

SPIS TREŚCI

NUMERU 8(243)

Metoda obrazów <i>Krzysztof Rejmer</i>	str. 1
Wbrew zdrowemu rozsądkowi <i>Tomasz Hofmokl</i>	str. 1
Zadania	str. 4
Patrz w niebo	str. 5
Dwugłos o nieskończoności <i>Jan Kalinowski</i> <i>i Paweł Strzelecki</i>	str. 6
Mała Delta	str. 8
Dodawanie zbiorów	str.10
Staszic i pioruny <i>Krzysztof Rejmer</i>	str.12
Klub 44	str.14
Olimpiada matematyczna	str.16
Epsilon	str.17

W następnym numerze:

Księga Szkocka

Okładkę wykonał
Bernard BADZIOCH

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.

Komitet Redakcyjny:
Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichocki
Roman Duda
Jan A. Gaj
Tomasz Hofmokl
Marta Kicińska-Habior
– przewodnicząca
Krzysztof Maślanka
Andrzej Mąkowski
– wiceprzewodniczący
Andrzej Pelczar
Zbigniew Plochocki
Zdzisław Pogoda
Michał Różycka
Konrad Rudnicki
Zbigniew Semadeni
Grzegorz Sitarski
Mieczysław Subotowicz
Andrzej Szymacha
Andrzej Woszczyk
Wacław Zawadowski

Redaguje kolegium w składzie:
Krzysztof Biesaga
Piotr Hajlasz
Jan Kalinowski – z-ca red. nac.
Krystyna Kordos – sekr. red.
Marek Kordos – red. nac.
Tomasz Kwast
Krzysztof Rejmer
Paweł Strzelecki
Joanna Udalska

Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7
02-678 Warszawa
tel. 43-02-43 wewn. 21
HAJLASZ@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w Zakładach Graficznych
w Warszawie, ul. Srebrna 16
Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY w AMOS-ie

Od stycznia 1993 r. prenumeratę „Delty” prowadzi również firma AMOS, 01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21). Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w pierwszym półroczu 1994 roku wynosi 8 000,-zł, a w drugim półroczu 10 000,-zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru wynosi w pierwszym półroczu 1994 r. 20 000,-zł, a w drugim – 22 000,-zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! AMOS dostarcza „Deltę” pod wskazany adres nie pobierając dodatkowej opłaty. Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Blankiet pocztowy na prenumeratę „Delty” w AMOS-ie zamieszczamy na str.9/10.

Konto AMOS-u: **PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136**

WARUNKI PRENUMERATY w RUCH-u

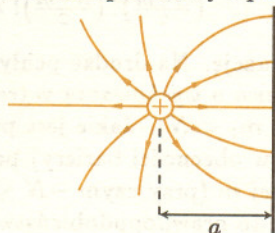
1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na IV kwartał 1994 r. wynosi 30 000,- zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
 - na teren kraju
 - jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób,
 - na zagranicę
 - „Ruch” S.A. Oddział Warszawa, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – dostawa odbywa się **pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty**, z wyjątkiem zlecenia dostawy pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni pokrywa prenumerator.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
 - na kraj i zagranicę – do 20 XI na I kwartał roku następnego
 - do 20 II na II kwartał
 - do 20 V na III kwartał
 - do 20 VIII na IV kwartał.

Cena 1 egzemplarza 10 000,- zł

Metoda obrazów

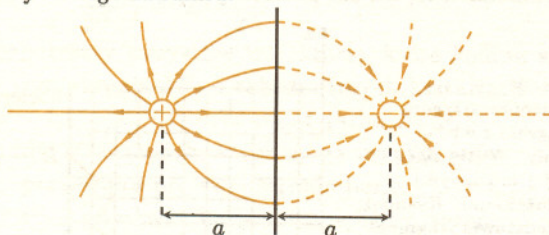
Krzysztof REJMER

Popularna w elektrostatyce metoda obrazów pozwala znaleźć rozkład natężenia pola elektrostatycznego wytworzonego przez układ ładunków znajdujących się w obecności przewodników. Rozważmy najprostszą sytuację: ładunek punktowy i przewodzącą płaszczyznę.



Rys. 1. Linie pola elektrostatycznego są prostopadłe do płaszczyzny.

Z elektrostatyki wiemy, że powierzchnia przewodnika jest powierzchnią ekwipotencjalną, a wektor natężenia pola jest do niej prostopadły. Gdybyśmy po drugiej stronie płaszczyzny umieścili ładunek będący zwierciadlanym odbiciem rzeczywistego ładunku ze zmienionym znakiem, a następnie usunęli płaszczyznę przewodzącą, to rozkład natężenia pola w półprzestrzeni, w której znajduje się rzeczywisty ładunek, nie uległby zmianie. Ten drugi ładunek, który wprowadziliśmy jako obiekt pomocniczy, nosi nazwę obrazu (elektrycznego) rzeczywistego ładunku.



Rys. 2. Ładunek i jego obraz względem płaszczyzny tworzą dipol elektryczny.

Sens metody obrazów jest więc prosty: natężenie pola elektrostatycznego znajdujemy jako superpozycję natężeń pól pochodzących od ładunków rzeczywistych i elektrycznych obrazów utworzonych za pomocą zwierciadlanego odbicia (ze zmianą znaku ładunku) względem powierzchni każdego przewodnika. Reszta to jedynie kwestia sprawności rachunkowej.

Nie każdy wie, że metodę obrazów można zastosować w analizie innych problemów, na przykład w rachunku prawdopodobieństwa. Rozważmy jednowymiarowe zagadnienie błądzenia przypadkowego. Cząstka porusza się wzdłuż linii prostej, wykonując skoki o jednostkowej długości. Każdy skok jest statystycznie niezależny od poprzedniego, a prawdopodobieństwo skoku w lewo i skoku w prawo są jednakowe, a zatem równe $1/2$. Wyobraźmy sobie pijaną pchłę skaczącą aleją; na każdym końcu alei jest bar, a pchła jest tak bardzo nietrzeźwa, że nie pamięta o poprzednim skoku ani nie rozpoznaje, w jakim miejscu alei się znajduje, pamięta tylko o tych barach. Oznaczmy przez O punkt startu. Po N skokach pchła może się maksymalnie oddalić od niego do punktu o współrzędnej N lub $-N$. Chcemy określić prawdopodobieństwo tego, że po N skokach pchła znajdzie się w punkcie o współrzędnej m , przy czym $|m| \leq N$. Dla parzystych N interesujące są tylko parzyste wartości m , dla nieparzystych N – nieparzyste. Aby znaleźć się w punkcie o współrzędnej m , pchła musi wykonać $\frac{N+m}{2}$ skoków w prawo oraz $\frac{N-m}{2}$ skoków w lewo. Kolejność, w jakiej te skoki będą wykonywane, jest obojętna, ważna jest tylko liczba skoków

Wbrew zdrowemu rozsądkowi (IX)

(Według wykładów radiowych z audycji IV programu – *Widnokrąg*)

Tomasz HOFMOKL

Czy rzeczywistość jest rzeczywista?

W moim cyklu artykułów przekonuję Państwa, że wyniki doświadczeń w świecie bardzo małych składników materii są nie do pogodzenia z naszym wyobrażeniem porządku w przyrodzie, jakie wyrobiliśmy sobie na podstawie obserwacji zjawisk makroskopowych lub, inaczej mówiąc, zjawisk z życia codziennego. Tę niezgodność określiłem terminem „wbrew zdrowemu rozsądkowi”.

Zjawiska te, z drugiej strony, są bardzo dobrze zbadane i nie mamy najmniejszych podstaw, aby uzyskane wyniki poddawać w wątpliwość. Pozostaje więc uznanie, że przyroda jest znacznie bogatsza, niż może to nam się wydawać i że musimy rozszerzyć kryteria tego, co jest, a co nie jest zgodne ze zdrowym rozsądkiem. Osobiście uważam, że uczy to nas pokory i ostrożności przy ferowaniu wyroków, co jest, a co nie jest możliwe.

Pisałem ostatnio o pierwszych zjawiskach, które doprowadziły do powstania koncepcji kwantów, czyli o promieniowaniu ciała doskonale czarnego i o zjawisku fotoelektrycznym. Rozważania nad pierwszym skłoniły Maxa Plancka do wprowadzenia koncepcji porcji energii, czyli kwantu energii, a drugie, pozwoliło Albertowi Einsteinowi na wysunięcie hipotezy, że światło ma naturę korpuskularną – rozchodzi się w postaci cząstek – fotonów. Dalsze doświadczenia wykazały, że materia ma również własności falowe i korpuskularne, co uwidacznia się, między innymi, w zaskakującym zjawisku przechodzenia elektronu przez dwa otwory równocześnie bez dzielenia się. W ostatnim zaś artykule pisałem o przenikaniu cząstki alfa przez ścianę, inaczej mówiąc, przez barierę potencjału, co doprowadziło do stwierdzenia, że zachowanie się cząstki możemy opisać tylko podając prawdopodobieństwo znalezienia jej w danym punkcie przestrzeni i czasu, a nie możemy przewidzieć jej losów z całą pewnością. Krok po kroku coraz bardziej odbiegamy od utartych pojęć i interpretacji

fizyki klasycznej, która jest w tym miejscu synonimem zdrowego rozsądku. Nagromadziło się tych odstępstw już sporo i dlatego chciałbym tym razem napisać o kłopotach ze zrozumieniem, czyli interpretacją mechaniki kwantowej. Kłopoty te już mieli twórcy tej dziedziny nauki i byłoby przesadą twierdzić, że dziś nikt już ich nie ma. Przypomnijmy całą historię w porządku chronologicznym.

Mechanika kwantowa narodziła się w latach dwudziestych obecnego stulecia w oparciu o analizę nagromadzonych przez ubiegłe lata wyników doświadczeń, które można by określić jako sprzeczne ze zdrowym rozsądkiem, czyli takich, których nie udawało się wyjaśnić na podstawie znanych dotychczas zasad fizyki. Twórcami tej nowej nauki byli de Broglie, Heisenberg, Schrödinger, Born, Bohr. Opierała się ona na pracach dwóch, można tak powiedzieć, gigantów współczesnej fizyki: Maxa Plancka i Alberta Einsteina. W miarę rozwoju mechaniki kwantowej potwierdzało ją coraz więcej faktów doświadczalnych wskazując równocześnie, że trzeba odrzucić, wydawałoby się tak podstawowe dogmaty nauki, jak determinizm, realizm, kompletność.

Pierwszy padł ofiarą determinizm. W 1926 roku Max Born wykazał, że w przeciwieństwie do fizyki klasycznej, która jest w stanie przewidzieć dokładnie przebieg zjawiska, mechanika kwantowa pozwala obliczyć tylko prawdopodobieństwo zajścia określonego zjawiska. Mogą Państwo wyobrazić sobie, że takie postawienie sprawy wzbudzało niezwykle namietności. Jak to? Nie można przewidzieć dokładnie przebiegu zjawiska? Przypadek może odgrywać zasadniczą rolę? Stąd bierze się słynne powiedzenie Einsteina, że Pan Bóg nie gra w kości. Łatwiej było się pogodzić z myślą, że to my nie umiemy ściśle przewidywać przyszłości, że mamy niedoskonałą teorię, ale równocześnie wierzyć, że kiedyś, jak zbudujemy doskonalszą jej wersję, to okaże się, że wszystko da się przewidzieć. Powstała koncepcja tak zwanej teorii z ukrytymi parametrami. Gdybyśmy je znali, wtedy można by przewidywać zachowanie się cząstek w pełni dokładnie, a nie tylko obliczać prawdopodobieństwa.

