

SPIS TREŚCI

NUMERU 4(239)

Enigmat Gemingi rozwiązany!
Kazimierz Stepien

str. 1

Saneczkarstwo – sport piękny,
 choć trudny
Bohdan Macukow

str. 1

Zadania

str. 3

Uciezka atmosfer
Krzysztof Rejmer

str. 4

Międzywydziałowe
 Indywidualne Studia
 Matematyczno-Przyrodnicze

str. 8

Patrz w niebo

str.10

Mała Delta

str.11

Cyprian Kamil Norwid
 o konstrukcjach
 geometrycznych
Marek Kordos

str.12

Klub 44

str.14

Kącik olimpijski

str.16

Epsilon

str.17

W następnym numerze:

Nobel z astrofizyki

Okładkę wykonał
Bernard BADZIOCH

Wydawca:
 Uniwersytet Warszawski
 Krakowskie Przedmieście 26/28
 00-927 Warszawa

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny
 Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego
 i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
 wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula
 Bogdan Cichocki
 Roman Duda
 Jan A. Gaj
 Tomasz Hofmokl
 Tadeusz Jarzębowski
 Marta Kicińska-Habior
 – przewodnicząca
 Marcin Kubiak
 Andrzej Mąkowski
 – wiceprzewodniczący
 Andrzej Pelczar
 Zbigniew Plochocki
 Zdzisław Pogoda
 Konrad Rudnicki
 Zbigniew Semadeni
 Grzegorz Sitarski
 Józef I. Smak
 Kazimierz Stepien
 Mieczysław Subotowicz
 Andrzej Szymacha
 Andrzej Woszczyk
 Wacław Zawadowski

Redaguje kolegium w składzie:

Krzysztof Biesaga
 Piotr Hajlasz
 Jan Kalinowski – z-ca red. nac.
 Krystyna Kordos – sekr. red.
 Marek Kordos – red. nac.
 Tomasz Kwast
 Krzysztof Rejmer
 Paweł Strzelecki
 Joanna Udalska

Adres Redakcji:

ul. Smyczkowa 5/7
 02-678 Warszawa
 tel. 43-02-43 wewn. 21
 HAJLASZ@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w Zakładach Graficznych
 w Warszawie, ul. Srebrna 16

Skład systemem TeX wykonała Redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY w AMOS-ie

Od stycznia 1993 r. prenumeratę „Deltę” prowadzi również firma AMOS, 01-506 Warszawa, ul. Szenwalda 1 (tel. 39-17-52). Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w pierwszym półroczu 1994 roku wynosi 8 000,-zł, a w drugim półroczu 10 000,-zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru wynosi w pierwszym półroczu 1994 r. 20 000,-zł, a w drugim – 22 000,-zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! AMOS dostarcza „Deltę” pod wskazany adres nie pobierając dodatkowej opłaty. Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Blankiet pocztowy na prenumeratę „Deltę” w AMOS-ie zamieszczamy na str. 9/10.

Konto AMOS-u: **PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136**

WARUNKI PRENUMERATY w RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na III kwartał 1994 r. wynosi 30 000,- zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
 - na teren kraju
 - jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób,
 - na zagranicę
 - „Ruch” S.A. Oddział Warszawa, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – **dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty**, z wyjątkiem zlecenia dostawy pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni pokrywa prenumerator.
 - 5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
 - na kraj i zagranicę – do 20 XI na I kwartał roku następnego
 - do 20 II na II kwartał
 - do 20 V na III kwartał
 - do 20 VIII na IV kwartał.

Cena 1 egzemplarza 8 000,- zł

Saneczkarstwo – sport piękny, choć trudny

Bohdan MACUKOW

Chociaż sanki nie są tak popularne jak narty, niemal każdy z nas zjeżdżał z większych czy mniejszych gór. Sport saneczkowy i bobsleje ze względu na widowiskowe walory również cieszą się dużym zainteresowaniem. W Polsce saneczkarstwo jest uprawiane w kilku ośrodkach na południu kraju. Znajdują się tam naturalne tory, których okres użytkowania jest, niestety, bardzo krótki i uzależniony od kaprysów pogody. Budowano je przed laty korzystając z doświadczenia i intuicji trenerów oraz zawodników. Poprawki wprowadzano nieraz metodą prób i błędów. W końcu lat 60. i na początku 70. w krajach przodujących w saneczkarstwie – w Niemczech Wschodnich i Zachodnich oraz Austrii – powstały pierwsze tory sztucznie mrożone. W latach 80. przymierzano się do budowy takiego toru w Polsce, którego, z powodu burz dziejowych, ostatecznie nie zbudowano. Przy projektowaniu torów zaczęto wykorzystywać metody komputerowe umożliwiające symulację przejazdu. Dzięki temu można było wybrać optymalne parametry toru zapewniające bezpieczeństwo zawodników i zachowujące przy tym widowiskowość zawodów. Symulacje komputerowe stały się również pomocne dla zawodników i trenerów w opracowywaniu taktyki ślizgu.

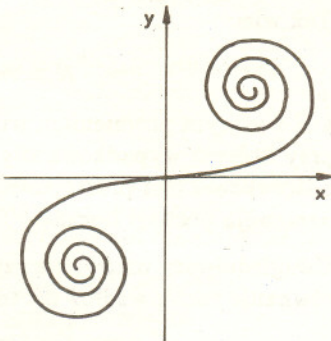
Najistotniejszymi charakterystykami przejazdu są chwilowe prędkości i przyspieszenia, jakich doznaje zawodnik głównie pod działaniem siły odśrodkowej. Przyspieszenia te są ograniczone przez regulaminy do 4 g dla bobslejów i 4,5 g dla sanek (g oznacza przyspieszenie ziemskie). Ważna jest jednak nie tylko maksymalna wartość przyspieszenia, ale jego przebieg w czasie, co wymaga precyzyjnego wyprofilowania wiraży.

Typowy wiraż składa się z dwóch krzywych przejściowych – wejściowej i wyjściowej – oraz, ewentualnie, odcinka łuku o stałym promieniu. Klasycznym rozwiązaniem jest stosowanie kłotoid jako krzywych przejściowych. Podczas przejazdu po kłotoidzie ze stałą prędkością następuje liniowa zmiana przyspieszenia (odśrodkowego).

Kłotoida (inaczej: spirala Cornu)
– krzywa płaska, której krzywizna (zorientowana) jest proporcjonalna do długości (liczonej od ustalonego punktu – na rysunku od 0), a zatem zmienia się liniowo wraz z przebywaną drogą. Jej równania parametryczne są następujące

$$(x(t), y(t)) = \left(\int_0^t \cos \frac{ks^2}{2} ds, \int_0^t \sin \frac{ks^2}{2} ds \right),$$

gdzie stała k jest parametrem odróżniającym różne kłotoidy (jest to wspomniany wyżej współczynnik proporcjonalności). Nie są to wzory proste, więc w praktyce (np. w kolejnictwie) jako krzywe wprowadzające w zakręt i wyprowadzające z zakrętu używane są linie mające kształt wykresu $y = x^3$.



Rozważane są również krzywe przejściowe, przy których mamy logarytmiczną zmianę siły. Zapewnia to liniową zmianę obciążenia odczuwaną przez zawodnika (prawo Webera–Fechnera).

Prawo Webera–Fechnera – empiryczna reguła z pogranicza fizjologii i psychologii orzekająca, że liniowa zmiana odczuwania bodźca odpowiada **wykładniczej** zmianie jego intensywności. Prawo to stanowi zasadę decydującą o sposobie konstruowania urządzeń sterujących sprzętem audiowizualnym.

Enigmat Gemingi rozwiązany!

Kazimierz STEPIEŃ

Czym jest Geminga?

Z wyglądem nocnego nieba usianego gwiazdami jesteśmy oswojeni od dzieciństwa – znamy najjaśniejsze gwiazdy i tworzone przez nie charakterystyczne układy nazywane gwiazdozbiorami. Trudno wyobrazić sobie, by nasze niebo wyglądało zupełnie inaczej. Ale przecież oko ludzkie reaguje na promieniowanie elektromagnetyczne z bardzo wąskiego przedziału długości fal, obejmującego zaledwie około 300 nm (nanometr – jedna miliardowa metra), między 400 i 700 nm. Zakres ten nazywamy widzialnym. A jak wyglądałoby niebo oglądane okiem czułym na zupełnie inny zakres promieniowania? W przypadku promieniowania o długości fali krótszej niż 300 nm odpowiedź do niedawna była trywialna – oglądane z powierzchni Ziemi niebo jest w tych długościach fal czarne (czy może ściślej – szare) i nie ma na nim żadnych gwiazd. Po prostu, atmosfera ziemska nie przepuszcza promieniowania krótkofalowego. By móc sensownie obserwować niebo w tych falach, niezbędne jest wyniesienie odbiornika promieniowania poza atmosferę. Systematyczne obserwacje w zakresie krótkich fal elektromagnetycznych prowadzimy dopiero od lat 70., gdy nauczyliśmy się umieszczać odbiorniki na sztucznych satelitach. Patrząc spoza atmosfery na niebo oczami czułymi tylko na ultrafiolet rozpoznalibyśmy jeszcze większość znanych nam z zakresu widzialnego gwiazd, choć zmieniłaby się ich hierarchia jasności. Ale niebo rentgenowskie, obserwowane w zakresie od 0,1 do 10 nm, wygląda już zupełnie inaczej. Jedną z najjaśniejszych gwiazd naszego nieba, Wega, jest rentgenowsko tak słaba, że z trudem rejestrują ją najczulsze odbiorniki. Z drugiej strony, najjaśniejszym źródłem rentgenowskim (poza, oczywiście, Słońcem) jest słabiutka gwiazda 13. wielkości, optyczny odpowiednik źródła Sco X-1. Jest to układ podwójny składający się z chłodnej gwiazdy podobnej do Słońca i gwiazdy neutronowej, na którą spada materia z drugiego składnika i rozgrzewając się podczas spadku świeci intensywnie w zakresie rentgenowskim. Drugim najjaśniejszym na niebie źródłem rentgenowskim jest mgławica Krab, w której środku znajduje się pojedyncza gwiazda neutronowa – pulsar.

W miarę postępu techniki opanowywano umiejętność budowy odbiorników czułych na coraz to szersze zakresy widma elektromagnetycznego. Jednym z ciekawszych był zakres promieniowania gamma. Rozciąga się on na fale o długości

mniejszej niż 0,1 nm. Zamiast długości fali częściej używa się w tym zakresie jednostek energetycznych, tzn. energii, jaką niesie ze sobą pojedynczy foton odpowiadający fali o długości λ . Wynosi ona $E = h\nu = hc/\lambda$, gdzie c jest prędkością światła, ν częstotliwością fali, a h stałą Plancka. Długości fali równej 0,1 nm odpowiada energia nieco ponad 0,1 MeV (megaelektronowolt = milion eV). Tę wartość można zatem też uznać za granicę oddzielającą promieniowanie rentgenowskie od gamma. Rejestrowanie promieni gamma jest zadaniem nieprostym. Typowy kwant gamma ma energię 100 000 do 1 000 000 razy większą niż kwant optyczny, a prowadzimy obserwacje również kwantów gamma o energiach setek GeV, czyli jeszcze około 100 000 razy większych. Kwanty gamma są bardzo przenikliwe, więc zamiast np. odbić się od zwierciadła teleskopu i skupić w jego ognisku, przeszłyby przez nie swobodnie. Do ich obserwacji musimy zatem stosować zupełnie inne techniki. W obecnie używanych instrumentach obserwujemy je wykorzystując układ komór scyntylacyjnych lub iskrowych, w których przechodzący kwant wywołuje błysk optyczny lub wtórną kaskadę cząstek. Rejestrując następnie te zjawiska możemy odtworzyć kierunek i energię pierwotnego kwantu. Musimy przy tym nastawić się na rejestrację nawet pojedynczych kwantów – spodziewamy się ich przecież znacznie mniej niż w zakresie widzialnym.

Gdy na początku lat 70. umieszczono odbiornik promieniowania gamma na satelicie SAS-2, zarejestrował on podczas siedmiu miesięcy działania około 8 000 kwantów, z czego tylko część pochodziła ze źródeł punktowych. Wśród nich dwa najintensywniejsze zostały łatwo zidentyfikowane jako pulsary – pierwszy (jaśniejszy) to wspomniany już pulsar w Krabie, drugi – to inny pulsar, w gwiazdozbiornie Vela. Trzeciemu najjaśniejszemu źródłu nie odpowiadał na niebie żaden „podejrzany” obiekt. Trzeba tu jednak podkreślić, że dokładność wyznaczenia położenia źródła promieniowania gamma na niebie była podówczas dość niska i w przedziałach niepewności tego położenia można było znaleźć wiele słabych gwiazdek. Próby identyfikacji zagadkowego źródła gamma na drodze optycznej, radiowej czy wręcz rentgenowskiej nie przynosiły definitywnego rozstrzygnięcia. Nazwano je GEMINGA. Nawet ta nazwa stała się elementem zagadki. Jedni twierdzili, że jest to po prostu złożenie nazwy gwiazdozbiornu, w którym je odkryto, (Gemini, czyli Bliźnięta) i słowa gamma. Inni zauważyli, że geminga po włosku (w dialekcie mediolańskim) znaczy tyle co, „tego tam nie ma” i lansowali tę, bardziej romantyczną, interpretację.

