość 2,4 m, potrzeba $E = mgh = 560 \text{ J}$. Wystarczy więc umiejętność wykorzystania około 60% swojej energii kinetycznej, aby osiągnąć cel. Wystarczy nawet trochę mniej, gdyż dobrzy skoczkowie, przez umiejętnie ułożenie ciała w trakcie skoku, potrafią pokonać poprzeczkę umieszczoną wyżej niż wysokość, na którą są w stanie wynieść własny środek ciężkości ciała.

Małą Deltę przygotował Jan KALINOWSKI

<p>Odcinek dla poczty</p> <p>Zł</p> <p>słownie złotych</p> <p>adres wpłacający</p> <hr/> <p>na AMOS r-k</p> <p>01-806 Warszawa ul. Zuga 12</p> <hr/> <p>nazwa banku PKO VIII O/W-wa</p> <p>Nr r-ku 1586-77578-136</p> <hr/> <p>stempel podpis przyjmującego</p>	<p>Odcinek dla posiadacza rachunku</p> <p>Zł</p> <p>słownie złotych</p> <p>Dokładny adres wpłacający</p> <hr/> <p>na AMOS r-k</p> <p>01-806 Warszawa ul. Zuga 12</p> <hr/> <p>nazwa banku PKO VIII O/W-wa</p> <p>Nr r-ku 1586-77578-136</p> <hr/> <p>stempel podpis przyjmującego</p>	<p>Potwierdzenie dla wpłacającego</p> <p>Zł</p> <p>słownie złotych</p> <p>Dokładny adres wpłacający</p> <hr/> <p>na AMOS r-k</p> <p>01-806 Warszawa ul. Zuga 12</p> <hr/> <p>nazwa banku PKO VIII O/W-wa</p> <p>Nr r-ku 1586-77578-136</p> <hr/> <p>stempel podpis przyjmującego</p>
Pobrano opłatę zł	Pobrano opłatę zł	Pobrano opłatę zł



Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

M 714. Na płaszczyźnie dane są dwa przystające trójkąty $A_1A_2A_3$ i $A'_1A'_2A'_3$. Udowodnić, że istnieje takie przekształcenie g będące złożeniem nie więcej niż trzech symetrii osiowych, że $g(A_i) = A'_i$, $i = 1, 2, 3$.

Rozwiązanie na str. 7

M 715. Załóżmy, że izometria f płaszczyzny (przekształcenie nie zmieniające odległości między punktami) ma trzy nie leżące na jednej prostej punkty stałe A, B, C (tzn. $f(A) = A$, $f(B) = B$, $f(C) = C$). Wykazać, że dla dowolnego X zachodzi $f(X) = X$.

Rozwiązanie na str. 7

M 716. Udowodnić, że dla dowolnej izometrii f płaszczyzny i dla dowolnego punktu Y istnieje taki punkt X , że $f(X) = Y$. Czy własność tę musi mieć każda izometria własna figury płaskiej (izometria własna figury to nie zmieniające odległości przekształcenie figury w nią samą)?

Rozwiązanie na str. 15

Redaguje Jarosław KULPA

F 389. Energia, która wydzieliła się w procesie rozpadu radioaktywnego potasu ${}^{40}_{19}\text{K} \rightarrow {}^{40}_{20}\text{Ca} + e^- + \bar{\nu}_e$ wynosi $E = 700$ keV (wyłączając energię neutrina). Sądzi się, że ciepło produkowane wewnątrz Ziemi zawdzięczamy w 1/3 właśnie temu izotopowi (obok uranu i toru). Obliczyć średnie stężenie izotopu ${}^{40}_{19}\text{K}$ w Ziemi oraz oszacować strumień neutrin wydobywający się z Ziemi na skutek rozpadu potasu. Porównać ten strumień ze strumieniem neutrin słonecznych $a_0 = 6 \cdot 10^{14}$ neutrin/(m²·s). Strumień ciepła wydobywający się z Ziemi wynosi $q = 0,063$ W/m², masa Ziemi $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg, promień Ziemi $R = 6,4 \cdot 10^6$ m, okres połowicznego rozpadu ${}^{40}_{19}\text{K}$ $t = 1,28 \cdot 10^9$ lat.

Rozwiązanie na str. 13

F 390. Za pomocą pewnego teleskopu A można oglądać odległe galaktyki o wielkości gwiazdowej o 1 większej niż za pomocą teleskopu B . Zakładając równomierne rozmieszczenie galaktyk w obserwowanej części nieba, oszacować, o ile więcej obiektów jesteśmy w stanie dostrzec za pomocą teleskopu A w stosunku do teleskopu B .

Wielkość gwiazdowa m powiązana jest z natężeniem oświetlenia E wzorem $m = -2,5 \log E + b$, gdzie b jest pewną stałą.

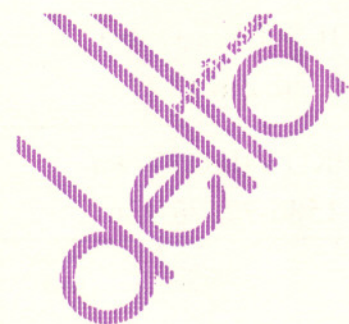
Rozwiązanie na str. 13



Prenumerata „Delt”
za okres:

Prenumerata „Delt”
za okres:

Prenumerata „Delt”
za okres:



Księga Szkocka

Marek KORDOS

Trochę irytuje częste ostatnio potrząsanie szabelką w rytm hymnu narodowego obiecującego, że jednak *szablą odbierzemy* i nadmierne rozczulanie się nad utraconymi kresami – Moskwę też w końcu, jako jedyni po Wikingach i Tatarach, okupowaliśmy przez jakiś czas (i to dwukrotnie). Nawet fakt, że – powiedzmy – Białynicki (albo Mickiewicz) urodził się w Nowogródku, a Kuroń (albo Hemar) we Lwowie, nie wydaje się wystarczający, by bardziej widzieć Polskę tam niż tutaj. Ale zrozumieć taką reakcję można, gdy zwróci się uwagę na pewne niemożności, jakie sobie zafundowaliśmy w *minionym okresie*, a których teraz – będąc już zacofanym krajem kapitalistycznym – nie nadrobimy. Własna przemoc w tej sprawie wzięła nam w szczególności *Księgę Szkocką*.