W miarę upływu czasu sytuacja pogarszała się. Otóż w 1927 roku Werner Heisenberg ogłosił słynną już dziś zasadę nieoznaczoności. Mówi ona, że nie można zmierzyć (wyznaczyć) równocześnie pewnych par wielkości fizycznych zwanych sprzężonymi. Do takich par należy, między

w lewo oraz liczba skoków w prawo. Istnieje

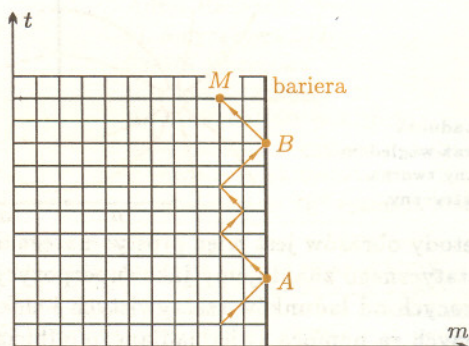
$$\frac{N!}{\left(\frac{N+m}{2}\right)! \left(\frac{N-m}{2}\right)!}$$

sposobów, na jakie pchła może wykonać skoki lądując w punkcie o współrzędnej m . Prawdopodobieństwo każdej sekwencji skoków jest takie samo i równe $1/2^N$. A zatem prawdopodobieństwo tego, że po N skokach pchła oddali się o m , wynosi:

$$P_N(m) = \frac{N!}{\left(\frac{N+m}{2}\right)! \left(\frac{N-m}{2}\right)!} \frac{1}{2^N}$$

Skomplikujmy teraz sytuację. Na drodze pchły umieścimy odbijającą barierę (*Ustawa o wychowaniu w trzeźwości*) w punkcie o współrzędnej m_1 ($0 < m_1 < N$). Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że po N skokach (w obecności bariery) pchła znajdzie się w punkcie o współrzędnej m (przy czym $-N \leq m \leq m_1$)? Jeśli pchła dotrze do bariery, to prawdopodobieństwo następnego skoku jest równe 1 – gdy jest to skok w lewo oraz 0 – gdy jest to skok w prawo. Symetria zagadnienia została złamana, prawdopodobieństwa różnych sekwencji skoków mogą być różne; zależy to od liczby odbić od bariery. Liczenie liczby trajektorii o jednakowym prawdopodobieństwie także wydaje się bardziej skomplikowane. Zanim więc zabierzemy się za rachunki, przyjmijmy prostą metodę obrazowania ruchów pchły. Będzie to dyskretny diagram czasoprzestrzenny (rys. 3). Na osi pionowej będziemy odkładać czas, na osi poziomej – położenie.

Rys. 3. Czasoprzestrzenny diagram ruchów pchły. Węzły sieci są jej możliwymi położeniami. Rysunek przedstawia fragment trajektorii kończącej się w punkcie M , po dwukrotnym odbiciu od bariery w punktach A i B .



Prawdopodobieństwo realizacji trajektorii pokazanej na rysunku 3 jest równe:

$$\frac{1}{2^{N-2}}, \quad \text{czyli } 4 \cdot \frac{1}{2^N},$$

ponieważ pchła znalazłszy się w punktach A i B skacze w lewo z prawdopodobieństwem nie $1/2$ jak poprzednio, lecz 1.

Narysujmy teraz na diagramie punkt M' będący zwierciadlanym odbiciem punktu M względem bariery. Oznaczmy przez m przestrzenną współrzędną punktu M . Przestrzenna współrzędna punktu M' jest wtedy równa $2m_1 - m$. Usuńmy teraz barierę i rozważmy takie trajektorie, które kończą się w punkcie M lub jego obrazie M' oraz mają tę miłą własność, że kształt łamanej AB jest zawsze taki sam, także kształt łamanej BM (ewentualnie BM') jest zawsze taki sam. Mówiąc, że kształty dwóch łamanych są jednakowe, rozumiemy tu albo identyczność łamanych, albo możliwość przeprowadzenia jednej w drugą przez zwierciadlane odbicie względem bariery. W przypadku trajektorii z rysunku 3 będą to trajektorie pokazane na rysunku 4.

Każdej trajektorii z dwukrotnym odbiciem od bariery w punktach A i B , kończącej się w punkcie M , odpowiadają cztery trajektorie przechodzące w nieobecności bariery przez punkty A i B , kończące

się w M lub M' , otrzymane z wyjściowej trajektorii metodą obrazów. Łatwo spostrzec, że jest to przyporządkowanie wzajemnie jednoznaczne. Jeśli nie ma bariery, to prawdopodobieństwo zrealizowania każdej z tych czterech trajektorii jest takie samo i równe $1/2^N$. Prawdopodobieństwo zrealizowania którejkolwiek z tych czterech trajektorii (w nieobecności bariery) jest zatem równe $4/2^N$, czyli tyle samo, ile wynosiło prawdopodobieństwo dla trajektorii z dwukrotnym odbiciem się od bariery.



Rys. 4. Trajektorie otrzymane za pomocą metody obrazów z trajektorii przedstawionej na rysunku 3.

- a) trajektorie kończące się w M ,
b) trajektorie kończące się w M' będącym zwierciadlanym odbiciem punktu M .

Jeśli rozpatrzmy trajektorię z k -krotnym odbiciem od bariery w punktach A_1, \dots, A_k , to metoda postępowania będzie dokładnie taka sama. Prawdopodobieństwo zrealizowania takiej trajektorii wynosi:

$$\frac{1}{2^{N-k}} = 2^k \cdot \frac{1}{2^N}.$$

Usuńmy barierę i rozpatrzmy wszystkie trajektorie, które kończą się w punkcie M lub w jego obrazie M' , o takich samych kształtach łamanych $A_i A_{i+1}$ ($i = 1, \dots, k-1$) oraz $A_k M$ (albo $A_k M'$). Ponieważ w grę wchodzi k łamanych, które mogą przyjąć jedno z dwóch położen (po prawej lub po lewej stronie bariery), jest więc tych trajektorii 2^k , a ponieważ barierę usunęliśmy, zatem prawdopodobieństwo zrealizowania dowolnej trajektorii jest równe $1/2^N$. Wynika stąd, że prawdopodobieństwo zrealizowania

którejkolwiek ze wspomnianych k trajektorii wynosi $\frac{2^k}{2^N}$, czyli właśnie tyle, ile wynosiło prawdopodobieństwo zrealizowania trajektorii z k -krotnym odbiciem od bariery.

Wypływa stąd wniosek, że prawdopodobieństwo $P_N^{m_1}(m)$ wylądowania pchły w punkcie o współrzędnej m w obecności odbijającej bariery jest równe sumie prawdopodobieństw wylądowania pchły w tym punkcie lub w jego zwierciadlanym obrazie w nieobecności bariery. Ponieważ obraz końcowego punktu trajektorii pchły ma współrzędną $2m_1 - m$, prawdopodobieństwo to jest równe:

$$P_N^{m_1}(m) = P_N(m) + P_N(2m_1 - m).$$

Posługując się metodą obrazów możemy rozwiązać także nieco trudniejsze zagadnienie. Na drodze cząstki znajduje się bariera pochłaniająca. Jakie jest prawdopodobieństwo pochłonięcia cząstki najdalej w N -tym skoku? (Możemy wyobrazić sobie, że na drodze naszej skaczącej pchły znajduje się kiosk z piwem.)

Zagadnienie błądzenia przypadkowego uważane jest za model ruchów Browna, a zatem wiąże się również ze zjawiskiem dyfuzji. Rozważmy cząstkę brownowską poruszającą się wzdłuż prostej, wykonującą skoki o długości l z częstotliwością n . Przemieszczenie cząstki ml oznaczmy przez x . Rozważmy przedział o długości Δx dużo większej niż długość jednego skoku l i dużo mniejszej niż Nl .

innymi, pęd cząstki i jej położenie, czas życia cząstki i jej masa i wiele innych par wielkości. Jeżeli zmierzmy dokładnie położenie cząstki, to nie możemy znać w tym samym miejscu jej pędu. Można to nawet zrozumieć. Każdy pomiar położenia zaburza ruch cząstki, a tym samym zmienia jej prędkość. No bo na przykład: ustalimy położenie elektronu umieszczając na jego drodze bardzo wąską szczelinę. Im węższa szczelina, tym dokładniej wiemy, że elektron, który przeszedł przez szczelinę, miał w chwili przechodzenia dobrze określone położenie – właśnie położenie szczeliny. Pojawia się jednak od razu kłopot. Ze względu na naturę falową elektron przechodząc przez wspomnianą szczelinę ulega ugięciu i nie możemy już powiedzieć, jaki jest jego pęd czy prędkość. Zatrzymajmy się na tym przykładzie. Czy stwierdzenie, że nie znamy prędkości, oznacza, iż cząstka jej nie ma, czy też oznacza naszą nieudolność? Inaczej mówiąc, czy istnieje realnie, czyli niezależnie od nas, coś takiego jak prędkość cząstki, którą albo znamy, albo nie? A może jest sensowne mówić o prędkości tylko wtedy, gdy dokonujemy pomiaru?

Przyznaję Państwo, że zaczynamy się oddalać od tego, co uważamy za oczywiste. Otóż we wrześniu 1927 roku Niels Bohr na konferencji w Copenaghadze przedstawił pogląd, według którego zjawiskom nie można przypisać realności niezależnie od obserwatora. Rola obserwatora staje się niezwykle ważna. Światło może być falą lub cząstką-fotonem zależnie od tego, w jakim doświadczeniu je badamy. Nie możemy powiedzieć, czy jest falą, czy cząstką, zanim nie dokonamy pomiaru. Wystąpienie Bohra spotkało się z bardzo silnym sprzeciwem Einsteina. Dyskusja między Bohrem i Einsteinem jest sama w sobie pasjonująca jako obraz ścierania się dwóch najwybitniejszych umysłów epoki. Einstein zaatakował najpierw zasadę nieoznaczoności. Na kongresach Solvaya w roku 1927 i w 1930 przedstawiał słynne doświadczenia myślowe, które miały wykazać sprzeczność tkwiącą w zasadzie nieoznaczoności. Bohr zdołał się obronić. Jako anegdotę można opowiedzieć, iż zdarzało się, że Einstein jednego dnia przygważdżał Bohra swoimi argumentami, ten zaś spędzał całą noc na pracy, aby przy śniadaniu następnego dnia mieć już gotową odpowiedź. Był to dla fizyki okres niezwykle płodny i pasjonujący. Einstein w końcu zrezygnował z wykazania sprzeczności logicznej tkwiącej, wedle niego, w mechanice kwantowej, ale usiłował wykazać, że jest ona niekompletna, to znaczy, że nie opisuje całej

rzeczywistości fizycznej. W 1935 roku opublikował wraz z Podolskim i Rosenem pracę, w której, jak mu się wydawało, wykazał, że mechanika kwantowa jest niekompletna. Koncepcja zwana do dziś jako paradoks EPR od pierwszych liter nazwisk autorów opierała się na następującym rozumowaniu:

*Jeżeli nie zakłócając w żaden sposób, czyli nie wykonując pomiaru, możemy przewidzieć wartość wielkości fizycznej w jakimś układzie, to mamy prawo powiedzieć, że wielkość ta istnieje rzeczywiście niezależnie od obserwatora. Jeżeli potrafimy przewidzieć wartość pędu cząstki w danym miejscu przestrzeni bez dokonywania pomiaru pędu tej cząstki, to cząstka ta ma rzeczywiście pęd niezależny od nas.

* Należy wykazać, że można zaprojektować doświadczenie, w którym bez dokonywania pomiaru pędu cząstki można określić dokładnie jego wartość. Będzie to dowód, że pęd cząstki jest wielkością niezależną od obserwatora, a więc, że istnieje obiektywnie.

Doświadczenie zaproponowane przez Einsteina i współpracowników przedstawię na przykładzie dwóch jednakowych kulek A i B ściśniętych sprężynką i związanych nitką. Przepalamy nitkę. Sprężynka oddala od siebie kulki. Są one jednakowe, więc lecą w przeciwnie strony z jednakową prędkością. Po odczekaniu dostatecznie długiego czasu, aby kulki oddaliły się od siebie i nie mogły już na siebie wpływać i wzajemnie się zakłócać, bo przecież sygnału nie można przesłać prędzej niż z prędkością światła, mierzymy prędkość kulki A z dowolnie dużą precyzją. Możemy nawet się zgodzić, że słuszna jest zasada nieoznaczoności i że w wyniku pomiaru pędu nie możemy znać położenia kulki A . Zgodnie z tą zasadą nie można bowiem zmierzyć z dowolną dokładnością prędkości i położenia. Ze względu na identyczność kulek A i B wiemy bez pomiaru, że kulka B biegnie w stronę przeciwną do ruchu kulki A z prędkością dokładnie taką samą jak prędkość kulki A . Czyli bez pomiaru prędkości kulki B znamy jej prędkość. Przeczy to interpretacji Bohra mechaniki kwantowej, która mówi, że nie można mówić o rzeczywistości fizycznej w oderwaniu od pomiaru. Einstein wyciągnął wniosek, że mechanika kwantowa jest niepełna i nie opisuje całej rzeczywistości.