Pełny opis ruchu sanek czy bobslejów po torze jest bardzo złożony i wymaga wprowadzenia wielu stopni swobody. Po licznych próbach i porównaniach okazało się jednak, że całkiem dobry opis uzyskuje się w najprostszym modelu o jednym stopniu swobody, w którym zawodnika z sankami przedstawia się jako punkt materialny. Dalej przedstawiamy oddzielnie opis jego ruchu wzdłuż i w poprzek osi toru.

W przypadku ruchu podłużnego, który przyjmujemy za zgodny z osią x , mamy następujące równanie wyrażające drugą zasadę dynamiki Newtona

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - P_x - F_T,$$

gdzie m jest masą obiektu, α kątem nachylenia toru do poziomu, P_x siłą oporu aerodynamicznego, a F_T siłą tarcia płóz o powierzchnię lodu. Kropka oznacza pierwszą, a dwie kropki – drugą pochodną względem czasu. Przyjmuje się zwykle, że siła oporu jest proporcjonalna do powierzchni S przekroju prostopadłego do kierunku ruchu, kwadratu prędkości \dot{x} i gęstości powietrza ρ . A zatem

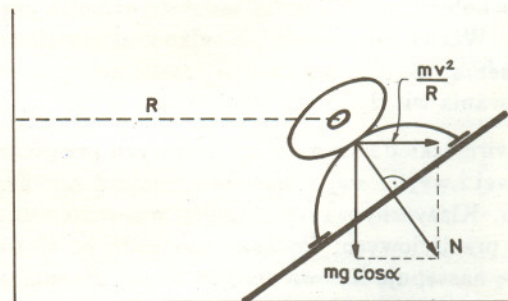
$$P_x = C_x \rho S \dot{x}^2.$$

Wprowadzono tutaj dobraćany doświadczalnie bezwymiarowy czynnik C_x , wyrażający zależność oporu aerodynamicznego od kształtu poruszającego się obiektu.

Siłę tarcia wybrano w postaci

$$F_T = N\mu,$$

gdzie μ jest współczynnikiem tarcia dobraćanym na podstawie pomiarów, N zaś siłą nacisku uwzględniającą siłę ciężkości i siłę odśrodkową (rys. 1).



Rys. 1

Tak więc

$$N = m\sqrt{g^2 \cos^2 \alpha + \frac{\dot{x}^4}{R^2}},$$

z R będącym promieniem wirażu. Zakłada się prawidłowy przejazd, przy którym wypadkowa siły nacisku grawitacyjnego i siły odśrodkowej jest prostopadła do powierzchni toru. Wówczas nie następują poślizgi boczne.

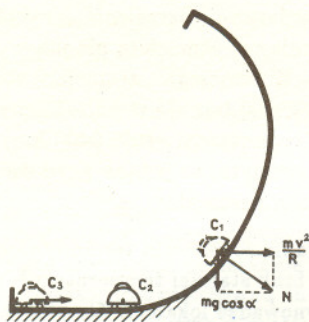
Uwzględniwszy omówione czynniki otrzymujemy następujące równanie ruchu wzdłuż osi toru

$$\ddot{x} = g \sin \alpha - \frac{C_x \rho S}{m} \dot{x}^2 - \mu \sqrt{g^2 \cos^2 \alpha + \frac{\dot{x}^4}{R^2}}.$$

Rozwiązując je numerycznie znajdujemy jako funkcje czasu: przebieg $x(t)$, prędkość $\dot{x}(t)$ oraz przyspieszenie $\ddot{x}(t)$.

Ruch w płaszczyźnie prostopadłej do toru analizujemy w modelu zilustrowanym na rysunku 2. Jak poprzednio, załogę wraz z sankami przedstawiamy jako punkt materialny, na którego ruch nakłada się więzy kinematyczne wynikające z geometrii poprzecznego przekroju

toru. Ponieważ przekrój ten zmienia się z długością toru, w naszym modelu zmienia się on w czasie. Symulacje wykazały, że przy rozważaniu ruchu poprzecznego można przyjąć prędkość wzdłuż toru jako stałą. Ze względu na niewielkie prędkości poprzeczne można również zaniedbać siłę tarcia i oporu aerodynamicznego w ruchu poprzecznym. Dzięki temu analiza znacznie się upraszcza.



Rys. 2

Przedstawiony powyżej model ruchu sanek zastosowano do analizy ślizgów na starym, nie używanym już torze ziemnym w Mikuszowicach koło Bielska Białej. Symulacje wykazały, że na jednym z wiraży zawodnicy powinni doznawać przyspieszenia dochodzącego aż do 6 g przy dużej prędkości. Okazało się, że rzeczywiście wiraż ten był miejscem wielu niebezpiecznych wywrotek.

Model wykorzystano również przy projektowaniu toru sztucznie mrożonego. Niestety, jak już wspominałem, projekt ten nie doczekał się realizacji. Może w przyszłości...



Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

M 699. Udowodnić, że w dowolnym czworokącie wypukłym o polu P i obwodzie L można umieścić pewien okrąg o promieniu P/L .
Rozwiązanie na str. 15

M 700. P jest pewnym wielomianem o współczynnikach całkowitych. Wiadomo, że liczby $P(0)$ i $P(1)$ są nieparzyste. Czy P może mieć pierwiastki całkowite?
Rozwiązanie na str. 16

M 701. Udowodnić, że istnieje taka liczba a , dla której równanie $[x\sqrt[3]{x}] + [y\sqrt[3]{y}] = a$ ma przynajmniej 1994 różne rozwiązania (x, y) w liczbach naturalnych.
Rozwiązanie na str. 14

Redaguje Jarosław KULPA

F 379. Obliczyć maksymalne natężenie oświetlenia na jednej z plaż nad Bałtykiem w bezchmurny dzień na początku lata. Szerokość geograficzna wybrzeża jest równa $\phi = 54^\circ$, zwrotnik Raka ma szerokość geograficzną $\phi_0 = 23^\circ$.
Dane dotyczące Słońca: wydajność fotometryczna $\eta = 7,55 \text{ cd/W}$, promień $R = 696 \text{ tys. km}$, efektywna temperatura powierzchni $T = 5780 \text{ K}$, odległość Ziemi od Słońca $r = 159 \text{ mln km}$.
Rozwiązanie na str. 10

F 380. Obliczyć stosunek oświetleń powierzchni Ziemi w dzień i w noc księżycową podczas pełni przy tej samej przejrzystości nieba oraz przy tej samej wysokości Księżyca, jak i Słońca, nad horyzontem. Promień Księżyca $R = 1738 \text{ km}$, odległość Księżyca od Ziemi $r = 384 \text{ tys. km}$, albedo (stosunek energii odbitej do padającej) $a = 0,07$.
Rozwiązanie na str. 10

Gdy w latach 80. prowadzono intensywne obserwacje pola Gemingi za pomocą satelity rentgenowskiego Einstein, wykryto słabe źródło promieni X, które w parę lat później zidentyfikowano z bardzo słabą gwiazdą 25. wielkości gwiazdowej. Takie gwiazdy były do niedawna w ogóle niedostępne obserwacjom, nawet przy użyciu największych istniejących teleskopów. Dopiero najnowsze osiągnięcia w dziedzinie zwiększania czułości detektorów pozwoliły na zarejestrowanie światła przychodzącego z tak nikłych źródeł. Wysunięto sugestię, że wykryty rentgenowo i optycznie obiekt to Geminga. Ale, jeżeli tak, to stosunek energii promieniowanej w dziedzinie gamma do energii w dziedzinie X musi wynosić co najmniej 1000, a z kolei jasność energetyczna w dziedzinie X jest też około 1000 razy większa niż w zakresie optycznym! Innymi słowy, obiekt promieniuje praktycznie wyłącznie w wysokoenergetycznym zakresie gamma z zanedbywalnym dodatkiem w innych przedziałach widmowych. Nie znamy drugiego kosmicznego źródła promieniowania o tak osobliwym rozkładzie energii.

Pulsary w Krabie i Veli są bardzo młode – wskazują na to zarówno ich krótkie okresy rotacji (0,033 s i 0,089 s), jak i bardzo szybkie jej spowalnianie. Wiek pulsarów, obliczony z podzielenia okresu rotacji przez tempo spowalniania, wynosi około 1000 lat dla pulsara w Krabie i około 200 000 lat dla pulsara w Veli. Tempo rozszerzania się mgławicy Krab wskazuje, że powstała ona również około 1000 lat temu. W starych kronikach znaleziono zapis o obserwacjach bardzo jasnej gwiazdy w 1054 r., w miejscu, gdzie obecnie znajduje się Krab. Przyjmujemy zatem, że wtedy właśnie nastąpił wybuch supernowej, po którym pozostał pulsar i szybko rozszerzająca się mgławica. Definitywnym dowodem na to, że obserwowane w tym kierunku źródło promieni gamma to pulsar, było stwierdzenie występowania zmian strumienia promieniowania gamma dokładnie z tym samym okresem, z jakim zmienia się strumień optyczny, radiowy i rentgenowski pulsara (rys. 1).

Podobna sytuacja występuje w przypadku pulsara w Veli. Można więc przyjąć za udowodniony obserwacyjnie fakt, że młode pulsary promieniają intensywnie w zakresie gamma. Wysunięto zatem przypuszczenie, że Geminga to też młody pulsar. Przez wiele lat była to jednak tylko hipoteza, na słuszność której brakowało przekonujących dowodów.

Decydujący dowód znaleziono dopiero mniej więcej rok temu. Historia jego odkrycia jest następująca. W marcu 1991 r. wykonano szereg

Ucieczka atmosfer

Krzysztof REJMER

Prawie wszystkie planety należące do Układu Słonecznego mają atmosfery – otaczające je gazowe powłoki o grubościach stosunkowo niewielkich w porównaniu z ich rozmiarami. Określenie „grubość atmosfery” jest, oczywiście, umowne, ponieważ atmosfera nie ma wyraźnej granicy, lecz zanika w sposób ciągły. W przypadku atmosfery ziemskiej zaledwie jedna milionowa część jej masy znajduje się w odległości większej niż 100 km od powierzchni (promień Ziemi wynosi około 6400 km). Widać stąd wyraźnie, że choć jej granica jest rozmyta, to jednak powłoka atmosfery jest bardzo cienką warstwą otaczającą naszą planetę.

Atmosfera nie jest w stanie równowagi termodynamicznej (o czym świadczy, na przykład, brak stałości temperatury), możemy najwyżej mówić o nietrwalej równowadze lokalnej. Cząsteczki gazu nieustannie zderzają się i co pewien czas któraś z nich uzyskuje prędkość większą lub równą drugiej prędkości kosmicznej, a wtedy może ona uciec z atmosfery, o ile w kolejnych zderzeniach nie utraci tej prędkości. Względna liczba takich cząsteczek nie jest wprawdzie duża, jednak po dostatecznie długim czasie utrata cząsteczek przez atmosferę może być znaczna. Tempo rozplywania się atmosfery warunkowane jest nie tylko przez siły grawitacji, lecz także przez temperaturę i skład chemiczny. Zachowując ostrożność można pokusić się o oszacowanie tego tempa na podstawie wzorów równowagowej fizyki statystycznej, należy jednak przy tym pamiętać, że w rzeczywistości atmosfera nie jest układem w stanie równowagi. Gęstość prawdopodobieństwa tego, że cząsteczka gazu atmosferycznego ma prędkość v , jest określona rozkładem Boltzmann

$$p = a e^{-\frac{E}{k_B T}},$$

gdzie E jest energią równą $\frac{mv^2}{2} - \frac{g_0 m R^2}{r}$, R jest promieniem planety, g_0 – przyspieszeniem grawitacyjnym na jej powierzchni, r – odległością od jej środka, m – masą cząsteczki, v – jej prędkością, T – temperatura, k_B – stałą Boltzmann. Stałą a wyznaczamy z warunku normalizacji; prawdopodobieństwo znalezienia gdziekolwiek cząsteczki z jakąkolwiek prędkością jest równe jedności. Tu jednak spotyka nas niemiła niespodzianka. Całka

$$\int_R^\infty r^2 e^{-\frac{g_0 m R^2}{k_B T r}} dr$$

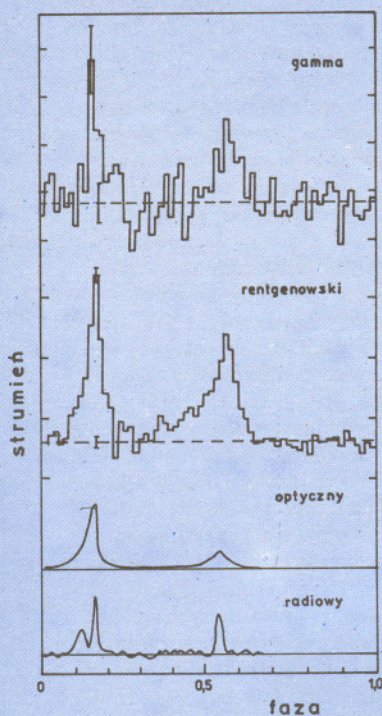
jest rozbieżna w nieskończoność. Jest to konsekwencja długiego zasięgu sił grawitacji, ich bardzo powolnego zanikania. W rzeczywistości sytuacja jest jeszcze gorsza, ponieważ w dostatecznie dużej odległości od powierzchni planety istotne zaczyna być oddziaływanie grawitacyjne ze strony Słońca i innych planet, a wtedy prosty, centralny potencjał traci rację bytu. Gdybyśmy całkowali po skończonym obszarze przestrzeni, uniknęlibyśmy wprawdzie rozbieżności, musimy jednak zdawać sobie sprawę z tego, że dążąc do równowagi atmosfera rozprasza się w całą przestrzeń.