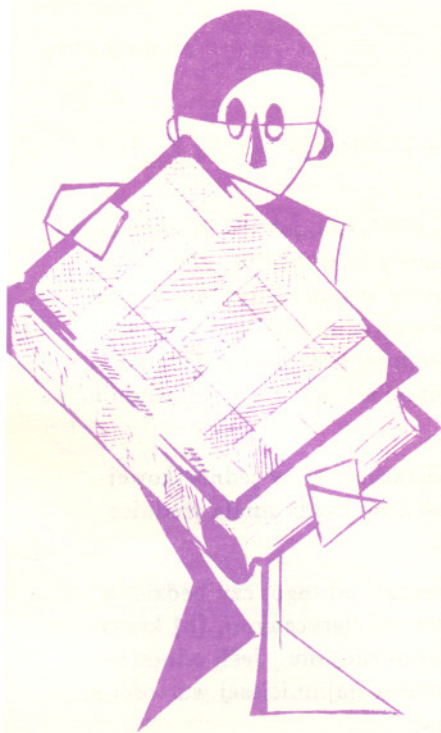
Matematycy pracują w specyficzny sposób i – często – potrzebują do tego specyficznych warunków. Jednym z takich warunków jest lokal w znacznym stopniu publiczny, a w dodatku zaopatrzony w różnego rodzaju napoje – słowem coś, co z pewną dowolnością można nazwać kawiarnią. Lwowską szkołę matematyczną lat tzw. międzywojennych stworzyły dwa, położone tuż obok siebie, takie lokale *Café Szkocka* i *Café Roma*. Dla potomności przetrwa jednak tylko pierwsza z nich, a to dzięki trafnej inwestycji właściciela. Inwestycją tą był gruby, starannie oprawiony (i niemniej starannie „przycumowany”) zeszyt, w którym panowie matematycy mogli zapisywać swoje cenne pomysły, niszcząc tym sposobem mniej bibułkowych serwetek. Panom matematykom pomysł się spodobał i w ten sposób powstało unikalne dzieło – zbiór ponad 193 przypadkowych problemów matematycznych, powstałych w ramach czegoś w rodzaju życia towarzyskiego. Godne uwagi jest, że problemy te, jak też odpowiedzi czy uwagi, pisane są w różnych językach (np. angielski, rosyjski), w takich, w jakich ich autorom przyszły do głowy. Problemom towarzyszy czasem obietnica nagrody za ich rozwiązanie (np. 5 małych piw albo żywa gęś) – nagrody takie były zawsze zresztą wypłacane.

Pierwszy problem został wpisany do *Księgi* 17 lipca 1935 roku przez Banacha, ostatni – sto dziewięćdziesiąty trzeci – przez Steinhausa 31 maja 1941 roku. Problemów jest więcej niż 193, gdyż numeracja bywa podwójna – mamy np. numer 10.1, 15.1 czy 17.1. Większość problemów jest rozwiązana, choć nie wszystkie. Rozwiązanie tych problemów okazało się w kilku przypadkach czymś więcej niż jedynie gimnastyką umysłową czy sportem – zapoczątkowało nowe kierunki badań.

Napisałem, że *Księga Szkocka* pisana była w różnych językach. Jest jednak oczywiste, że dominującym był język polski. I tu dochodzimy do tego, co nam własna przemoc wzięła. Gdyby ktoś chciał dzisiaj sięgnąć po *Księgę Szkocką*, znajdzie ją jedynie w języku angielskim. Została mianowicie wydana w 1981 roku przez bostoński oddział wydawnictwa Birkhäuser. Wydanie bostońskie zostało przygotowane przez R. Daniela Mouldina z ogromnym zresztą udziałem matematyków polskich. Zawiera ono (poza uwagami o wcześniejszych publikacjach problemów *Księgi*) pięć referatów z konferencji poświęconej księdze (Stanisława Ulama, Marka Kaca, Antoniego Zygmunda, Paula Erdösa i Andrzeja Granasa) oraz wszystkie problemy z interesującymi komentarzami ponad pięćdziesięciu matematyków (głównie polskich). Opisuję tę książkę, gdyż – moim zdaniem – większość Czytelników nie ma szansy, by ujrzeć ją na własne oczy. W niej zaś można ujrzeć faksimile kilku stron oryginału... Ale nie rozbudzajmy apetytu.

Przytoczę teraz sześć problemów z *Księgi Szkockiej*: trzy rozwiązane i trzy nie rozwiązane.

Wydaje się, że w zeszyt zainwestował nie restaurator osobiście, ale żona Banacha (por. Hugo Steinhaus, *Wspomnienia i zapiski*, Wyd. Aneks 1992, str. 116).



152

STEINHAUS

Nagrody:

Za obliczenie częstości:

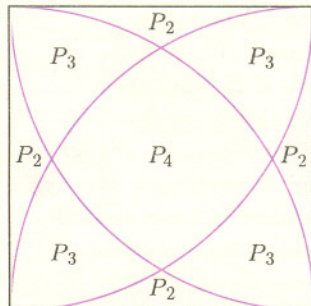
100 gramów kawioru;

Za dowód istnienia częstości:

małe piwo;

Za kontrprzykład: pół czarnej.

6 listopada 1936



44

STEINHAUS

Koło o promieniu 1 zawiera co najmniej dwa punkty o obu całkowitych współrzędnych (x, y) i co najwyżej 5 takich punktów. Jeśli przesuwac to koło o wektory nw ($n = 1, 2, 3, \dots$), gdzie w ma obie współrzędne niewymierne i takie, że ich stosunek też jest liczbą niewymierną, to liczby 2, 3, 4 [punktów o obu współrzędnych całkowitych] powtórzą się nieskończenie wiele razy. Jaka jest częstość ich pojawiania się przy $n \rightarrow \infty$?

Czy ona istnieje?