W 1952 roku David Bohm zaproponował modyfikację mechaniki kwantowej. Być może, mówił, istnieją w teorii nieznanne nam parametry, tak zwane parametry

Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że po wykonaniu N skoków w czasie $t = N/m$ cząstka znajduje się w przedziale $[x, x + \Delta x]$? Jest ono równe

$$P_N(x)\Delta x = P_N(m) \frac{\Delta x}{2l},$$

ponieważ m może przyjmować jedynie parzyste lub jedynie nieparzyste wartości. Dla bardzo dużych N i m dużo mniejszych od N rozkład dwumianowy asymptotycznie przechodzi w rozkład Gaussa. Dla cząstki Browna nieskrępowanej istnieniem jakichkolwiek barier otrzymamy gęstość prawdopodobieństwa

$$P_t(x) = \frac{1}{2(\pi Dt)^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}},$$

natomiast dla cząstki poruszającej się w obecności bariery odbijającej, umieszczonej w punkcie o współrzędnej x_1 , jest ona równa

$$P_t^{x_1}(x) = \frac{1}{2(\pi Dt)^{1/2}} \left\{ e^{-\frac{x^2}{4Dt}} + e^{-\frac{(2x_1-x)^2}{4Dt}} \right\},$$

gdzie stała dyfuzji D jest określona jako

$$D = \frac{1}{2} ml^2.$$



Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

M 711. Udowodnić, że jeśli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówności $a + b + c > 0$, $ab + bc + ca > 0$, $abc > 0$, to są dodatnie.

Rozwiązanie na str. 13

M 712. Nie posługując się wzorem Stirlinga udowodnić, że $80! > 10! \cdot 10^{100}$.

(Zadanie zaproponował P. Strzelecki)

Rozwiązanie na str. 12

M 713. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność $(5 - a^2 - b^2 - c^2)abc \leq 2$.

Rozwiązanie na str. 13

Redaguje Jarosław KULPA

F 387. Zgodnie z efektem Hawkinga, na skutek kreacji par cząstek elementarnych w silnym polu grawitacyjnym czarne dziury promieniują w sposób zbliżony do promieniowania ciała doskonale czarnego

o temperaturze $T = \frac{\hbar c^3}{8\pi kGM}$ i powierzchni $S = 4\pi R^2$, gdzie $R = \frac{2GM}{c^2}$ jest promieniem Schwarzschilda czarnej dziury o masie M (k oznacza stałą Boltzmanna).

Oszacować, jaką minimalną masę powinny mieć czarne dziury powstałe we wczesnych okresach istnienia Wszechświata, tj. około $t_0 = 18$ mld lat temu, aby nie wypromieniowały do tej pory całej swojej energii.

Rozwiązanie na str. 12

F 388. W metodzie Millikana wyznaczania ładunku elementarnego zakłada się, że na kropelki oleju rozpylone w powietrzu działa tylko siła oporu związana z lepkością powietrza. Oszacować, dla jakich promieni kropelek siła oporu aerodynamicznego stanowi mniej niż $\epsilon = 1\%$ siły oporu związanej z lepkością. Gęstość oleju $\rho = 900 \text{ kg/m}^3$, współczynnik oporu aerodynamicznego przyjąć równy $c = 0,4$, lepkość powietrza $\eta = 1,81 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$.

Rozwiązanie na str. 12



Patrz w niebo

Od ponad 20 lat detektory promieniowania gamma wynoszone na duże wysokości za pomocą balonów rejestrowały pochodzące z centrum Galaktyki promieniowanie o energii kwantów 511 keV. Kwanty o tej energii powstają, jak wiadomo, przy anihilacji elektronów z pozytonami. Z natężenia tego promieniowania i odległości jego źródła (gdyby to było centrum Galaktyki) wynikało, że w każdej sekundzie ulega unicestwieniu kilka miliardów ton materii i antymaterii. W ogólności natężenie to było dość przypadkowo zmienne, około roku 1980 osłabło niemal do zera, po czym znowu pojawiło się pod koniec lat 80. Z tempa tych zmian zachodzących w skali miesięcy można było wnioskować, że źródło promieniowania ma rozmiary nie przekraczające jednego roku świetlnego. Narzucało się, że osobliwe promieniowanie może pochodzić z osobliwego źródła, a coś może tu lepiej pasować niż czarna dziura w centrum Galaktyki!

Niestety, kierunkowa zdolność rozdzielcza detektorów promieniowania gamma wyraża się dziesiątkami stopni, a więc centrum Galaktyki może, ale nie musi być źródłem anihilacyjnych kwantów. Otóż właśnie! Pod koniec 1989 roku amerykańscy astronomowie: Jeffrey McClintock i Marvin Leventhal ogłosili, że źródłem owego promieniowania może być zupełnie inny, konkretny obiekt położony w pobliżu kierunku na centrum Galaktyki. W 1970 roku balonowe obserwacje doprowadziły do odkrycia źródła promieniowania rentgenowskiego pochodzącego od obiektu nazwanego GX1+4 (tu liczby oznaczają współrzędne galaktyczne), położonego w odległości 5° od centrum. Jest to tzw. gwiazda symbiotyczna, układ podwójny składający się z rentgenowskiego pulsara i czerwonego olbrzyma zanurzonych w rozległej, silnie zjonizowanej mgławicy. Wahania jasności rentgenowskiej tej gwiazdy okazały się silnie skorelowane ze zmianami natężenia promieniowania gamma przypisywanego czarnej dziurze. Co więcej, okazało się, że gdy w latach 70. emisja rentgenowska była silna, pulsar przyspieszył, jego okres rotacji ze 135 s skrócił się do 110 s, natomiast spadkowi jasności rentgenowskiej w 1980 roku towarzyszyło spowolnienie rotacji pulsara.

Amerykańscy astronomowie nie wyjaśnili, skąd ostatecznie pochodzi promieniowanie towarzyszące anihilacji elektronów i pozytonów ani nie przedstawili mechanizmu zachowania się gwiazdy GX1+4, ale morał z ich publikacji jest chyba już widoczny: nie za wszystkie dziwy trzeba od razu obarczać winą czarną dziurę. Gwiazda ta z pewnością jest śledzona za pomocą nowszej aparatury i stale można spodziewać się dalszych rewelacji.

Tomasz KWAST

ukryte, które pozwoliłyby przewidywać to, co mechanika kwantowa uznaje za nieprzewidywalne. Uratowalibyśmy i determinizm, i realność świata fizycznego w starym sensie tego pojęcia. Czy zatem mechanika kwantowa uzupełniona o koncepcję zmiennych ukrytych przybliży się znowu do fizyki klasycznej w sensie zgodności ze zdrowym rozsądkiem? Absolutnie nie. Bohm musiał bowiem założyć możliwość natychmiastowego przekazywania niekontrolowalnych zaburzeń od jednej cząstki do drugiej. Natychmiastowość wzbudza natychmiast sprzeciw, bowiem wiemy o maksymalnej prędkości przekazywania sygnału w szczególnej teorii względności. I tak źle i tak niedobrze. Zwrócono więc uwagę na dwie zasady, jakimi kierowano się w konstruowaniu teorii: zasadę lokalności i zasadę sprawdzalności. Pierwsza mówi, że jeżeli w chwili dokonywania pomiarów dwa systemy nie oddziałują ze sobą, to pomiar pierwszego systemu nie może zakłócić drugiego. Zasada sprawdzalności odwołuje się do doświadczenia jako do ostatecznego arbitra prawdy. Przewidywania teorii uznajemy za prawdziwe, jeżeli zostały potwierdzone w doświadczeniu. A więc przyjmujemy, że ostatecznym arbitrem w sporze jest eksperyment.

W 1964 roku fizyk francuski J.S. Bell wykazał, że teoria z parametrami ukrytymi i zakładająca, iż nie można przekazać informacji prędzej niż z prędkością światła, czyli tak zwana teoria lokalna, daje przewidywania różne od mechaniki kwantowej. Wynik ten znany jako twierdzenie Bella ma ogromne znaczenie. Wykazuje on nie tylko, że teoria z parametrami ukrytymi nie może odtworzyć wszystkich statystycznych przewidywań mechaniki kwantowej, ale wskazuje na drogę rozstrzygnięcia problemu poprzez doświadczenie, a nie tylko przez mniej lub bardziej złożone i eleganckie rozumowanie. Wynik pracy teoretycznej Bella możemy ująć jeszcze inaczej. Jeżeli mechanika kwantowa jest zgodna z doświadczeniem, to przyroda nie potwierdza przyjętej przez nas zasady lokalności: dwie cząstki skorelowane ze sobą, nawet odległe o lata świetlne, odczuwają wpływ pomiaru dokonywanego na jednej z nich. Wydaje się to wszystko bez sensu. Nic więc dziwnego, że wiele grup eksperymentalnych prowadzi doświadczenia nad rozstrzygnięciem, czy potwierdzają się przewidywania mechaniki kwantowej, czy teorii o parametrach ukrytych.

Dwugłos o nieskończoności

W naszych artykułach zwykle punktem wyjścia jest doświadczenie. Dziś wybrałem eksperyment grupy Francuzów, którego wyniki opublikowano w sierpniu 1981 r. Piszę o nim na końcu, ponieważ chciałem Państwa przygotować do docenienia tych kilku zdań, jakie napisali w standardowym streszczeniu, które umieszcza się na początku każdej naukowej publikacji. Otóż Alain Aspect, Philippe Grangier i Gerard Roger piszą:

„Nasze wyniki są w doskonałej (*excellent*) zgodzie z przewidywaniami mechaniki kwantowej, silnie naruszają uogólnioną nierówność Bella i wykluczają całą klasę realistycznych lokalnych teorii”.

Co z tego wynika? Mechanika kwantowa święci sukcesy. Zgadza się z doświadczeniem. Jest niedeterministyczna, nie jest lokalna, nie uznaje niezależnej rzeczywistości fizycznej w oderwaniu od pomiaru.

I to wszystko wzbudza w nas sprzeciw jako przeczące zdrowemu rozsądkowi.

Niewątpliwie wiele jeszcze pracy trzeba włożyć, aby właściwie zrozumieć i zinterpretować mechanikę kwantową. Jest ona wspaniałym narzędziem, które działa, ale nie do końca wiemy, co to znaczy. Ale to dobrze, tak jest ciekawiej. Naruszone są zasady zdrowego rozsądku? Nie szkodzi – kierujmy się jednak nim dalej. Claude Bernard mawiał:

„Wielką sztuką jest zmieniać swoje poglądy i idee w miarę postępu nauki”, a Henry David Thoreau stwierdzał:

„Prawdziwa wiedza polega na zdawaniu sobie sprawy z tego, co wiemy, że wiemy i z tego, co nie wiemy, że nie wiemy”

A od siebie dodam, że my jeszcze dużo nie wiemy, ale to, co wiemy, jest pasjonujące.

Powierzchnia oceanów – jeszcze większa.
Williams oblicza, że gdyby krople wody stanowiące powierzchnię oceanów ułożył w słup, to byłby on bardzo wysoki.

Rzeki płyną do swych ujść i posiadają malownicze brzegi. Najdłuższe rzeki: Nil (historyczna egipska rzeka), Wołga (w Rosji) i kilka innych.
Reinhardt oblicza, że gdyby z wszystkich rzek zrobić jedną, byłaby ona wielka.

Antoni Słonimski i Julian Tuwim, *W oparach absurdu.*

Między innymi wynalazł on plyn do wywabiania przykrych wspomnień, banknoty z poziomą ósemką, wyobrażającą nieskończenie wielką sumę pieniędzy, trzy sposoby kolorowania mgły na miłe dla oka kolory, a także specjalny proszek, którym można posypywać chmury i odciskać je w odpowiednich formach, dzięki czemu uzyskują trwale, solidne kształty.

