

SPIS TREŚCI

NUMERU 6(241)

Kosmiczny kataklizm na Jowiszu <i>Tomasz Kwast</i>	str. 1
Wpływ Księżyca na akcelerator LEP <i>Jan Królikowski</i>	str. 1
Dlaczego szybka jazda samochodem jest niebezpieczna? <i>Witold Skiba</i>	str. 2
Idylla maleńka taka <i>Kazimierz Pietraszkiewicz</i>	str. 3
Promień świetlny <i>Kazimierz Pietraszkiewicz</i>	str. 4
Jeszcze raz o nożu <i>Paweł Strzelecki</i>	str. 5
Matematyka, prawo i życie <i>Paweł Strzelecki</i>	str. 6
Mała Delta <i>Patrz w niebo</i>	str. 8
Patrz w niebo	str.10
Zadania	str.10
Zasada włączeń i wyłączeń <i>Przemysław Grzegorzewski</i>	str.11
Klub 44	str.14
Kącik olimpijski	str.16
Epsilon	str.17

W następnym numerze:

O potęgach dwójki

Okladkę wykonał
Bernard BADZIOCH

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.

Komitet Redakcyjny:
Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichoński
Roman Duda
Jan A. Gaj
Tomasz Hofmokl
Tadeusz Jarzębowski
Marta Kicińska-Habior
– przewodnicząca
Marcin Kubiak
Andrzej Mąkowski
– wiceprzewodniczący
Andrzej Pelczar
Zbigniew Płochocki
Zdzisław Pogoda
Konrad Rudnicki
Zbigniew Semadeni
Grzegorz Sitarski
Józef I. Smak
Kazimierz Stępień
Mieczysław Subotowicz
Andrzej Szymacha
Andrzej Woszczyk
Wacław Zawadowski

Redaguje kolegium w składzie:
Krzysztof Biesaga
Piotr Hajlasz
Jan Kalinowski – z-ca red. nac.
Krystyna Kordos – sekr. red.
Marek Kordos – red. nac.
Tomasz Kwast
Krzysztof Rejmer
Paweł Strzelecki
Joanna Udalska

Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7
02-678 Warszawa
tel. 43-02-43 wewn. 21
HAJLASZ@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w Zakładach Graficznych
w Warszawie, ul. Srebrna 16
Skład systemem T_pX wykonała Redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY w AMOS-ie

Od stycznia 1993 r. prenumeratę „Deltę” prowadzi również firma AMOS, 01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21). Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w pierwszym półroczu 1994 roku wynosi 8 000,-zł, a w drugim półroczu 10 000,-zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres co najmniej trzech miesięcy) cena numeru wynosi w pierwszym półroczu 1994 r. 20 000,-zł, a w drugim – 22 000,-zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! AMOS dostarcza „Deltę” pod wskazany adres nie pobierając dodatkowej opłaty. Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Blankiet pocztowy na prenumeratę „Deltę” w AMOS-ie zamieszczamy na str.11/12.
Konto AMOS-u: **PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136**

WARUNKI PRENUMERATY w RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na IV kwartał 1994 r. wynosi 30 000,- zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
 - na teren kraju
 - jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób,
 - na zagranicę
 - „Ruch” S.A. Oddział Warszawa, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – dostawa odbywa się **pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty**, z wyjątkiem zlecenia dostawy pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni pokrywa prenumerator.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
 - na kraj i zagranicę – do 20 XI na I kwartał roku następnego
 - do 20 II na II kwartał
 - do 20 V na III kwartał
 - do 20 VIII na IV kwartał.

Cena 1 egzemplarza 8 000,- zł

Kosmiczny kataklizm na Jowiszu

Tomasz KWAST

Przestrzeń kosmiczna jest wedle ziemskich miar niesłychanie pusta. Rozmiary przeciętnej gwiazdy to sekundy świetlne, a odległości dzielące gwiazdy to lata świetlne. Rozmiary planet to dziesiątki tysięcy kilometrów, a dzielące je odległości to setki milionów. Krótko mówiąc, w przestrzeni kosmicznej jest strasznie dużo luzu i trzeba się bardzo postarać, aby trafić np. sondą kosmiczną w sąsiedztwo jakiegokolwiek planety.

Z drugiej strony, wiadomo, że np. na Ziemię spadają od czasu do czasu różnej wielkości bryły skalne wybijające w powierzchni naszej planety dziury nieraz kilometrowej średnicy. Zdarza się to jednak bardzo rzadko. Z pewnością kilka miliardów lat temu planety były intensywnie bombardowane przez resztki materii, z której powstał nasz układ planetarny, a ślady tego można nawet przez niewielką lunetę zobaczyć na Księżycu. Ale obecnie przestrzeń Układu Słonecznego jest już tak oczyszczona, że spadek czegoś w rodzaju meteorytu tunguskiego jest absolutnym fenomenem.

Tak czy inaczej, jesteśmy w przededniu takiego właśnie rzadkiego zjawiska, przy czym nie dość, że jest bardzo rzadkie, to jeszcze wiemy o nim z wyprzedzeniem. Mianowicie w lipcu 1994 roku na Jowisza spadną fragmenty rozdrobnionej komety Shoemakera-Levy'ego. Jak później obliczono, dnia 8 lipca 1992 roku kometa podczas bliskiego przejścia koło Jowisza (43 000 km nad jowiszowymi chmurami) uległa rozerwaniu. Z obliczeń jej ruchu w przeszłości wynika też, że mogła obiegać planetę co najmniej od 1970 roku, teraz jednak zmieniła orbitę na taką, że po wykonaniu jeszcze jednego obiegu po bardzo wydłużonej elipsie ma trafić w samego Jowisza. W marcu 1993 roku, gdy kometa odkryto, wykonane zostały pierwsze zdjęcia łańcuszka jej odłamków, których do dziś (styczeń 1994) naliczono co najmniej 22. Odłamki te spadać będą na planetę od 18 do 24 lipca.

Wydarzenie to zaiste niezwykle! Ale, niestety, jak pech to pech – zwykły śmiertelnik po prostu go nie zauważy. Jowisz będzie w gwiazdozbiore Wagi, a więc będziemy go dobrze widzieć w pierwszej połowie nocy, ale odłamki komety spadać będą na jego nocną stronę, niewidoczną także z Ziemi. Co prawda, wskutek rotacji planety miejsca upadku wynurzą się spoza widnokręgu Jowisza po upływie półtorej godziny, jednak dzięki temu można będzie dojrzeć tylko spóźnione skutki spadku skalnych brył do jego atmosfery. Zmierzająca ku Jowiszowi sonda Galileo będzie w lipcu usytuowana nieco korzystniej, jednak i z jej pozycji miejsca spadku widoczne nie będą. Teoretycznie ten kataklizm w całej okazałości mógłby zobaczyć Voyager 2, gdyby nie to, że znajduje się w takiej odległości od Jowisza, jak Pluton od Słońca, dlatego może wprawdzie wykonać pomiary jasności błysków towarzyszących zjawisku, ale nie będzie w stanie uzyskać żadnych obrazów. Błyski te zapewne oświetlą satelity Jowisza i będzie to jedyny bezpośredni sygnał o zjawisku dostępny dla mieszkańców Ziemi. Potem pozostaje już tylko śledzić powierzchni planety za pomocą największych teleskopów, wliczając w to orbitalny, świeżo usprawniony, Hubble Space Telescope.

Skalę zjawiska nietrudno oszacować, ale wyobrazić – chyba nie. Rozmiary odłamków komety oceniane są na kilka kilometrów. Jeden kilometr sześcienny skał o gęstości trzykrotnie większej od gęstości wody ma masę 3×10^{12} kg. Przy prędkości 60 km/s (a taka będzie prędkość fragmentów komety przy zderzeniu z Jowiszem) niesie energię 5×10^{21} J, co – mówiąc językiem wojskowych – oznacza okrągło milion megaton trotylu (1 Mt TNT jest równoważna energii 5×10^{15} J). Jowisz niewątpliwie to wytrzyma, a my będziemy żałować, że tak wyjątkowego zjawiska, tych błysków możliwych do dostrzeżenia z odległości kosmicznych, nie będzie nam dane widzieć bezpośrednio.

Wpływ Księżyca na akcelerator LEP – czyżby renesans astrologii?

Jan KRÓLIKOWSKI

Akcelerator LEP, program naukowy

W połowie 1989 roku uruchomiono w Europejskiej Organizacji Badań Jądrowych CERN w Genewie nowy akcelerator przeciwbieżnych wiązek e^+e^- – LEP. W tym akceleratorze wiązki elektronów i pozytonów biegają w przeciwnych kierunkach, przecinając się w czterech punktach na obwodzie długiego na 26,66 km pierścienia akceleratora o niemal kolistym kształcie. Akcelerator LEP jest przede wszystkim fabryką bozonów pośredniczących Z^0 .

Naukowym powodem wybudowania akceleratora LEP było dokładne poznanie własności bozonów pośredniczących Z^0 – neutralnych cząstek o spinie 1 będących nośnikami oddziaływań słabych przewidzianych przez teorię Weinberga-Salama-Glashowa, zwaną obecnie modelem standardowym. Bozony Z^0 zostały odkryte doświadczalnie w CERNie w 1983 roku w zderzeniach proton-antyproton przez zespoły eksperymentalne UA1 i UA2, którymi kierowali Carlo Rubbia i Pierre Darriulat. W oddziaływaniach proton-antyproton bozony Z^0 powstają rzadko, a wyznaczenie ich własności jest trudne. Tylko część energii układu proton-antyproton może zamienić się w energię Z^0 , reszta zaś jest wynoszona przez obficie produkowane inne cząstki wtórne, które utrudniają analizę doświadczalną. Dużo czystszym źródłem Z^0 są procesy anihilacji e^+e^- . W takich anihilacjach cała energia układu e^+e^- może zamienić się w masę (tj. energię spoczynkową) Z^0 . W układzie wiązek przeciwbieżnych e^+e^- zachodzi to dla energii wiązek elektronów i pozytonów równej połowie masy Z^0 , czyli około 46 GeV (w układzie jednostek, w którym prędkość światła przyjmuje się równą 1, energia, pęd, masa

Dlaczego szybka jazda samochodem jest niebezpieczna?

Witold SKIBA

Poruszające się ciała obdarzone są energią kinetyczną. W trakcie hamowania ciało musi stracić tę energię. Przy zderzeniach, tzn. gwałtownych zmianach prędkości, energia ta może spowodować nieodwracalne straty – rozbić karoserię, itp. Im większa prędkość samochodu, tym większa jego energia kinetyczna i stąd poważniejsze mogą być następstwa gwałtownego jej tracenia w trakcie zderzenia. Energia kinetyczna ciała będącego w ruchu, jak prawie każdy pamięta ze szkoły, zależy od kwadratu jego prędkości. Zależność tę opisuje wzór

$$E_k = mv^2/2,$$

gdzie m jest masą ciała, a v – jego prędkością. Wzór ten mówi, że E_k rośnie dość szybko (kwadratowo) z prędkością. Żeby rozpędzić dane ciało do prędkości dwa razy większej, potrzeba aż cztery razy więcej energii. Tyle też więcej energii traci ciało na skutek hamowania. Gdyby energia nie rosła tak szybko z prędkością, to i straty w wyniku zderzeń byłyby mniejsze. Spróbujmy zrozumieć zależność E_k od v .

Wydawać by się mogło, że następujące rozumowanie powinno prowadzić do wniosku, że energia kinetyczna zależy liniowo od v . Wyobraźmy sobie, że rozpędzamy najpierw ciało do prędkości v , co wymaga energii E_k , a następnie przechodzimy do układu poruszającego się z tym ciałem i dopiero w tym układzie rozpędzamy ciało do prędkości v w tym samym kierunku (a więc do prędkości $2v$ względem początkowego układu), co znowu wymaga energii E_k – w sumie więc tylko $2E_k$, a nie $4E_k$. W przypadku samochodu można zauważyć, że istnieje wyróżniony układ współrzędnych związany z drogą. Ale jeśli powtórzyć ten argument dla rakiety w kosmosie?