* Rozwiązanie tego problemu (za 100 gramów kawioru) wynika z ogólnego twierdzenia o ekwipartycji, które było znane Steinhausowi, gdy wpisywał problem 152 do *Księgi*. Czytelnikom polecam uzasadnienie bardziej prostego i zmyślnego podejścia: jeśli kwadrat jednostkowy podzielimy łukami jednostkowych okręgów zatoczonych z jego wierzchołków i otrzymane części ponazywamy tak jak na rysunku obok, to suma pól części nazywających się P_i będzie równa poszukiwanej częstości występowania i punktów o obu współrzędnych całkowitych w jednostkowym kole. Dla leniwych prostsze zadanie: uzasadnić, że jest to dla 2: $4 - \sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi$, dla 3: $2\sqrt{3} - 4 + \frac{\pi}{3}$, dla 4: $1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$. Oczywiście, można obliczyć pola poszczególnych figur na rysunku.*

Funkcja ciągła $z = f(x, y)$ opisuje powierzchnię, przez której każdy punkt przechodzą dwie proste całkowicie leżące na tej powierzchni. Wykazać, że ta powierzchnia jest paraboloida hiperboliczna. Zrobić to samo bez założenia ciągłości.

* Czytelnikowi należy się objaśnienie, co to jest paraboloida hiperboliczna: jest to powierzchnia przypominająca kawaleryjskie siodło, a powstająca w ten sposób, że po paraboli trzymającej nóżki w górę ślizga się wierzchołkiem parabola leżąca stale w płaszczyźnie do niej prostopadłej (choć równoległej do osi pierwszej paraboli) trzymająca nóżki w dół. Budzi zapewne wątpliwość, czy przez każdy punkt takiej powierzchni przechodzą dwie proste – wątpliwości te są świetną okazją do podniesienia swojej matematycznej świadomości na wyższy poziom. W *Księdze Szkockiej* znajduje się pod tym zadaniem*

Dopisek Problem ten został rozstrzygnięty pozytywnie przez Banacha – również bez założenia ciągłości. Dowód jest oparty na spostrzeżeniu: dowolne dwie proste na takiej powierzchni albo się przecinają, albo ich rzuty na płaszczyznę xy są równoległe.

30 lipca 1935

* Polecam naśladownictwo drogi Banacha.*

Czy można rozłożyć kwadrat na skończoną liczbę kwadratów tak, by każdy był innej wielkości?

* Tu rozwiązanie można znaleźć zarówno w *Delcie* 7/1989, jak i w *Kalejdoskopie matematycznym* Steinhausa. Pełniejsze rozwiązanie jest w *Delcie*, choć najnowsze polskie wydanie *Kalejdoskopu* ukazało się w tym samym roku, a to jest 11 lat po uzyskaniu ostatecznego wyniku. Kwadrat można podzielić na 21 kwadratów różnej wielkości (największy będzie miał bok równy $\frac{25}{56}$ boku dzielonego kwadratu, najmniejszy zaś $\frac{1}{56}$) i na mniej się nie da, co udowodnił A.J.W. Duijvestijn.*

Czy można, dla danego $\varepsilon > 0$, tak podzielić powierzchnię sfery jednostkowej na skończenie wiele przystających i spójnych części, by każda miała średnicę mniejszą niż ε ?

* Problem może mieć rozmaity charakter w zależności od tego, czy będziemy wymagać by brzegi owych części były (a) wielokątami sferycznymi, (b) krzywymi skończonej długości, (c) dowolnymi zbiorami o zerowym polu. Jeśli odpowiedź nie zawsze jest pozytywna, to ciekawe byłoby podanie najmniejszej wartości ε , dla której odpowiedniego podziału można dokonać.

59

RUZIEWICZ

60

RUZIEWICZ

M.J. Wenninger podał w 1979 roku nietrywialny podział sfery na 120 przystających trójkątów sferycznych. Czy można zwiększyć tę liczbę bez czynienia trójkątów zbyt cienkimi? Na przykład, gdy zażądamy, by każdy bok trójkąta był mniejszy od $\frac{\pi}{3}$?*

* Również *Kalejdoskop* i *Delta* wspominają jeszcze jeden problem.*

Czy bryła o jednorodnej gęstości, która pływa po wodzie w dowolnej pozycji, musi być kulą?

* Tutaj odpowiedź nie jest znana, poza szczególnymi przypadkami. Te szczególne przypadki to rozpatrywanie gęstości (rzadkości?) zerowej – problem sprowadza się do znalezienia bryły leżącej na poziomej płaszczyźnie w dowolnej pozycji (to „zero” jest traktowane jako sytuacja graniczna). I w takiej sytuacji odpowiedź jest pozytywna. Rozpatruje się także przypadek dwuwymiarowy, co też trudno uznać za normalną sytuację. Tu dla gęstości 0 jest odpowiedź pozytywna, ale np. dla gęstości $\frac{1}{2}$ jest wiele rozwiązań różnych od kuli (=koła) – całą serię podał Auerbach w 1938 roku. Są to figury, w których każda cięciwa połowiąca obwód połowi również pole. Dwie z nich są narysowane obok. Gdyby ktoś chciał jakiś wynik dla dowolnego wymiaru, to proszę: jeśli bryła, o którą chodzi, jest środkowo symetryczna, to przy gęstości $\frac{1}{2}$ musi być kulą. Tak więc rozwiązanie w przypadku ogólnym nie jest znane. A oto podobny problem wymyślony kilka lat temu.*

Przy jakiej ilości płynu w butelce środek ciężkości znajdzie się najniżej?

* Zagadnienie ma znaczenie praktyczne – kiedy, mianowicie, zrobić sobie przerwę podczas korzystania z napojów w podróży. Nie podam rozwiązania, choć je znam – niech Czytelnicy mają sami zabawę.

Można z tego przykładu wysnuć wniosek, że zadania z *Księgi Szkockiej* to jedynie zabawa. Tak jednak nie jest, a to tylko ja wybieram te najprostsze. Oto jeszcze jedno. Tym razem sformułowane wielce naukowo, co nie dziwi, gdy zwrócić uwagę na długość listy autorów.*

Twierdzenie. Jeśli $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem ciał wypukłych, z których każde ma średnicę $\leq a$, a suma ich objętości jest $\leq b$, to istnieje taki sześcian o średnicy $c = f(a, b)$, że można w nim rozłącznie umieścić te wszystkie ciała.
Wniosek. Kilogram ziemniaków da się zmieścić w worku skończonej wielkości.
Zadanie. Wyznaczyć funkcję $c = f(a, b)$.

