

Od stycznia 1994
 największą znaną liczbą pierwszą
 jest $2^{859433} - 1$

SPIS TREŚCI

NUMERU 3(238)

O równoważności dwóch słynnych nierówności <i>Henryk Pawłowski</i>	str. 1
Przemiany jądrowe – współczesna alchemia <i>Maria Kaczmarczyk</i>	str. 1
Jest w próżni niespożyta siła <i>Anna Okopińska</i>	str. 2
Mikrosoczewkowanie grawitacyjne <i>Tomasz Kwast</i>	str. 5
Mała Delta	str. 6
Zadania	str. 8
Drobiazgi	str. 9
O czworoscianie równościenne <i>Waldemar Pompe</i>	str.10
Symbol Newtona – inaczej <i>Iłona Królak</i>	str.13
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Fizycy	str.16
Epsilon	str.17

W następnym numerze:

Enigmat Gemingi

Okładkę wykonał
Bernard BADZIOCH

Wydawca:
 Uniwersytet Warszawski
 Krakowskie Przedmieście 26/28
 00-927 Warszawa

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astrofizyczny miesięcznik popularny
 Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego
 i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
 wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula
 Bogdan Cichoński
 Roman Duda
 Jan A. Gaj
 Tomasz Hofmokl – wiceprzewodniczący
 Tadeusz Jarzębowski
 Marcin Kubiak
 Andrzej Mąkowski
 Andrzej Pelczar
 Zbigniew Płochocki
 Zdzisław Pogoda
 Konrad Rudnicki
 Zbigniew Semadeni
 Grzegorz SitarSKI
 Józef I. Smak
 Kazimierz Stępień
 Mieczysław Subotowicz
 Andrzej Szymacha
 Andrzej Woźszyk
 Wacław Zawadowski

Redaguje kolegium w składzie:

Krzysztof Biesaga
 Piotr Hajlasz
 Jan Kalinowski – z-ca red. nac.
 Krystyna Kordos – sekr. red.
 Marek Kordos – red. nac.
 Tomasz Kwast
 Stanisław Mrówczyński
 Anna Rudnik
 Joanna Udalska

Adres Redakcji:

ul. Smyczkowa 5/7

02-678 Warszawa

tel. 43-02-43 wewn. 21

HAJLASZ@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w Zakładach Graficznych
 w Warszawie, ul. Srebrna 16

Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY w AMOS-ie

Od stycznia 1993 r. prenumeratę „Deltę” prowadzi również firma AMOS, 01-506 Warszawa, ul. Szenwalda 1 (tel. 39-17-52). Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w pierwszym półroczu 1994 roku wynosi 8 000,-zł, a w drugim półroczu 10 000,-zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru wynosi w pierwszym półroczu 1994 r. 20 000,-zł, a w drugim – 22 000,-zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą, odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! AMOS dostarcza „Deltę” pod wskazany adres nie pobierając dodatkowej opłaty. Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Blankiet pocztowy na prenumeratę „Deltę” w AMOS-ie zamieszczamy na str. 7/8.

Konto AMOS-u: **PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136**

WARUNKI PRENUMERATY w RUCH-u

- Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
- Cena prenumeraty na III kwartał 1994 r. wynosi 30 000,- zł.
- Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
- Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
 - na teren kraju
 - jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób,
 - na zagranicę
 - „Ruch” S.A. Oddział Warszawa, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – **dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty**, z wyjątkiem zlecenia dostawy pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni pokrywa prenumerator.
- Terminy przyjmowania prenumeraty:
 - na kraj i zagranicę – do 20 XI na I kwartał roku następnego
 - do 20 II na II kwartał
 - do 20 V na III kwartał
 - do 20 VIII na IV kwartał.

Cena 1 egzemplarza 8 000,- zł

O równoważności dwóch słynnych nierówności

Chyba nie sposób wyobrazić sobie kogoś, kto w latach szkolnych interesując się prawdziwie matematyką nie zetknąłby się z nierównością Bernoulliego czy też z nierównością Cauchy'ego. Są to bodaj najbardziej znane nierówności elementarne.