Sprawdźmy, dlaczego taki wariant zależności E_k od v nie może być realizowany w Przyrodzie. Oczywiście, można formalnie wyprowadzić wzór na E_k i już. Spróbujmy jednak zrozumieć to bez formalnych wybiegów wychodząc jedynie z przesłanek zupełnie oczywistych. Po pierwsze, spodziewamy się, że E_k nie zależy od kierunku prędkości – niezależnie, w którą stronę rozpędzamy samochód (na wschód czy na północ), tyle samo trzeba się napracować. Zatem $E_k = E_k(|\mathbf{v}|)$. Proporcjonalność E_k do masy jest oczywista. Będziemy więc masę pomijać rozważając ciało o jednakowej masie. Zobaczmy więc, czy możliwe jest obliczanie E_k , przez dodawanie energii ciała w danym układzie do energii potrzebnej do rozpędzenia go do tego układu, tzn.

$$(*) \quad E(|\mathbf{u} + \mathbf{v}|) = E(|\mathbf{u}|) + E(|\mathbf{v}|).$$

Wystarczy wziąć $\mathbf{u} = -\mathbf{v}$ (ciało spoczywające w jednym układzie porusza się z prędkością \mathbf{v} w innym układzie poruszającym się z prędkością $-\mathbf{v}$), aby zauważyć, że $E(0) = 2E(|\mathbf{v}|)$. Z pewnością wzór (*) jest fałszywy. A więc żądanie niezależności E_k od kierunku \mathbf{v} wyklucza już możliwość liniowego wzrostu E_k z $|\mathbf{v}|$, chociaż nie określa szczegółowo charakteru tej zależności.

Drugą zupełnie naturalną cechą energii kinetycznej jest to, że jej zmiana w zderzeniu ciał nie zależy od układu. Zmiana E_k mówi, na przykład, o skutkach zderzenia, wgnieceniach karoserii itp., a te w każdym układzie odniesienia są takie same. Załóżmy zatem, że E_k

i szerokość całkowita mają ten sam wymiar i można je mierzyć w jednostkach energii, na przykład $\text{GeV} = 10^9 \text{ eV}$). Akcelerator LEP pracuje właśnie przy energiach rzędu 100 GeV. Liczba produkowanych dziennie cząstek Z^0 dochodzi do kilkudziesięciu tysięcy w każdym z czterech przecięć wiązek e^+e^- .

Podstawowymi parametrami charakteryzującymi cząstkę nietrwałą Z^0 są jej masa M_Z i całkowita szerokość Γ_Z . Zgodnie z zasadą nieokreśloności dla energii cząstki nietrwałe nie mają dokładnie określonej masy. Rozmycie masy jest tym większe, im krócej żyje dana cząstka. Jeśli sporządzimy wykres przedstawiający prawdopodobieństwo produkcji cząstki w zależności od jej masy, to ma ono pewne maksimum. Położenie maksimum definiowane jest jako masa tej cząstki, a szerokość wykresu w połowie wysokości maksimum definiuje szerokość całkowitą Γ . Im więcej jest możliwych stanów cząstek końcowych, na które może rozpaść się dana cząstka, tym krócej ona żyje i, zgodnie z zasadą nieoznaczoności, ma ona większą szerokość Γ . Precyzyjny pomiar Γ pozwala więc uzyskać informacje o możliwych stanach końcowych rozpadu badanej cząstki, nawet jeśli nie potrafimy bezpośrednio zaobserwować niektórych z tych stanów.

Wyznaczenie wspomnianych dwóch wielkości jest dwustopniowe. Po pierwsze należy zmierzyć jakąś wielkość zależną od M_Z i Γ_Z . Po drugie należy porównać wynik pomiaru z przewidywaniami modelu standardowego i wyznaczyć, najlepiej jak można, wartości M_Z i Γ_Z , oraz, co bardzo ważne, oszacować błędy tych wartości.

Podstawowy pomiar to wyznaczenie zależności przekroju czynnego, czyli z grubsza mówiąc liczby produkowanych cząstek Z^0 przypadających na jedno zderzenie e^+e^- na sekundę, od energii zderzających się elektronów. Należy w tym celu umieć nie tylko zliczać powstające w wyniku anihilacji Z^0 , ale także umieć porównać liczby cząstek Z^0 produkowanych przy różnych energiach, a więc przy różnych strumieniach anihilujących par e^+e^- . Nie będziemy tu dyskutowali tych trudnych problemów doświadczalnych. Po prostu założymy, że zespoły doświadczalne pracujące w czterech eksperymentach przy LEPie zrobiły to najlepiej, jak było można.

można zapisać ogólnie jako

$$E_k = a_1|v| + a_2|v|^2 + a_3|v|^3 + \dots$$

(matematycy nazwaliby to rozwinięciem w szereg potęgowy). Wyznamy współczynniki a_i . Przeanalizujemy zderzenie dwóch samochodów o jednakowych masach. Przed zderzeniem w układzie środka masy obydwa samochody poruszają się z prędkościami równymi co do wartości v i przeciwnie skierowanymi; po zderzeniu zaś spoczywają. Rozważmy teraz to samo zderzenie w układzie, w którym jeden z samochodów spoczywa. Oznacza to, że drugi samochód przed zderzeniem ma prędkość $2v$, a po zderzeniu oba samochody poruszają się razem z prędkością v . Obliczymy zmianę energii w trakcie zderzenia w obu układach.

Układ środka masy:

$$-2(a_1v + a_2v^2 + a_3v^3 + \dots).$$

Układ spoczynkowy jednego z samochodów:

$$-(a_12v + a_24v^2 + a_38v^3 + \dots) + 2(a_1v + a_2v^2 + a_3v^3).$$

Żądając, by zmiany te były równe, dostajemy

$$2a_1v - 4a_3v^3 - 12a_4v^4 + \dots = 0.$$

Ponieważ v jest dowolne, więc wszystkie współczynniki w tym równaniu muszą być równe zero. Zatem $E_k = a_2v^2$ i nic więcej.

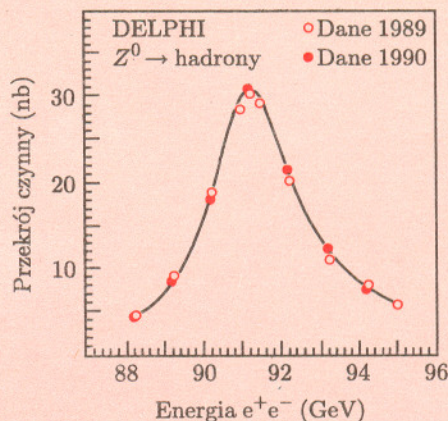
No trudno, E_k nie może być funkcją liniową prędkości. Wzór $E = mv^2/2$ jest słuszny przynajmniej dla małych prędkości. Jadąc szybko samochodem można się pocieszać, że E_k nie rośnie szybciej niż kwadratowo, a w mianowniku stoi dwójka.

Idylla maleńka taka

Wzór de Moivre'a odkrył Euler; twierdzenie Pitagorasa było znane kilkaset lat przed jego urodzeniem; Tales nie znał twierdzenia Talesa; wzory Cardano podali Tartaglia (dla równań stopnia 3) i Ferrari (dla stopnia 4); aksjomat Archimedesusa używano co najmniej 150 lat przed jego narodzinami, natomiast sam Archimedes był autorem zasady Cavalieriego (który żył 18 wieków później); jeszcze większy dystans dzieli Dedekinda od wynalazcy przekroju Dedekinda, czyli Eudoksosa (22 wieki); tenże Eudoksos jest wynalazcą pętli Vivianiego; sfery Dandelina wymyślił Apoloniusz; jeszcze śmieszniej jest z płaszczyzną Gaussa wprowadzoną kilkadziesiąt lat przed jego urodzeniem przez Eulera – jej odkrywcą, wedle większości podręczników historii matematyki, jest Wessel; trochę lepiej jest natomiast z prawami de Morgana – odkrył on jedno z nich (drugie 9 lat później Pierce); schemat Hornera jest wynalazkiem arabskim, podobnie jak stosowany do dowolnych wykładników dwumian Newtona; występujący w nim symbol Newtona obliczał Pascal – choć tutaj metodę nazwano uczciwie trójkątem Pascala; przestrzeń kartezjańska i kartezjański układ współrzędnych to dzieło Fermata; sito Eratostenesa występuje w napisanych przed jego urodzeniem *Elementach* Euklidesa; wielościany archimedesowe wymyślił Pappus i sam puścił plotkę, że znał je już jego wielki poprzednik sprzed sześciu wieków – Archimedes. Z bliższych nam okolic: przestrzeń Sobolewa wymyślił Nikodym i nazwał je przestrzeniami Beppa Leviego. W niczym nie zmienia to faktu, że przez cały czas kłócono się zawzięcie o priorytet każdego właściwie odkrycia.

M.K.

Precyzja wyznaczenia liczby cząstek Z^0 i strumienia zderzających się e^+e^- wpływają na błąd wyznaczenia wartości przekroju czynnego. Zależność przekroju czynnego od energii e^+e^- w LEPie przedstawia rysunek 1. Punkty doświadczalne pochodzą z pomiarów eksperymentu z detektorem DELPHI, krzywe zaś są wynikiem dopasowania przewidywań modelu standardowego. Na tym rysunku bardzo wyraźnie widać rezonansowe maksimum odpowiadające produkcji Z^0 .



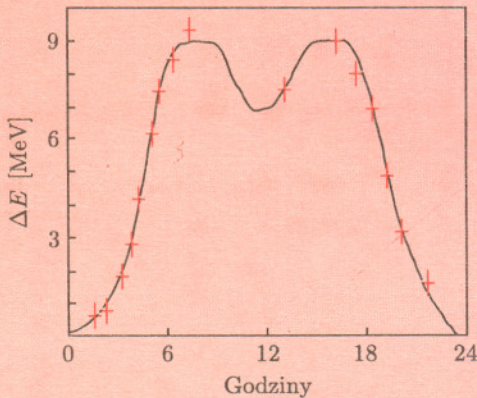
Rys. 1. Wyniki dopasowania kształtu linii Z^0 dla rozpadu Z^0 na hadrony w detektorze DELPHI. Krzywa ciągła to przewidywania modelu standardowego, odpowiadające $M_Z = (91,171 \pm 0,030 \pm 0,030)$ GeV, $\Gamma_Z = (2,511 \pm 0,065)$ GeV. Drugi błąd podany dla M_Z odpowiada błędowi pomiaru energii e^+e^- w LEPie, który w latach 1981–1990 wynosił 30 MeV.

Błąd wyznaczenia energii początkowych e^+e^- , czyli błąd zmiennej niezależnej, jest głównym tematem tego artykułu.

Od czego zależy energia wiązek w akceleratorze?

LEP jest jednocześnie akceleratorem elektronów (i pozytonów) i pierścieniem akumulacyjnym, to znaczy urządzeniem do długotrwałego utrzymywania wiązek o stałej energii. Przy napełnianiu LEPu wykorzystuje się cały CERNowski kompleks pięciu akceleratorów, które stanowią etapy wstępnego przyspieszania elektronów i pozytonów do energii 20 GeV. Przyspieszenie od 20 do 46 GeV zachodzi już w samym pierścieniu LEPu. Elektrony poruszające się w pierścieniu akceleratora doznają przyspieszeń, a więc promieniują fale elektromagnetyczne tracąc przy tym energię. Tak więc nawet po osiągnięciu energii końcowej musimy ciągle pompować energię z zewnątrz, żeby skompensować straty.

Dokładny pomiar energii elektronów w LEPie jest możliwy dzięki wykorzystaniu wszystkich informacji o całym CERNowskim kompleksie przyspieszającym oraz dzięki wykonaniu skomplikowanych pomiarów pomocniczych. Opis stosowanych metod wykracza poza zakres tego popularnego artykułu. Ważne jest to, że po kilku latach pracy akceleratora osiągnięto precyzję pomiaru energii od 3 do 5 MeV, czyli względną dokładność $\Delta E/E$ około $3,5 \times 10^{-5}$. Po dokonaniu tych pomiarów zauważono nieoczekiwany efekt – dobową zależność energii wiązki od czasu przedstawioną na rysunku 2.