* Problem ten – rozumiany jako poszukiwanie najmniejszej takiej funkcji – do dziś nie został rozwiązany. Autorzy częściowych rozwiązań szukali zwykle nie sześciennego, lecz prostopadłościennego pudła. W 1957 roku Kosiński (oczywiście, dla przypadku k -wymiarowego) oszacował jego wymiary na $3a, 3a, \dots, 3a, a + k! \frac{b}{a^{k-1}}$. W 10 lat później (ale tylko dla $k \geq 3$) Moon i Moser uzyskali inny wynik, bo $2a, 2a, \dots, 2a, 2(a + k! \frac{b}{a^{k-1}})$. I do dziś wiadomo jedynie, że w przestrzeni k -wymiarowej, dla $k \geq 3$

$$f(a, b) \leq \sqrt{k} \min\left\{\max\left\{3a, a + k! \frac{b}{a^{k-1}}\right\}, 2 \max\left\{a, a + k! \frac{b}{a^{k-1}}\right\}\right\}.*$$



Rozwiązanie zadania F 389. W stanie równowagi ilość energii produkowana we wnętrzu Ziemi jest równa energii wydobywającej się na powierzchnię. Strumień neutrin związanych z rozpadem potasu wynosi więc

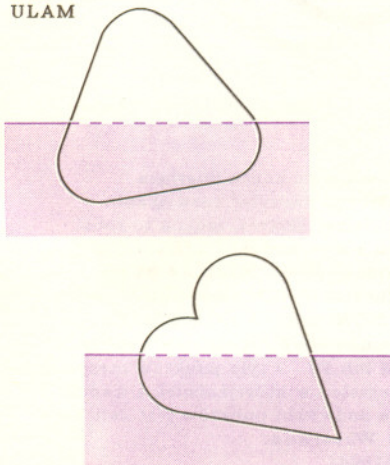
$$a = \frac{1}{3} \frac{q}{E} = 1,9 \cdot 10^{12} \text{ neutrin}/(\text{m}^2 \cdot \text{s}).$$

Porównując ten strumień ze strumieniem neutrin słonecznych mamy $a/a_0 = 0,31\%$. Niech $m_0 = 40 \text{ j.m.a.} = 66,4 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ będzie masą izotopu $^{40}_{19}\text{K}$. Moc ciepła związanego z rozpadem na jednostkę masy potasu wynosi $\sigma = \frac{E}{m_0} \lambda = 2,9 \cdot 10^{-5} \text{ W/kg}$, gdzie $\lambda = \frac{\ln 2}{t}$ jest stałą

rozpadu promieniotwórczego. Z bilansu ciepła mamy $\frac{1}{3} q = \frac{\sigma \cdot m}{s}$, gdzie m jest całkowitą masą $^{40}_{19}\text{K}$ w Ziemi, a $S = 4\pi R^2$ jest powierzchnią Ziemi. Ostatecznie, porównując m z masą Ziemi otrzymujemy stężenie izotopu potasu

$$\frac{m}{M} = \frac{4\pi R^2 q}{3\sigma M} = 6,2 \cdot 10^{-8} = 6,2 \cdot 10^{-6}\%.$$

19 ULAM



LIPNIACKI
WOJCIECHOWSKI

10.1 MAZUR AUERBACH ULAM BANACH



Rozwiązanie zadania F 390. Mamy $m_A - m_B = 1 = -2,5 \log E_A/E_B$, $E_A/E_B = 10^{0,4}$. Zakładając, że galaktyki mają podobną światłość I oraz uwzględniając, że $E = \frac{I}{r^2}$ otrzymujemy stosunek odległości najdalszych galaktyk obserwowanych w teleskopach A i B

$$\frac{r_A}{r_B} = 10^{0,2}.$$

Liczba galaktyk, przy założeniu ich równomiernego rozmieszczenia, jest proporcjonalna do objętości obserwowanej części Wszechświata, tj. do r^3

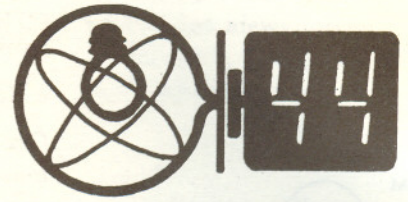
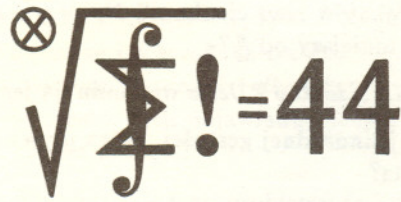
$$\frac{n_A}{n_B} = \frac{r_A^3}{r_B^3} = 10^{0,6} \approx 3,98.$$

Przy zadanej technice rejestracji iloczyn natężenia oświetlenia i powierzchni zwierciadła S jest wielkością stałą, tj.

$$E_A \cdot S_A = E_B \cdot S_B, \quad S \sim R^2,$$

gdzie R jest promieniem zwierciadła. Otrzymujemy więc

$$\frac{R_A}{R_B} = 10^{0,2} \approx 1,58.$$



Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 271 (WT=2,41) i 272 (WT=2,50)
z numeru 12/1993

Jan Kraszewski	-	Legnica	44,75
Tomasz Kulpa	-	Katowice	43,85
Mirosław Matłaga	-	Skoczów	40,30
Paweł Lizak	-	Puławy	38,64
Krzysztof Jedziniak	-	Katowice	36,64

Pan Kraszewski: nowa twarz w
Klubie 44. Witamy!

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 3$. Szkie rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1994.

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 1994

Zadania z fizyki nr 183, 184

Redaguje Jerzy B. BROJAN

183. Dr Crimeon Falsegrant, skazany za defraudację neutrin słonecznych na 10^{100} lat więzienia, kręcił się w kółko po celi.

– Jakoś muszę się stąd wydostać! – powtarzał. – Z pewnością istnieje możliwość!

Na początek zastosować przekształcenie konforemne w 11-wymiarowej przestrzeni spinorowej... albo lepiej nie, można nie powrócić już na oś rzeczywistą... A gdyby tak spróbować przejścia tunelowego? Ta ściana nie wygląda na bardzo grubą, chyba nie więcej niż metr... Trzeba tak rozepchnąć cząsteczki ściany, aby przeszły między nimi cząsteczki mojego ciała, powinno wystarczyć jakieś 20 eV na atom. To jest szansa!