Nierówność Bernoulliego to nierówność postaci

$$(B) \quad (1+x)^n \geq 1+nx,$$

prawdziwa dla każdego $x > -1$ oraz dla każdego całkowitego, nieujemnego n .

Nierównością Cauchy'ego nazywa się nierówność między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną liczb nieujemnych, tj. nierówność

$$(C) \quad \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n},$$

gdzie n jest dowolną liczbą naturalną, x_1, x_2, \dots, x_n – liczbami nieujemnymi.

Poniżej wykazemy, że nierówności te są równoważne.

1. (B) \Rightarrow (C).

Przyjmijmy od razu, że wszystkie x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) są dodatnie, gdyż jeśli któraś z nich jest zerem, to nie ma czego dowodzić.

Wprowadźmy, dla wygody, następujące oznaczenia:

$$A_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad G_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Dla każdego $k = 2, 3, \dots, n$, mamy $\frac{A_k}{A_{k-1}} > 0$, czyli $\frac{A_k}{A_{k-1}} - 1 > -1$, więc na mocy nierówności Bernoulliego mamy:

$$\begin{aligned} \left(\frac{A_k}{A_{k-1}}\right)^k &= \left(1 + \left(\frac{A_k}{A_{k-1}} - 1\right)\right)^k \geq 1 + k \cdot \left(\frac{A_k}{A_{k-1}} - 1\right) = \\ &= \frac{A_{k-1} + kA_k - kA_{k-1}}{A_{k-1}} = \frac{x_k}{A_{k-1}}, \end{aligned}$$

czyli

$$A_k^k \geq x_k A_{k-1}^{k-1}.$$

Wobec tego

$$A_n^n \geq x_n A_{n-1}^{n-1} \geq x_n x_{n-1} A_{n-2}^{n-2} \geq \dots \geq x_n x_{n-1} \dots x_2 A_1^1 = G_n^n,$$

skąd

$$A_n \geq G_n.$$

2. (C) \Rightarrow (B).

Dla $n = 1$ nierówność (B) jest oczywista. Także, przy $n \geq 2$ i $-1 < x \leq -\frac{1}{n}$, nie ma czego dowodzić.

Niech więc $n \geq 2$ i $x > -\frac{1}{n}$. Wówczas $nx + 1 > 0$ i na mocy nierówności (C) zastosowanej do n liczb: $1 + nx, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n-1}$ mamy

$$\begin{aligned} (1+x)^n &= \left(n \cdot \frac{1+x}{n}\right)^n = \left(\frac{(1+nx) + \overbrace{1+1+\dots+1}^{n-1}}{n}\right)^n \geq \\ &\geq (1+nx) \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{n-1} = 1+nx. \end{aligned}$$

Henryk PAWŁOWSKI

Przemiany jądrowe – współczesna alchemia

Maria KACZMARCZYK

Promieniotwórczość naturalna niektórych jąder atomowych (*Delta 11/1992*) nie wyczerpuje całości zjawisk fizyki jądrowej, w których przemiany jądrowe prowadzą do wyzwolenia energii. Cechą rozpadów promieniotwórczych jest to, że przebiegają one samorzutnie, bez żadnej ingerencji zewnętrznej. Jednym z warunków ich wystąpienia jest zachodzenie tzw. dodatniego bilansu energetycznego. Oznacza to, że energia spoczynkowa jądra rozpadającego się musi być większa od sumy energii spoczynkowych jądra końcowego i emitowanych cząstek.

Na przykład dla rozpadu alfa jądra polonu ^{210}Po (liczba masowa $A = 210$, liczba atomowa $Z = 84$), w wyniku którego powstaje jądro ołowiu ^{206}Pb ($A = 206$, $Z = 82$), bilans taki opisuje równanie

$$(1) \quad Q = M(^{210}\text{Po})c^2 - (M(^{206}\text{Pb}) + M(^4\text{He}))c^2 > 0.$$

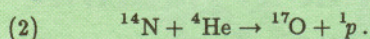
Symbolem Q oznaczono energię tego rozpadu, $M(A)$ oznacza masę jądra atomu A .