Rys. 2. Zależność ΔE od godziny, w której wykonano pomiar energii e^+e^- w LEPie. Na potrzeby tego rysunku przyjęto, że $E_0 = E(0) = E(24 \text{ h})$. Krzywa ciągła jest przewidywaniem teorii pływów.

Okazuje się, że zależność ta jest spowodowana przez ruch Księżyca wokół Ziemi, a dokładniej – przez odkształcenie skorupy ziemskiej spowodowane przyciąganiem grawitacyjnym Księżyca. Zrozumienie tego efektu wymaga dokładniejszego rozważenia mechanizmu przyspieszania elektronów w LEPie.

Do przyspieszania elektronów w LEPie wykorzystujemy fale radiowe o częstotliwości $f = 352\,254\,170 \text{ Hz}$, które w specjalnych wnękach rezonansowych przekazują swoją energię przechodzącą przez wnękę paczkom cząstek. Wybór częstotliwości przyspieszającej nie jest przypadkowy, jest ona liniowo związana z częstotliwością obiegu pierścienia LEPu przez elektrony, a więc z jego rozmiarami, na przykład promieniem R , który dla LEPu wynosi 4,24 km. Tak więc zmiana częstotliwości fal radiowych Δf będzie prowadziła do pewnej zmiany energii wiązek ΔE . Dla LEPu obowiązuje

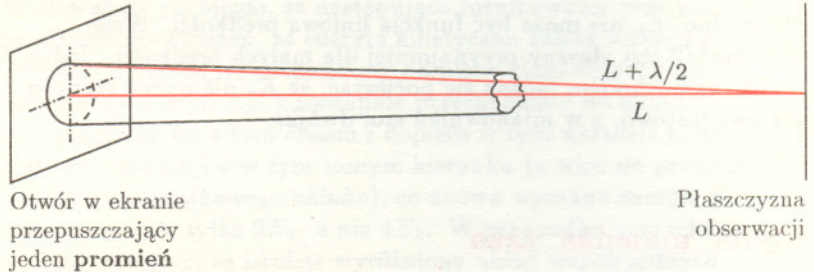
Promień świetlny

Kazimierz PIETRASZKIEWICZ

W optyce pojęcie promienia świetlnego ma dwa znaczenia: jest to nieskończona cienka linia – pojęcie matematyczne, a także jest to fizyczny **promień**, który ma skończoną grubość.

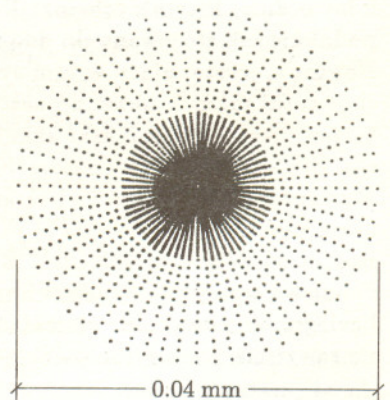
Promień jako pojęcie fizyczne będziemy odróżniali od promienia jako pojęcia matematycznego wytłuszczając ten pierwszy.

Jaka jest jego grubość? Jeżeli spróbujemy wydzielić **promień** przepuszczając falę przez otwór w ekranie, to rozmiary tego otworu nie mogą być większe od rozmiarów pierwszej strefy Fresnela (patrz *Delta* 3/1993). Co to oznacza w praktyce? Otóż, znaczy to tyle, że droga L przebyta przez promień środkowy (od środka otworka do płaszczyzny obserwacji) nie powinna różnić się od drogi przebytej przez promień skrajny o więcej niż $\lambda/2$. Łatwo wykazać, że średnica **promienia** wyniesie $D \leq 2\sqrt{\lambda L}$, gdzie λ jest długością fali świetlnej. Z drugiej strony średnica **promienia** świetlnego nie może być znacznie mniejsza od podanej tu wartości, gdyż wystąpi wtedy silne ugięcie. Tak określony **promień** stanowi rurkę w przestrzeni, zwężającą się w kierunku płaszczyzny obserwacji.



Promień świetlny to podstawowe pojęcie optyki geometrycznej, działu fizyki, który ciągle się rozwija. Optyka geometryczna, mimo że jest teorią przybliżoną, służy także do opisu zjawiska dyfrakcji. Ten dział optyki nazywa się *geometryczną teorią dyfrakcji*. A więc opis zjawisk dyfrakcji nie jest wcale zarezerwowany tylko dla optyki falowej. Optyka geometryczna jest bezkonkurencyjna przy analizie propagacji w ośrodkach niejednorodnych, zwłaszcza wtedy, gdy parametry ośrodka znamy tylko w przybliżeniu. Dobrym przykładem jest tu zjawisko refrakcji astronomicznej, czyli odchylenie **promienia** świetlnego podczas przejścia przez atmosferę ziemską.

Inny przykład to zastosowanie optyki geometrycznej do oceny jakości pojedynczej soczewki. Na soczewkę kierujemy pęk **promieni**, które następnie po opuszczeniu soczewki przecinają płaszczyznę detekcji (płaszczyznę obserwacji) tworząc tzw. diagram śladów. Rozmieszczenie punktów stanowiących diagram śladów jest miarą jakości analizowanej soczewki; im punkty są bardziej skupione, tym lepsza jest soczewka.



Wróćmy jednak do **promienia**. Pewnego razu na ćwiczeniach rachunkowych z teorii dyfrakcji prowadzący zapytał studentów: jaka powinna być średnica otwarka w *camera obscura*? (patrz *Delta* 12/1993). Studenci wydawali się zaskoczeni pytaniem i wreszcie jeden z nich powiedział: średnica otwarka powinna być taka, aby przeszedł przez ten tylko jeden **promień** (a może miał na myśli promień?). Odpowiedź ta wywołała wesołość na sali. Jednak w świetle tego, co wiemy o **promieniu** jako realnym obiekcie fizycznym, odpowiedź ta jest jak najbardziej poprawna. Rzeczywiście, średnica otwarka w *camera obscura* powinna być równa średnicy **promienia**, czyli nie powinna przekraczać rozmiarów pierwszej strefy Fresnela.



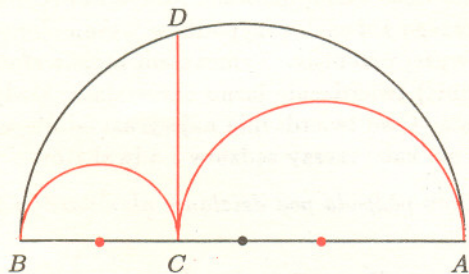
Kącik spokojnych miłośników rachunków

Jeszcze raz o nożu

Pisząc poprzednio o tzw. szewskim nożu wyraziłem opinię, że nie sposób wypowiadać się o jego polu, gdyż brakuje – obecnego w przypadku księżyców Hipokratesa – trójkąta do porównania.

Inną nazwą tej figury jest arbalet – tak nazywano najstraszniejszą broń średniowiecza: kuszę ze stalowym łukiem.

Trójkąta istotnie brakuje, natomiast o polu mówić można, gdyż ładnie się wyraża przez długość wspólnej stycznej dwóch mniejszych półokręgów od punktu styczności do punktu przecięcia z największym półokręgiem.



Oznaczając, tak jak poprzednio (*Delta* 5/1994), odcinek ten przez CD (patrz rysunek), a promienie mniejszych okręgów przez r_1 i r_2 , promień zaś dużego okręgu przez r mamy $r = r_1 + r_2$ oraz

$$CD^2 = 2r_1 \cdot 2r_2,$$

gdyż trójkąt ADB jest prostokątny, pole natomiast całego noża jest równe

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\pi r^2 - \frac{1}{2}\pi r_1^2 - \frac{1}{2}\pi r_2^2 &= \frac{1}{2}\pi(r^2 - (r_1 + r_2)^2 + 2r_1 r_2) = \\ &= \frac{1}{4}\pi(CD)^2 = \pi \left(\frac{CD}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Można to interpretować jako pole koła o średnicy CD .

Warto zwrócić uwagę, że promienie okręgów wpisanych w każdą z części noża można też wyrazić za pomocą CD :

$$s = \frac{CD^2}{4r}.$$

następujący związek między względnymi zmianami energii i względnymi zmianami częstości:

$$(1) \quad \frac{\Delta E}{E} = \frac{1}{\alpha_c} \frac{\Delta f}{f},$$

gdzie stała $\alpha_c = 3,84 \times 10^{-4}$ jest związana ze strukturą wnęk rezonansowych LEPu i znamy ją z niezależnych pomiarów z dokładnością około 5%.

Zastanówmy się teraz, co by się stało z energią elektronów, gdyby pierścien akceleratora uległ niewielkiemu odkształceniu, powiedzmy, promień zwiększyłby się o ΔR . Częstość obiegu elektronów uległaby zmniejszeniu na skutek niewielkiego wzrostu obwodu pierścienia i przestałaby pasować do starannie dobranej częstości fal radiowych f . Dopasowanie częstości fal do nowych rozmiarów LEPu wymagałoby obniżenia jej o Δf .

Możemy więc zapisać, że w pierwszym przybliżeniu

$$(2) \quad \frac{\Delta f}{f} = -\frac{\Delta R}{R}.$$

Jeżeli częstość radiowa nie ulegnie zmianie, to energia wiązki elektronów musi ulec zmniejszeniu zgodnie ze wzorem (1), co, po podstawieniu zależności (2), prowadzi nas do wzoru

$$(3) \quad \frac{\Delta E}{E} = -\frac{1}{\alpha_c} \frac{\Delta R}{R}.$$

Obliczenie odkształcenia LEPu pod wpływem sił grawitacyjnych Księżyca wymaga dość złożonych rachunków numerycznych uwzględniających budowę geologiczną i własności sprężyste skał, w których jest wydrążony podziemny tunel akceleratora. Z obliczeń tych wynika, że maksymalna zmiana promienia R wynosi około $150 \mu\text{m}$. Względna zmiana promienia LEPu $\Delta R/R$ wynosi więc $(1,5 \times 10^{-4} \text{ m}) / (4,24 \times 10^3 \text{ m}) = 3,5 \times 10^{-8}$. Po podstawieniu do wzoru (3) otrzymujemy względną zmianę energii wiązki równą około $0,7 \times 10^{-4}$, czyli zmianę energii układu e^+e^- o około 6,8 MeV. Taką samą zmianę energii e^+e^- można by uzyskać zmieniając częstość fali przyspieszającej o 10 Hz, na przykład z 352 254 170 Hz na 352 254 180 Hz.

Dane z rysunku 2 można teraz wykreślić nie w zależności od czasu, lecz w zależności od stosunku siły pływu w danym momencie doby do maksymalnej siły pływu. Taki wykres przedstawia rysunek 3.

M.K.

Paweł STRZELECKI

Czy prawników warto uczyć matematyki? Wydaje się, że nie: po pierwsze nie będą chcieli się uczyć, po drugie i tak na ogół umieją zarabiać na życie...

Może się to Czytelnikowi wyda nieco przewrotne, ale niekiedy właśnie nieznanomość matematyki pozwala prawnikom na toczenie długich, mętnych, zawiłych spraw. Oto przykład, wyszperany w wspomnieniach słynnego angielskiego matematyka Johna Littlewooda.

Littlewood był tak świetnym matematykiem, że już za jego życia opowiadano o nim rozliczne anegdoty – niektóre z nich można znaleźć w *Delcie* 5/1993.

Począwszy od 1914 roku obowiązywał w Anglii pewien akt parlamentarny dotyczący płacenia podatków za posiadanie domów i kamienic. Akt zawierał sporo definicji; najważniejsze z nich przytaczamy niżej, zachowując (o ile to możliwe) styl oryginału. W nawiasach podajemy własne oznaczenia niektórych wielkości.

Standardowa opłata (= R) była zdefiniowana jako równa podatkowi zapłaconemu w 1914 roku (= R_0), jeśli ten ostatni nie był mniejszy od pewnej – zależnej od paru nieistotnych dla nas czynników – sumy (= S); w przeciwnym razie przyjmowano, że standardowa opłata jest równa owej sumie S . Następnie akt stwierdzał, że

„Dom podpada pod działanie niniejszego aktu, jeśli albo standardowa opłata, albo wspomniana wyżej suma S jest mniejsza niż 105 funtów szterlingów.”