Oceń orientacyjnie szansę dr. Falsegranta.

Wskazówka: W mechanice kwantowej prawdopodobieństwo przejścia tunelowego cząstki o masie m przez barierę potencjału o szerokości d wyraża się wzorem

$$p \approx e^{-2\kappa d},$$

gdzie $\kappa = \sqrt{2mE}/\hbar$, $\hbar = h/2\pi$, h – stała Plancka, E – deficyt energii.

184. Większą ilość rtęci nalano na płaską poziomą powierzchnię nie „zwilżaną” przez rtęć (np. szklaną). Obliczyć grubość warstwy rtęci.

Dane: gęstość rtęci $\rho = 13,6 \text{ g/cm}^3$, napięcie powierzchniowe $\sigma = 0,54 \text{ N/m}$.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/1994 i z numeru 6/1994

Przypominamy treść zadań:

174. Planetoida o masie $m = 50$ ton znajduje się w odległości $r = 100$ tys. km od środka Ziemi i leci z prędkością $v = 3 \text{ km/s}$ pod kątem $\alpha = 10^\circ$ do kierunku Ziemi. Czy planetoida minie Ziemię, czy rozbije się o jej powierzchnię? Czy porusza się po torze eliptycznym, parabolicznym czy hiperbolicznym? Promień Ziemi jest równy 6370 km.

179. Masa helikoptera wynosi $m = 900 \text{ kg}$, a promień wirnika $r = 4 \text{ m}$. Obliczyć minimalną moc silnika potrzebną do tego, aby helikopter wznosił się do góry z prędkością $v = 3 \text{ m/s}$. Gęstość powietrza jest równa $\rho = 1,29 \text{ kg/m}^3$.

180. W przewodzącej powłoce kulistej o zewnętrznym promieniu R jest dziurka w kształcie koła o promieniu r znacznie mniejszym od R . Jeśli naładować powłokę pewnym ładunkiem elektrycznym, to jaka część tego ładunku będzie rozłożona na wewnętrznej stronie?



Rozwiązanie zadania M 716.

Weźmy dowolne trzy niewspółliniowe punkty A_1, A_2, A_3 i oznaczmy $f(A_i) = A'_i, i = 1, 2, 3$. Wobec zadania M 714 istnieje izometria g (konkretnie: złożenie kilku symetrii osiowych) przekształcająca trójkąt $A'_1 A'_2 A'_3$ na trójkąt $A_1 A_2 A_3$. Zatem przekształcenie fg ma trzy nie leżące na jednej prostej punkty stałe A'_1, A'_2, A'_3 – jest więc identycznością. W szczególności dla dowolnego Y mamy $fg(Y) = Y$. Oznaczając $g(Y) = X$ otrzymujemy tezę zadania. Rozważmy teraz punkt $P_0 = (1, 0)$ i obrót ϕ względem początku układu o kąt $\sqrt{2} \cdot \pi$. Figura $\{P_0, P_1, P_2, \dots\}$, gdzie $P_{i+1} = \phi(P_i), i = 0, 1, 2, \dots$, ma tę własność, że każdy jej punkt po przekształceniu ϕ jest nadal jej punktem, nie ma natomiast punktu, którego obrazem byłby punkt P_0 .

174. Zadanie sprowadza się do wykorzystania dwóch stałych ruchu:

energii $E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$ i momentu pędu $K = mvr \sin \alpha$. Iloczyn GM we wzorze na energię można zastąpić wyrażeniem gR_z^2 (gdzie R_z – promień Ziemi), którego wartość wynosi $3,98 \cdot 10^{14} \text{ m}^3\text{s}^{-2}$. Najprościej jest ustalić rodzaj krzywej (elipsa, parabola czy hiperbola), gdyż zależy to od znaku energii. W naszym przypadku $E \approx m(4,5 - 3,98) \cdot 10^6 \text{ J/kg} = m \cdot 0,52 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$ i widzimy, że tor jest hiperbolą. Aby odpowiedzieć na pierwsze pytanie, należy obliczyć odległość r_p perygeum od środka Ziemi. Ponieważ w perygeum kierunek ruchu jest prostopadły do promienia wodzącego, więc $K = m v_p r_p$. Podstawiając $v_p = \frac{K}{m r_p}$ do wyrażenia na energię otrzymujemy równanie kwadratowe pozwalające wyznaczyć wielkość $1/r_p$. Rozwiązaniem jest

$$\frac{1}{r_p} = \left(\frac{K}{m}\right)^{-2} \left(GM + \sqrt{(GM)^2 + \frac{2E}{m} \cdot \left(\frac{K}{m}\right)^2} \right)$$

Podstawienie danych liczbowych daje w wyniku $r_p = 3394 \text{ km}$, zatem planetoida rozbija się o powierzchnię Ziemi ($r_p < R_z$). Masa planetoidy – jak widać z rachunków – nie ma żadnego znaczenia.

179. Rozpatrzmy układ odniesienia związany z helikopterem: wtedy powietrze w dużej odległości od niego porusza się z prędkością v w dół, natomiast prędkość strumienia powietrza przechodzącego przez krąg wirnika oznaczmy przez v' . Jeśli w czasie dt wirnik rozpędza masę powietrza dm od prędkości v do v' , to moc silnika jest równa $P = \frac{1}{2} \frac{dm}{dt} (v'^2 - v^2)$, a siła ciągu $F = \frac{dm}{dt} (v' - v)$. Wielkość $\frac{dm}{dt}$ należy obliczyć ze wzoru $\frac{dm}{dt} = S \rho v'$ (gdzie $S = \pi r^2$ – pole powierzchni wirnika), a dalej znajdujemy

$$v' = \frac{1}{2} \left(v + \sqrt{v^2 + 4\phi} \right),$$

$$P = \frac{1}{2} F (v' + v) = \frac{1}{4} F \left(3v + \sqrt{v^2 + 4\phi} \right),$$

gdzie przez ϕ oznaczyliśmy wielkość $\frac{F}{S \rho}$. Przyrównując F do ciężaru helikoptera mg i podstawiając dane obliczamy $P \approx 74 \text{ kW}$. Ten sam wynik otrzymuje się w układzie związanym z Ziemią, w którym energia zostaje zużyta na rozpędzanie strumienia powietrza od prędkości zero do $v' - v$ oraz na podnoszenie helikoptera. Oczywiście, w rzeczywistości potrzebna moc jest większa ze względu na różne straty (np. „zbędny” ruch wirowy powietrza).