Stanisław Lem, *Dzienniki gwiazdowe Ijona Tichego; Podróż dwunasta.*

Czy istnieje największa liczba, to jest większa od wszystkich innych? Odpowiedź na to pytanie jest negatywna. Szczególnie łatwo tę odpowiedź uzasadnić posługując się systemem pozycyjnym, do którego jesteśmy przyzwyczajeni „od zawsze”. Dopisując zero na końcu napisu przedstawiającego liczbę całkowitą mnożymy ją przez 10, a zera możemy dopisywać w „nieskończoność”.

Od początku historii ludzkość borykała się z problemami nieskończoności. Bardzo szybko zaczęto odróżniać nieskończoność, jaką reprezentuje nieskończony proces (np. o takiej nieskończoności jest mowa w poprzednim akapicie, albo w dziecięcym *a ja zawsze o jeden więcej*), od nieskończoności, jako ilości jakichś obiektów (np. liczba punktów prostej). Łatwiej się zresztą godzono na istnienie tej pierwszej.

Początkowo sądzono, że nieskończoności nie można policzyć. Później złagodzony ten warunek – można przecież liczyć liczby naturalne, gdyż wiemy, jaka z nich ma być wymieniona po każdej z nich, jako kolejna. Niemniej jednak pogląd, że nieskończoność można zobaczyć gdzieś w przyrodzie, jest błędny, choć nadal w świadomości społecznej pokutuje. Mówi się wtedy o ziarnkach piasku na pustyni, kroplach wody w oceanie czy gwiazdach na firmamencie. Porównania te biorą się stąd, że realnie człowiek istotnie nie może policzyć ani kropeł w oceanie, ani ziarenek piasku na pustyni. Nie wystarczy mu po prostu czasu.

A czy naprawdę nieskończoność jest potrzebna w praktyce? Jak duże liczby naturalne mają się do przyrody? Korzystając z notacji wykładniczej jest bardzo łatwo napisać naprawdę dużą liczbę, na przykład 10^{100} .

W systemie dziesiętnym jest to jedynka ze stoma zerami. Zobaczmy, jak ta liczba ma się do przyrodniczych wyobrażeń nieskończoności, o których mówiliśmy powyżej. Niech kropla wody ma średnicę 2 mm, to znaczy jej objętość wynosi około 4 mm^3 . Objętość wody w oceanach szacuje się na 1370 mln km^3 , a więc to „tylko” około $3 \cdot 10^{26}$ kropli. Dla matematyka przyzwyczajonego do nieskończoności to nieduża liczba, chociaż to trójka z dwudziestoma sześcioma zerami. Możemy spróbować wyrazić objętość wód oceanicznych przez liczbę molekuł wody. Jedna kropla wody to około $2 \cdot 10^{-4}$ mola wody, a więc zawiera w przybliżeniu $2 \cdot 10^{19}$ molekuł. Stąd otrzymujemy $6 \cdot 10^{45}$ molekuł wody w oceanach. Ciągłe mało w porównaniu z 10^{100} . Powierzchnia Ziemi mierzona w mm^2 to znowu „zaledwie” $5 \cdot 10^{20}$. Obliczając objętość Wszechświata w mm^3 też nie przekroczy 10^{100} (a w angstromach sześciennych?). Ale takie rachunki nie mają żadnego znaczenia fizycznego. Tak dużych ilości rzeczy na świecie nie ma i liczba 10^{100} przekracza wszystko, co można policzyć i zmierzyć. Napotykamy tu różnicę między fizyką i matematyką. Dla matematyka jest to taka sama liczba jak 5 czy 28, to znaczy jedna z nieskończonego zbioru liczb skończonych. Realność czy nierealność fizyczna pojęć nie interesuje dzisiejszego matematyka. Porusza się on w świecie abstrakcji, w którym poprawność rozumowania i niesprzeczność teorii są ważniejsze niż ich odniesienia do rzeczywistości.

Pojęcie nieskończoności uzyskało w matematyce swój precyzyjny sens. Ta pierwsza nieskończoność – nieskończenie długo trwający proces – ma swój symbol: ∞ , coś w rodzaju położonej ósemki wprowadzonej do matematyki w 1655 roku przez angielskiego matematyka Johna Wallisa. Nazywa się ją nieskończonością potencjalną.

Tych innych nieskończoności jest (nieskończenie zresztą) wiele i też mają one (tym razem bogato rozbudowany) system oznaczeń.

Z praktycznego natomiast punktu widzenia liczba 10^{100} to nieskończoność. I ten, kto myśli o niej jak o nieskończoności, ma, w gruncie rzeczy, dobrą intuicję.

Jan KALINOWSKI

Na sąsiedniej stronie można przeczytać artykuł Jana Kalinowskiego. Czytelnikowi trudno zapewne byłoby nie zgodzić się z przedstawionym w owym tekście poglądem, że z fizycznego czy może raczej zdroworozsądkowego punktu widzenia zbędne są liczby większe niż 10^{100} . Istotnie, gdy liczymy ziarenka piasku w hipotetycznej sferze Archimedesesa (o promieniu równym odległości Ziemi od widzialnych gwiazd), albo wszystkie molekuly wody w oceanach, albo liczbę lat potrzebnych do starcia na proch kamienia o rozmiarach 1 km^3 , zbudowanego z materiału milion razy twardszego od diamentu, poprzez pocieranie go ręką raz na milion lat, albo nawet liczbę wszystkich atomów we Wszechświecie, to rzeczywiście w wyniku dostajemy liczby mniejsze (i to dość wyraźnie) od 10^{100} .

Wybraźnia ludzka potrafi jednak być zawodna. Nie wykorzystując wcale tak rozbudowanych środków opisu, jak ogromne odcinki czasu, supertwarde głązy, czy wszystkie atomy Wszechświata, możemy w bardzo codziennych sytuacjach napotkać liczby znacznie większe niż 10^{100} . Odwołajmy się na początek do prostej kombinatoryki i spytajmy, na ile sposobów można usadzić 80 pasażerów w jednym wagonie kolejowym drugiej klasy (który, jak wie każdy, kto choć trochę w czasie wakacji podróżuje, ma 10 przedziałów po 8 miejsc). Odpowiedź zna każdy uczeń: sposobów jest $80! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 80$. Ta liczba jest w przybliżeniu równa około $7,1569 \dots \times 10^{118}$ i wyraźnie przekracza ową fizyczną barierę 10^{100} .

Do obliczenia przybliżonej wartości silni wygodnie jest użyć wzoru Stirlinga:

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Zapytajmy teraz o inną prostą kwestię: na ile sposobów można wybrać 1000 mieszkańców milionowego miasta i następnie rozmieścić ich na tysiącu ponumerowanych miejsc w ekspresie wyruszającym, na przykład, z Warszawy do Zakopanego. Znow, odpowiedź zna każdy uczeń ogólniaka. Wszystkich sposobów jest

$$\binom{1\,000\,000}{1000} \cdot 1000! = \frac{1\,000\,000!}{999\,000!},$$

czyli mniej więcej

$$6,0673297 \dots \times 10^{5999}.$$

W układzie dziesiętkowym do zapisania tej liczby potrzeba okrągłych sześciu tysięcy cyfr.

Pomyślmy teraz o kasynie w Las Vegas i wyobraźmy sobie, że raz do roku pojawia się tam gracz, który ma w kieszeni 100 dolarów i chciałby je stawiać (po jednym dolarze) na czerwone lub czarne do momentu, gdy uda mu się uciuć milion dolarów, albo do momentu, gdy przegra wszystko.

Ruletka w Las Vegas ma 38 pól: po 18 czarnych i czerwonych oraz 2 zielone. Gdy stawiamy na czarne lub czerwone, to w przypadku wygranej odyskujemy podwojoną stawkę, a w przeciwnym razie tracimy stawkę. Prawdopodobieństwo wygranej w pojedynczej grze jest równe $\frac{18}{38} < \frac{1}{2}$.

Student trzeciego roku matematyki, który zetknął się z zadaniem o ruinie gracza oraz umie obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej o rozkładzie geometrycznym, powinien bez większego kłopotu stwierdzić, że średnio

rzecz biorąc trzeba poczekać nieco dłużej niż 10^{23000} lat, zanim jeden z takich graczy opuści kasyno z milionem dolarów w kieszeni (dla porównania: wiek Wszechświata to około 18×10^9 lat). Swoją drogą, do policzenia owego średniego czasu oczekiwania na wzbogacenie się jednego z graczy trzeba jedynie znać wzór na prawdopodobieństwo całkowite i umieć sumować skończone i nieskończone ciągi geometryczne – może więc Czytelnicy zechcieliby samodzielnie sprawdzić powyższy wynik?

A gdy wkroczy się w czysto już matematyczny świat stałych występujących w rozmaitych nierównościach czy dajmy na to, w teorii liczb, to spotkać można tam prawdziwe liczby-potwory. O jednej z nich chcę tu opowiedzieć.

Otóż, dokładnie 150 lat temu Catalan postawił hipotezę, że wśród wszystkich potęg liczb naturalnych (o wykładnikach 2, 3, 4, ...) jedyne dwie kolejne liczby naturalne to $8 = 2^3$ oraz $9 = 3^2$. Mówiąc inaczej, wedle Catalana równanie

$$(*) \quad x^n - y^m = 1, \quad x, y, n, m \in \mathbb{N}, \quad m, n \geq 2$$

nie ma innych rozwiązań niż $x = m = 3, y = n = 2$.

Swoje przypuszczenie Catalan sformułował w liście do Crelle'a, wydawcy słynnego *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Ów list został opublikowany w 29 tomie tego czasopisma w 1844 roku.

Hipoteza ta do dziś stanowi otwarty problem teorii liczb. Ogromny krok na drodze do jego rozwiązania uczynił w połowie lat siedemdziesiątych naszego wieku holenderski matematyk Robert Tijdeman, który wykazał, że jeśli liczby x, y, m, n stanowią rozwiązanie równania (*), to największa z nich nie przekracza pewnej, jak się ładnie mówi, efektywnie obliczalnej stałej C . Wkrótce potem pojawiły się rozmaite szacowania wielkości owej stałej. W 1976 roku M. Langevin obliczył, że

$$C \leq \exp(\exp(\exp(\exp(730)))).$$

Gdy zechce się napisać, ile cyfr ma liczba cyfr prawej strony tej nierówności, to trzeba wypisać liczbę, która będzie mieć dużo więcej niż 10^{100} cyfr. Sytuacja nieco się poprawi, gdy ustalimy wykładniki $m, n \geq 3$. Jak R. Baker wyprowadził z twierdzenia Thue, Siegela i Rotha, czwórka liczb m, n, x, y spełniających równanie (*) musi też spełniać warunek

$$\max(x, y) \leq \leq \min\left(\exp \exp\{(5n)^{10} m^{10m^3}\}, \exp \exp\{(5m)^{10} n^{10n^3}\}\right).$$

Z praktycznego punktu widzenia wszystkie te oszacowania są całkowicie bezużyteczne. Gdyby bowiem ktoś chciał zaprząć wykonujący miliard zmiennoprzecinkowych operacji w ciągu sekundy komputer CRAY do sprawdzenia, czy w zbiorze C^4 wszystkich czwórek liczb naturalnych z przedziału $[1, C]$ nie ma przypadkiem wyjątków od hipotezy Catalana, to musiałby dysponować czasem, przy którym wiek Wszechświata wydaje się być nieporównanie krótszy niż mrugnięcie oka.

Zamiast więc tracić czas na zapisywanie papieru dużymi liczbami, lepiej od razu zabrać się do dowodzenia hipotezy Catalana – geniuszom może na to (przypadkiem) wystarczyć ludzkiego życia.