W brytyjskich sądach toczyło się podobno wiele spraw, w których chodziło o rozstrzygnięcie, czy należy stosować ów akt. Przy tym owe sprawy (często dość skomplikowane i niejasne) rozpatrywano oddzielnie dla każdego z dwóch przypadków wymienionych w zacytowanym wyżej przepisie. Tymczasem można sformułować (i szybko udowodnić) twierdzenie jasno określające, kiedy się akt stosuje, a kiedy nie. Owo twierdzenie najwyraźniej nie było znane ani prawodawcy, ani całej rzeszy sędziów i adwokatów.

Twierdzenie. *Dom podpada pod działanie aktu wtedy i tylko wtedy, gdy $S < 105$.*

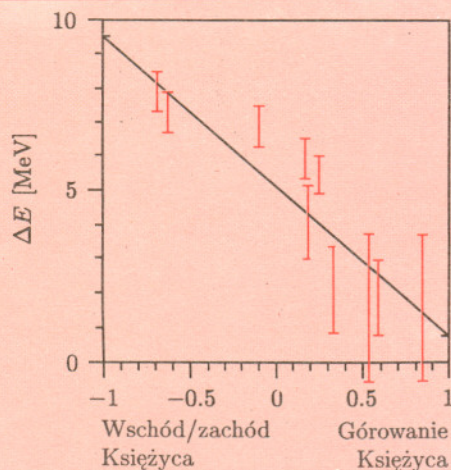
Dowód twierdzenia wynika natychmiast z następującego, trywialnego lematu (Czytelnicy zechcą sami przekonać się o jego prawdziwości).

Lemat. $S = \min(\max(R_0, S), S)$ dla dowolnych rzeczywistych R_0 i S .

Wystarczy bowiem przypomnieć sobie definicję: standardowa opłata R to po prostu większa z dwóch liczb R_0 i S , czyli $R := \max(R_0, S)$, akt zaś działa wtedy (i tylko wtedy), gdy mniejsza z dwóch liczb R i S jest mniejsza od 105. Ostatecznie, widzimy, że akt działa wtedy i tylko wtedy, gdy

$$105 > \min(R, S) = \min(\max(R_0, S), S) = S.$$

Inny (choć już nie tak ładny) przykład sytuacji, gdy długie i kręte omówienia można łatwo skrócić i uprościć wypisując jeden wzór, znają wszyscy Czytelnicy, którzy muszą płacić podatek dochodowy. Gdy w 1993 roku wypełnialiśmy po raz pierwszy formularze podatkowe, to w wydanej przez Ministerstwo Finansów broszurce tabelka objaśniająca zależność podatku od dochodu zajmowała



Rys. 3. Zależność ΔE od znormalizowanej siły pływów Księżyca X , zdefiniowanej jako:

$$X = \frac{\text{siła pływów Księżyca w czasie pomiaru}}{\text{maksymalna dobowo siła pływów Księżyca}}$$

Krzywa ciągła jest przewidywaniem teorii pływów.

Linia ciągła jest wynikiem obliczeń odkształcenia promienia R . Jak widać, zgodność pomiarów energii wiązek w LEPie z przewidywaniami teorii pływów jest bardzo dobra. Nie potrzebujemy więc uciekać się do astrologii.

Włącz komputer!

Okazuje się, że następująca bardzo skomplikowana suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{x}-c)(\sqrt[4]{x}-c)(\sqrt[3]{x}-c)\dots(\sqrt[n]{x}-c),$$

gdzie $x > 0$, zaś $0 < c < 2$, w **bardzo** prosty sposób wyraża się za pomocą x oraz c . Tę całą skomplikowaną sumę można „zwinąć” do jednego bardzo prostego wyrażenia. Co to za wyrażenie? Aż trudno sobie wyobrazić, że taka suma może się uprościć.

Dlatego też proponujemy **odgadnięcie** owego wyrażenia za pomocą obliczeń na komputerze. Czekamy na listy z odpowiedziami oraz z ewentualnymi krótkimi opisami, w jaki sposób te odpowiedzi zostały otrzymane.

* * *

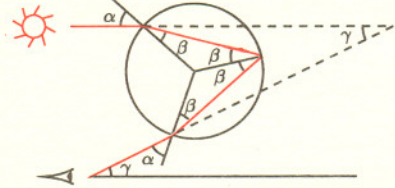
Na lekcji matematyki:

- Ile jest komputerów na stole?
- Pięć.
- Teraz schowam dwa komputery pod ławkę. Ile zostanie?
- Trzy.
- Widzicie dzieci, kiedyś uczono liczyć na liczydło, a teraz uczymy się liczyć na komputerach.

P.H.



Rozwiązanie zadania F 383. Tęcza powstaje wskutek wewnętrznego odbicia światła od kropelek deszczu (rys.).



Kąt między promieniem padającym na kroplę, a wpadającym do oka wynosi

$$\gamma = 2\beta - 2(\alpha - \beta) = 4\beta - 2\alpha.$$

Z prawa załamania

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$$

możemy wyznaczyć $\beta = \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{n}\right)$.

Kąt γ jest teraz funkcją tylko kąta α , tj. $\gamma(\alpha)$, $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$. Obraz tęczy powstaje, gdy padające promienie po odbiciu są nadal równoległe. Warunek ten jest w przybliżeniu spełniony dla takiego α , że $\frac{d\gamma}{d\alpha} = 0$, tj:

$$4 \frac{d\beta}{d\alpha} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{1}{2}.$$

Z drugiej strony

$$\sin \alpha = n \sin \beta \Rightarrow \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \frac{1}{n}.$$

Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{n}{2}, \\ \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n \end{cases}$$

przez podniesienie do kwadratu i eliminację $\sin^2 \beta$ otrzymujemy

$$\alpha = \arcsin \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}} = 59,4^\circ,$$

stad

$$\beta = \arcsin \sqrt{\frac{4 - n^2}{3n^2}} = 40,2^\circ.$$

Ostatecznie

$$\gamma = 4 \arcsin \sqrt{\frac{4 - n^2}{3n^2}} - 2 \arcsin \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}} \approx 42^\circ.$$



Rozwiązanie zadania F 384. Załóżmy, że futerko myszy i otoczenie promieniują jak ciała doskonale czarne. Z prawa Stefana-Boltzmanna mamy moc promieniowania myszy względem tła

$$P = \sigma(T^4 - T_0^4)S.$$

W odległości r gęstość mocy na jednostkę powierzchni musi równać się co najmniej czułości sensorów termicznych grzechotnika

$$\alpha = \frac{P}{4\pi r^2}.$$

Stąd

$$r = \sqrt{\frac{\sigma(T^4 - T_0^4)S}{4\pi\alpha}} = 16 \text{ m}.$$

– wraz z objaśnieniem i kilkoma przykładami – prawie trzy pełne strony druku. Była tam mowa o kolejnych przedziałach dochodów, progach podatkowych (20% podatku od dochodów mieszczących się w pierwszym przedziale, do tego 30% podatku od dochodu pomiędzy 64,8 mln a 129,6 mln, a dla tych, co ośmielili się zarobić ponad 129,6 mln w ciągu roku, jeszcze 40% od nadwyżki), odejmowaniu jakichś magicznych kwot od dochodów w pierwszym przedziale itp. Matematycy, a może nie tylko oni, zapewne woleliby zamiast tabelki z zawiłymi objaśnieniami, zobaczyć następujące zdanie:

Jeśli dochód roczny (w milionach złotych, po odjęciu kosztów uzyskania i odliczeń) jest równy D , to podatek P (w milionach złotych) wyraża się wzorem

$$P := 0,2 \cdot (D - 4,32)^+ + 0,1 \cdot ((D - 64,8)^+ + (D - 129,6)^+),$$

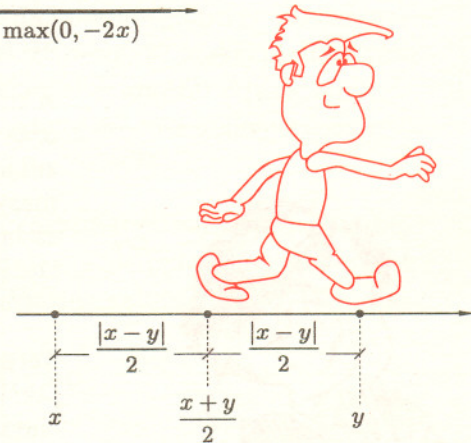
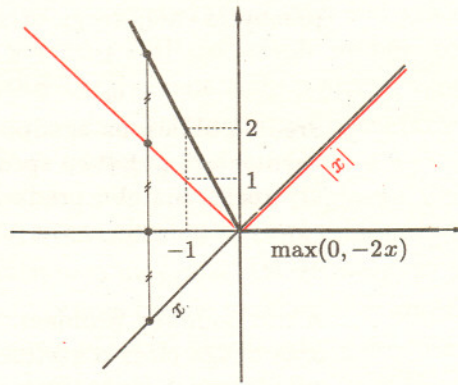
przy czym $x^+ := \max(0, x)$ oznacza nie mniejszą z liczb 0 i x .

Pomogła nam znowu funkcja $\max(x, y)$, która z dwóch liczb wybiera większą i jest wygodnym narzędziem do zwięzłego zapisywania przepisów w rodzaju „jeśli tak, to zrób tak, a w przeciwnym przypadku postępuj trochę inaczej”. Innym takim wygodnym narzędziem, dobrze znanym nawet przeciętnemu uczniowi, jest moduł (wartość bezwzględna); nic dziwnego, bo obie funkcje są powiązane prostymi wzorami. Mianowicie, jak łatwo sprawdzić

$$|x| = x + \max(0, -2x), \quad \max(x, y) = \frac{x + y}{2} + \frac{|x - y|}{2}$$

dla dowolnych rzeczywistych x i y (patrz rys. 1 i 2).

Rys. 1. Jeśli dodamy dwie funkcje, x oraz $\max(0, -2x)$, to dostaniemy $|x|$ – wystarczy naszkicować wykresy i przypomnieć sobie twierdzenie Talesa.



Rys. 2. Dla dwóch liczb $x, y \in \mathbb{R}$ punkt $\frac{x + y}{2}$ jest środkiem łączącego je odcinka.

Gdy z owego środka przesuniemy się w prawo o pół długości odcinka, czyli o $\frac{|x - y|}{2}$, to nadejmiemy na większą z dwóch liczb x oraz y .

Podobnych sytuacji można, jak sądzę, znaleźć wiele; język matematyki jest po prostu znacznie bardziej zwięzły i precyzyjny niż język prawa. Niejasności związane z interpretacją rozmaitych przepisów są często źródłem zwiększonych dochodów dla prawników, a dla innych – powodem zgrzyoty, zdenerwowania czy marnotrawienia czasu. Wydaje się, że nic na to poradzić nie można; taki już jest nasz świat.

Wszystkich, którzy znają inne ciekawe historie tego rodzaju, prosimy o podzielenie się swą wiedzą z redakcją *Delty*.



mała delta

Jaka średnia?