180. Oznaczmy ładunek powłoki przez Q i przyjmijmy jego dodatni znak dla ustalenia uwagi. Z zasady superpozycji pól wynika, że pole powłoki otrzymamy dodając następujące pola:

- 1) Pole kuli bez dziury, naładowanej tym samym ładunkiem Q równomiernie rozłożonym na jej powierzchni.
- 2) Pole „nadwyżki na dziurze”, tzn. brakującej części powłoki, naładowanej ujemnym ładunkiem q o wartości takiej, aby łączny ładunek w dziurze był równy zero:

$$q = -Q \frac{\pi r^2}{4\pi R^2} = -Q \frac{r^2}{4R^2}.$$

- 3) Pole ładunków położonych na wewnętrznej stronie powłoki (oznaczmy ich łączną wartość przez q').

- 4) Pole „nadwyżki” ładunków na zewnętrznej stronie powłoki, tzn. różnicy między rzeczywistym nierównomiernym rozkładem ładunków na kuli z dziurą a rozkładem wprowadzonym w punkcie 1). Oznaczmy łączną wartość „nadwyżki” jako q'' .

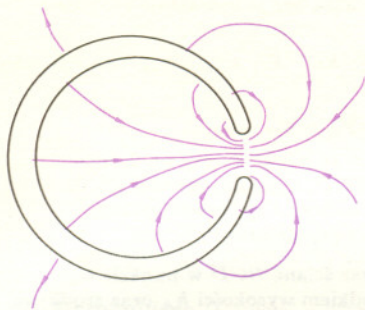
Rysunek ilustruje sumę pól opisanych w punktach 2), 3) i 4). Całkowity ładunek układu źródeł musi być równy rzeczywistemu całkowitemu ładunkowi Q (wynika to z prawa Gaussa). Zatem

$$q' + q'' = -q = Q \frac{r^2}{4R^2}.$$

Aby znaleźć wartość q' , zbadajmy dokładniej pole w samym otworze, tuż pod wymyśloną „klapką” (od wewnątrz). Pole 1) jest tu równe zero, a z pozostałych przeważa pole 2), jako pochodzące od najbliższych położonych źródeł. Ponieważ małą „klapkę” można w przybliżeniu uznać za płaskie kółko, więc połowa linii pola wpływa do „klapki” z jednej, a połowa z drugiej strony. Linie pola wpływające do „klapki” od strony wnętrza kuli muszą zaczynać się na ładunkach q' , czyli, zgodnie z prawem Gaussa

$$q' = -\frac{q}{2} = Q \frac{r^2}{8R^2}.$$

Autor pierwotnie rozpatrywał zadanie nieco inne: znaleźć natężenie pola elektrycznego w środku kuli z dziurką, naładowanej ładunkiem Q . Problem wydaje się trudny – może jednak ktoś z Czytelników go „złamie”?



Pominięcie pola odległych ładunków q' i q'' w porównaniu z polem bliskich ładunków q jest uzasadnione, gdyż wszystkie te ładunki są podobnej wielkości (rzędu Qr^2/R^2). Otrzymane wyniki będą słuszne tylko w pierwszym rzędzie względem małego parametru r^2/R^2 .

285. W przestrzeni danych jest 10 punktów, z których żadne cztery nie leżą na jednej płaszczyźnie. Łączymy pewne pary punktów odcinkami tak, aby każde dwa spośród rozważanych punktów łączyła dokładnie jedna linia łamana utworzona z narysowanych odcinków. Ile jest różnych układów odcinków spełniających ten warunek? (Dla przykładu, gdyby zamiast zbioru 10 punktów rozważać zbiór 3 punktów, wówczas istniałyby trzy układy odcinków o analogicznej własności.)

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/1994

Przypominamy treść zadań:

281. Mamy sześć komórek pamięci ponumerowanych od 1 do 6; w każdej komórce znajduje się (w chwili początkowej) liczba 0. Rzucamy kostką; jeśli wypadnie i oczek, zwiększamy o 1 zawartość i -tej komórki. Czynność tę powtarzamy do momentu, gdy we wszystkich komórkach pojawią się liczby jednakowej parzystości.

281. W każdym kroku (tj. po każdym rzucie kostką) łączna zawartość wszystkich komórek zmienia parzystość. Zatem konfiguracja kończąca może pojawić się tylko po parzystej liczbie kroków. Oznaczmy przez p_n prawdopodobieństwo tego, że pojawi się ona po $2n$ krokach. Oczywiście, $p_1 = 1/6$ (w drugim rzucie musi wypaść to samo, co w pierwszym).

Przyjmijmy oznaczenia: B – stan początkowy, E – stan końcowy, C – każdy inny stan możliwy do uzyskania w parzystej liczbie kroków. Przypuśćmy, że stan E następuje po $2n$ krokach, $n \geq 2$. Ewolucję układu można więc przedstawić tak:

$$B \rightarrow \underbrace{C \rightarrow C \rightarrow C \rightarrow \dots \rightarrow C}_{n-2 \text{ strzałek}} \rightarrow E,$$

gdzie każda strzałka symbolizuje dwa kroki. Przejście $B \rightarrow C$ odbywa się z prawdopodobieństwem $1 - p_1 = 5/6$.

W każdym stanie C mamy w czterech komórkach liczby parzyste, a w dwóch komórkach liczby nieparzyste – lub odwrotnie. Przejście $C \rightarrow E$ następuje dokładnie wtedy, gdy w dwóch kolejnych krokach zostaną uzyskane numery tych właśnie dwóch komórek, które są „w mniejszości”. Prawdopodobieństwo tego, że tak się stanie, wynosi $(1/3) \cdot (1/6) = 1/18$. Wobec tego przejście $C \rightarrow C$ następuje z prawdopodobieństwem $17/18$. Prawdopodobieństwo ewolucji przedstawionej na powyższym diagramie (oznaczone wcześniej przez p_n) równa się więc

$$p_n = \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{17}{18}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{18} \quad (\text{dla } n \geq 2).$$

Stąd

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = p_1 + \sum_{n=2}^{\infty} p_n = \frac{1}{6} + \frac{5}{6 \cdot 18} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{17}{18}\right)^m = 1$$

(suma szeregu geometrycznego). Daje to uzasadnienie tezy (a).