Wykonamy teraz oszacowanie pozwalające zrozumieć, czym może być ten hipotetyczny stan końcowy. Gęstość prawdopodobieństwa $p(r)$ znalezienia cząsteczki w odległości r od środka planety jest proporcjonalna do $e^{m g_0 R^2 / k_B T r}$ (pomijamy wpływ innych ciał niebieskich). Wynika stąd, że

$$\frac{p(r)}{p(R)} = e^{\frac{m g_0 R^2}{k_B T r}} e^{-\frac{m g_0 R^2}{k_B T R}}.$$

Gęstość cząsteczek $h(r)$ w odległości r od środka planety jest proporcjonalna do prawdopodobieństwa $p(r)$:

$$\frac{h(r)}{h(R)} = \frac{p(r)}{p(R)}.$$



Rys. 1. Strumienie promieniowania z różnych zakresów widmowych, wysyłane przez pulsar w Krabie, zmieniają się z tym samym okresem, równym 0,0332 s. Precyzja obserwacji pozwala stwierdzić, że maksima strumieni we wszystkich obserwowanych zakresach dokładnie pokrywają się. Charakterystyczne jest występowanie dwóch maksimów w czasie jednego okresu, związane zapewne z faktem, że ukierunkowane wiązki pochodzące z okolicy obydwu biegunów magnetycznych trafiają w Ziemię.

obserwacji wspomnianego wyżej słabego źródła, mającego położenie zbieżne z Gemingą, za pomocą nowego, czulszego satelity rentgenowskiego ROSAT. Łączny czas obserwacji wynosił około 4 godzin. Mimo tego że, jak już wspominaliśmy, całkowita energia na jednostkę czasu, wypromieniowywana w przedziale rentgenowskim, jest dużo mniejsza niż w przedziale promieniowania gamma, to jednak liczba zaobserwowanych kwantów była w tym zakresie promieniowania znacznie wyższa niż w zakresie gamma (ogółem zarejestrowano ponad 7600 kwantów). Pozwoliło to na dokonanie szczegółowej analizy periodogramowej, która doprowadziła do wykrycia zmian w strumieniu rentgenowskim z okresem równym 0,237 s. Otrzymana okresowość jest dobrze widoczna również w poszczególnych fragmentach ciągu obserwacji i zachowuje się stabilnie. Wyraźnie ją widać we wszystkich pasmach energetycznych, w jakich prowadzone były obserwacje. Wszystkie obserwacje układają się w charakterystyczną krzywą, podobną do typowych pulsów rentgenowskich (rys. 2).

Wynika stąd, że

$$h(\infty) = h(R)e^{-\frac{mg_0 R}{k_B T}}$$

Widać stąd, że w końcowym stanie równowagi gęstość $h(R)$ cząstek przy powierzchni planety musi być równa zero. W przeciwnym przypadku byłaby ona niezerowa w nieskończoności, a to oznaczałoby nieskończoną masę atmosfery. Czynniki $e^{-\frac{mg_0 R}{k_B T}}$ dla Ziemi jest rzędu 10^{-350} , a więc bardzo mały. Gdybyśmy założyli, że Księżyc miał kiedyś atmosferę taką jak Ziemia, to dla Księżyca wynosiłby on 10^{-16} , a więc byłby znacznie większy niż dla Ziemi. Wiąże się to ze znacznie większą prędkością rozprzeczania się atmosfery w przypadku Księżyca.

Model uciezki atmosfery

Możemy rozważyć dwa skrajne przypadki: atmosferę gęstą i atmosferę rzadką. W gęstej atmosferze cząsteczka nieustannie zderza się z innymi cząsteczkami. Nawet gdy uzyska prędkość równą co najmniej drugiej prędkości kosmicznej, w następnym zderzeniu może ją utracić. Średni czas upływający między kolejnymi zderzeniami wynosi

$$\tau_1 = \frac{1}{\sqrt{2}\pi a^2 h(r) v_{sr}}$$

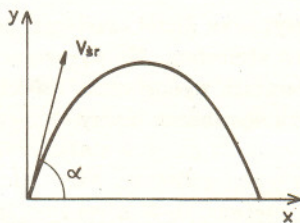
gdzie a jest średnicą cząsteczki (wielkość rzędu 10^{-10} m), $h(r)$ jest gęstością cząstek w odległości r od środka planety, v_{sr} zaś to średnia prędkość cząsteczki.

Jeśli atmosfera jest rzadka, cząsteczka wylatująca ku górze ma niewielką szansę na zderzenie z inną cząsteczką. Jeśli ma prędkość większą lub równą drugiej prędkości kosmicznej, ucieka do nieskończoności, jeśli nie – opada i zderza się z powierzchnią planety lub niżej leżącą warstwą atmosfery. Przypadek ten będzie opisywał ostatnią fazę ewolucji atmosfery lub ucieczkę cząstek z jej górnych warstw, których gęstość nigdy nie jest duża. Jeśli średni czas upływający między kolejnymi zderzeniami jest większy lub przynajmniej porównywalny ze średnim czasem, po jakim cząsteczka opada, możemy posługiwać się przybliżeniem rzadkiej atmosfery. Czas opadania cząsteczki oszacujemy w oparciu o wzory opisujące rzut ukośny. Cząsteczka wyrzucona pod kątem α do poziomu z prędkością v_{sr} spada po czasie

$$t = \frac{2v_{sr} \sin \alpha}{g}$$

Uśredniając go względem kątów z przedziału $[0, \pi/2]$ otrzymujemy średni czas, po jakim cząsteczka opada

$$\tau_2 = \frac{4v_{sr}}{\pi g}$$



Prawdopodobieństwo tego, że najpóźniej po k zderzeniach (czyli po czasie $t = k\tau_2$) cząsteczka uzyska prędkość równą lub większą od drugiej prędkości kosmicznej wynosi

$$P_k = S + (1-S)S + (1-S)^2 S + \dots + (1-S)^k S$$

Pierwszy wyraz sumy jest prawdopodobieństwem tego, że cząsteczka już na początku miała prędkość umożliwiającą ucieczkę. Wyraz $(1-S)^i S$, jest prawdopodobieństwem uzyskania jej dopiero w i -tym zderzeniu. Powyższa suma jest sumą wyrazów szeregu geometrycznego, a zatem

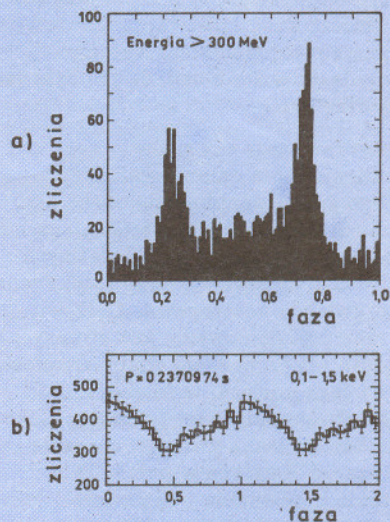
$$P_k = 1 - (1-S)^{k+1}$$

Prawdopodobieństwo tego, że cząsteczka pozostanie w atmosferze, wynosi $1 - P_k$, czyli $(1-S)^{k+1}$, gdzie $k = t/\tau_2$. Możemy zapisać je jako

$$q(t) = (1-S)e^{t \ln(1-S)/\tau_2}$$

gdzie $1-S$ jest początkową wartością tego prawdopodobieństwa. Ponieważ S jest bardzo małe w porównaniu z jednością, możemy posłużyć się przybliżeniem

$$\ln(1-S) \approx -S,$$



Rys. 2. Strumień promieniowania rentgenowskiego Gemingi z zakresu 0,1 – 1,5 keV otrzymany za pomocą satelity ROSAT zmienia się z okresem 0,237 s, ale widoczne jest tylko jedno maksimum na okres (a). Strumień promieniowania gamma otrzymany z Comptonowskiego Obserwatorium Promieniowania Gamma zmienia się z tym samym okresem, ale krzywa zmian ma dwa maksima (b). Niedokładności obserwacji nie pozwalają na dokładne porównanie faz obserwacji z obydwu zakresów.

Autorzy tych obserwacji ogłosili swoją publikację w połowie 1992 r. i natychmiast sygnęły się dalsze wyniki. Na orbicie znajduje się od niedawna satelita o nazwie Comptonowskie Obserwatorium Promieniowania Gamma (*Compton Gamma-Ray Observatory*), który prowadzi obserwacje w wielu zakresach energetycznych gamma z dużo wyższą czułością niż poprzednie instrumenty. Oczywiście, wśród pierwszych obserwowanych obiektów znalazła się i Geminga. Gdy podano do publicznej wiadomości okres pulsowania rentgenowskiego, postanowiono sprawdzić, czy aby strumień promieniowania gamma pochodzący z Gemingi też nie zmienia się z tym samym okresem. Analiza danych zebranych w ciągu 50 dni wykazała nie tylko, że strumień promieniowania gamma rzeczywiście zmienia się z okresem około 0,237 s, ale można było ponadto wykryć tempo zmian tego okresu, co od razu prowadzi do wieku pulsara. Na wiek Gemingi otrzymano wartość około 300 000 lat. Inna grupa naukowców sięgnęła do starych obserwacji Gemingi z przełomu lat 70. i 80. (prowadzonych za pomocą satelity Cos-B) i bez trudu stwierdziła również i w nich obecność okresu około 0,237 s. Dokładna wartość znalezionej wartości okresu wynosiła nieco mniej niż wyznaczona za pomocą ROSATA, co potwierdziło istnienie stałego wydłużania się. Obliczone tempo zmian okazało się bliskie wartości otrzymanej z danych pochodzących z Obserwatorium

Comptonowskiego, tyle że, ze względu na dłuższą bazę czasową, mogło być wyznaczone dokładniej. Autorzy stwierdzają w konkluzji, że „to było tam cały czas!”

Zaobserwowanie tak silnego promieniowania gamma świadczy, że jego źródło znajduje się blisko nas. Oszacowania wskazują, że Geminga leży w odległości około 300 lat świetlnych od Słońca, co czyni ją najbliższą, znaną nam gwiazdą neutronową. Całkowita jej moc promieniowania jest 10 razy większa niż Słońca, ale gdyby znajdowała się na jego miejscu, widzielibyśmy ją w dziedzinie optycznej po prostu tylko jako bardzo jasną gwiazdę, znacznie słabszą od Księżyca w pełni. Tyle że takie porównania mają bardzo hipotetyczny charakter. Nie przeżylibyśmy śmiertelności zalewu kwantami gamma, a i Księżyc nie świeciłby tak jasno, jak teraz, gdy odbija światło Słońca.

Jak Geminga produkuje kwanty gamma?

Identyfikacja Gemingi z młodym pulsarem wyjaśnia główną zagadkę związaną z nią, ale, jak to zwykle bywa z ważnymi odkryciami, stawia nowe pytania i problemy. Dlaczego Geminga promieniuje tysiąc razy więcej energii w zakresie gamma niż w rentgenowskim i milion razy więcej niż w optycznym? Proporcje te dla innych znanych młodych pulsarów wyglądają inaczej. Czy zatem Geminga jest wyjątkiem, czy też każdy młody pulsar musi przejść przez stadium Gemingi? Aby na te pytania odpowiedzieć choćby hipotetycznie, musimy przyrzeć się mechanizmom promieniowania pulsarów nie będących składnikami układów podwójnych.

Zgodnie z naszą wiedzą, pulsary pojedyncze wytwarzają fale elektromagnetyczne poprzez mechanizm promieniowania nietermicznego, a w szczególności poprzez oddziaływanie cząstek naładowanych z silnym polem magnetycznym. Mechanizm ten wygląda następująco: szybko rotująca gwiazda neutronowa, mająca potężne pole magnetyczne o natężeniu 10^{12} Oe (czyli rzędu 10^{14} A/m), wytwarza bardzo silne pole elektryczne, które mimo olbrzymiej siły grawitacji panującej na jej powierzchni wyrwa z gwiazdy naładowane elektrycznie cząstki. W tym samym polu elektrycznym cząstki nabierają szybko prędkości bliskich prędkości światła, a ich energia sięga 10^{14} eV. Poruszając się wzdłuż zakrzywionych linii pola magnetycznego emitują wysokoenergetyczne promieniowanie elektromagnetyczne. Niektóre kwanty tego promieniowania rozpadają się na pary elektron-pozyton, które znow ulegają

czyli

$$q(t) = (1 - S)e^{-t/T_u}, \text{ gdzie } T_u = \frac{\tau_2}{S}.$$

Prawdopodobieństwo znalezienia cząsteczki w rzadkiej atmosferze maleje wykładniczo z czasem. T_u jest czasem, po jakim zmaleje ono e -krotnie. Charakteryzuje on tempo zaniku atmosfery.