Samochód połowę drogi jedzie z prędkością v_1 , drugą połowę drogi z prędkością v_2 różną od v_1 . Jaka jest jego średnia prędkość? Prawie każdy, kogo o to zapytam, odpowiada bez namysłu

$$\frac{1}{2}(v_1 + v_2)$$

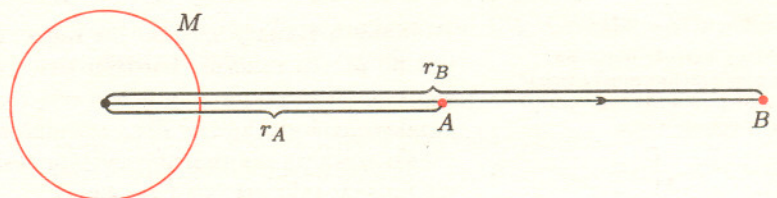
i jest to odpowiedź błędna. Średnia prędkość jest to stosunek drogi do czasu, w którym została ona przebyta. Jeśli przez t_1 i t_2 oznaczymy czasy, w których samochód przebywa jednakowe odległości równe połowie drogi, to z warunku $t = t_1 + t_2$, gdzie t jest czasem potrzebnym na przebycie całej drogi, otrzymujemy

$$\frac{1}{v_{\text{sr}}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right), \quad \text{czyli} \quad v_{\text{sr}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}.$$

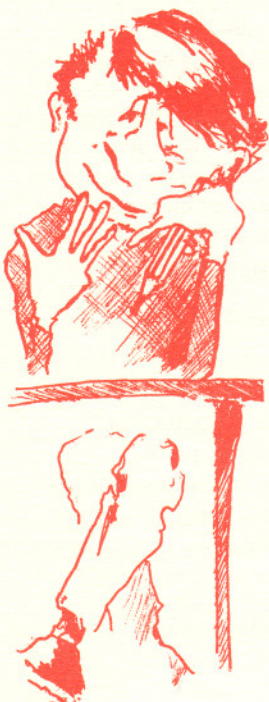
Średnia obliczona zgodnie z powyższą receptą nazywa się średnią harmoniczną. Łatwo spostrzec, że średnia prędkość byłaby średnią arytmetyczną obu prędkości, gdyby samochód w takich samych czasach równych połowie czasu podróży przebył z różnymi prędkościami różne drogi.

A oto podobny problem. Do naczynia nalano ciecz o gęstości ρ_1 oraz drugą ciecz o gęstości ρ_2 . Jaka jest średnia gęstość obu cieczy znajdujących się w naczyniu? (Przez średnią gęstość rozumiemy stosunek masy do objętości.) W zależności od tego, jak sformułujemy warunki zadania, znów otrzymamy różne średnie. Jeśli jednakowe będą masy obu cieczy – otrzymamy średnią harmoniczną, jeśli jednakowe będą objętości – średnią arytmetyczną.

Teraz całkiem inne zadanie. Rozważmy ciało poruszające się w polu jakiejś siły z punktu A do B . Jaka jest średnia siła działająca na to ciało? Najpierw musimy określić, co mamy na myśli mówiąc „średnia siła”. Jest to taka (stała) siła, która wykona tę samą pracę przy takim samym przesunięciu ciała. W zależności od rodzaju siły otrzymamy różne średnie.



Rozważmy ciało o masie m przemieszczające się w centralnym polu grawitacyjnym masy M , jak to jest pokazane na rysunku.



Pracę sił grawitacji obliczymy jako różnicę energii potencjalnych w punktach A i B :

$$W = E_{PA} - E_{PB} = -\frac{GMm}{r_A} + \frac{GMm}{r_B} = -\frac{GMm}{r_A r_B} (r_B - r_A).$$

Widzimy więc, że zgodnie z definicją średniej siły

$$W = -F_{\text{śr}}(r_B - r_A),$$

ma ona wartość

$$F_{\text{śr}} = \frac{GMm}{r_A r_B},$$

czyli $F_{\text{śr}} = \sqrt{F_A F_B}$, gdzie $F_A = \frac{GMm}{r_A^2}$ i $F_B = \frac{GMm}{r_B^2}$ są wartościami sił grawitacji w punktach A i B . Ten rodzaj średniej nosi nazwę średniej geometrycznej. Średnią geometryczną otrzymamy dla sił zmieniających się jak $\frac{1}{r^2}$ (siły grawitacji, siły elektrostatyczne). Gdyby siła zmieniała się liniowo wraz z odległością (tak jest dla sił sprężystości), średnia siła byłaby średnią arytmetyczną siły początkowej i końcowej.

Na zakończenie jeszcze jeden problem. Rozważmy dwa ciała o takich samych pojemnościach cieplnych i początkowych temperaturach bezwzględnych T_1 i T_2 ($T_1 > T_2$). Jeśli pozwolimy na przepływ ciepła pomiędzy tymi ciałami izolując je cieplnie od otoczenia, ich temperatury wyrównają się. Końcowa temperatura tych ciał zależy od sposobu przeprowadzenia procesu. Jeśli całe ciepło oddane przez ciało o wyższej temperaturze zostanie przekazane ciału o niższej temperaturze, końcowa temperatura będzie średnią arytmetyczną początkowych temperatur ciał. Możemy jednak postąpić inaczej. Ciało o wyższej temperaturze może zostać użyte jako grzejnik silnika cieplnego, ciało o niższej – jako jego chłodnica. W tej sytuacji część ciepła oddanego przez pierwsze ciało zostanie zamieniona na pracę. Okazuje się, że maksymalną pracę uzyskamy, jeśli cały proces będzie przebiegał w sposób odwracalny. Temperatura końcowa obu ciał będzie wtedy średnią geometryczną temperatur początkowych.

Mówiliśmy o trzech rodzajach średniej: arytmetycznej, geometrycznej i harmonicznej. W naturalny sposób pojawia się pytanie: która z nich jest największa, a która najmniejsza? Weźmy zatem dwie dodatnie liczby a i b . Zachodzi oczywista nierówność

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0,$$

z której otrzymujemy

$$\frac{1}{2}(a + b) \geq \sqrt{ab}.$$

Tak więc średnia arytmetyczna jest nie mniejsza niż średnia geometryczna. Równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$.

Dzieląc obie strony ostatniej nierówności przez iloczyn ab otrzymujemy:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq \frac{1}{\sqrt{ab}},$$

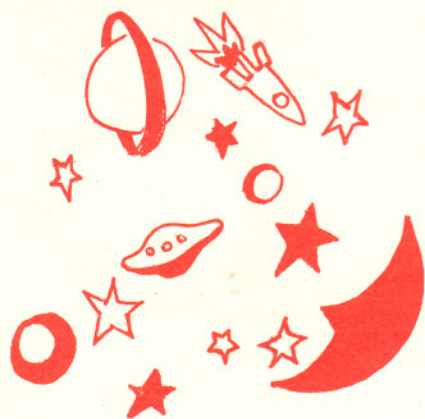
czyli

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a + b}.$$

A zatem średnia geometryczna jest nie mniejsza niż średnia harmoniczna. Równość znów ma miejsce tylko w przypadku $a = b$.

Małą Deltę przygotował Krzysztof REJMER





Największe laboratorium, czyli Wszechświat, realizuje wszystko, co jest dozwolone przez prawa przyrody, nawet rzeczy – zdawałoby się – dziwaczne. Za jedną z takich „rzeczy” można chyba uznać ujemny jon wodorowy H^- , tzn. proton z dwoma elektronami. Na zdrowy rozum, drugi elektron nie ma szans trzymać się protonu, atom wodoru jest przecież jednowartościowy. Tymczasem mechanika kwantowa pokazuje, że wprawdzie słabo, ale może się trzymać. Jego energia wiązania wynosi zaledwie 0,75 eV, zapewnia to jednak istnienie jonu nawet w temperaturze panującej na powierzchni Słońca, co prawda w ilości znikomej, wystarczającej jednak do odegrania tam poważnej roli. Otóż gdyby nie H^- , to fotony odpowiadające liniom absorpcyjnym mogłyby być przekazywane od atomu do atomu bez przeszkód i opuszczałyby gwiazdę w tej ilości, w jakiej wyprodukowane zostały w jej wnętrzu – zatem linie absorpcyjne nie byłyby widoczne. Aby stały się widoczne, trzeba przynajmniej część odpowiadających im fotonów zniszczyć. To właśnie robi H^- – jon ten zdolny zaabsorbować nawet mało energetyczny foton nie jest w stanie go w tej samej postaci odtworzyć.

Kilka lat temu inny dziwoląg został odkryty w wysokich warstwach atmosfery Jowisza. Aż trudno uwierzyć, że po misjach Pioneerów i Voyagerów dało się coś nowego zaobserwować na Jowiszu z Ziemi – a jednak! W podczerwonym zakresie widma w okolicy fali $2,1 \mu m$ znaleziono szereg linii emisyjnych, które dość długo nie dawały się zidentyfikować. Identyfikacji dokonano wreszcie siłami międzynarodowymi. Badacze Kanady, Francji i USA stwierdzili, że linie te pochodzą od innego jonu wodorowego, mianowicie H_3^+ .

Prawdopodobnie cząsteczka taka powstaje w wyniku spotkania obojętnej cząsteczki H_2 z drugą taką, ale uprzednio zjonizowaną przez wysokoenergetyczne elektrony jowiszowej jonosfery. Cząsteczka pośrednia rozpada się następnie na H_3^+ i neutralny atom wodoru. Gdyby dało się własności dodatniego jonu wodorowego w pełni opisać teoretycznie, to obserwacje podczerwonych linii przy $2,1 \mu m$ w Drodze Mlecznej i w innych galaktykach stałyby się nowym potężnym narzędziem badania rozkładu wodoru we Wszechświecie.

Tomasz KWAST



Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

M 705. W ciągu liczbowym (a_n) każdy wyraz, począwszy od trzeciego, jest sumą dwóch poprzednich wyrazów. Ciąg (b_n) ma tę samą własność. Ponadto $a_1 = 3, a_2 = 2, b_1 = 2, b_2 = 3$. Ile jest liczb, które występują w obu tych ciągach (niekoniecznie na tym samym miejscu)?

Rozwiązanie na str. 13

M 706. Czy równanie

$$\underbrace{\sqrt{x + \sqrt{x + \dots + \sqrt{x}}}}_{1994} = y$$

ma rozwiązania w liczbach naturalnych x, y ?

Rozwiązanie na str. 13

M 707. Rozwiązać w liczbach naturalnych równanie $x^3 - y^3 - xy - 25 = 0$.

Rozwiązanie na str. 13

Redaguje Jarosław KULPA

F 383. Oszacować rozmiary kątowe tęczy, gdy Słońce znajduje się w pobliżu horyzontu. Współczynnik załamania wody wynosi $n = 1,333$.

Rozwiązanie na str. 7

F 384. Wąż grzechotnik ma na głowie drugą parę oczu – sensory termiczne, odbierające promieniowanie podczerwone w szerokim przedziale $6-12 \mu m$. Ich czułość wynosi około $a = 10^{-4} W/m^2$. Obraz powstaje na zasadzie *camery obscury*. Oszacować, z jakiej największej odległości wąż może zaobserwować mysz o temperaturze futerka $T = 310 K$ i powierzchni $S = 50 cm^2$, jeżeli temperatura otoczenia wynosi $T_0 = 300 K$.

Rozwiązanie na str. 7

Zasada włączeń i wyłączeń

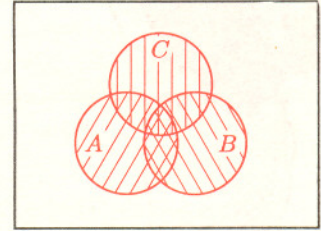
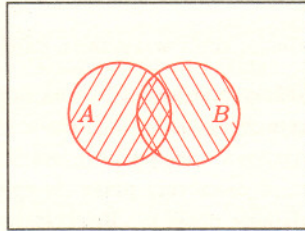
Przemysław GRZEGORZEWSKI

Niech A i B będą dowolnymi skończonymi podzbiórami pewnego zbioru X . Wówczas moc sumy tych zbiorów $A \cup B$ (tzn. liczba elementów należących do $A \cup B$) jest równa:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

gdzie $|\cdot|$ oznacza moc zbioru. Dla trzech podzbiórów skończonych A, B, C moc sumy wyraża się następująco

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$



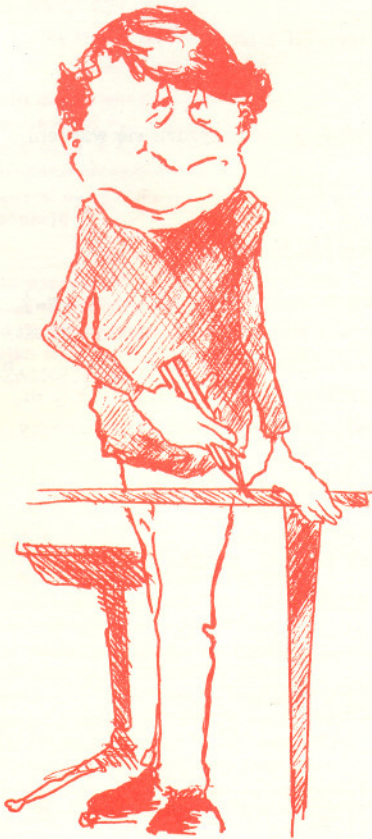
Powyższe wzory są prostymi przypadkami następującej zasady, zwanej zasadą włączeń i wyłączeń:

Twierdzenie Niech A_1, A_2, \dots, A_n będą skończonymi podzbiórami pewnego zbioru X . Wtedy

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|.$$

Dowód indukcyjny tego twierdzenia pozostawiam Czytelnikom.