Aby wykonać (b), skorzystamy ze wzoru

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = (1-x)^{-2} \quad \text{dla } x \in (-1; 1)$$

(który można otrzymać na przykład różniczkując

stronami równość $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x)^{-1}$). Rozważana

zmienna losowa (liczba rzutów) przyjmuje wartość $2n$ z prawdopodobieństwem p_n , a zatem jej wartość oczekiwana wynosi

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} 2np_n &= 2p_1 + \sum_{n=2}^{\infty} 2np_n = \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{5}{6 \cdot 18} \sum_{n=2}^{\infty} n \left(\frac{17}{18}\right)^{n-2} = \\ &= \frac{1}{3} + \frac{5}{3 \cdot 17} \sum_{n=2}^{\infty} n \left(\frac{17}{18}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} + \frac{5}{3 \cdot 17} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{17}{18}\right)^{n-1} - 1 \right) = \\ &= \frac{1}{3} + \frac{5}{3 \cdot 17} \left(\left(\frac{1}{18}\right)^{-2} - 1 \right) = 32. \end{aligned}$$

286. Dla każdej rzeczywistej wartości parametru t wyznaczyć wszystkie trójki liczb rzeczywistych (x, y, z) spełniające układ równań

$$\begin{cases} (x^2 - yz)(x+t) + (y^2 - zx)(y+t) + (z^2 - xy)(z+t) = 0 \\ (t+2)(x+y+z) = 1. \end{cases}$$

Zadanie 286 zostało opracowane na podstawie propozycji zgłoszonej przez pana Krzysztofa Zapiska z Warszawy.

- (a) Wykazać, że z prawdopodobieństwem równym jedności konfiguracja kończąca pojawi się w pewnym momencie.
- (b) Obliczyć wartość oczekiwaną liczby rzutów.

282. Wewnątrz czworościanu $ABCD$ znajduje się punkt P . Jego odległości od wierzchołków A, B, C, D równe są odpowiednio R_A, R_B, R_C, R_D , a od ścian BCD, ACD, ABD, ABC – odpowiednio r_A, r_B, r_C, r_D . Dowieść, że

$$256 r_A r_B r_C r_D \leq (R_A + r_A)(R_B + r_B)(R_C + r_C)(R_D + r_D).$$

Kiedy zachodzi równość?

282. Oznaczmy przez S_X pole ściany leżącej naprzeciwko wierzchołka X , przez V_X – objętość ostrosłupa, którego podstawą jest ta ściana, a wierzchołkiem punkt P , wreszcie przez h_X – wysokość czworościanu $ABCD$ opuszczoną z wierzchołka X na tę ścianę (X może oznaczać dowolną z liter A, B, C, D). Objętość V czworościanu $ABCD$ wyraża się następującymi wzorami:

$$V = \frac{1}{3} h_A S_A = \frac{1}{3} h_B S_B = \frac{1}{3} h_C S_C = \frac{1}{3} h_D S_D$$

oraz

$$V = V_A + V_B + V_C + V_D, \text{ gdzie } V_X = \frac{1}{3} r_X S_X \text{ dla } X \in \{A, B, C, D\}.$$

Zauważając, że $R_X + r_X \geq h_X$ dla $X \in \{A, B, C, D\}$ oraz stosując nierówność między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną wnosimy, że

$$\begin{aligned} (R_A + r_A)(R_B + r_B)(R_C + r_C)(R_D + r_D) &\geq h_A h_B h_C h_D = \\ &= \frac{(3V)^4}{S_A S_B S_C S_D} = \frac{3^4 (V_A + V_B + V_C + V_D)^4}{S_A S_B S_C S_D} \geq \\ &\geq \frac{3^4 \cdot 4^4 \cdot V_A V_B V_C V_D}{S_A S_B S_C S_D} = 256 r_A r_B r_C r_D. \end{aligned}$$

Aby zachodziła równość, muszą być jednocześnie spełnione warunki:

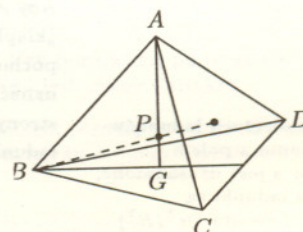
$$(1) \quad R_A + r_A = h_A, \quad R_B + r_B = h_B, \quad R_C + r_C = h_C, \quad R_D + r_D = h_D$$

oraz

$$(2) \quad V_A = V_B = V_C = V_D.$$

Układ równości (1) oznacza, że punkt P leży na każdej wysokości czworościanu $ABCD$, a układ równości (2) oznacza, że punkt P jest środkiem ciężkości tego czworościanu. Przypuśćmy, że te warunki są spełnione.

Prosta AP przecina wówczas ścianę BCD w punkcie G , który jest jednocześnie spodkiem wysokości h_A oraz środkiem ciężkości trójkąta BCD . Ponieważ prosta BP zawiera wysokość h_B , zatem płaszczyzna przechodząca przez punkty A, B, G, P jest prostopadła do płaszczyzn BCD i CDA , więc i do krawędzi CD . Wobec tego prosta BG zawiera wysokość trójkąta BCD . A skoro zawiera ona również środkową tego trójkąta, otrzymujemy wniosek, że jest to trójkąt równoramienny: $|BC| = |BD|$. Analogicznie można wykazać, że każde dwie krawędzie czworościanu $ABCD$ mają równe długości.



Stąd wynika, że udowodniona nierówność staje się równością tylko dla czworościanu foremnego.

Rodzina Bernoullich

Z nazwiskiem Bernoulli zetknął się każdy, kto uczył się matematyki w szkole średniej. Nierówność Bernoulliego, schemat Bernoulliego nieobce są każdemu maturzyście (oczywiście takiemu, który postanowił zdać matematykę). Matematykom znane jest prawo wielkich liczb Bernoulliego, liczby Bernoulliego, równanie Bernoulliego, lemniskata, całka, metoda – wszystko Bernoulliego. Na ogół wiadomo, że Bernoullich zajmujących się matematyką było kilku; któremu należy przypisać ten czy inny rezultat?