Jeśli planeta prócz zewnętrznej, rzadkiej warstwy ma także gęstą część atmosfery, z której cząsteczki praktycznie nie uciekają, otrzymany czas ucieczki będzie zaniżony, jak można oszacować, w takim stosunku, w jakim pozostają masy całej atmosfery i jej rzadkiej warstwy.

Oszacowanie prawdopodobieństwa S

W modelu gazu doskonałego o punktowych, nie oddziałujących cząsteczkach mamy

$$S = \frac{1}{A} \int_{v_2}^{\infty} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv,$$

gdzie $A = \int_0^{\infty} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv = \frac{1}{4} \sqrt{\pi} \left(\frac{m}{2k_B T} \right)^{-3/2}$ oraz v_2 jest drugą prędkością kosmiczną. Całkę we wzorze określającym prawdopodobieństwo S oszacujemy następująco

$$\int_{v_2}^{\infty} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv \approx v_2 \int_{v_2}^{\infty} v e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv = \frac{v_2 k_B T}{m} e^{-\frac{mv_2^2}{2k_B T}}.$$

Jest to możliwe, ponieważ ze względu na szybko zanikający czynnik $e^{-\frac{mv_2^2}{2k_B T}}$ wkład do całki pochodzący od dużych wartości v jest zanedbywalnie mały. Otrzymujemy więc

$$S \approx 2v_2 \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} e^{-\frac{mv_2^2}{2k_B T}}.$$

Ziemia i Księżyc

Na podstawie otrzymanych wzorów oszacujemy teraz tempo rozplywania się atmosfery ziemskiej i hipotetycznej atmosfery Księżyca.

W przypadku Ziemi cząsteczki będą uciekały głównie z górnych, rzadkich warstw atmosfery. Na wysokości 400 km nad powierzchnią Ziemi temperatura wynosi około 1800 K, gęstość zaś $n = 2 \cdot 10^{13}$ cząsteczek/m³. W tych warunkach mamy

$$v_{\text{sr}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = 1235 \text{ m/s}.$$

Druga prędkość kosmiczna na tej wysokości wynosi

$$v_2 = \sqrt{\frac{2g_0 R^2}{R+h}} = 10900 \text{ m/s},$$

a przyspieszenie grawitacyjne

$$g = g_0 \left(\frac{R}{R+h} \right)^2 = 8,7 \text{ m/s}^2.$$

Czasy τ_1 i τ_2 wynoszą: $\tau_1 = 914 \text{ s} \approx 15 \text{ min}$, $\tau_2 = 90 \text{ s} = 1,5 \text{ min}$, a zatem średni czas opadania jest dziesięciokrotnie krótszy od średniego czasu upływającego między zderzeniami. Możemy więc zastosować przybliżenie rzadkiej atmosfery. Otrzymamy wówczas $S \approx 10^{-50}$, czyli

$$T_u = \frac{\tau_2}{S} \approx 10^{47} \text{ s} \approx 10^{30} \text{ mld lat}.$$

Jest to czas dużo większy niż czas życia Wszechświata (około 20 mld lat). Tak więc Ziemia nie mogła stracić atmosfery.

Dla Księżyca założymy, że jego hipotetyczna atmosfera była taka sama jak ziemska. W tych warunkach czas upływający między zderzeniami będzie taki sam, jak dla Ziemi ($\tau_1 = 15 \text{ min}$), natomiast czas opadania ($\tau_2 = 2700 \text{ s} \approx 45 \text{ min}$) jest dłuższy od średniego czasu upływającego

między zderzeniami. Łatwo jednak zauważyć, że tak naprawdę ważny jest sam czas wznoszenia się cząsteczki, czyli 22,5 min. Różni się on niewiele od średniego czasu upływającego między zderzeniami, od biedy możemy więc zastosować przybliżenie rzadkiej atmosfery. Druga prędkość kosmiczna dla Księżyca wynosi $v_2 = 2400$ m/s, a przyspieszenie grawitacyjne na jego powierzchni jest równe $g_0 = 1,62$ m/s². Ostatecznie otrzymujemy

$$S \approx 10^{-2} \text{ czyli } T_u = \text{kilkadziesiąt godzin.}$$

Widzimy więc, że jeśli Księżyc miał kiedykolwiek atmosferę, a warunki, jakie w niej panowały, były takie, jak w górnych warstwach atmosfery Ziemi, to prawie natychmiast ją utracił. Atmosfera ta rozplynęła się we Wszechświecie, ponieważ siły grawitacji Księżyca były zbyt słabe, żeby utrzymać ją przy powierzchni globu.

Inne planety Układu Słonecznego

Na zakończenie oszacujemy prędkość rozplywania się atmosfer kolejnych planet Układu Słonecznego, przyjmując za stan początkowy obecnie panujące tam warunki.

Merkury – bardzo rzadka atmosfera, temperatura 300–420 K,

$$T_u \text{ rzędu } 10^5 \text{ mld lat.}$$

Venus – bardzo gęsta atmosfera, temperatura 750 K, główny składnik CO₂,

$$T_u \text{ rzędu } 10^{145} \text{ mld lat.}$$

Mars – rzadka atmosfera, temperatura 220–270 K, główny składnik CO₂,

$$T_u \text{ rzędu } 10^{91} \text{ mld lat.}$$

Jowisz – gęsta atmosfera, temperatura 130 K, główne składniki wodór i hel,

$$T_u \text{ rzędu } 10^{1363} \text{ mld lat.}$$

Saturn – gęsta atmosfera, temperatura 120 K, główne składniki wodór i hel,

$$T_u \text{ rzędu } 10^{512} \text{ mld lat.}$$

Widzimy więc, że charakterystyczny czas zaniku atmosfery jest największy dla dwóch planet o zimnej i gęstej atmosferze oraz silnej grawitacji:

Jowisza i Saturna. W rzeczywistości nasze obliczenia dotyczą górnych, rozrzedzonych warstw atmosfery, tempo zaniku całej atmosfery jest o wiele wolniejsze. Najkrótszy, ale także dłuższy niż czas życia Wszechświata, jest charakterystyczny czas zaniku atmosfery Merkurego i Marsa, planet małych, o rozrzedzonej atmosferze.

Na pierwszy rzut oka niepokojący może się wydawać fakt całkowitej odmienności wyników dla Merkurego i Księżyca, ciał niebieskich, które są bardzo podobne. Wynika to z odmiennych warunków początkowych przyjętych w analizie. Dla Merkurego rozpatrywaliśmy ewolucję rozpoczynającą się od takiego stanu atmosfery, jaki istnieje tam obecnie. Dla Księżyca przyjęliśmy jako początkowy stan warunki panujące w górnych warstwach atmosfery ziemskiej. Są to warunki całkowicie inne niż w przypadku Merkurego.

Dla Ziemi czas zaniku atmosfery (jej górnych warstw) oszacowaliśmy na 10³⁰ mld lat. Możemy więc spać spokojnie. Atmosfera nie ucieknie nam podczas nocy. Gdyby udało się nam wytworzyć wokół Księżyca atmosferę taką, jaką ma Ziemia i zamieszkalibyśmy na powierzchni Srebrnego Globu, to eksperyment ten zakończyłby się niepowodzeniem, ponieważ już po kilku dniach Księżyc utraciłby atmosferę.

przyspieszeniu w polu elektrycznym. Zderzając się z pierwotnymi cząstkami wypełniającymi magnetosferę tworzą całą kaskadę energetyczną cząstek. Jednocześnie szybko poruszające się cząstki oddziałują z kwantami promieniowania poprzez efekt Comptona i odwrotny efekt Comptona. Cząstki naładowane (i te bardzo szybkie, i te wolniejsze) tracą też swoją energię poprzez promieniowanie synchrotronowe. W efekcie magnetosfera pulsara wytwarza promieniowanie z całego zakresu fal elektromagnetycznych – od fal radiowych do „twardych”, tj. wysokoenergetycznych kwantów gamma. Duża jego część powstaje w pobliżu biegunów magnetycznych i jest emitowana kierunkowo, wzdłuż osi pola, co daje znany efekt „latarni morskiej”. Kąt rozwarcia wysyłanej kierunkowo wiązki zależy m.in. od geometrii pola, jego natężenia, tempa rotacji pulsara itd.

Szczegóły opisanego mechanizmu nie są jeszcze zbyt dobrze znane, a wiele z nich jest wciąż przedmiotem kontrowersji. Niemniej jednak, dobierając odpowiednio warunki fizyczne, można, jak się wydaje, wyjaśnić obserwowaną różnorodność zachowań pulsarów. Zakładając sensowną fizycznie ewolucję pulsarów i ich otoczenia specjaliści od problemów promieniowania pulsarów twierdzą, że mogą również wyjaśnić różnice między trzema wspomnianymi młodymi pulsarami i fakt, że gwiazdy te tworzą sekwencję ewolucyjną. Swobodnymi parametrami, dobieranymi indywidualnie dla każdego pulsara, są w tym przypadku parametry opisujące geometrię pola magnetycznego względem gwiazdy i obserwatora. Omówmy zatem tę sekwencję.

Powstały po wybuchu supernowej pulsar ma bardzo silne pole magnetyczne – rzędu 10¹² – 10¹³ Oe i rotuje z okresem rzędu setnych sekundy. Wokół pulsara rozciąga się ekspandująca otoczka powstała w wyniku wybuchu. Pulsar traci szybko energię rotacji przekazując ją głównie otoczce, przez co pobudza ją do intensywnego świecenia w szerokim zakresie widma. Sam pulsar bezpośrednio wypromieniowuje tylko niewielką część swej energii rotacyjnej. Jest to stadium Kraba. Kwanty gamma powstające w magnetosferze pulsara unoszą w tym okresie mniej niż 0,1% całej traconej przez pulsar energii, która wynosi około 10³⁸ erg/s (10³¹ W), co jest 30 000 razy większe od całkowitej energii wyświecanej przez Słońce. Po około 10 000 lat otoczka ulega rozproszeniu, pole jest słabsze, a okres rotacji wydłuża się do prawie 0,1 s. Natężenie promieniowania o niższych energiach, związane z kaskadami zderzających się cząstek czy oddziaływaniami z „zewnętrznymi” cząstkami otoczki, mającymi dużo mniejsze energie, ulega znacznemu osłabieniu, podczas gdy promieniowanie gamma,

związane z ultrarelatywistycznymi cząstkami wyrwanymi z powierzchni gwiazdy lub kreowanymi w jej magnetosferze nie ulega tak znaczącemu osłabieniu, ze względu na to, że wysokoenergetyczne cząstki mogą swobodniej poruszać się po bardziej pustej niż poprzednio magnetosferze pulsara, a jego pole magnetyczne i elektryczne są wciąż jeszcze bardzo silne. Mamy stadium pulsara w Veli. Po około 10^5 lat, gdy okres rotacji pulsara przekracza nieco 0,1 s, w kwanty gamma pompowana jest maksymalna część energii traconej przez pulsar. W innych zakresach widmowych pulsar promieniuje wtedy bardzo słabo. Jest to stadium Gemingi. Nieco później wiatr elektronowo-pozytonowy ulega wysyceniu, po czym energia jego słabnie wskutek spadku natężenia pól elektromagnetycznych pulsara. Pociąga to za sobą szybki spadek strumienia kwantów gamma, a maksimum promieniowania przesuwają się do fal coraz dłuższych, aż do fal radiowych. Po około 10^7 lat, gdy okres rotacji sięga 1–2 sekund, a natężenie powierzchniowego pola magnetycznego spada do około 10^{11} Oe, następuje całkowite wyłączenie się pulsara. I tylko niektóre ze starych pulsarów ulegają „ożywieniu” w bardzo szczególnych przypadkach, gdy ich rotacja ulega przyspieszeniu do wartości okresów rzędu milisekund.