Paweł STRZELECKI

Siatki

Rysunek 1 przedstawia zle rozwiązanie zadania:

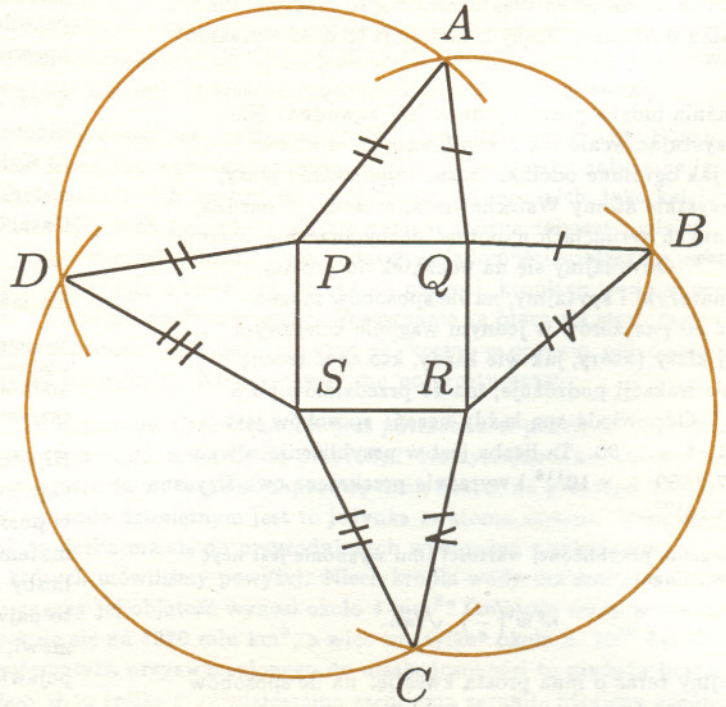
Narysować siatkę ostrosłupa o podstawie kwadratowej i każdej krawędzi bocznej innej długości.

Rozwiązujący obrał dwie różne długości i dla punktów P i Q znalazł punkt A . Potem wziął jeszcze jedną długość i znalazł punkt B , jeszcze jedną i punkt C ; pierwsza i ostatnia dały mu punkt D . Wynik jest do niczego: każde dwie kolejne ściany boczne dają się skleić, a całość nie.

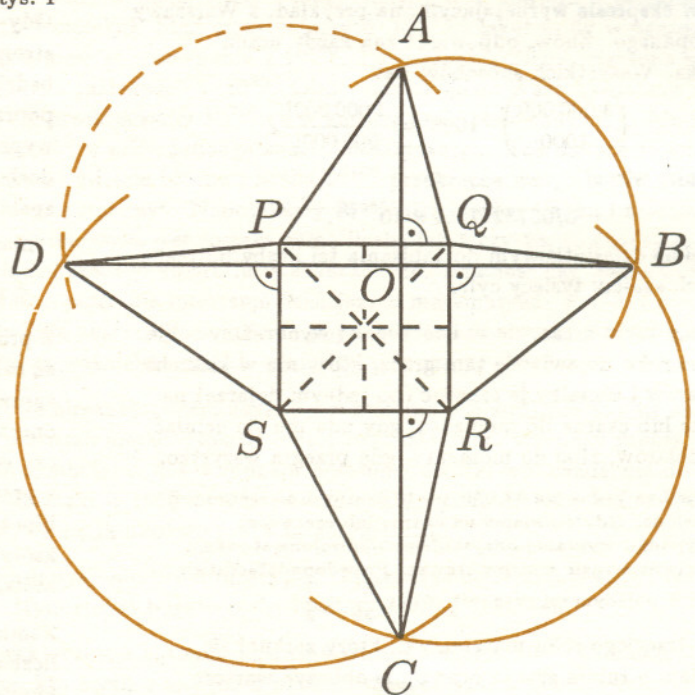
Proszę wykonać tym sposobem żadaną siatkę – szansa, że się trafi na taką, co się skleci, jest minimalna. Dlaczego tak się dzieje?

A oto dobre rozwiązanie zadania. Z punktu O nie leżącego na żadnej z osi symetrii kwadratu rysujemy prostopadłe do wszystkich boków podstawy i **tylko na nich** poszukujemy wierzchołków trójkątów – przyszłych ścian bocznych. Całość jest więc wyznaczona jednoznacznie już po obraniu punktu A .

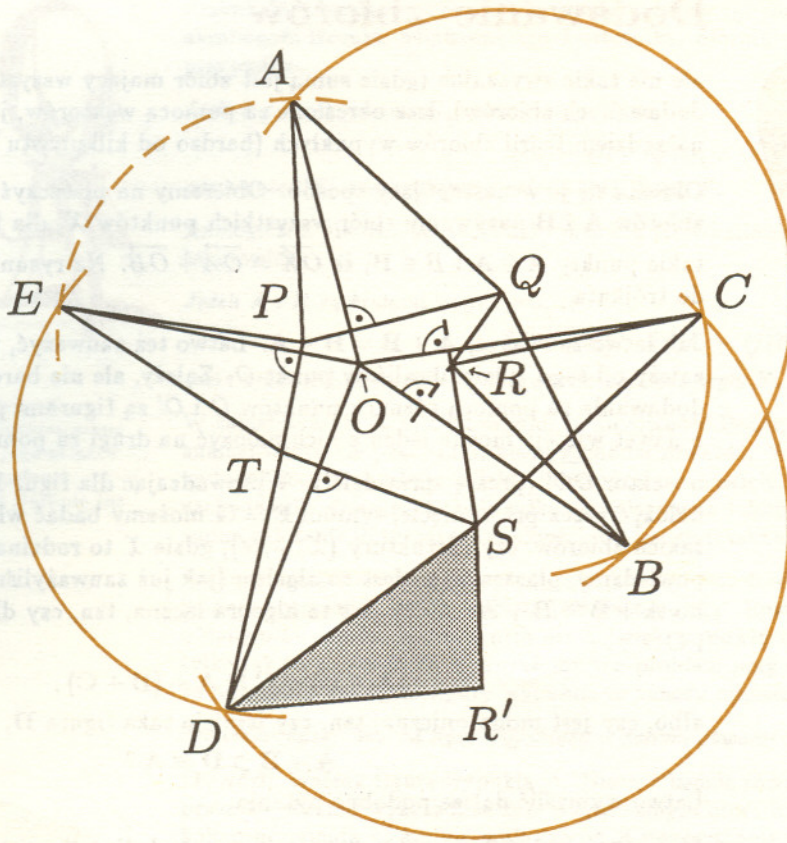
Taka z kolei siatka zawsze daje się skleić. Ten, kto umie to uzasadnić, wie również, że na rysunku 3 jest prawidłowo wykonana siatka ostrosłupa o podstawie będącej pięciokątem niewypukłym. Tyle że na rysunku dwie ściany boczne – QRB i RSC – częściowo się nakładają. Dlatego dobrze przenieść jedną z nich w inne miejsce (na rysunku: zamiast RSC wziąć $R'SD$).



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Małą Deltę opracował Marek KORDOS

Odcinek dla poczty

Zł

słownie złotych

adres wpłacający

na **AMOS**

r-k 01-806 Warszawa

Dokładna nazwa ul. Zuga 12

nazwa banku **PKO VIII O/W-wa**

Nr r-ku **1586-77578-136**

..... podpis przyjmującego

Pobrano opłatę
 zł

Odcinek dla posiadacza rachunku

Zł

słownie złotych

Dokładny adres wpłacający

na **AMOS**

r-k 01-806 Warszawa

Dokładna nazwa ul. Zuga 12

nazwa banku **PKO VIII O/W-wa**

Nr r-ku **1586-77578-136**

..... podpis przyjmującego

Pobrano opłatę
 zł

Potwierdzenie dla wpłacającego

Zł

słownie złotych

Dokładny adres wpłacający

na **AMOS**

r-k 01-806 Warszawa

Dokładna nazwa ul. Zuga 12

nazwa banku **PKO VIII O/W-wa**

Nr r-ku **1586-77578-136**

..... podpis przyjmującego

Pobrano opłatę
 zł

Dodawanie zbiorów

ale nie takie zwyczajne (gdzie sumą jest zbiór mający wszystkie elementy dodawanych zbiorów), lecz określone za pomocą wektorów, jest ważnym narzędziem teorii zbiorów wypukłych (bardzo od kilkunastu lat modnej).

Określa się je w następujący sposób. Obieramy na płaszczyźnie punkt O . Sumą zbiorów A i B nazywamy zbiór wszystkich punktów X , dla których istnieją takie punkty $A \in A$ i $B \in B$, że $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Na rysunku dodaliśmy koło do trójkąta.

Jak łatwo zauważyć, $A + B = B + A$. Łatwo też zauważyć, że wynik dodawania zależy od tego, gdzie obraliśmy punkt O . Zależy, ale nie bardzo – wyniki dodawania za pomocą różnych punktów O i O' są figurami przystającymi, a nawet więcej: można jeden z nich nałóżć na drugi za pomocą przesunięcia o wektor $\overrightarrow{OO'}$ (proszę sprawdzić!). Wprowadzając dla figur F i G , które można nałóżć przez przesunięcie, symbol $F \cong G$ możemy badać własności algebry takich zbiorów, czyli struktury $(\mathcal{X}, +, \cong)$, gdzie \mathcal{X} to rodzina wszystkich figur, powiedzmy, płaszczyzny. Jest to algebra (jak już zauważyliśmy) przemienne, bo $A + B \cong B + A$. A czy jest to algebra łączna, tzn. czy dla dowolnych A, B i C

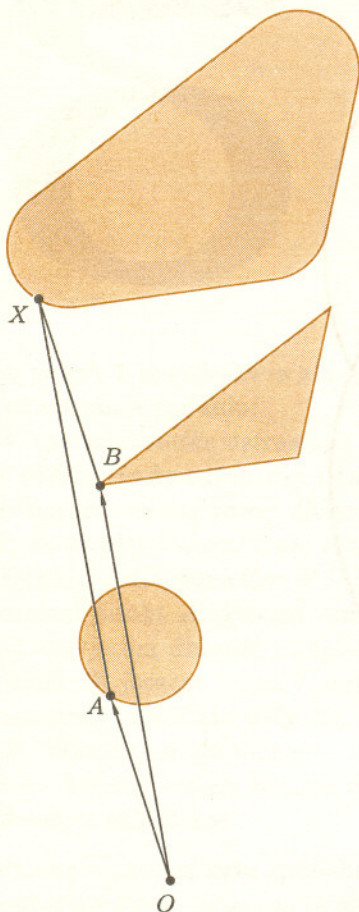
$$(A + B) + C \cong A + (B + C),$$

albo, czy jest monotoniczna, tzn. czy istnieje taka figura D , że

$$A + B \supset D \cong A?$$

Łatwo wymyślić dalsze podobne pytania.

Można też badać dodawanie zbiorów wypukłych (bo dla nich to dodawanie zostało wymyślone). Na przykład, czy suma zbiorów wypukłych jest zawsze zbiorem wypukłym? Tu też nasuwają się dalsze pytania. Polecamy te badania jako temat do samodzielnej pracy naukowej – w szczególności na Konkurs Prac Uczniowskich z Matematyki.



Prenumerata „Deltę”
za okres:

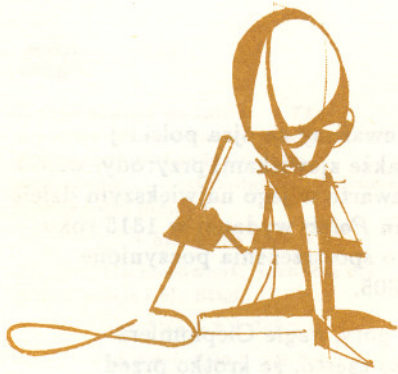
Prenumerata „Deltę”
za okres:

Prenumerata „Deltę”
za okres:

deltę

deltę

deltę



Komentarze Minkowskiego do nierówności Brunn zainteresowały Czytelnik odnajdzie w jego książce *Geometrie der Zahlen* wydanej w 1910 roku w Lipsku i Berlinie już po śmierci autora.

Przykładem bardzo ważnego twierdzenia dotyczącego dodawania zbiorów jest nierówność Brunn–Minkowskiego–Lusternika. Sformułujemy ją w szczególnym przypadku.

Jeśli A i B są (płaskimi) figurami wypukłymi, to

$$\sqrt{|A+B|} \geq \sqrt{|A|} + \sqrt{|B|},$$

gdzie przez $|F|$ oznaczyliśmy powierzchnię figury F .

Analogiczna nierówność zachodzi także dla trójwymiarowych brył wypukłych. Mianowicie,

Jeżeli A i B są bryłami wypukłymi, to

$$\sqrt[3]{|A+B|} \geq \sqrt[3]{|A|} + \sqrt[3]{|B|},$$

gdzie przez $|F|$ oznaczyliśmy tym razem objętość bryły F .