Zasada włączeń i wyłączeń ma wiele zastosowań w różnych dyscyplinach matematycznych. A oto przykłady pochodzące z teorii liczb, rachunku prawdopodobieństwa i analizy kombinatorycznej.



<p>Odcinek dla poczty</p> <p>Zł</p> <p>słownie złotych</p> <p>..... wplacający</p>	<p>Odcinek dla posiadacza rachunku</p> <p>Zł</p> <p>słownie złotych</p> <p>Dokładny adres</p> <p>wplacający</p>	<p>Potwierdzenie dla wplacającego</p> <p>Zł</p> <p>słownie złotych</p> <p>Dokładny adres</p> <p>wplacający</p>
<p>AMOS</p> <p>01-806 Warszawa</p> <p>ul. Zuga 12</p>	<p>AMOS</p> <p>01-806 Warszawa</p> <p>ul. Zuga 12</p>	<p>AMOS</p> <p>01-806 Warszawa</p> <p>ul. Zuga 12</p>
<p>nazwa banku PKO VIII O/W-wa</p> <p>Nr r-ku 1586-77578-136</p>	<p>nazwa banku PKO VIII O/W-wa</p> <p>Nr r-ku 1586-77578-136</p>	<p>nazwa banku PKO VIII O/W-wa</p> <p>Nr r-ku 1586-77578-136</p>
<p>..... podpis przyjmującego</p> <p>Pobrano opłatę</p> <p>zł</p>	<p>..... podpis przyjmującego</p> <p>Pobrano opłatę</p> <p>zł</p>	<p>..... podpis przyjmującego</p> <p>Pobrano opłatę</p> <p>zł</p>

Przykład 1.

W tym przykładzie zasadę włączeń i wyłączeń wykorzystamy w dowodzie twierdzenia dotyczącego tzw. funkcji ϕ Eulera definiowanej następująco

$\phi(m)$ jest to liczba tych naturalnych $k \leq m$,
które nie mają z m wspólnego dzielnika różnego od ± 1 .

Twierdzenie:

Wartość funkcji ϕ Eulera dla dowolnej liczby naturalnej $m > 1$ wyraża się wzorem

$$\phi(m) = m \cdot \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

gdzie p przebiega zbiór wszystkich dzielników pierwszych liczby m .

Dowód: Weźmy pod uwagę pewną liczbę naturalną $m > 1$. Niech $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ będzie zbiorem wszystkich dzielników pierwszych liczby m . Liczba naturalna k jest względnie pierwsza z m , jeśli nie jest podzielna przez żadną z liczb p_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Dla $i = 1, \dots, n$ oznaczmy przez A_i zbiór tych wszystkich liczb naturalnych $k \leq m$, które są podzielne przez p_i . Korzystając z zasady włączeń i wyłączeń otrzymujemy

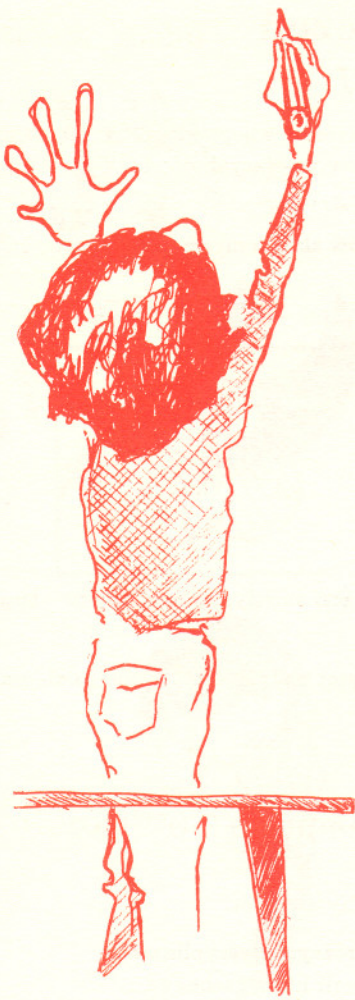
$$\phi(m) = m - \left(\sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \dots \cap A_n| \right).$$

Jak łatwo zauważyć, $|A_i| = \frac{m}{p_i}$ (bo jest to zbiór liczb postaci: $p_i, 2p_i, 3p_i, \dots, \frac{m}{p_i}p_i$);

$|A_i \cap A_j| = \frac{m}{p_i p_j}$; itd. Wreszcie, $|A_1 \cap \dots \cap A_n| = \frac{m}{p_1 \cdot \dots \cdot p_n}$.

Po podstawieniu otrzymujemy

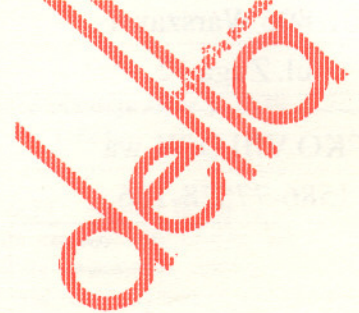
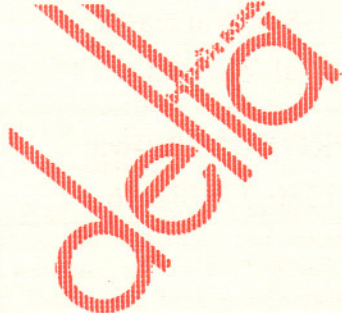
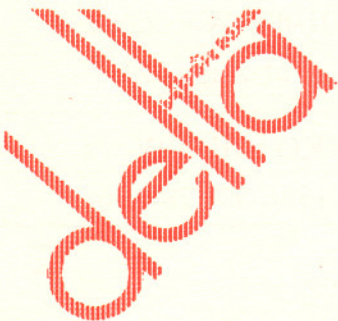
$$\begin{aligned} \phi(m) &= m - \left(\sum_{1 \leq i \leq n} \frac{m}{p_i} - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m}{p_i p_j} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{m}{p_1 \cdot \dots \cdot p_n} \right) = \\ &= m \left(1 - \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{p_i} + \dots + (-1)^n \frac{1}{p_1 \cdot \dots \cdot p_n} \right) = m \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_i} \right). \blacksquare \end{aligned}$$



Prenumerata „Deltę”
za okres:

Prenumerata „Deltę”
za okres:

Prenumerata „Deltę”
za okres:





Rozwiązanie zadania M 705.
Mamy, oczywiście, $a_3 = b_3 = 5$, zatem z definicji obu ciągów

$$b_3 = 5 < a_4 = 7 < b_4 = 8 < a_5 = 12 < b_5 = 13.$$

Jeśli dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzą nierówności $b_{n-1} < a_n < b_n$ oraz $b_n < a_{n+1} < b_{n+1}$, to dodając je stronami otrzymujemy natychmiast $b_{n+1} < a_{n+2} < b_{n+2}$. Stąd przez indukcję

$$b_{n-1} < a_n < b_n$$

dla wszystkich $n \geq 4$. Ponadto, oba ciągi są ściśle rosnące począwszy od drugiego wyrazu, istnieją zatem tylko trzy liczby naturalne spełniające warunki zadania: 2, 3 i 5.



Rozwiązanie zadania M 706.
Przypuśćmy, że para liczb naturalnych x, y jest rozwiązaniem. Podnosimy obie strony równania do kwadratu i przenosimy x na prawą stronę. Liczba pierwiastków po lewej stronie zmniejszyła się o jeden, a po prawej stronie nadal mamy liczbę naturalną (pierwiastek kwadratowy jest nieujemny). Powtarzając tę operację wielokrotnie, dochodzimy do wniosku, że

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} = l \in \mathbb{N} \quad \text{oraz} \quad \sqrt{x} = k \in \mathbb{N}.$$

Stąd wynika, że liczby naturalne k i l spełniają zależność $k(k+1) = l^2$. Oczywiście, $k < l$, więc $k+1 \leq l$, skąd $k(k+1) < l^2$ – sprzeczność.

Zatem rozpatrywane równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych.



Rozwiązanie zadania M 707.
Jeśli para liczb naturalnych (x, y) jest rozwiązaniem równania, to $x > y$. Zapiszmy $x = y + r$, $r \geq 1$. Po podstawieniu i prostych rachunkach dostajemy

$$y(y+r)(3r-1) + r^3 = 25.$$

Stąd $1 \leq r \leq r^3 < 25 < 3^3$, zatem $r = 1$ lub $r = 2$.

W pierwszym przypadku dostajemy równanie $2y(y+1) = 24$, które ma jeden pierwiastek naturalny $y = 3$. Wtedy $x = y + r = 4$; jak się nie trudniono przekonać, rzeczywiście jest to rozwiązanie naszego równania.

Gdyby $r = 2$, to mielibyśmy $5y(y+2) = 17$. To jest sprzeczność z założeniem $y \in \mathbb{N}$, bowiem 17 nie dzieli się przez 5.

Przykład 2 (problem roztrągniętej sekretarki).

Pewna sekretarka napisała n różnych listów – po jednym do każdej z n osób. Następnie włożyła je do n kopert, zakleiła koperty, po czym na każdej napisała jeden z n adresów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że choć jeden z listów jest dobrze zaadresowany?

Zdarzeniami elementarnymi są tu permutacje na zbiorze n -elementowym, które odpowiadają możliwym przyporządkowaniom adresów poszczególnym kopertom. Jest ich $n!$. Niech A_i oznacza zdarzenie polegające na tym, że i -ty list znajduje się we właściwie zaadresowanej kopercie. Wtedy interesujące nas zdarzenie A – co najmniej jeden list we właściwie zaadresowanej kopercie – jest równe $A_1 \cup \dots \cup A_n$. Liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających A obliczymy korzystając z zasady włączeń i wyłączeń. Otóż, skoro A_i sprzyja $(n-1)!$ zdarzeń elementarnych, a zdarzeniu $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}$ (listy i_1, i_2, \dots, i_k są we właściwie zaadresowanych kopertach) sprzyja $(n-k)!$ zdarzeń elementarnych i skoro podciąg (i_1, i_2, \dots, i_k) możemy wybrać na $\binom{n}{k}$ sposobów, to

$$|A| = \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \dots \cap A_n| = \\ = \binom{n}{1} (n-1)! - \binom{n}{2} (n-2)! + \dots + (-1)^{n+1} \binom{n}{n} \cdot 1 = n! \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{k!}.$$

Zatem $P(A) = \frac{|A|}{n!} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!}$. Gdy $n \rightarrow \infty$, to $P(A) \rightarrow 1 - e^{-1} \approx \frac{2}{3}$ (dla $n > 7$ jest to już „niemal stałe”).

Dodajmy jeszcze, że w rachunku prawdopodobieństwa korzysta się ze wzoru na prawdopodobieństwo sumy zdarzeń, będącego probabilistyczną wersją zasady włączeń i wyłączeń

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{1 \leq i \leq n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n).$$

Przykład 3.

Twierdzenie. Jeżeli $|X| = m$, $|Y| = n$, to liczba wszystkich funkcji ze zbioru X na zbiór Y jest równa $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$.