Obraz powyższy naszkicowany jest na razie bardzo grubo i zapewne ulegnie w przyszłości wielu modyfikacjom. Na konieczność jednej z nich wskazuje odkryta wartość okresu rotacji Gemingi. Wcześniejsze teorie przewidywały, że pulsar promieniujący głównie w zakresie gamma (tj. tak jak Geminga) powinien mieć okres nie dłuższy niż około 0,13 s. Po przekroczeniu tej wartości następuje gwałtowny spadek emisji kwantów gamma. Obserwowany okres Gemingi jest wyraźnie dłuższy niż ta teoretyczna wartość krytyczna, co oznacza, oczywiście, że trzeba będzie przerobić istniejące teorie. Sporo światła na fizykę młodych pulsarów powinny rzucić obserwacje promieniowania gamma prowadzone obecnie za pomocą wspomnianego Comptonowskiego Obserwatorium Gamma. Warto tu zwłaszcza skoncentrować się na pulsarach o nazwach PSR1509-58 (okres 0,150 s) i PSR1706-44 (okres 0,102 s), które powinny być podobne do pulsara w Veli. Innym ciekawym obiektem jest rentgenowskie źródło 1E1257.4-5209, które nie ma zauważalnego odpowiednika optycznego, co wskazuje na stosunek jasności rentgenowskiej do optycznej przewyższający 1000. Nie wiemy na razie nic na temat okresowości jego zmian. Źródło znajduje się w środku pozostałości po supernowej, której wiek oceniono na nieco ponad 10 000 lat.

Międzywydziałowe Indywidualne Studia Matematyczno-Przyrodnicze (MIS MaP)

w Uniwersytecie Warszawskim
Rekrutacja w roku 1994

Uniwersytet Warszawski wprowadził, począwszy od roku akademickiego 1992/93, po raz pierwszy w Polsce nową formę studiów pod nazwą Międzywydziałowe Indywidualne Studia Matematyczno-Przyrodnicze (MIS MaP). W latach 1992 i 1993 przyjęto na MIS MaP łącznie ponad 100 osób. W czerwcu 1994 planowane jest przyjęcie również około 100 osób.

Udział w MIS MaP bierze siedem Wydziałów Uniwersytetu: Wydział Biologii, Wydział Chemii, Wydział Fizyki, Wydział Geografii i Studiów Regionalnych, Wydział Geologii, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki oraz Wydział Psychologii.

Międzywydziałowe Indywidualne Studia są normalnymi studiami dziennymi, nie przewiduje się prowadzenia studiów w trybie zaocznym ani wieczorowym. Studenci MIS MaP są, formalnie rzecz biorąc, studentami wszystkich wymienionych wydziałów jednocześnie. Każdego ze studentów obejmuje opieką profesor lub adiunkt reprezentujący kierunek najbliższy jego zainteresowaniom. Studenci wraz ze swoimi opiekunami ustalają własne, w pełni indywidualne programy studiów złożone przede wszystkim z przedmiotów prowadzonych na wymienionych wyżej wydziałach oraz pewnych przedmiotów uzupełniających z innych wydziałów Uniwersytetu. Nie ma obowiązku wybierania zajęć ze wszystkich wydziałów tworzących MIS MaP. Do najbardziej popularnych należą, jak dotąd, programy matematyczno-fizyczne, biologiczno-chemiczne oraz biologiczno-psychologiczne.

Studia indywidualne są zarazem ciekawsze i trudniejsze. Można je zalecać zarówno w przypadkach trudności z podjęciem decyzji wyboru kierunku studiów uniwersyteckich, jak i w przypadku dobrze sprecyzowanych zainteresowań. Idealnymi kandydatami na Międzywydziałowe Studia Indywidualne są osoby o szerokich zainteresowaniach matematyczno-przyrodniczych. Jeśli ktoś jest już zdecydowany na fizykę czy biologię, to może od razu rozpocząć studia na właściwym wydziale, gdzie również będzie dysponować pewną swobodą wyboru przedmiotów.

Prawo przystąpienia do egzaminu wstępnego ma każdy absolwent szkoły średniej posiadający świadectwo maturalne. Ze względu na konkursowy charakter wcześniej organizowanego egzaminu należy również składać dokumenty na inne wydziały Uniwersytetu Warszawskiego lub inne uczelnie. Oceny na świadectwie maturalnym nie będą brane pod uwagę przy klasyfikacji na MIS MaP. Nie będzie egzaminów ustnych ani egzaminu z języka obcego.

Egzamin (wyłącznie pisemny) odbędzie się 21 czerwca 1994 roku i obejmie dwa, wybrane przez kandydata, spośród pięciu testów z matematyki, fizyki, chemii, biologii i geografii. Testy będą zawierać po 50 pytań, każde z czterema odpowiedziami. Egzamin będzie trwał 4 godziny, co oznacza, że będzie niecałe 2,5 minuty na pytanie. Punktowany

będzie wyłącznie wybór jedynej, prawidłowej odpowiedzi.
Zakres egzaminów obejmuje programy nauczania w liceach ogólnokształcących w klasach o odpowiednich profilach specjalistycznych.

W celu dopuszczenia do egzaminu należy złożyć lub nadesłać do Sekretariatu MIS MaP dokumenty w terminie do 1 czerwca 1994 roku.

Laureaci dowolnej olimpiady szczebla centralnego przyjmowani będą bez egzaminu, finaliści olimpiad będą zwolnieni z egzaminu odpowiadającego treści olimpiady i otrzymają z niego ocenę maksymalną.

Końcowy rezultat egzaminu będzie iloczynem liczby punktów uzyskanych z dwóch testów. Ostateczne wyniki rekrutacji zostaną podane do 25 czerwca 1994 roku. Limit miejsc wyniesie około 100. Miejsca na studiach będą przydzielane w kolejności uzyskanych końcowych rezultatów egzaminu. **Pozytywny wynik egzaminu (powyżej 900 punktów) uprawnia do przyjęcia bez dalszych egzaminów na Wydział Chemii UW oraz w przypadku pojawienia się wolnych miejsc może umożliwić przyjęcie na Międzywydziałowe Studia Ochrony Środowiska.**

Obok listy osób przyjętych zostanie stworzona lista rezerwowa. W przypadku rezygnacji osób z pierwszej listy Komisja Rekrutacyjna będzie proponować podjęcie studiów osobom znajdującym się na liście rezerwowej. Komisja zastrzega sobie prawo ustalania kryteriów wyboru kandydatów z listy rezerwowej biorąc pod uwagę możliwości dydaktyczne UW.

Wszyscy zainteresowani mogą otrzymać Informator MIS MaP zawierający, między innymi, przykłady pytań testowych po zgłoszeniu listownym, telefonicznym lub osobistym do Sekretariatu MIS MaP, ul. Pasteura 7, 02-093 Warszawa, telefon (2)658-22-52, we wtorki w godz. 9 – 12 oraz w czwartki w godz. 12 – 15.

Na zakończenie zwróćmy uwagę na jeszcze jedną ciekawostkę związaną z Geminą. Jej prędkość względem Słońca oceniamy na około 100 km/s, a zatem, od wybuchu przemieściła się względem nas nie więcej niż o 100 lat świetlnych. Wynika stąd, że jakieś 300 000 lat temu, w odległości paruset lat świetlnych od Ziemi wybuchła gwiazda supernowa. W maksimum jasności mogła przekroczyć –15. wielkość gwiazdowa, będąc wtedy co najmniej 10 razy jaśniejsza niż Księżyc w pełni! Na szczęście odległość była zbyt duża, by jej promieniowanie jonizujące mogło znacząco wpłynąć na przebieg ewolucji życia na Ziemi (w przeciwnym razie biosfera Ziemi uległaby zapewne trwałemu zniszczeniu). Dla naszych przaprzodków musiało to jednak być zjawisko niezwykle – przy świetle supernowej mogliby w nocy czytać gazety (oczywiście, gdyby je mieli i potrafili czytać). Wybuch zgarnął wiele rozproszonej materii międzygwiazdowej tworząc gigantyczny bąbel, w którego wnętrzu znaleźliśmy się. Dzięki tak szczęśliwemu zbiegowi okoliczności możemy teraz obserwować światło wielu pobliskich gwiazd nieosłabione przez pył międzygwiazdowy. A gdyby nie ten wybuch, moglibyśmy tkwić w jakimś lokalnym zgęszczeniu materii, które by skutecznie odcięło od nas światło nawet bliskich gwiazd. I wtedy nasze niebo byłoby czarne lub usiane bardzo nielicznymi, słabiutkimi gwiazdeczkami.

<p>Odcinek dla poczty</p> <p>Zł</p> <p>..... słownie złotych</p> <p>..... wpłacający</p> <p>adres</p> <hr/> <p>AMOS</p> <p>01-506 Warszawa</p> <p>ul. Szenwalda 1</p> <hr/> <p>na AMOS</p> <p>r-k 01-506 Warszawa</p> <p>Dokładna nazwa ul. Szenwalda 1</p> <hr/> <p>na PKO VIII O/W-wa</p> <p>Nr r-ku 1586-77578-136</p> <hr/> <p>..... Pobrano opłatę</p> <p>..... zł</p> <p>..... podpis przyjmującego</p>	<p>Odcinek dla posiadacza rachunku</p> <p>Zł</p> <p>..... słownie złotych</p> <p>..... wpłacający</p> <p>Dokładny adres</p> <hr/> <p>na AMOS</p> <p>r-k 01-506 Warszawa</p> <p>Dokładna nazwa ul. Szenwalda 1</p> <hr/> <p>na PKO VIII O/W-wa</p> <p>Nr r-ku 1586-77578-136</p> <hr/> <p>..... Pobrano opłatę</p> <p>..... zł</p> <p>..... podpis przyjmującego</p>	<p>Potwierdzenie dla wpłacającego</p> <p>Zł</p> <p>..... słownie złotych</p> <p>..... wpłacający</p> <p>Dokładny adres</p> <hr/> <p>na AMOS</p> <p>r-k 01-506 Warszawa</p> <p>Dokładna nazwa ul. Szenwalda 1</p> <hr/> <p>na PKO VIII O/W-wa</p> <p>Nr r-ku 1586-77578-136</p> <hr/> <p>..... Pobrano opłatę</p> <p>..... zł</p> <p>..... podpis przyjmującego</p>
--	---	--

Patrz w niebo

Rozwiązanie zadania F 379.

Na mocy prawa Stefana-Boltzmanna

moc promieniowania Słońca wynosi

$P = \sigma T^4 S$, gdzie $S = 4\pi R^2$ jest

powierzchnią Słońca. Światłość Słońca

jest równa $I = \sigma T^4 S \eta$, natężenie

zaś oświetlenia $E = \frac{I \cos \beta}{r^2}$, gdzie

$\beta = \phi - \phi_0$ jest kątem padania

promieni słonecznych na początku lata.

Ostatecznie mamy

$$E = \frac{\sigma T^4 \cdot 4\pi R^2 \eta \cos(\phi - \phi_0)}{r^2};$$

podstawiając wielkości liczbowe,
otrzymujemy

$$E = 120\,000 \text{ luksów.}$$

Phobos, pierwszy – licząc od planety – satelita Marsa, wzbudził powszechne zainteresowanie, gdy w 1945 r. amerykański astronom B.P. Sharpless odkrył systematyczne przyspieszenie jego ruchu orbitalnego. Oznaczało to, że Phobos po bardzo ciasnej spirali opada na Marsa, co w odległej przyszłości może zakończyć się katastrofą.

Niedawno nowe badania tego problemu przeprowadził angielski astronom Andrew Sinclair. Zebrał wszystkie dostępne obserwacje Phobosa i drugiego satelity, Deimosa, poczynając od odkrywczych obserwacji wykonanych przez Asapha Halla, przez obserwacje z Marinerów i Vikingów, kończąc na najnowszych obserwacjach naziemnych. Na ich podstawie dokonał nowego wyznaczenia orbit satelitów, a przy okazji masy Marsa, kierunku jego osi rotacji i tempa jej precesji. Przyspieszenie ruchu Phobosa zostało potwierdzone i jego wartość została wyznaczona na $0;00124/\text{rok}^2$, z czego wynika, że średni promień jego orbity maleje o 9 cm/rok. Przy takim tempie opadania Phobos ma przed sobą około 40 mln lat życia.

Okres ten stanowi drobny ułamek wieku Układu Słonecznego, można więc podejrzewać, że Phobos satelitą Marsa jest również od niedawna, czyli że jest niedawno pochwyconą planetoidą, a nie satelitą, który powstał w przybliżeniu jednocześnie z planetą. Nie wiadomo jednak, kiedy to pochwylenie nastąpiło i jak przebiegło. Nie ma też jasności co do przyczyn opadania Phobosa. Mogłoby ono być wywołane przyplwowym działaniem planety – w tym przypadku hamującym, bowiem Phobos szybciej obiega Marsa niż Mars wiruje, ale zbyt słabo znamy kształt i budowę wewnętrzną planety. Druga możliwość, opór atmosfery, jest nie do obronienia, bowiem atmosfera Marsa jest w ogóle bardzo rzadka, tym bardziej na wysokości orbity Phobosa. W dodatku zyskała nieco złą sławę. Mianowicie, gdyby opór atmosfery miał grać znaczącą rolę, gęstość satelity musiałaby być niezwykle niska i to tak bardzo, że przy obserwowanych rozmiarach i spodziewanym budulcu powinien być pusty wewnątrz. Następnym krokiem było już tylko sugerowanie, że jest satelitą sztucznym, zbudowanym przez jakąś cywilizację na tymczasowe schronienie. Na szczęście dzięki sondom kosmicznym średnia gęstość Phobosa została wyznaczona na około 2 g/cm^3 , satelita nie musi więc być pusty w środku i hipoteza ingerencji obcej cywilizacji stała się zbędna. Oddychamy z ulgą!