W takiej właśnie formie udowodnił tę nierówność Brunn w 1887 roku. Minkowski znalazł wszystkie przypadki, kiedy zachodzi równość. Wreszcie, w 1935 roku, Lusternik wykazał dosyć zaskakujący fakt: udowodnił mianowicie, że powyższe nierówności zachodzą dla dowolnych, byle tylko ograniczonych i domkniętych zbiorów A i B , czyli żadne założenie dotyczące wypukłości nie jest potrzebne.

Pięknym zastosowaniem powyższej nierówności jest dowód tak zwanej nierówności izoperymetrycznej. Otóż problem jest następujący. Rozważmy wszystkie figury o danym obwodzie. Która z nich ma największą powierzchnię? Wydaje się, że koło, tylko jak to udowodnić? Rozwiążemy ten problem przy dodatkowym założeniu, że interesują nas tylko figury wypukłe, to znaczy udowodnimy następujące

Twierdzenie. Wśród figur wypukłych o danym obwodzie największe pole ma koło.

Dowód: Weźmy figurę wypukłą A . Niech r będzie równe obwodowi A podzielonemu przez 2π . Mamy wykazać, że koło o tym samym obwodzie co figura A (czyli po prostu koło o promieniu r) ma nie mniejszą od A powierzchnię. Trzeba więc udowodnić, że

$$|A| \leq \pi r^2.$$

Dodajmy do figury A w sposób algebraiczny koło o małym promieniu ε i środkiem w punkcie O . W wyniku tego dodawania otrzymamy figurę A^ε złożoną ze wszystkich punktów płaszczyzny oddalonych od A co najwyżej o ε . Nierówność Brunn–Minkowskiego–Lusternika przyjmuje teraz postać

$$\sqrt{|A^\varepsilon|} \geq \sqrt{|A|} + \sqrt{\pi\varepsilon^2}$$

albo równoważnie

$$\frac{\sqrt{|A^\varepsilon|} - \sqrt{|A|}}{\varepsilon} \geq \sqrt{\pi}.$$

Oznaczając $f(\varepsilon) = |A^\varepsilon|$ mamy więc

$$\frac{\sqrt{f(\varepsilon)} - \sqrt{f(0)}}{\varepsilon} \geq \sqrt{\pi},$$

a zatem, przechodząc do granicy przy $\varepsilon \rightarrow 0$ dostaniemy $(\sqrt{f})'(0) \geq \sqrt{\pi}$, czyli

$$\frac{1}{2\sqrt{f(0)}} f'(0) \geq \sqrt{\pi}.$$

Otóż $f(0) = |A|$. Natomiast $f'(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|A^\varepsilon| - |A|}{\varepsilon}$. Licznik ułamka jest powierzchnią paska okalającego figurę A . Jest to pasek o szerokości ε i długości w przybliżeniu równej obwodowi A , czyli $2\pi r$. Zatem powierzchnia tego paska jest równa w przybliżeniu $2\pi r \cdot \varepsilon$, a stąd $f'(0) = 2\pi r$. Otrzymaliśmy więc nierówność

$$\frac{1}{2\sqrt{|A|}} 2\pi r \geq \sqrt{\pi},$$

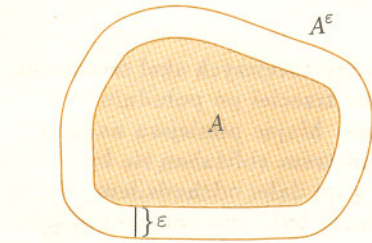
skąd

$$|A| \leq \pi r^2,$$

co kończy dowód.

Powyższa nierówność prawdziwa jest dla dowolnych, nie tylko wypukłych, figur płaskich. Jest tylko jeden drobiazg: przy rozpatrywaniu dowolnych figur trzeba wiedzieć, co to jest powierzchnia i obwód, a to już nie jest takie proste. Nierówność izoperymetryczna jest także prawdziwa dla brył; prawdą jest mianowicie, że wśród brył o danej powierzchni największą objętość ma kula.

M.K. i P.H.



Staszic i pioruny

Krzysztof REJMER



Rozwiązanie zadania F 387.

Z prawa Stefana-Boltzmana i wzoru

$E = Mc^2$ mamy

$$\frac{d(Mc^2)}{dt} = -S\sigma T^4.$$

Podstawiając wzór na temperaturę

i powierzchnię S otrzymujemy

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{\alpha}{M^2},$$

gdzie

$$\alpha = \frac{16\pi G\sigma}{c^6} \left(\frac{hc^3}{8\pi kG} \right)^4 = 4 \cdot 10^{15} \text{ kg}^3/\text{s}.$$

Kalkując otrzymujemy warunek

$$M > M_0 = (3\alpha t_0)^{1/3} = 1,9 \cdot 10^{11} \text{ kg}.$$



Rozwiązanie zadania F 388.

Z prawa Stokesa siła oporu jest

równa $F = 6\pi\eta r v$, siła oporu aerodynamicznego zaś $F_1 = \frac{1}{2}c\varrho v^2\pi r^2$,

gdzie r oznacza promień kropelki.

Na kropelkę działa siła ciężkości

$$Q = mg = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho g. \text{ W doświadczeniu}$$

Millikana kropelka spada ze stałą

prędkością. Powyższe informacje

możemy zapisać za pomocą dwóch

równań:

$$6\pi\eta r v = \frac{1}{2}c\varrho v^2\pi r^2,$$

$$6\pi\eta r v + \frac{1}{2}c\varrho v^2\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho g.$$

Rozwiązując powyższy układ równań ze względu na r otrzymujemy

$$r = \left(\frac{54(1+\varepsilon)\eta^2}{\varrho^2 c g} \right)^{1/3} = 3,8 \cdot 10^{-6} \text{ m}.$$



Rozwiązanie zadania M 712. Mamy

$$80! = 10! \cdot$$

$$\underbrace{(11 \cdot 80) \cdot (12 \cdot 79) \cdot \dots \cdot (45 \cdot 46)}_{35 \text{ par}}.$$

Dla każdego $k \in [0, 34]$ prawdziwa jest nierówność

$$(11+k)(80-k) = 880 + k(69-k) > 800 = 2^3 \cdot 10^2,$$

a zatem

$$80! > 10! \cdot 2^{3 \cdot 35} 10^{2 \cdot 35} > 10! \cdot 10^{30} 10^{70} = 10! \cdot 10^{100},$$

$$\text{bowiem } 2^{10} = 1024 > 10^3.$$

Stanisław Staszic (1755–1829) jest nie bez racji uważany za ojca polskiej geologii. Podczas swych badań interesował się także zjawiskami przyrody, wśród nich burzą. Świadczą o tym liczne opisy burz zawarte w jego największym dziele *O ziemiórództwie Karpatów i innych gór i równin Polski* wydanej w 1815 roku w Warszawie, pisanej między innymi w oparciu o spostrzeżenia poczynione podczas wędrówek karpaccich w latach 1804 i 1805.

„Po trzech godzinach czasu naszego wychodu w gory, nagle Ciepłomierz podniósł się do 17. Uważałem to na gorach barzo często, że krotko przed deszczem, Piorunomierz zaczął wydawać wielkie znaki elektryczności sklennej (*electricité vitreuse*). Wiatr powstał silny od połnocy. Gęste zaczęły przeciągać chmury. Wkrótce cały wierzch cypla, na który wyiść chciałem znikł w ciemnych chmurach. Te wszystkie jakoby wychodząc z gor Tatrow, zdawały się wydobywać dymem z sterczących najwyższych rypow; a potem stanąć bałhanami w ostatnie holic rowniny.”

Tych kilka zdań wymaga komentarza. Temperatura podana przez Staszica mierzona była w stopniach Reaumura, odpowiadała ona wartości 12°C.

„Elektryczność sklenna”, czyli szklana, to w dzisiejszym języku ładunek dodatni (szkło zwykle elektryzuje się dodatnio). Od 1733 roku używano za Du Fayem terminów: elektryczność szklana i żywiczna. Pojęcia ładunku dodatniego i ujemnego pojawiły się znacznie później. Powróćmy jednak do obserwacji Staszica.

„W roku 1804. Dnia 10 Lipca, zdarzyło mi się między tutejszych skał szczotami, osobliwsze elektryczności doświadczenie: O godzinie trzeciej po południu elektrometr zaczął dawać wielkie znaki piorunoplinu. Mając pilniejszą na jego skutki uwagę, spostrzegłem, że jm więcej z elektrometrem zbliżałem się ku cypłom skały, tem więcej rozpierały się jego gałki; a im dalej odchodziłem od skał, tem mniejsze elektryczności znaki. Elektryczność była żywicznego gatunku (*electricité resineuse*).”

W obu opisach zawarte jest ważne spostrzeżenie, którego znaczenia, niestety, Staszic nie umiał docenić. Podczas dobrej pogody powierzchnia Ziemi naładowana jest ujemnie, natomiast podczas burzy, gdy wiszą nad nią chmury o ujemnie naładowanym dnie – elektryzuje się przez indukcję ładunkiem dodatniego znaku. O tym właśnie wspomina Staszic w pierwszym z cytowanych opisów: zauważył on, że często przed deszczem powierzchnia Ziemi naładowana jest dodatnio. Często, ale nie zawsze, ponieważ nie każdej ulewie towarzyszy burza, choć letnią porą burze są w górach częstym zjawiskiem. W drugim opisie Staszic zauważa, że powierzchnia Ziemi jest naładowana ujemnie. Opisujący efekt jest wyraźnie związany z ładunkiem znajdującym się na powierzchni Ziemi, gdyż słabnie przy oddalaniu się od skał. Obserwacje te zostały poczynione na półtorej godziny przed burzą, a więc jeszcze przy dobrej pogodzie. Jednak podczas burzy „Piorunomierz nie przestawał dawać wiele znaku elektryczności, zawsze w gatunku żywicznej.” To bardzo zastanawiające spostrzeżenie. Podczas burzy znak ładunku powierzchniowego Ziemi powinien się zmienić, tymczasem z opisu wynika, że tak się nie stało. Istnieją trzy możliwe wytłumaczenia tego. Zdarzenie miało miejsce w okolicy Morskiego Oka, pośród granitowych skał, które są złym przewodnikiem elektryczności; z tego powodu przemieszczenie się powierzchniowych ładunków było utrudnione. Inaczej jest tam, gdzie istnieje choćby cienka warstwa wilgotnej gleby będącej dobrym przewodnikiem elektrycznym. Drugie możliwe wytłumaczenie wiąże się z istnieniem w dnie chmury niewielkiego obszaru naładowanego dodatnio. Fragment powierzchni Ziemi znajdujący się bezpośrednio pod spodem jest naładowany ujemnie. To wyjaśnienie należy jednak zdecydowanie odrzucić, ponieważ podczas górskiej burzy chmury nie wiszą nieruchomo nad Ziemią, czemu dał świadectwo sam Staszic: „Chmury zaś wiatrem parte o skałę, w kilka minut, jeszcze większą siłą jakoby odepchnięte, powracały nazad z okropnym szumem.”

**Rozwiązanie zadania M 711.**

Z pierwszej nierówności wynika, że przynajmniej jedna z liczb – powiedzmy c – jest dodatnia. Z drugiej nierówności mamy

$$-2(a+b)c < 2ab \leq (a+b)^2$$

(ta ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnych a i b). Stąd

$$(a+b)(a+b+2c) > 0,$$

a ponieważ $a+b+2c > a+b+c > 0$, więc $a+b > 0$. Zatem a lub b jest liczbą dodatnią. W każdej sytuacji z trzeciej nierówności wynika, że pozostała też.

Inna metoda:

$$a = \frac{(a+b+c)a^2 + abc}{a^2 + ab + bc + ca} > 0,$$

podobnie wyrażamy b i c .

Zadanie jest szczególnym przypadkiem twierdzenia mówiącego, że dodatniość wszystkich wielomianów symetrycznych podstawowych n zmiennych (tu $n = 3$) pociąga za sobą dodatniość wszystkich argumentów.

**Rozwiązanie zadania M 718.**

Można skorzystać z (łatwej w dowodzie – należy obliczyć ekstremum) nierówności

$$u^{2/3} + \frac{2}{3u} \geq \frac{5}{3},$$

gdzie równość ma miejsce tylko dla $u = 1$.