Ród Bernoullich swoje korzenie wywodzi z Antwerpii. W XVI wieku, gdy rozpoczęła się kontrreformacja i prześladowania religijne, protestancka rodzina Bernoullich przeniosła się najpierw do Frankfurtu nad Menem, by ostatecznie osiaść w Bazylei. Tam przyszli na świat Jacob i Johann Bernoulli – synowie Nicolausa, który sprowadził rodzinę do Bazylei. To właśnie Jacob i Johann rozpoczęli nauką drogę swego rodu i stali się wraz z Danielem, synem Johanna, najwybitniejszymi jego przedstawicielami.

Jacob („oznaczony” przez historyków numerem I) był z wykształcenia pastorem i wbrew intencjom ojca postanowił zająć się matematyką. Znaczące rezultaty osiągnął w niemal wszystkich istniejących wówczas

lemniskata Bernoulliego (Jacoba) – krzywa płaska, zbiór takich punktów, których iloczyn odległości od dwóch punktów stałych $F_1(-a, 0), F_2(a, 0)$ jest stały, równy a^2 (rys.). Lemniskata może być opisana wzorem

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

metoda Bernoulliego (Daniela) – metoda przybliżania największego co do wartości bezwzględnej pierwiastka równania algebraicznego, tj. równania postaci

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0.$$

prawo Bernoulliego (Daniela) – prawo mechaniki płynów wiążące prędkość płynu v , ciśnienie p i wysokość h położenia cząstki nad płaszczyzną odniesienia. W pewnych sytuacjach prawo to można zapisać w postaci równania (nazywanego też **równaniem Bernoulliego**)

$$h + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \text{const},$$

gdzie γ jest ciężarem właściwym cieczy, a g przyspieszeniem ziemskim. Prawo to zapisane w innej postaci wyraża się za pomocą **całki Bernoulliego**.

liczby Bernoulliego (Jacoba) – liczby wymierne B_s pojawiające się między innymi we wzorach na sumy jednakowych potęg kolejnych liczb naturalnych

$$\sum_{k=0}^{m-1} k^n = \frac{1}{n+1} \sum_{s=0}^n \binom{n+1}{s} B_s m^{n+1-s}.$$

Wartości początkowych liczb Bernoulliego: $B_0 = 1, B_1 = \frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = -\frac{1}{42}, B_7 = 0$ itd.

d dziedzinach matematyki, w szczególności w analizie matematycznej. Był pionierem badań nad rachunkiem prawdopodobieństwa. Niemal wszystkie pojęcia noszące nazwisko Bernoullich pochodzą od Jacoba. Jedynymi wyjątkami są metoda, całka i prawo Bernoulliego (w fizyce), które swe nazwy zawdzięczają Danielowi.

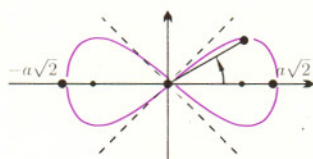
Johann (Johann I – jak chcą historycy) nie ustępował zdolnościami starszemu bratu i, choć otrzymał wykształcenie medyczne, także dokonał wiele w matematyce, przede wszystkim w analizie. Można śmiało stwierdzić, że to właśnie Johann rozpropagował rachunek różniczkowy wśród współczesnych i przyczynił się do jego burzliwego rozwoju. Odkrył i udowodnił wiele twierdzeń, które przeszły do historii bez nazwiska lub noszą nazwiska innych – na przykład reguła de l’Hospitola. Ironią losu jest fakt, że Johannowi bardzo zależało na prawach pierwszeństwa, co doprowadziło do kłótni z bratem i synem Danielem.

Daniel zajmował się głównie zastosowaniami matematyki. Światową sławę zyskała jego „Hydrodynamika”, gdzie umieścił wiele nowych faktów z fizyki cieczy, między innymi prawo noszące dziś jego imię.

Jacob I miał jednego syna, który uległ namowom ojca i nie zajął się nauką w ogóle. Karierę naukową natomiast wybrali dwaj inni synowie Johanna I: Nicolaus II i Johann II. Nicolaus II i jego brat Daniel sporą część życia spędzili w Petersburgu. Matematyką interesował się też bratanek Jacoba I i Johanna I – Nicolaus I; opisał między innymi tak zwaną grę petersburską. Przedstawiciele rodu Bernoullich również współcześnie mieszkają i pracują w Bazylei. Kto wie, może znów pojawią się Bernoulli tej miary co Jacob I i Johann I.

Z.P.

Na okładce zamieszczamy fragment drzewa genealogicznego rodu Bernoullich.



nierówność Bernoulliego (Jacoba) – nierówność: $(1+x)^n > 1+nx$ dla $x > -1$ i n naturalnego.

równanie Bernoulliego (Jacoba) – równanie różniczkowe:

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x)y^\alpha,$$

gdzie $\alpha \neq 0$ i $\alpha \neq 1$.

schemat Bernoulliego (Jacoba) – seria n powtórzeń tego samego doświadczenia, które może zakończyć się jednym z dwóch wyników – sukcesem lub porażką. Prawdopodobieństwo zajęcia k sukcesów w serii n prób wyraża się wzorem

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},$$

gdzie p jest prawdopodobieństwem sukcesu w jednej próbie, a q prawdopodobieństwem zdarzenia przeciwnego (porażki). Ze schematem Bernoulliego związany jest **rozkład Bernoulliego** (albo rozkład dwumianowy) zmiennej losowej.

prawo wielkich liczb Bernoulliego (Jacoba) – najprostsza i historycznie pierwsza wersja prawa wielkich liczb. Orzeka ono, że z prawdopodobieństwem dowolnie bliskim 1 można się spodziewać, iż przy dostatecznie wielkiej liczbie prób częstotliwość danego zdarzenia losowego będzie się dowolnie mało różniła od jego prawdopodobieństwa.

wielomiany Bernoulliego – wielomiany postaci

$$B_n(x) = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} B_s x^{n-s}$$

dla $n = 0, 1, 2, \dots$, gdzie B_s są liczbami Bernoulliego. Nazwa wprowadzona przez J.L. Raabego na cześć Jacoba Bernoulliego, który rozważał podobne wzory dla $x = m$.