Tomasz KWAST

Rozwiązanie zadania F 380.

Niech α oznacza kąt padania promieni

na powierzchnię Ziemi, E_S będzie

natężeniem oświetlenia w pobliżu Ziemi

dla powierzchni ustawionej prostopadle

do promieni słonecznych. Światłość

Księżycy wynosi $I = E_S \pi R^2 a$,

gdzie a oznacza albedo. Natężenie

oświetlenia w kierunku prostopadłym,

pochodzące od Księżycy, jest równe

$E_K = \frac{\pi R^2 E_S a}{r^2}$. Stosunek natężeń

oświetlenia powierzchni Ziemi przez

Słońce i Księżyc wynosi

$$\frac{E_S \cos \alpha}{E_K \cos \alpha} = \frac{X^2}{\pi R^2 a} \approx 220\,000.$$

Prenumerata „Delt”
za okres:

Prenumerata „Delt”
za okres:

Prenumerata „Delt”
za okres:



mała delta

Wielościan w zeszytcie

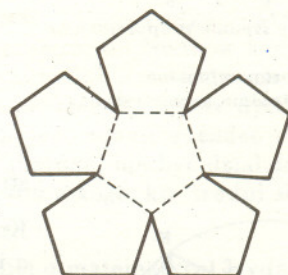
Co najmniej 60 lat liczy sobie przedstawiona tu zabawka, gdyż znaleźć ją można już w przedwojennym wydaniu *Kalejdoskopu matematycznego* Steinhausa.

Wykonać ją najlepiej ze sztywnego kartoniku, w ostateczności może to być arkusz z bloku technicznego. Wycinamy dwie figury takie, jak na rysunku 1. Są to połączone pięciokąty foremne i, jak widać, jest ich sześć. Linii przerywanych nie przecinamy, tylko zaginamy wzdłuż nich kartonik (uprzednio mocno pociągając po przerywanych liniach wypisanym długopisem). Dwie takie figury układamy jedna na drugiej (liniami przerywanymi na zewnątrz) tak, jak na rysunku 2, to znaczy obracając jeden względem drugiego o $\frac{1}{10}$ kąta pełnego (jest to 36° , ale lepiej niż mierzyć, jest zrobić to „na oko”). Teraz potrzebna jest gumka-recepturka, dość miękka, o długości (w stanie nierozciągniętym) równej mniej więcej obwodowi pojedynczego pięciokąta. Zakładamy ją na rogi kartonikowych figur tak, by biegła na wierzchu tam, gdzie jest na wierzchu dany róg (rys. 2). Kartoniki podczas zakładania gumki przyciskamy do stołu.

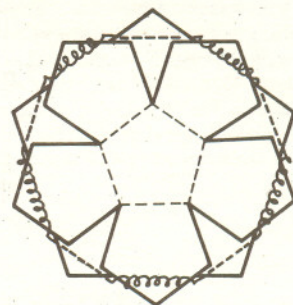
Jeśli teraz puścimy kartoniki, stanie przed nami dwunastościan foremny. Naciskając na środek jego najwyższej ściany możemy go z powrotem spłaszczyć. Przyklejając jedną ze środkowych ścian do strony (koniecznie grubego) zeszytu, możemy mieć w nim figurę, która będzie przestrzenna, ilekroć zeszyt otworzymy, płaska zaś, gdy go zamkniemy.

Nie jest mi znany inny wielościan, który dałby się tak składać i rozkładać. Będę więc wdzięczny za informacje o takowym, gdyby był on któremuś z Czytelników znany.

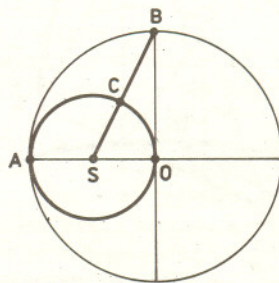
Pozostaje jeszcze tylko opisać, jak najłatwiej wykreślić pięciokąt foremny. Bok dziesięciokąta foremnego wpisanego w dany okrąg można znaleźć rysując w okręgu dwie prostopadłe średnice i okrąg, dla którego jeden z narysowanych promieni (na rysunku 3 jest to AO) jest średnicą.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Łącząc jego środek (na rysunku S) z końcem drugiej średnicy (na rysunku B) otrzymamy między małym a dużym okręgiem odcinek (na rysunku BC) o długości boku dziesięciokąta foremnego. Po narysowaniu dziesięciokąta łącząc co drugi jego wierzchołek otrzymujemy pięciokąt foremny.

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS

Niedowiarków powątpiewających w istnienie sensownej wypowiedzi Norwida na ten temat odsyłam do jego wiersza *Plato i Archita*. Wiersz jest dość trudny do zrozumienia dla kogoś mniej obytego z matematyką starożytną Grecji niż jego autor.

Rzecz dotyczy awantury związanej z rozwiązaniem problemu podwojenia sześcianu. Problem ten to zagadnienie skonstruowania odcinka $\sqrt[3]{2}$ razy dłuższego niż dany – jego sześcian to podwojony sześcian danego odcinka, stąd nazwa. Otóż problem ten można rozwiązać, gdy umie się rozwiązać ogólniejszy problem tzw. dwu średnich proporcjonalnych. Chodzi o to, by do danych odcinków o długości a i b dobrać dwa takie, których długości x i y spełniają zależność

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}.$$

W szczególności dla $b = 2a$ znaleziony odcinek o długości x realizuje podwojenie sześcianu. Istotnie, mamy bowiem $x^2 = ay$ oraz $y^2 = 2ax$, skąd

$$\frac{x^4}{a^2} = 2ax, \text{ czyli } x^3 = 2a^3.$$

A oto sposób rozwiązania tego zadania przez norwidowego Architę – Archytasa z Tarentu (–428; –365), tyrana – co oznacza coś w rodzaju prezydenta, a także stratega – coś w rodzaju generała, ale przede wszystkim znakomitego mechanika.

Krok pierwszy w stylu *co by było gdyby*. Otóż, gdyby mając dane długości a i b umielibyśmy znaleźć na półkolu o średnicy $AB = b$ taki punkt K , aby skonstruowany przez dwukrotne rzutowanie prostokątne (patrz rys. 1) punkt C miał tę własność, że byłoby $AC = a$, to odcinki AL i AK byłyby dwiema średnimi proporcjonalnymi dla a i b – z oczywistego podobieństwa trójkątów prostokątnych mamy bowiem

$$\frac{AC}{AL} = \frac{AL}{AK} = \frac{AK}{AB}.$$

Problem więc jedynie w tym, jak taki punkt K znaleźć.

W celu znalezienia punktu K zastosujemy tzw. analizę Starożytnych – przypuścimy, że stosowny punkt K został znaleziony i badając jego własności postaramy się znaleźć dostatecznie wiele określających go warunków, by można go było wskazać.

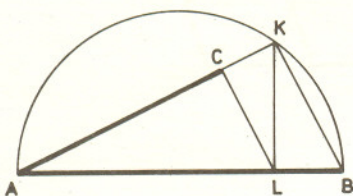
Rysujemy na płaszczyźnie okrąg o mający średnicę $AB = b$, a następnie w płaszczyźnie do niego prostopadłej, zawierającej średnicę AB , umieszczamy półkole ze znalezionymi punktami K , L i C . Płaszczyznę tę obracamy dokoła przechodzącej przez A prostej prostopadłej do płaszczyzny okręgu o dotąd, aż punkt L znajdzie się na tym okręgu (rys. 2). Uzupełniamy wówczas rysunek rzutem prostokątnym M punktu C na odcinek AB' oraz przechodzącą przez M cięciwą NP okręgu o prostopadłą do AB – jej środek oznaczamy przez O . Ponieważ trójkąt ACL jest prostokątny, więc $CM^2 = AM \cdot ML$. Ponieważ $AM \cdot ML = PM \cdot MN$ (kto nie wie dlaczego, niech spojrzysz na margines następnej strony), więc $CM^2 = PM \cdot MN$, z czego wynika, że trójkąt PCN jest prostokątny, a więc P , C i N leżą na okręgu mającym środek w punkcie O i leżącym w płaszczyźnie prostopadłej do AB . W szczególności wynika stąd, że $AP = AN = AC$, a nawet więcej: punkty te – a wraz z nimi punkt K – leżą na stożku o wierzchołku A .

Dobierając trzy odcinki o takich długościach x , y , z , że

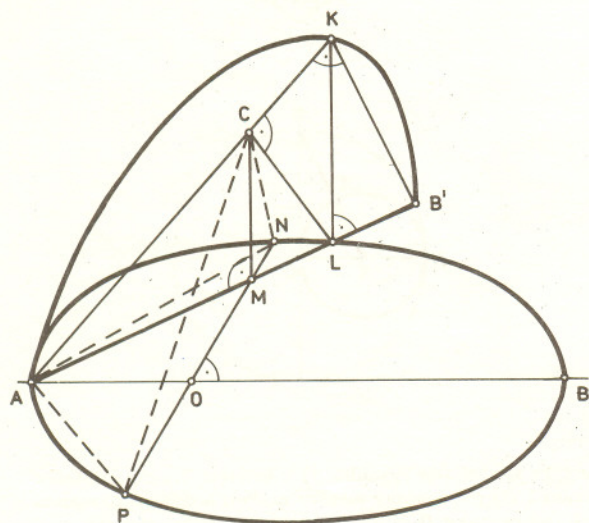
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{b},$$

znajdujemy trzy średnie proporcjonalne itd.

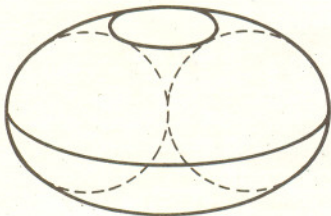
Jedna średnia proporcjonalna nazywana jest średnią geometryczną.



Rys. 1.



Rys. 2.



Rys. 3.

Stożek ten możemy skonstruować znajdując punkty P i N , jako przecięcia okręgu o środku A i promieniu a , leżącego w płaszczyźnie okręgu o , z tym okręgiem. Tym samym dowiedzieliśmy się, że punkt K leży na powierzchni stożka, który możemy skonstruować znając jedynie a i b .

Wskażemy teraz jeszcze dwie powierzchnie, na których leży K . Jedna z nich to walec złożony z prostych prostopadłych do okręgu o i zawierającej go płaszczyzny. Kolejna powierzchnia to „torus bez dziurki” – powierzchnia powstała przez obracanie okręgu dokoła jednej z jego stycznych. Powierzchnia ta jest pokazana na rysunku 3.

Każdą z tych powierzchni możemy skonstruować mając daną jedynie długość b . Punkt (a ściślej każdy z czterech punktów) będący przecięciem tych trzech powierzchni daje nam rozwiązanie problemu dwu średnich proporcjonalnych, a więc w szczególności problemu podwojenia sześciangu.

Dziś każdy, nieco bardziej interesujący się matematyką, wie, że problemu tego nie da się rozwiązać. Sprzeczność znika, gdy dokładniej przyjrzeć się sformułowaniu twierdzenia o niemożności – jest tam mowa o wykonywaniu konstrukcji na płaszczyźnie, a na dodatek wyłącznie cyrklem i linijką. Sprzeczności więc nie ma. Pozostaje jednak pytanie, dlaczego przyjęte zostały takie ograniczenia. Dyskusja na ten właśnie temat wypełnia wspomniany wiersz Norwida. Drugi z jego tytułowych bohaterów, Platon (–429; –348), jest właśnie autorem przyjętego później powszechnie ograniczenia środków konstrukcyjnych. Powierzchnie, ich konstruowanie, poszukiwanie linii i punktów ich przecięć, wydawało się Platonowi zajęciem z zakresu mechaniki, a więc dyscypliny opartej na pożytkowaniu materii – tym zaś, jego zdaniem, żaden matematyk nie powinien się splamić. Matematyka, wedle Platona, ma być działalnością czysto intelektualną. Nie ma więc w niej miejsca dla nikogo, kto trudni się jakkolwiek działalnością praktyczną.

Dziś myślenie w stylu Platona (przynajmniej o matematyce) wydaje się nam zdecydowanym anachronizmem. Co jednak o przeciwstawieniu matematyki działalności praktycznej miał do powiedzenia Norwid? Tego tu nie napiszę odsyłając Czytelnika do lektury wiersza Norwida.

Warto wspomnieć, że ów wiersz był tematem dyskusji przeprowadzonej w dniu 20 kwietnia 1967 roku, przewodniczyli jej matematyk – Edward Marczewski i filolog klasyczny – Jerzy Łanowski. Dyskusja odbyła się w ramach *Czwartków Naukowych* organizowanych przez Wrocławskie Towarzystwo Naukowe od 1961 roku. Działalność *Czwartków* wygasła w latach 70. Ostatnio jednak wobec dużego zapotrzebowania na tego typu działalność intelektualną dnia 17 lutego 1993 roku Senat Uniwersytetu Wrocławskiego powołał do życia *Studium Generale*, którego jedną z form działalności jest prowadzenie dwóch interdyscyplinarnych seminariów poświęconych symetriom i systemom w przyrodzie, sztuce i naukach humanistycznych.