Korzystając teraz z nierówności dla średniej arytmetycznej i geometrycznej obliczamy

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} + \frac{2}{3abc} &\geq \\ &\geq (abc)^{2/3} + \frac{2}{3abc} \geq \frac{5}{3} \end{aligned}$$

(przy czym pierwsza równość ma miejsce tylko dla $a = b = c$, a druga tylko gdy $abc = 1$; stąd równość ma miejsce tylko dla $a = b = c = 1$). Mnożąc uzyskaną nierówność przez 3 i przenosząc $a^2 + b^2 + c^2$ na drugą stronę otrzymujemy tęż zadania.

Można też skorzystać z nierówności $1+t \leq e^t$. Oznaczamy mianowicie $x = 1 - a^2$, $y = 1 - b^2$, $z = 1 - c^2$. Mamy wówczas

$$\begin{aligned} (5 - a^2 - b^2 - c^2)abc &= \\ &= 2 \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} \right) \cdot \\ &\cdot \sqrt{(1-x)(1-y)(1-z)} \leq \\ &\leq 2e^{\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2}} \sqrt{e^{-(x+y+z)}} = 2. \end{aligned}$$

Najbardziej prawdopodobne jest to, że Staszic znajdował się na tyle wysoko, że rejestrował ujemny ładunek dna chmury. Przemawiałoby za tym wytłumaczenie zachowania się chmur, jakie podaje:

„Tu przekonałem się: że ta gwałtowność, którą uważałem często w Tatrach, iż chmury po odbiciu się od skał, powracają zawsze z wiatrem gwałtowniejszym, od tego z jakim ku skałom bywały parte; przekonałem się mową, że gwałtowność odbijania się chmur jest skutkiem elektryczności.”

Ten fragment jest wyraźnie jednoznaczny. Chmury są odpychane od skał na skutek obecności ładunków elektrycznych, muszą to być ładunki tego samego znaku. Ponieważ w pierwszym pomiarze Staszic stwierdził ujemny ładunek na powierzchni Ziemi, w drugim mógł mieć na myśli ładunek dna chmury. Oczywiście, to wyjaśnienie zachowania się chmur jest błędne. Ponadto oba pomiary zostały wykonane z półtoragodzinnym odstępem. W tym czasie mógł zmienić się znak powierzchniowego ładunku Ziemi. Nie umniejsza to wagi spostrzeżeń Staszica związanych z istnieniem i znakiem powierzchniowego ładunku Ziemi. Nie są mi znane wcześniejsze obserwacje innych badaczy, na przykład Franklina. Byłby Staszic więc pierwszym?

Jest jeszcze jeden godny uwagi fenomen opisany przez Staszica, który nadaje się do księgi Guinnessa. Było to podczas burzy, którą przeżył latem 1805 roku pod Babią Górą. Miała ona charakter żywiołowej katastrofy o rzadko spotykanych rozmiarach, połączonej z silnym gradobiciem. Burza ta poczyniła wielkie spustoszenia na Orawie, Podhalu i Spiszu. Ale oddajmy głos Staszicowi: „Przy Spitkowicach spadła z powietrza sztuka lodu, która półtora stopy w długość, a stopę i trzy cale w szerokość i tyleż na rubość miała. Ja w cztery godziny po jej spadnięciu widziałem ją. To jeszcze 52 funtów ważyła. Była barzo gładka i jasna (*translucide*).”

Pierwszy problem to jednostki, jakimi posługiwał się Staszic. W XVIII stuleciu w użytku były funty warszawskie, rosyjskie, angielskie i niemieckie, nieco się różniące. Przyjmując, że funt to około 0,5 kg, wnioskujemy, że masa lodowej bryły wynosiła około 25 kg. Jeśli jednak obliczymy jej objętość i pomnożymy przez gęstość lodu (900 kg/m^3), to w zależności od tego, czy posłużymy się stopami i calami rosyjskimi czy polskimi, otrzymamy masę około 38 lub 44 kg. Oczywiście, objętość możemy obliczyć tylko w przybliżeniu, ponieważ bryła lodu miała zapewne nieregularny kształt, ale i tak rozbieżność obu wyników jest zbyt duża. Sensownym wytłumaczeniem mogłaby być niejednorodność lodowej bryły; duże gradziny często mają strukturę zlepieńców. Gęstość lodu byłaby wtedy mniejsza, co wraz z błędem wyznaczenia objętości czyni zgodność rozmiarów i masy bryły prawdopodobną. Jednak Staszic wyraźnie akcentuje gładkość i jasność bryły, wskazuje to na jej jednorodność. Ostatnie wyjaśnienie, które sugeruje sam tekst, jest jednocześnie proste i mało prawdopodobne. Rozmiary bryły mogły zostać zmierzone zaraz po upadku, natomiast Staszic widział ją i zważył cztery godziny później, kiedy częściowo roztopiła się. Ale któż na początku XIX wieku, w zapadłej górskiej wiosce, w miejscu gdzie diabeł mówi dobranoc, mierzyłby rozmiary lodowej bryły?!

Stanisław Staszic powszechnie uważany jest za wzór suchego racjonalisty, tymczasem wiele opisów burz zawartych w dziele *O ziemioródtwie...* burzy tę opinię ukazując w Staszicu naturę wrażliwą na piękno, emocjonalną, wręcz romantyczną. Nie widać tego w tych kilku krótkich z konieczności cytatach. Wielu fragmentów tych opisów nie powstydziliby się niejeden z poetów wędrujących po polskich górach pół wieku później. Zawsze jednak gdy kończy się burza, naukowiec bierze górę nad poetą. Bystry obserwator odnotowuje każdy godny uwagi fakt: zachowanie się chmur, elektrometru, zwierząt.

Każdemu Czytelnikowi wędrującemu latem po górach życzymy, aby burze przeżywał zawsze w bezpiecznym miejscu i aby umiał dostrzec nie tylko grozę, ale również piękno tego fascynującego zjawiska.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł *Weterana*. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1994.

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 1994

Zadania z fizyki nr 181, 182

181. Cienka powłoka kulista o masie m i promieniu r znajdująca się w próżni i naładowana ładunkiem Q rozpadła się nagle na małe kawałeczki. Obliczyć prędkość uzyskaną przez odpryski w wyniku ich wzajemnego odpychania. Założyć jednorodny rozkład masy i ładunku.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/1994

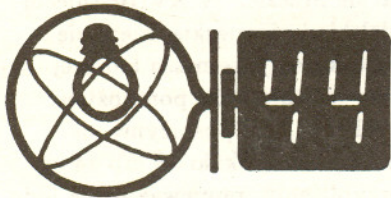
Przypominamy treść zadań:

177. Małe ciało porusza się na płaszczyźnie pod działaniem siły wywieranej przez nierozciągliwą nitkę o długości l , przymocowaną do niego. Drugi koniec nitki jest przesuwany w tej płaszczyźnie z prędkością v stałą co do wartości. Przedyskutować możliwe ruchy tego końca, prowadzące do osiągnięcia przez ciało w ciągu czasu t jak największej prędkości. Przyjąć, że w chwili początkowej ciało spoczywało.

Redaguje Jerzy B. BROJAN

182. Siła sprężystości wywierana przez sprężynę dana jest wzorem $F = kz$ (z – wydłużenie), przy czym stała sprężystości k maleje ze wzrostem temperatury. Udowodnić, że adiabatycznemu rozciąganiu tej sprężyny towarzyszy spadek temperatury.

178. Gdy na drodze równoległej wiązki światła spójnego umieścimy prostopadłą przeszkodę kołową, to w środku cienia rzucanego na ekran widoczny będzie jasny punkt. Wyjaśnić to zjawisko i oszacować średnicę tego jasnego obszaru, jeśli promień przeszkody wynosi 5 mm, odległość do ekranu – 1 m, a długość fali światła – 0,5 μm .



Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 169 ($WT=2,00$) i 170 ($WT=3,10$)
z numeru 12/1993

Tomasz Wietecha	- Tarnów	37,09
Andrzej Nowogrodzki	- Chocianów	34,04
Andrzej Borowski		
- Aleksandrów Kujawski		31,64
Aleksander Surma	- Myszków	16,59

177. Gdy czas t jest krótki w porównaniu z l/v , prawdopodobnie najlepszą metodą rozpędzenia ciała jest szybka zmiana zwrotu prędkości końca nitki od kierunku prostopadłego do nitki do kierunku równoległego. „Pociągając” w ten sposób ciało można mu nadać prędkość bliską v , niezależnie od t . Mając do dyspozycji dłuższy czas możemy osiągnąć większą prędkość ciała. Oto jedna z możliwych metod: Niech koniec nitki porusza się stale wzdłuż prostej prostopadłej do początkowego kierunku nitki, dokonując zmiany zwrotu za każdym razem, gdy nitka wykona pół obrotu (obróci się o 180°). Początkowo ciało jest nieruchome, czyli względem układu związanego z poruszającym się końcem nitki ma prędkość v . Jego ruch po okręgu jest w tym układzie jednostajny, zatem zakreśli pół obrotu w czasie $\pi l/v$ osiągając prędkość $2v$ względem układu spoczywającego. Gdy koniec nitki zacznie się poruszać w przeciwną stronę, prędkość ciała względem układu związanego z końcem nitki będzie wynosiła $3v$ i następne pół obrotu zakreśli w czasie $\pi l/3v$. Po tym czasie będzie miało prędkość $4v$, następne pół obrotu zajmie czas $\pi l/5v$... Jeśli czas t jest długi, to możemy skorzystać z przybliżenia

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1} \approx \frac{1}{2} \ln n \text{ i znaleźć liczbę pÓtobrotów } n \text{ z tożsamości } \frac{\pi l}{2v} \ln n \approx t.$$

Ponieważ końcowa prędkość ciała wynosi $v_k = 2nv$, więc otrzymujemy $v_k \approx 2v \exp\left(\frac{2vt}{\pi l}\right)$.

Gdy prędkość ciała stanie się już dość duża, jeszcze lepszą metodą rozpędzania jest ciągnięcie nitki stale wzdłuż niej (kierunek „od ciała”). Ruch ciała będzie wtedy zachodził w przybliżeniu po okręgu z rosnącą prędkością v' , a siła napięcia nitki będzie wynosiła w przybliżeniu $F = m(v')^2/l$. Praca nitki w czasie Δt jest równa $Fv\Delta t$, a przyrównując ją do zmiany energii kinetycznej i całkując otrzymujemy $v_k = \text{const} \cdot \exp\left(\frac{vt}{l}\right)$.

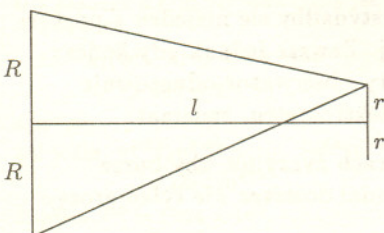
Jak widać, mnożnik czasu w wykładniku ma teraz większą wartość niż w metodzie poprzedniej, czyli rozpędzanie zachodzi szybciej.

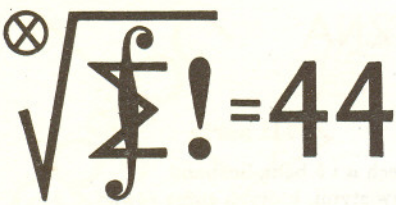
Powyższa dyskusja jest daleka od kompletności i ścisłości matematycznej (zwłaszcza w ostatnim punkcie), ale autor ma nadzieję, że uniknął istotnych błędów.

178. Przyczyną zjawiska jest równość dróg od poszczególnych punktów brzegu koła do środka cienia, skąd wynika, że w środku cienia fale ugięte na brzegu interferują konstruktywnie. Aby ocenić promień r jasnego obszaru, przyjmijmy, że kończy się on tam, skąd różnica odległości do przeciwległych punktów brzegu koła jest równa $\frac{1}{2}\lambda$. Oznaczając promień koła przez R , a odległość do ekranu przez l (rys.) mamy równanie

$$\sqrt{l^2 + (R+r)^2} - \sqrt{l^2 + (R-r)^2} = \frac{1}{2}\lambda,$$

skąd, zakładając $l \gg R$, otrzymujemy $r = \frac{l\lambda}{4R} = 0,025 \text{ mm}$, czyli średnica wynosi 0,05 mm.