Dowód. Niech $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ i niech dla $i = 1, 2, \dots, n$, A_i będzie zbiorem wszystkich funkcji ze zbioru X w zbiór $Y \setminus \{y_i\}$, a zaś – zbiorem wszystkich funkcji z X w Y . Funkcja F jest odwzorowaniem na cały zbiór Y , gdy nie należy do żadnego ze zbiorów A_i . Zatem szukana liczba funkcji jest równa $|A| - |A_1 \cup \dots \cup A_n|$. Łatwo zauważyć, że $|A| = n^m$, a licznosc zbioru wszystkich funkcji ze zbioru X w zbiór $Y \setminus \{y_{i_1}, \dots, y_{i_k}\}$ jest równa $(n-k)^m$ (tzn. $|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = (n-k)^m$). A ponieważ ciąg $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ możemy wybrać na $\binom{n}{k}$ sposobów, więc liczba wszystkich funkcji ze zbioru X na zbiór Y jest równa

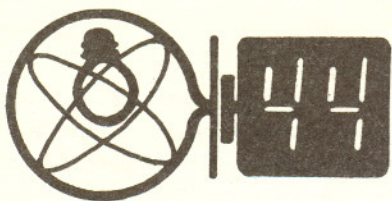
$$n^m - \left(\binom{n}{1} (n-1)^m - \binom{n}{2} (n-2)^m + \dots + (-1)^{n+1} \binom{n}{n} (n-n)^m \right) = \\ = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m.$$

Zauważmy, że dla $m < n$ nie ma żadnych funkcji ze zbioru X za zbiór Y . Nie powoduje to wcale sprzeczności, bowiem mamy wtedy

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m = 0$$

– zastanów się, Czytelniku, dlaczego. ■

Na zakończenie proponuję Czytelnikom łatwe zadanie: proszę podać, ile jest odwzorowań n -elementowego zbioru na siebie mających dokładnie jeden punkt stały ($x \in X$ nazywamy punktem stałym odwzorowania $f : X \rightarrow X$, gdy $f(x) = x$).



Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki,
Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 165 ($WT=1,40$) i 166 ($WT=3,70$)
z numeru 10/1993

Przemysław Gworys - Częstochowa	42,14
Andrzej Nowogrodzki - Chocianów	34,04
Andrzej Borowski - Aleksandr. Kuj.	27,03

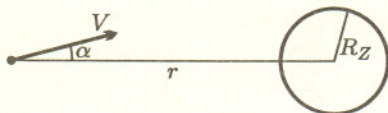
Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1994.

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Uwaga:

Zadanie **174** zostało wydrukowane w numerze 2/1994 z błędem: pominięto dane dotyczące wartości i kierunku prędkości początkowej planetoidy. Oto prawidłowa treść:



174. Planetoida o masie $m = 50$ ton znajduje się w odległości $r = 100$ tys. km od środka Ziemi i leci z prędkością $v = 3$ km/s pod kątem $\alpha = 10^\circ$ do kierunku Ziemi (rys.). Czy planetoida minie Ziemię, czy rozbije się o jej powierzchnię? Czy porusza się po torze eliptycznym, parabolicznym czy hiperbolicznym? Promień Ziemi jest równy 6370 km.

Termin przysyłania rozwiązań tego zadania zostaje przedłużony do 31 sierpnia br., a zaliczenie punktów za oba zadania **173** i **174** nastąpi łącznie (zatem z opóźnieniem). Przepraszamy! W związku z powyższym w tym numerze dajemy rozwiązanie tylko jednego zadania.

Rozwiązanie zadania z fizyki z numeru 2/1994

Przypominamy treść zadania:

173. Porcję mięsa o temperaturze $+5^\circ\text{C}$ włożono do zamrażalnika, w którym temperatura wynosi -18°C , a jednocześnie taką samą porcję mięsa o temperaturze -18°C przelożono z zamrażalnika do komory lodówki (gdzie temperatura wynosi $+5^\circ\text{C}$). Niech t_1 oznacza czas, po którym pierwsza porcja osiągnie temperaturę -15°C , a t_2 - czas, po którym druga porcja osiągnie temperaturę $+2^\circ\text{C}$. Który z tych czasów jest dłuższy i ile razy?

173. Mięso składa się głównie z wody, a duże ciepło właściwe wody i duże ciepło topnienia usprawiedliwiają pominięcie innych składników. Obliczmy - na przykład - czas oziębiania porcji od $+5^\circ\text{C}$ do 0°C przy temperaturze otoczenia -18°C . Przyjmujemy, że tempo przepływu ciepła jest proporcjonalne do różnicy temperatur, a oznaczwszy stałą proporcjonalności przez α mamy równanie różniczkowe

$$\alpha(T + 18)dt = -mcdT,$$

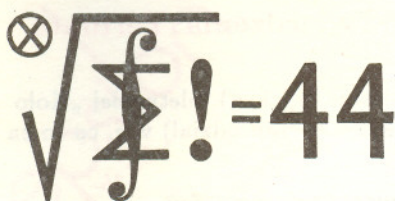
gdzie T - temperatura w skali Celsjusza, t - czas, c - ciepło właściwe. Całkując otrzymujemy

$$t = \frac{mc}{\alpha} \ln \left(\frac{23}{18} \right).$$

Obliczenie czasu zamrażania nie wymaga całkowania - wynikiem jest $t' = \frac{1}{18} \frac{mq}{\alpha}$ (q - ciepło topnienia). Należy jeszcze dodać czas oziębiania do -15°C i powtórzyć rachunki dla drugiej porcji. Ostatecznie

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{c_l \ln \left(\frac{23}{5} \right) + \frac{q}{5} + c_w \ln \left(\frac{5}{3} \right)}{c_w \ln \left(\frac{23}{18} \right) + \frac{q}{18} + c_l \ln \left(\frac{18}{3} \right)},$$

gdzie c_w - ciepło właściwe wody, c_l - lodu. Podstawienie danych liczbowych daje rezultat $t_2/t_1 \approx 3,09$. Warto zauważyć, że zarówno w liczniku, jak i w mianowniku środkowy wyraz przeważa (najdłużej trwa zamrażanie lub rozmarzanie), czyli dość dobrym przybliżeniem jest $t_2/t_1 \approx 18/5 = 3,6$.



Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/1994

Przypominamy treść zadań:

275. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunki $f(f(x)) = f(x) \geq 0$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

276. Cięciwy AC i BD okręgu o środku O przecinają się w punkcie P . Okręgi opisane na trójkątach PAB i PCD przecinają się w punktach Q oraz R . Zakładamy, że O, P, Q są trzema różnymi punktami. Dowieść, że kąt OQP jest prosty.

275. Przypuśćmy, że funkcja f , nie będąca stałą, spełnia podane warunki. Oznaczmy kres dolny i kres górny funkcji f na zbiorze \mathbb{R} odpowiednio przez a i b ; tak więc $0 \leq a < b \leq \infty$. Zbiór wszystkich wartości przyjmowanych przez f jest przedziałem (otwartym lub domkniętym lub jednostronnie domkniętym) o końcach a, b ; oznaczmy ten zbiór przez J . Podane równanie funkcyjne możemy zapisać w postaci

$$(1) \quad f(f(x)) = x \quad \text{dla } x \in J,$$

z której wynika, że funkcja f , zawężona do przedziału J , przekształca ten przedział na siebie w sposób wzajemnie jednoznaczny. Jest więc na nim ściśle monotoniczna.

Gdyby dla wszystkich $x \in J$ zachodziła równość $f(x) = x$, wówczas mielibyśmy

$$a = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a) \in J, \quad f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 1$$

i wobec założenia różniczkowalności pochodna $f'(a)$ byłaby równa 1. Funkcja f przyjmowałaby więc w lewostronnym otoczeniu punktu a wartości mniejsze od a , wbrew określeniu $a = \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x)$. Wobec tego istnieje $x_1 \in J$ takie, że $x_2 = f(x_1) \neq x_1$. Stąd, wobec (1), $f(x_2) = x_1$. Bez straty ogólności można przyjąć, że $x_1 < x_2$; wówczas $f(x_1) > f(x_2)$, co oznacza, że f nie jest na przedziale J funkcją rosnącą. Jest zatem funkcją malejącą – na przedziale J , więc (wobec ciągłości) także na jego domknięciu. Stąd $f(a) = \sup_{x \in J} f(x)$. A skoro

f odwzorowuje J na J , to zachodzi równość

$$b = \sup J = \sup_{x \in J} f(x) = f(a) < \infty,$$

wobec czego $b \in J$. Stąd

$$f(b) = \inf_{x \in J} f(x) = \inf J = a,$$

wobec czego $a \in J$.

Tak więc J jest przedziałem domkniętym $(a; b)$; $f(a) = b$, $f(b) = a$. Funkcja f osiąga w punktach a i b swoje wartości ekstremalne (na \mathbb{R}) i w konsekwencji

$$(2) \quad f'(a) = 0, \quad f'(b) = 0.$$

Niech l będzie prostą przechodzącą przez punkty płaszczyzny (a, b) i (b, a) . Dla x z prawostronnego otoczenia a punkty $(x, f(x))$ wykresu funkcji f leżą powyżej prostej l ; zaś dla x z lewostronnego otoczenia b punkty $(x, f(x))$ leżą poniżej l ; wynika to z równości (2). Z drugiej strony, równanie (1) pokazuje, że funkcja f (zawężona do przedziału J) jest funkcją odwrotną do siebie samej, a więc jej wykres jest symetryczny względem prostej $y = x$. Te dwie konkluzje wzajemnie się wykluczają.

Otrzymana sprzeczność jest wynikiem przypuszczenia, że f nie jest funkcją stałą. Stąd odpowiedź: jedynymi funkcjami spełniającymi warunki zadania są nieujemne stałe.

276. Okręgi opisane na trójkątach PAB i PCD oznaczmy odpowiednio przez ω_1 i ω_2 ; okrąg przechodzący przez punkty A, B, C, D oznaczmy przez Ω . Pełne rozwiązanie zadania wymaga rozpatrzenia następujących sytuacji:

(1) rozważane punkty mogą leżeć na okręgach ω_1 oraz ω_2 odpowiednio:

(1.1) w porządku P, Q, A, B oraz w porządku P, Q, D, C ;

(1.2) w porządku P, Q, B, A oraz w porządku P, Q, C, D ;

(2) środek O okręgu Ω może leżeć:

(2.1) po tej stronie prostej PQ , co punkty A i B ;

(2.2) po tej stronie prostej PQ , co punkty C i D .

Każdy z tych podziałów na przypadki jest niezależny od drugiego. Mamy więc cztery możliwe konfiguracje:

$$(1.1) \wedge (2.1), \quad (1.1) \wedge (2.2), \quad (1.2) \wedge (2.1), \quad (1.2) \wedge (2.2).$$

Przyjmijmy pierwszą możliwość. [Gdy zachodzi druga, trzecia lub czwarta sytuacja, możemy ją sprowadzić do pierwszej stosując – odpowiednio – zamianę ról punktów:

$$(A \leftrightarrow D, B \leftrightarrow C), \quad (A \leftrightarrow B, C \leftrightarrow D), \quad (A \leftrightarrow C, B \leftrightarrow D).]$$

W sytuacji przedstawionej na rysunku zachodzą równości:

$$(3) \quad |\angle BQP| = |\angle BAP| \quad (\text{kąty wpisane w okręgu } \omega_1),$$

$$|\angle PQC| = |\angle PDC| \quad (\text{kąty wpisane w okręgu } \omega_2),$$

$$(4) \quad |\angle BAP| = |\angle BAC| = \frac{1}{2} |\angle BOC| \quad (\text{kąty: wpisane i środkowy}$$

$$|\angle PDC| = |\angle BDC| = \frac{1}{2} |\angle BOC| \quad \text{w okręgu } \Omega).$$

Zatem

$$|\angle BQC| = |\angle BQP| + |\angle PQC| = |\angle BAP| + |\angle PDC| = |\angle BOC|,$$

co oznacza, że na czworokącie $BOQC$ da się opisać okrąg (nie uwidoczniiony na rysunku); wobec tego

$$(5) \quad |\angle BQO| = |\angle BCO| \quad (\text{kąty wpisane w tym okręgu}).$$

Zauważmy jeszcze, że

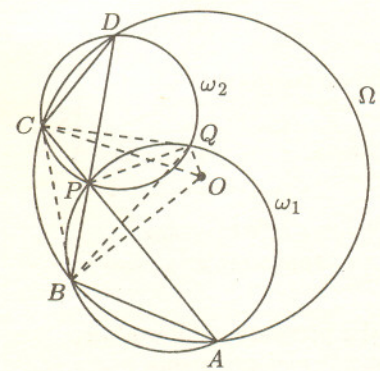
$$(6) \quad |\angle BCO| = 90^\circ - \frac{1}{2} |\angle BOC| \quad (\text{kąty w trójkącie równoramiennym } OBC).$$

Z równości (5), (3), (4) i (6) otrzymujemy, ostatecznie,

$$|\angle OQP| = |\angle BQO| + |\angle BQP| = |\angle BCO| + |\angle BAP| = 90^\circ.$$

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 265 (WT=2,11) i 266 (WT=2,41)
z numeru 9/1993

Leszek Gasiński	-	Stalowa Wola	43,96
Jan Ciach	-	Ostrowiec Św.	43,65
Mirosław Matłaga	-	Skoczów	39,44
Tomasz Kulpa	-	Katowice	38,94
Jan Kraszewski	-	Legnica	37,66
Krzysztof Jedziniak	-	Katowice	35,57





(3) Od Koła Fortuny do ... Małego Twierdzenia Fermata

Każdy, kto choć raz oglądał w telewizji (niekoniecznie polskiej) teleturniej „Koło Fortuny” (a tym bardziej, jeśli miał „szczęście” wziąć w nim udział) wie, co to za koło.