Cyprian Kamil NORWID PLATO I ARCHITA

ARCHITA

Geometrycznej nieświadom nauki
Widziałem prosty lud, kładący bruki,
I, jako kamień jedna się z kamieniem,
Baczyłem, stojąc pod filarów cieniem –
Aż żał mi było bez wiedzy gminu,
Mimo że wieczną on jest wagą czynul...
Więc – Geometrii myślane promienie
(Rzeknę) gdy z głazem złączę i ożenie,
Sferyczność w drzewie wykluwszy toporem,
Siłami ramion pchnę brązowe walce,
Promienne jeśli kołom natknę palce...
To – któż wie...

PLATO

Boskie zmysłowiając obrysy,

Archito! – koturn rzucisz za kulisy –
Języka lotność niebieskiego zgrubisz*,
Więc Filozofię, Grecję może, zgubisz...

* Idealność Platona była przeciwną rodzącej się właśnie mechanice, uważając ją (w pierwotnym jej ekstremie) jako zdegradowanie kontemplacji (przypis Poety).

ARCHITA

O! Plato... padam przed prawdy bez-koniecem,
I nieraz, myśli z drzewa ciosząc, płacząc,
Tak wielce wszystko przesiąknięte jest słoncem,
Któremu nie ty, ni ja biegów znacząc;
Dlatego świętych nie zniżę arkanów,
Ani ojczyzny kraglą tarcz wyszczerbię,
Owszem: z tych, które rażą cię dziś, planów,
Z kres tych na Grecji idealnym herbie,
Z liczebnych równań w sił zmienionych dźwięgnie
(Lubo promiennosc uroku w nich stygnie),
Któż wie? – powtarzam – czy lud w sobie drobny,
Bezsilny ciałem – jak wyspa osobny,
Sykulów mówię, na przykład, siedziba,**
Tą siły ramion zmnożywszy nauką,
Nie zdoła bronić się jak morska ryba?...

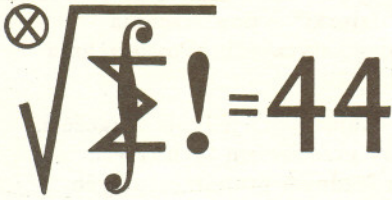
PLATO

Przyjdzie – i tobie dzień zwycięstwa – sztuk o!...

** To się odnosi do przyszłości już wyraźniejszej mechaniki, której Archimed na rzecz ojczyzny zażył (przypis Poety).

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1994.



Zadania z matematyki nr 279, 280

279. Rozstrzygnąć, czy istnieje wielomian $P(x, y)$ o następujących własnościach:

- (1) Jeśli x, y są liczbami całkowitymi nieujemnymi, to wartość $P(x, y)$ też jest liczbą całkowitą nieujemną.
- (2) Dla każdej liczby całkowitej $z \geq 0$ równanie $P(x, y) = z$ ma dokładnie jedno rozwiązanie w liczbach całkowitych $x, y \geq 0$.

Zadanie 280 zaproponował pan Waldemar Pompe z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/1993

Przypominamy treść zadań:

271. Do każdej ściany ośmiościanu foremnego o objętości V doklejamy czworościan foremny. Powstała bryła B nie jest wypukła. Obliczyć objętość najmniejszego wielościanu wypukłego zawierającego B .

272. Udowodnić, że dla liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{ab(A+B)}{ab(A+B)+ABC} + \frac{bc(B+C)}{bc(B+C)+ABC} + \frac{ca(C+A)}{ca(C+A)+ABC} \leq 1,$$

gdzie $A = b + c, B = c + a, C = a + b$.

271. Ustalmy prostokątny układ współrzędnych, w którym wierzchołkami danego ośmiościanu są punkty $A_1 = (a, 0, 0), A_2 = (0, a, 0), A_3 = (0, 0, a), A_4 = (-a, 0, 0), A_5 = (0, -a, 0), A_6 = (0, 0, -a)$. Czworościan foremny doklejony do ściany $A_1A_2A_3$ ma czwarty wierzchołek w punkcie $P = (a, a, a)$; zatem $P \in B$. Analogicznie, każdy punkt o współrzędnych równych $\pm a$ należy do bryły B ; poszukiwana bryła wypukła wobec tego zawiera sześcian C o wierzchołkach w tych ośmiu punktach. Pozostaje zauważyć, że sześcian C zawiera cały dany ośmiościan wraz z wszystkimi doklejonymi czworościanami; jest więc najmniejszym wielościanem wypukłym zawierającym B .

Część ośmiościanu zawarta w oktancie (sektorze przestrzennym)

$$\{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

ma objętość równą $1/6$ objętości części sześcianu C zawartej w tym oktancie. Ta sama sytuacja ma miejsce w pozostałych siedmiu oktantach. Zatem objętość C równa się $6V$.

272. Oznaczając

$$u = bc/A, \quad v = ca/B, \quad w = ab/C$$

mamy nierówność

$$\begin{aligned} AB - (A+B)(u+v) &= AB - (A+B) \left(\frac{b}{A} + \frac{a}{B} \right) c = \\ &= AB - (A+B) \left(\frac{A-c}{A} + \frac{B-c}{B} \right) c = \\ &= AB - 2(A+B)c + (A+B) \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) c^2 = \\ &= \frac{1}{AB} [AB - (A+B)c]^2 \geq 0, \end{aligned}$$

czyli $AB \geq (A+B)(u+v)$. Zatem pierwszy składnik danego w zadaniu wyrażenia spełnia nierówność

$$\frac{ab(A+B)}{ab(A+B)+ABC} \leq \frac{ab(A+B)}{ab(A+B)+(A+B)(u+v)C} = \frac{w}{u+v+w}.$$

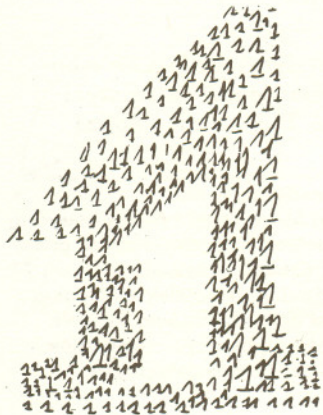
Przez cykliczne przesunięcie oznaczeń wnosimy, że drugi i trzeci składnik rozważanego wyrażenia można oszacować z góry odpowiednio przez liczby

$$\frac{u}{u+v+w}, \quad \frac{v}{u+v+w}.$$

Stąd teza.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

280. Na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC obrano odpowiednio punkty P, Q, R tak, że trójkąt PQR jest równoboczny. Okręgi wpisane w trójkąty ARQ, BPR, CQP mają środki odpowiednio w punktach I, J, K . Załóżmy, że $|IR| = |JR|$. Wykazać, że:
(a) $|IQ| = |KQ|$ oraz $|JP| = |KP|$;
(b) trzy wspólne styczne zewnętrzne dla par rozważanych okręgów wpisanych (nie zawierające boków trójkąta ABC) przecinają się w jednym punkcie.



Rozwiązanie zadania M 701.

Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ i rozpatrzmy n^2 par (x, y) utworzonych przez $1 \leq x \leq n$ oraz $1 \leq y \leq n$. Każda z tych n^2 par jest rozwiązaniem pewnego równania

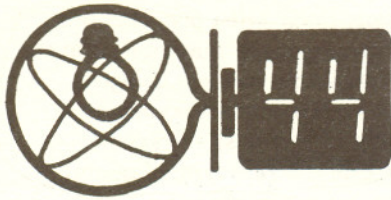
$$(1) \quad |x \sqrt[n]{x}| + |y \sqrt[n]{y}| = b,$$

gdzie $1 < b \leq 2[n \sqrt[n]{n}]$. Gdyby dla każdego b równanie (1) miało mniej niż 1994 rozwiązania, to byłoby

$$2n \sqrt[n]{n} \cdot 1994 \geq 2[n \sqrt[n]{n}] \cdot 1994 \geq n^2.$$

Stąd wynika, że $2 \cdot 1994 \geq n^{2/3}$, a to jest sprzeczność dla dużych n . Istnieje więc przynajmniej jedna liczba a spełniająca warunki zadania.

Uważny Czytelnik dostrzeże, że z naszego rozwiązania wynika więcej: liczb a spełniających warunki zadania jest nieskończenie wiele.



Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 161 (WT=3,65) i 162 (WT=3,65)
z numeru 8/1993

Przemysław Gworys - Częstochowa 39,90
Andrzej Nowogrodzki - Chocianów 28,77
Andrzej Borowski - Aleksandrów K. 25,01

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/1993

Przypominamy treść zadań:

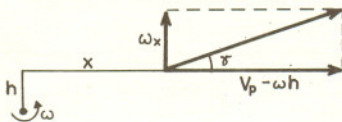
169. Dwaj zawodnicy A i B rozegrali regaty na identycznych jachtach, płynąc w dół rzeki, gdy nie było żadnego wiatru. Zawodnik A zwinął żagle, podczas gdy B próbował wykorzystać pozorny wiatr z przeciwna i halsował (płynął „pod wiatr” okresowo zmieniając kurs). Który wygrał wyścig?



Rozwiązanie zadania M 699.

Niech A, B, C i D będą wierzchołkami danego czworokąta. Jeden z trójkątów ABC, ADC ma pole P_1 nie mniejsze od połowy pola czworokąta – dla ustalenia uwagi niech będzie to $\triangle ABC$. Oznaczmy $L_1 = AB + BC + CA$; z nierówności trójkąta mamy $L_1 < L$. Jeśli wpiszemy okrąg w $\triangle ABC$, to jego promień będzie równy

$$r = \frac{2P_1}{L_1} \geq \frac{P}{L_1} > \frac{P}{L}$$



169. Wygrał zawodnik B (oczywiście, o ile prąd rzeki był dostatecznie szybki, aby wystąpił liczący się efekt). Analiza zagadnienia w układzie związanym z wodą jest nie mniej prawidłowa niż analiza w układzie związanym z powietrzem i brzegami. W tym układzie występuje wiatr przeciwny, który umożliwia halsowanie i wyprzedzenie zawodnika nieruchomego względem wody.

170. Zgodnie z podanym założeniem, pistolet należy uważać za ciało swobodne, czyli spełnione są zasady zachowania pędu i momentu pędu. Oznaczmy przez x drogę przebytą przez pocisk względem lufy (w chwili wylotu z lufy $x = l$), a przez β – kąt obrotu pistoletu. Zatem $v_p = dx/dt$ jest prędkością przesuwu pocisku, a $\omega = d\beta/dt$ – prędkością kątową pistoletu. W nieobrcającym się układzie odniesienia związanym ze środkiem masy pistoletu składowa prędkości pocisku wzdłuż osi lufy jest równa $v_p - \omega h$, a wzdłuż osi prostopadłej ωx (rys.). Te wyrażenia możemy wykorzystać także w układzie nieruchomym (związanym ze środkiem masy układu pistolet + pocisk), gdyż są one wtedy składowymi prędkości względnej, tj. sumy prędkości pocisku i środka masy pistoletu. Z zasady zachowania pędu wynika, że składowe prędkości samego pocisku otrzymamy mnożąc składowe prędkości względnej przez $\frac{M}{M+m}$. Moment pędu całości względem dowolnego punktu jest równy zeru, ale najwygodniej będzie go obliczać względem chwilowego położenia środka masy pistoletu. Wtedy zasada zachowania momentu pędu sprowadza się do równania

$$(1) \quad I\omega = (mh(v_p - \omega h) - m\omega x^2) \frac{M}{M+m}$$

Wprowadzając masę zredukowaną $\mu = \frac{mM}{M+m}$ i przekształcając, otrzymujemy

$$(I + \mu h^2 + \mu x^2) \frac{d\beta}{dt} = \mu h \frac{dx}{dt}, \quad \text{czyli} \quad \frac{d\beta}{dx} = \frac{\mu h}{I + \mu h^2 + \mu x^2}$$

Całkowanie daje nam związek między β i x

$$\beta = \frac{h}{\lambda} \arctg\left(\frac{x}{\lambda}\right),$$

gdzie przez λ oznaczyliśmy $\lambda = \sqrt{(I/\mu) + h^2}$. Szukany „kąt podbicia” α jest sumą kąta β w momencie wylotu pocisku i zaznaczonego na rysunku kąta γ . Tangens tego kąta jest równy

$$\text{tg } \gamma = \frac{\omega x}{v_p - \omega h},$$

a uwzględniając równanie (1) znajdujemy w chwili wylotu

$$\text{tg } \gamma = \frac{\mu h l}{I + \mu l^2}$$

Ostatecznie

$$\alpha = \frac{h}{\lambda} \arctg\left(\frac{l}{\lambda}\right) + \arctg\left(\frac{\mu h l}{I + \mu l^2}\right)$$

Wynik ten jest ścisły i obowiązuje dla dowolnych wartości stałych. Na przykład, dla $I = 0$ otrzymujemy $\alpha = 90^\circ$, gdyż w takiej sytuacji pocisk może się poruszać tylko wzdłuż linii przechodzącej przez punkt początkowy i środek masy pistoletu (linii pionowej). Oczywiście, w praktyce mamy do czynienia raczej z przypadkiem, kiedy $M \gg m$, $I \gg mh^2$, $I \gg ml^2$, a kąty są małe. Wtedy $\alpha \approx \frac{2mhl}{I}$; wyprowadzenie tego wzoru może być znacznie prostsze.