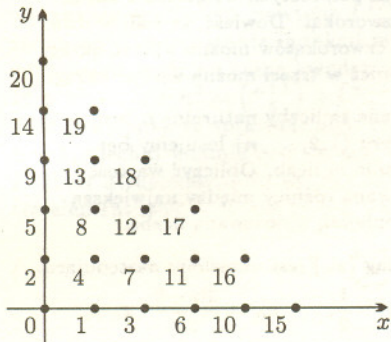




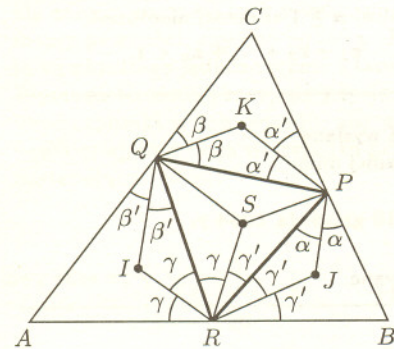
Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 269 (WT=1,81) i 270 (WT=3,16)
z numeru 11/1993

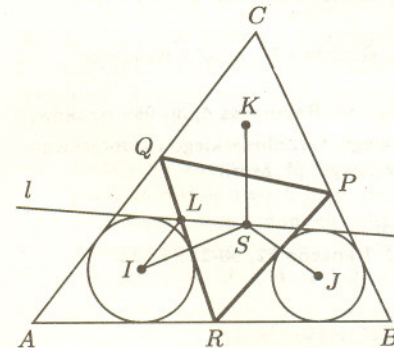
Jan Kraszewski - Legnica 42,50
Miroslaw Matlega - Skoczów 40,30
Tomasz Kulpa - Katowice 38,94
Krzysztof Jedziniak - Katowice 36,64



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

283. Wyznaczyć wszystkie liczby dodatnie a , dla których funkcja

$$f(x) = ax(1-x)$$

ma następującą własność: istnieje taka liczba $c \in (0; 1)$, że

$$f(f(c)) = c \neq f(c).$$

284. Na bokach AB i AC trójkąta ostrokątnego ABC obrano odpowiednio punkty M i N . Okręgi, których średnicami są odcinki BN i CM , przecinają się w punktach P i Q . Udowodnić, że ortocentrum (punkt przecięcia wysokości) trójkąta ABC leży na prostej PQ .

Zadanie 284 zaproponował pan Henryk Pawłowski z Torunia.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/1994

Przypominamy treść zadań:

279. Rozstrzygnąć, czy istnieje wielomian $P(x, y)$ o następujących własnościach:

- (1) Jeśli x, y są liczbami całkowitymi nieujemnymi, to wartość $P(x, y)$ też jest liczbą całkowitą nieujemną.
- (2) Dla każdej liczby całkowitej $z \geq 0$ równanie $P(x, y) = z$ ma dokładnie jedno rozwiązanie w liczbach całkowitych $x, y \geq 0$.

280. Na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC obrano odpowiednio takie punkty P, Q, R , by trójkąt PQR był równoboczny. Okręgi wpisane w trójkąty ARQ, BPR, CQP mają środki odpowiednio w punktach I, J, K . Załóżmy, że $|IR| = |JR|$. Wykazać, że:

- (a) $|IQ| = |KQ|$ oraz $|JP| = |KP|$;
- (b) trzy wspólne styczne zewnętrzne dla par rozważanych okręgów wpisanych (nie zawierające boków trójkąta ABC) przecinają się w jednym punkcie.

279. Numerujemy wszystkie punkty kratowe (x, y) o współrzędnych całkowitych $x, y \geq 0$ tak, jak pokazuje rysunek 1; punkt (x, y) otrzymuje numer

$$z = \frac{1}{2}(x+y)(x+y+1) + y.$$

Ten wzór definiuje wielomian $P(x, y)$ o żądanych własnościach!

280. (a) Oznaczmy:

$$\begin{aligned} |\angle JPB| = |\angle JPR| = \alpha, & \quad |\angle KPC| = |\angle KPQ| = \alpha', \\ |\angle KQC| = |\angle KQP| = \beta, & \quad |\angle IQA| = |\angle IQR| = \beta', \\ |\angle IRA| = |\angle IRQ| = \gamma, & \quad |\angle JRB| = |\angle JRP| = \gamma'. \end{aligned}$$

Każdy kąt wewnętrzny trójkąta PQR ma miarę 60° ; zatem

$$2(\alpha + \alpha') = 2(\beta + \beta') = 2(\gamma + \gamma') = 120^\circ.$$

Istnieje wobec tego półprosta o początku R , tworząca z bokami RQ i RP odpowiednio kąty γ i γ' . Odłóżmy na niej odcinek RS długości $|RS| = |RI| = |RJ|$ (rys. 2). Punkt S jest symetryczny do punktu I względem prostej QR oraz symetryczny do J względem prostej PR . Tak więc $|\angle SPR| = \alpha$, $|\angle SQR| = \beta'$, skąd

$$|\angle SPQ| = 60^\circ - \alpha = \alpha', \quad |\angle SQP| = 60^\circ - \beta' = \beta,$$

co pokazuje, że punkt S jest również symetryczny do K względem prostej PQ . Zatem

$$|IQ| = |SQ| = |KQ| \quad \text{oraz} \quad |JP| = |SP| = |KP|.$$

(b) Poprowadźmy przez punkt S prostą l równoległą do PQ ; przetnie ona odcinek QR w punkcie L (rys. 3). Prosta QR jest symetralną odcinka SI , wobec czego

$$|\angle ILR| = |\angle SLR| = |\angle PQR| = 60^\circ;$$

zatem półprosta LI jest dwusieczną kąta między odcinkiem LR i przedłużeniem odcinka SL . Okrąg o środku I , wpisany w trójkąt ARQ , styczny do prostej QR , jest więc także styczny do prostej l .

Analogicznie wykazujemy, że okrąg wpisany w trójkąt BPR jest styczny do tej prostej (korzystając z tego, że prosta PR jest symetralną odcinka SJ). A skoro – jak stwierdziliśmy w części (a) – także prosta PQ jest symetralną odcinka SK , zatem proste przechodzące przez S i równoległe do QR oraz PR są pozostałymi dwiema prostymi, o które chodzi, S zaś jest wspólnym punktem tych trzech prostych.

ERRATA do tekstu: Klub 44 w Delcie 2/1994

(roczne omówienie matematycznej ligi zadaniowej):

str. 14, lewa szpalta, szkic rozwiązania zadania 255:

ostatni wiersz przekształcanego wzoru (tuż nad rysunkiem) należy zastąpić przez dwuwiersz:

$$= S^{-1} \cdot 4\sqrt{2} R \cdot (\text{pole}(CBE) + \text{pole}(CDE)) =$$

$$= S^{-1} \cdot 4\sqrt{2} R \cdot (\text{pole}(BCD) + \text{pole}(BED)) = 4\sqrt{2} R.$$

Przepraszam Waldka Pompe (autora przytaczanego rozwiązania) oraz wszystkich Czytelników *Delty* za tę pomyłkę.

XLVI OLIMPIADA MATEMATYCZNA

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria

II seria

III seria

1. Wyznaczyć wszystkie pary (x, y) liczb naturalnych, dla których liczby $\frac{x+1}{y}$ i $\frac{y+1}{x}$ są naturalne.

2. Dana jest liczba naturalna $n \geq 2$. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x_1|x_1| = x_2|x_2| + (x_1 - 1)|x_1 - 1| \\ x_2|x_2| = x_3|x_3| + (x_2 - 1)|x_2 - 1| \\ \dots \\ x_n|x_n| = x_1|x_1| + (x_n - 1)|x_n - 1|. \end{cases}$$

3. Czworokąt o bokach a, b, c, d jest wpisany w okrąg o promieniu R . Wykazać, że jeżeli $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 8R^2$, to w czworokącie tym jeden z kątów jest prosty lub przekątne są prostopadłe.

4. W pewnej szkole 64 uczniów bierze udział w pięciu olimpiadach przedmiotowych. W każdej z tych olimpiad uczestniczy co najmniej 19 uczniów tej szkoły; żaden z nich nie jest uczestnikiem więcej niż trzech olimpiad. Udowodnić, że jeżeli każde trzy olimpiady mają wspólnego uczestnika, to pewne dwie mają ich co najmniej pięciu.

5. Dane są liczby dodatnie a, b . Wykazać równoważność zdań:

$$(1) \sqrt{a+1} > \sqrt{b},$$

$$(2) ax + \frac{x}{x-1} > b \text{ dla każdego } x > 1.$$

6. Wewnątrz trójkąta ABC obrano punkt P . Proste AP, BP, CP przecinają boki BC, CA, AB odpowiednio w punktach A', B', C' . Przyjmijmy $u = |AP| : |PA'|$, $v = |BP| : |PB'|$, $w = |CP| : |PC'|$. Wyrazić iloczyn uvw przez sumę $u + v + w$.

7. (a) Rozstrzygnąć, czy istnieje funkcja różniczkowalna $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, nie równa tożsamościowo zeru, spełniająca warunki $2f(f(x)) = f(x) \geq 0$ dla $x \in \mathbf{R}$.

(b) Rozstrzygnąć, czy istnieje funkcja różniczkowalna $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, nie równa tożsamościowo zeru, spełniająca warunki $-1 \leq 2f(f(x)) = f(x) \leq 1$ dla $x \in \mathbf{R}$.

8. W ostrosłupie prawidłowym n -kątnym kąty nachylenia ściany bocznej i krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy wynoszą odpowiednio α i β . Udowodnić, że

$$\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \leq \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}.$$

9. Niech a i b będą liczbami rzeczywistymi, których suma równa jest 1. Wykazać, że jeżeli a^3 i b^3 są liczbami wymiernymi, to a i b też są liczbami wymiernymi.

10. Dana jest prosta k oraz leżące na niej trzy różne punkty. Każdy z nich jest początkiem pary półprostych; wszystkie te półproste leżą w jednej półpłaszczyźnie o krawędzi k . Każda z tych par półprostych wyznacza z każdą inną czworokąt. Dowieść, że jeśli w dwa z tych czworokątów można wpisać okrąg, to również w trzeci można wpisać okrąg.

11. Dane są liczby naturalne $n > m > 1$. Ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ losujemy bez zwracania m liczb. Obliczyć wartość oczekiwaną różnicy między największą a najmniejszą wylosowaną liczbą.

12. Ciąg (x_n) jest określony następująco:

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_n = \frac{2n-3}{2n} \cdot x_{n-1}$$

$$\text{dla } n = 2, 3, \dots$$

Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi nierówność

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n < 1.$$

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu) mają być wysłane pod adresem właściwego komitetu okręgowego Olimpiady najpóźniej dnia

10 października 1994 r.

10 listopada 1994 r.

10 grudnia 1994 r.

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Adresy komitetów okręgowych Olimpiady Matematycznej

Dla województwa elbląskiego, gdańskiego i słupskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny PAN, Oddział w Gdańsku, ul. Abrahama 18, 81-825 Sopot.

Dla województwa bielskiego, częstochowskiego i katowickiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.

Dla województwa krakowskiego, krośnieńskiego, nowosądeckiego i tarnowskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków.

Dla województwa białkopodlaskiego, chełmskiego, lubelskiego, przemyskiego, rzeszowskiego, siedleckiego, tarnobrzesckiego i zamojskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Oddział Lubelski Polskiego Towarzystwa Matematycznego, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, pok. 310, 20-031 Lublin.

Dla województwa kieleckiego, łódzkiego, piotrkowskiego, radomskiego, sieradzkiego i skierniewickiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

Dla województwa konińskiego, leszczyńskiego, pilskiego, poznańskiego i zielonogórskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, ul. Matejki 48/49, pok. 24, 60-769 Poznań.

Dla województwa gorzowskiego, koszalińskiego i szczecińskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, ul. Wielkopolska 15, 70-251 Szczecin.

Dla województwa bydgoskiego, ciechanowskiego, olsztyńskiego, płockiego, toruńskiego i włocławskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18,

87-100 Toruń.

Dla województwa białostockiego, łomżyńskiego, ostrołęckiego, suwalskiego i warszawskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny PAN, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.

Dla województwa jeleniogórskiego, kaliskiego, legnickiego, opolskiego, wałbrzyskiego i wrocławskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4,

50-384 Wrocław.