Jest ono podzielone na ileś tam równych różnokolorowych sektorów.

Załóżmy, że tych sektorów jest p , gdzie p to ustalona liczba pierwsza, i każdy z nich chcemy pomalować na jeden z n kolorów. I tutaj powstaje

Pytanie: Ile jest wszystkich takich pokolorowań koła, jeśli dwa pokolorowania, z których jedno po obrocie koła o kąt $k \cdot \frac{360^\circ}{p}$, gdzie $k = 0, 1, 2, 3, \dots, p-1$, staje się drugim, uznajemy za identyczne?

Odpowiedź na to pytanie nie wydaje się trudna.

Każdy sektor malujemy na jeden z n kolorów. Zatem wszystkich pokolorowań tego koła jest n^p (tyle, ile wszystkich funkcji określonych na zbiorze p -elementowym i przyjmujących jedną z n wartości). Wśród tych pokolorowań jest n jednobarwnych i $n^p - n$ niejednobarwnych. Lecz każde niejednobarwne pokolorowanie tego koła jest w liczbie $n^p - n$ liczone p razy, gdyż... , no właśnie, dlaczego? Zatem istotnie różnych pokolorowań niejednobarwnych naszego koła jest $\frac{n^p - n}{p}$, a wszystkich nieidentycznych pokolorowań mamy:

$$n + \frac{n^p - n}{p}.$$

Liczba ta jest więc, przy każdym naturalnym n oraz dla dowolnej liczby pierwszej p , całkowita. Stąd wynika z kolei, że dla każdego naturalnego n oraz dla każdej liczby pierwszej p liczba $\frac{n^p - n}{p}$ jest całkowita, czyli że p dzieli $n^p - n$.

Łatwo spostrzec, że podzielność $p|(n^p - n)$ zachodzi też dla dowolnego n całkowitego ujemnego; jeśli bowiem $n < 0$, to $-n > 0$ i $p|((-n)^p - (-n))$ a więc $p|((-1) \cdot (n^p - n))$, gdy $2 \nmid p$. Stąd $p|(n^p - n)$.

Gdy $p = 2$, to podzielność $2|(n^2 - n)$ jest oczywista.

Zatem mamy $p|(n^p - n)$, dla każdego całkowitego n oraz dla każdej liczby pierwszej p .

Ponieważ $n^p - n = n(n^{p-1} - 1)$, więc z podzielności $p|(n^p - n)$, czyli $p|(n(n^{p-1} - 1))$, przy dodatkowym założeniu, że $p \nmid n$ otrzymujemy podzielność $p|(n^{p-1} - 1)$, a więc zachodzi

Małe Twierdzenie Fermata

Jeśli n jest liczbą całkowitą niepodzielną przez liczbę pierwszą p , to

$$p|(n^{p-1} - 1).$$

A oto kilka nietrudnych zadań olimpijskich, które łatwo rozwiązuje się z zastosowaniem Małego Twierdzenia Fermata.

1. Udowodnić, że jeżeli liczby a_1, a_2, \dots, a_k są całkowite, p zaś jest liczbą pierwszą, to

$$p|(a_1^p + a_2^p + \dots + a_k^p) \Leftrightarrow p|(a_1 + a_2 + \dots + a_k).$$

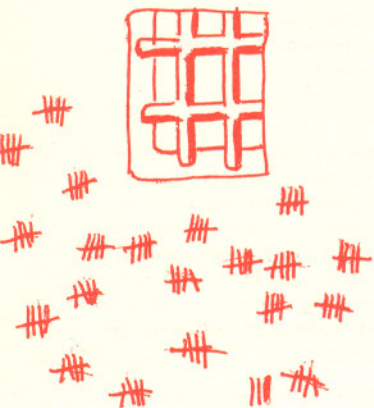
2. Wiadomo, że liczba pierwsza p dzieli liczbę $\underbrace{11 \dots 1}_p$. Udowodnić, że $p = 3$.

3. Niech a i b będą liczbami naturalnymi, p zaś liczbą pierwszą. Udowodnić, że jeżeli liczba $a^p - b^p$ jest podzielna przez p , to jest również podzielna przez p^2 .

4. Udowodnić, że dla dowolnej liczby pierwszej p liczba

$$\underbrace{11 \dots 1}_p \underbrace{22 \dots 2}_p \underbrace{33 \dots 3}_p \dots \underbrace{99 \dots 9}_p - 123456789 \text{ jest podzielna przez } p.$$

Henryk PAWŁOWSKI



Francuz Jean-Pierre Petit jest autorem świetnych komiksów popularyzujących nauki ścisłe. „Geometrikon”, „Informagia”, „Chronologikon” – oto niektóre tytuły. Główny bohater przeżywa w nich rozmaite niesamowite przygody, przy okazji wzbogacając swoją wiedzę, a jego przewodniczką, wyjaśniającą tajniki wiedzy, jest atrakcyjna dziewczyna, Sophie. Robi to różnymi metodami – np. zamyka Archibalda Higginsa (tak w wersji angielskiej, najbardziej znanej, zwie się główny bohater) w torusie trójwymiarowym... Sophie zawsze paraduje w kostiumie kąpielowym (a w komiksie „Lot fantazji” na pierwszym obrazku kieruje do czytelnika słowa „I’m Sophie, fly me”). W „Geometrikonie” parę razy występuje nawet bez kostiumu, by wytłumaczyć tajniki krzywizny dodatniej i ujemnej.



Gdyby tymi metodami nauczano na studiach, o ile lepiej studenci rozumieliby rozmaite zagadnienia geometryczne...

Komiks został przetłumaczony z języka francuskiego na angielski przez znakomitego matematyka i popularyzatora, Iana Stewarta, wydany w Wielkiej Brytanii, a potem w USA. I oto w wersji amerykańskiej wydawcy... ubrali dziewczynę. Tak w wersji amerykańskiej wygląda zmieniony powyższy rysunek:



PS. Jeden z komiksów („Operacja Hermes”) został przetłumaczony na język polski. Ktoś jednak wpadł na oryginalny pomysł i w polskiej wersji wszystkie teksty w „dymkach” (a nie jest ich mało) są wykaligrafowane literami pisanymi, co znacznie utrudnia czytanie (mimo tego jednak gorąco książeczkę polecamy!). Niewykluczone, że tą innowacją „położono” serię w Polsce – zapowiedzianych dalszych części jakós w księgarniach nie widać, pierwsza chyba „nie poszła”. Szkoda!

Gdy nadchodzi czerwiec, większość czasopism poświęca część miejsca na swoich łamach najmłodszym. Także i dwa poprzednie czerwcowe *EPSILONY* były zredagowane specjalnie pod kątem Dnia Dziecka. Jednakże na dłuższą metę takie postępowanie może okazać się niesprawiedliwe; dziś zatem, z okazji Dnia Dziecka, *EPSILON* przeznaczony jest

WYŁĄCZNIE DLA CZYTELNIKÓW DOROSŁYCH

John Boyd jest matematykiem, zajmującym się zastosowaniami, autorem książki „Chebyshev and Fourier Spectral Methods” (Springer 1989). Napisał także wiele książek fantastyczno-naukowych. Oto fragmenty pierwszego rozdziału jednej z nich – „Ostatni statek z planety Ziemia” (1968, wyd. polskie 1979, przełożył Tomasz Mirkowicz).

Zaparkował samochód i ruszył w stronę wejścia, kiedy przed sobą zobaczył dziewczynę. Sza zamaszystym krokiem, kołysząc lekko biodrami, jakby jej miednica była krzywką wytwarzającą fascynujący moment siły wokół własnej osi. Upłynęło kilka mikrosekund, zanim estetyka ruchu przerwała techniczno-matematyczne rozważania Haldana. (...) Tymczasem dziewczyna weszła do rotundy galerii i zatrzymała się przed jednym z obrazów. Haldan, ciekaw jej frontalnej geometrii, stanął obok dziewczyny, i kiedy ta oglądała obraz, zerknął na nią dyskretnie. Zobaczył połyskujące kasztanowe włosy, kształtny, zaokrąglony podbródek, dumne łuki brwi nad piunymi oczami, długą szyję, wysokie, strone piersi i płaski brzuch wpadający w długie V ud. (...)

Dochodzi do zawarcia znajomości. W pewnym momencie dziewczyna, która okazuje się poetką, mówi do głównego bohatera:

– Haldanie, nie masz się co dziwić. Lepiej kleić wierszyki, niż podrywać podwiki.

Teraz dopiero ostupiał, wręcz zbaraniał – i ucieszył się. Nie był pewien znaczenia słowa „podwika”, ale się domyślał, natomiast po raz pierwszy w życiu słyszał, żeby kobieta sama powiedziała coś dowcipnego. Co więcej, po raz pierwszy zdarzyło mu się słyszeć poza domem rozrywek, żeby profesjonalistka o takiej urodzie rzuciła tak zalotne powiedzonko.

Ta dziewczyna była pierwiastkiem z minus jeden!

A w następnym rozdziale czytamy m.in.:

Ojciec Haldana, statystyk, nie miał tak liberalnych poglądów jak syn. Właściwie był rasistą. Uważał bowiem wszystkich niematematyków za ludzi niższej rasy i był przeciwny integracji. Poglądy te śmieszyły Haldana, który jako matematyk teoretyk cenil statystyków nie wyżej od murarzy: jego ojciec był jednak nie tylko statystykiem, ale również członkiem ministerstwa, a jego ustne polecenia miały moc prawną. Wiadomość, że syn chce uczęszczać na wykłady z literatury, na pewno go nie ucieszy. A jego niezadowolenie zamieni się w furję, jeżeli tylko zacznie podejrzewać, że Haldan chce uwieść dziewczynę innej kategorii, i to w dodatku poetkę.

Wielu matematykom Rudy Rucker znany jest jako autor książki „The Fourth Dimension and How to Get There”, niejako kontynuującej słynną „Flatland” E. Abbotta. Ale i on pisze powieści science-fiction, jest laureatem nagrody Philipa K. Dicka. Oto fragment książki „Seksfera” (1983, wyd. polskie 1991, tłumaczył Sławomir Studniarz):

Nagle Babsi zagina się w sobie i dwa okręgi się zbiegają. Na ekranie pojawia się zmienny zarys butli Kleina, mięsistego worka, którego szyjka wydłuża się i zalamuje, by dobrać się do własnego tyłka; obraz udręczonego, oskubanego ptaka z dziobem wbitym w pępek i wystającym na zewnątrz przez odbył. Świat na podobieństwo węża. Babsi-fasolka w kształcie butli Kleina połyka i wypłwła samą siebie, kreśląc niesamowite krzywizny. Powoli się uspokaja, wygląda zagięcia, odrobinę się kurczy.