Kącik olimpijski chciałby przedstawiać Czytelnikom *Deltę* kilka przykładowo rozwiązanych zadań, wybranych przez nas z różnych olimpiad matematycznych i konkursów prowadzonych przez wiele czasopism matematycznych całego świata. Mamy nadzieję, że pomoże on młodemu Czytelnikowi biorącemu udział w krajowej olimpiadzie przygotować się do zawodów, natomiast starszym Czytelnikom dostarczy kilku nowych zadań, przy których (naszym zdaniem) miło spędza się czas.

Pierwszy kącik chcielibyśmy poświęcić olimpijskim zadaniom geometrycznym.

Zadanie 1 (Olimpiada kanadyjska '93).

W trójkącie ABC środkowe poprowadzone do boków AB i AC przecinają się pod kątem prostym. Wykazać, że $\text{ctg } B + \text{ctg } C \geq 2/3$.

Rozwiązanie I.

Przyjmijmy oznaczenia takie, jak na rysunku 1. Wykorzystując fakt, że środkowe w dowolnym trójkącie przecinają się w stosunku 2 : 1, oraz wzór na kotangens sumy kątów dostajemy

$$\text{ctg } B = \text{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{ctg } \alpha \text{ctg } \beta - 1}{\text{ctg } \alpha + \text{ctg } \beta} = \frac{(2x/2y) \cdot (2x/y) - 1}{(2x/2y) + (2x/y)} = \frac{2x^2 - y^2}{3xy}.$$

Analogicznie dowodzimy, że $\text{ctg } C = (2y^2 - x^2)/(3xy)$. Stąd

$$\text{ctg } B + \text{ctg } C = \frac{2x^2 - y^2 + 2y^2 - x^2}{3xy} = \frac{x^2 + y^2}{3xy} \geq \frac{2xy}{3xy} = \frac{2}{3},$$

na mocy dobrze znanej nierówności $x^2 + y^2 \geq 2xy$. ■

Rozwiązanie II.

Spójrzmy na rysunek 2. Punkt M jest środkiem odcinka BC , zatem jest również środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCG . Oznaczmy więc długość odcinków MB, MC, MG przez x . Stąd mamy

$$\text{ctg } B + \text{ctg } C = \frac{BH}{AH} + \frac{CH}{AH} = \frac{BC}{AH} \geq \frac{BC}{AM} = \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}. \blacksquare$$

Zadanie 2.

W czworobocianie $ABCD$ kąty płaskie przy wierzchołku A wynoszą po 90° . Udowodnić, że jeśli $AB = AC + AD$, to suma kątów płaskich przy wierzchołku B wynosi 90° .

Rozwiązanie (rysunek 3).

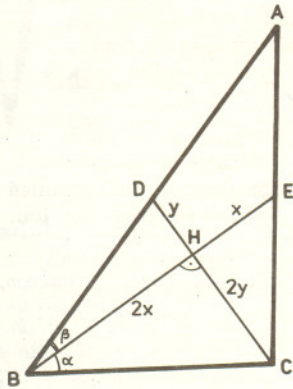
Niech P i Q będą punktami leżącymi na przedłużeniach krawędzi AD i AC , tak aby $AQ = AP = AB$. Rozważmy kwadrat $APRQ$, a w nim trójkąty RCQ, RCQ, RDP . Trójkąty RPD i RQC są przystające odpowiednio do trójkątów BAC i BAD , a więc również trójkąt RCQ jest przystający do trójkąta BDC . Stąd otrzymujemy

$$\angle CBA + \angle ABD + \angle CBD = \angle DRP + \angle QRC + \angle CRD = 90^\circ. \blacksquare$$

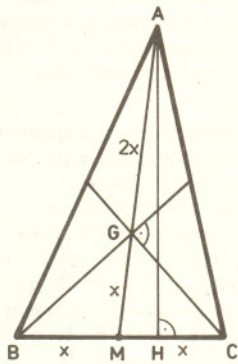
Na koniec zadanie dla Czytelników.

3. Udowodnić, że w dwunastokącie foremnym $A_1 A_2 \dots A_{12}$ przekątne $A_1 A_5, A_2 A_6, A_3 A_8, A_4 A_{11}$ mają punkt wspólny.

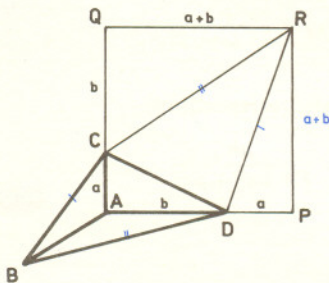
Krzysztof CHEŁMIŃSKI
Waldemar POMPE



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rozwiązanie zadania M 700. Niech $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$. Jeśli x jest liczbą parzystą, to wszystkie potęgi x o wykładniku naturalnym są parzyste, $x^l = 2m_l$ dla $l = 1, 2, \dots$ i dla pewnych całkowitych m_l . Zatem

$$P(x) = 2(a_n m_n + a_{n-1} m_{n-1} + \dots + a_1 m_1) + a_0 = 2M + P(0)$$

jest liczbą nieparzystą, ponieważ $P(0) = a_0$ jest liczbą nieparzystą. Stąd wynika, że $P(x) \neq 0$ dla parzystych x .

Jeśli x jest nieparzyste, to rozumiemy podobnie jak poprzednio: mamy $x^l = 2k_l + 1$ dla $l = 1, 2, \dots$ i dla pewnych całkowitych k_l . Otrzymujemy stąd

$$P(x) = 2(a_n k_n + a_{n-1} k_{n-1} + \dots + a_1 k_1) + a_n + a_{n-1} + \dots + a_0 = 2K + P(1),$$

a więc $P(x)$ jest liczbą nieparzystą, bowiem $P(1)$ jest liczbą nieparzystą. Zatem $P(x) \neq 0$ także dla x nieparzystych. Wielomian P nie ma więc pierwiastków całkowitych.

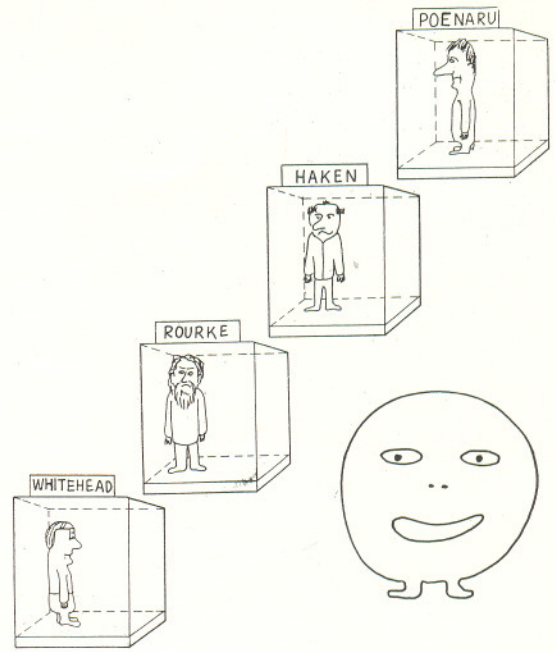
Sfera homotopijna istnieje!!

Dziś w *EPSILONIE* mamy prawdziwy rarytas – „jeszcze ciepła” sensację. Otóż problem, frapujący matematyków od prawie wieku, chyba został w końcu pokonany! Autorzy rozwiązania pamiętali jednak o smutnych przygodach swoich starszych kolegów, którzy rozgłosili wieści o rozstrzygnięciu słynnych hipotez, a później okazało się, że proponowane rozwiązania zawierały błędy i luki (por. dane poniżej). Nie przedstawili zatem swoich wyników na żadnej konferencji, lecz po prostu napisali pracę i po cichu wysłali ją do publikacji. Jeśli recenzenci orzekną, że dowód jest dobry, i tak będą sławni; jeśli zły – nie zyskają sławy innego typu. Nasz kolega, przebywający na stypendium w USA, zdobył maszynopis tej pracy i przesłał go nam. W jaki sposób uzyskał on egzemplarz pracy wysłanej do renomowanego czasopisma, pozostanie jego i naszą słodką tajemnicą.

W 1986 roku świat matematyczny obiegnęła wiadomość, że Colin Rourke i Eduardo Rego udowodnili hipotezę Poincarégo. Dowód ich mieścił się na ponad stu stronach. Po wnikliwej analizie okazało się, że w rozumowaniu są luki i ostatecznie autorzy opublikowali w *Topology* artykuł o tym, jak szukać kontrprzykładu. Pracę tę przestudiowali dwaj młodzi stypendyści przebywający obecnie w *Institute of High and Advanced Study* w Portland w stanie Oregon, Holender Peer van der Fool i Amerykanin B.J. Forster. „Przeżyłi” się oni również przez monstrialne prace Ponéaru z 1989 roku. Zgodnie doszli do sensacyjnego wniosku: hipoteza Poincarégo jest fałszywa! Istnieje trójwymiarowa rozmaitość zwarta, bez brzegu, spójna i jednospójna, która nie jest homeomorficzna ze sferą trójwymiarową. Pomysł konstrukcji znaleźli w lukach rozumowania Rourkego i Rego oraz w niejasności przeraźliwie długich wywodów Ponéaru. Od strony technicznej nie było w pomysle zbyt wielu rewelacji; van der Fool i Forster posłużyli się dobrze znaną i modną ostatnio metodą chirurgii (warto przypomnieć, że nazwa ta pochodzi z angielskiego „surgery”, a po rosyjsku metoda nazywa się pieriestrojka).

Ze sfery trójwymiarowej należy wyciąć pewien obiekt i w miejsce wycięcia odpowiednio wkleić inny obiekt, względnie ten sam tylko inaczej położony. Cały problem polega na znalezieniu tego obiektu lub rodziny obiektów oraz sposobu wycinania i wklejania. Matematycy postawili pytanie: co będzie, gdy zamiast węzłów zwykłych wytnie się ze sfery trójwymiarowej węzły dzikie.

Do niedawna nie było metod pozwalających badać takie sytuacje, lecz ostatnio Yung Kam Ping i Claud de Derrirre wypracowali efektywne techniki (tzw. szeregi formalne Derrirre’a–Pinga, dzikie diagramy Heegaarda nazwane dzikimi *H*-diagramami), za pomocą których uzyskali zadziwiające rezultaty. Van der Fool i Forster w sposób istotny skorzystali z rezultatów Derrirre’a i Pinga dodając wiele nowych pomysłów; do najciekawszych należy tzw. metoda oszwajania. Jest to



– To tylko niektóre okazy z mojej bogatej kolekcji.

Rysunek z książki K. Ciesielskiego i Z. Pogody „Bezmiar matematycznej wyobraźni” – w księgarniach na początku 1994 roku.

blaskotliwy zespół tricków pozwalających na panowanie nad chirurgią na dzikich węzłach i sferach łączący techniki topologii czterowymiarowej z trójwymiarową.

Nie ma tu, niestety, miejsca, aby szczegółowo opisać konstrukcję sfery homotopijnej. Należy jednak zaznaczyć, że konstrukcja jest stosunkowo przejrzysta, choć jeszcze „gorąca” i trzeba ją spokojnie przeanalizować.

Wybrane fakty z najnowszej historii matematyki

- 1934 – H. Whitehead ogłasza dowód hipotezy Poincarégo. Dowód okazuje się błędny.
- 1958 – K. Koseki ogłasza dowód hipotezy Poincarégo. Dowód okazuje się błędny.
- 1964 – W. Haken ogłasza dowód hipotezy Poincarégo. Dowód okazuje się błędny.
- 1964 – V. Ponéaru ogłasza dowód hipotezy Poincarégo. Dowód okazuje się błędny.
- 1964 – de Branges i Rovnyak ogłaszają dowód hipotezy Ramanujana–Petersona. Dowód okazuje się błędny.
- 1984 – de Branges ogłasza dowód hipotezy Bieberbacha. Długo nikt nie chce w to uwierzyć i sprawdzić bardzo długiego dowodu, głównie ze względu na wydarzenie z roku 1964. Tymczasem dowód okazuje się poprawny.
- 1984 – H. Matsumoto ogłasza dowód hipotezy Riemanna. Dowód okazuje się błędny.
- 1986 – C. Rourke i E. Rego ogłaszają dowód hipotezy Poincarégo. Dowód okazuje się błędny.
- 1988 – Y. Miyaoka ogłasza dowód Wielkiego Twierdzenia Fermata. Dowód okazuje się błędny.
- 1993 – A. Wiles ogłasza dowód Wielkiego Twierdzenia Fermata, po kilku miesiącach J. Coates znajduje lukę w dowodzie.

A.P.