Energia spoczynkowa E_0 obiektu o masie spoczynkowej m_0 wyraża się wzorem Einsteina $E_0 = m_0 c^2$, w którym c jest prędkością światła w próżni. Jeśli masa będzie wyrażona w megaelektronowoltach (MeV), to współczynnik przeliczeniowy masy na energię będzie równy $c^2 = 1$.

Dla wymienionego rozpadu (w przypadku, gdy jądro ^{206}Pb powstaje w najniższym stanie energetycznym) energia ta jest równa $Q = 5,407$ MeV.

Rok 1919 wyznaczył początek nowej dziedziny badań z zakresu tzw. sztucznych przemian jądrowych. W tym roku angielski fizyk Ernest Rutherford przeprowadził pierwszą sztuczną przemianę jądrową dokonując zderzenia cząstek alfa (jąder ^4He) z jądrami azotu ^{14}N . Jak się okazało, zderzenie to nie miało wyłącznie charakteru sprężystego zderzenia dwu klasycznie rozumianych kuleczek, lecz doprowadziło do wytworzenia jądra tlenu ^{17}O i protonu. Przemianę tę, zwaną również reakcją jądrową, można

zapisać symbolicznie następująco:



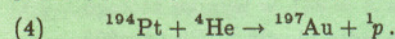
Wyrażenie na energię Q reakcji, dla przypadku gdy jądro tlenu ${}^{17}\text{O}$ powstaje w najniższym (podstawowym) stanie energetycznym, jest dane wzorem

$$(3) \quad Q = (M({}^{14}\text{N}) + M({}^4\text{He}))c^2 - (M({}^{17}\text{O}) + M({}^1\text{p}))c^2.$$

Doświadczenie Rutherforda miało znaczenie epokowe. Urzeczywistniło ono po raz pierwszy odwieczne marzenia alchemików o przemianie pierwiastków.

W wiekach VIII–XVI alchemicy poszukiwali „kamienia filozoficznego”, tj. substancji, która mogłaby przemieniać metale pospolite w cenny metal szlachetny – złoto. Posiadanie kamienia filozoficznego otwierałoby właścicielowi drogę do nieograniczonego bogactwa.

Od czasu Rutherforda przebadano ogromną liczbę rozmaitych reakcji jądrowych, w tym także takie, w których powstają atomy złota, na przykład:



W tym miejscu Czytelnik może ze zdziwieniem zapytać: skoro teraz znamy sposoby na realizację marzeń alchemików, to dlaczego nie produkujemy tyle złota, aby było go pod dostatkiem? Odpowiedź jest prosta: to kosztuje, i to dużo!

Otóż w przypadku procesu (4) energia reakcji jest ujemna: $Q = -8,436 \text{ MeV}$. Jest to przykład tzw. reakcji progowej. Oznacza to, że warunkiem koniecznym do jej zaistnienia jest, aby cząstki alfa były przyspieszane do energii kinetycznej co najmniej równej $8,610 \text{ MeV}$ (energia kinetyczna musi być wyższa niż Q , gdyż w trakcie zderzenia platyna doznaje odrzutu). A z tym wiąże się olbrzymie koszty budowy akceleratorów przyspieszających naładowane cząstki do odpowiednio wysokich energii, co w połączeniu z niewielką efektywnością zachodzenia żądanych reakcji jądrowych czyni taką produkcję wielce nieopłacalną.

Atomy złota mogą być wytwarzane również w procesach pośrednich. Przykładem może być reakcja wychwytu radiacyjnego neutronów (oznaczana zapisem (n, γ)) przez jądra platyny ${}^{196}\text{Pt}$, a następnie rozpad β^- wytworzonych

Jest w próżni niespożyta siła

Anna OKOPIŃSKA

W fizyce próżnią nazywa się najprostszy stan układu fizycznego, a więc stan o najniższej energii. W fizyce klasycznej (niekwantowej) jest to stan całkowitego spoczynku. Natomiast w fizyce kwantowej nie może istnieć stan, w którym nic się nie dzieje. Dla przykładu rozważmy oscylator harmoniczny – cząstkę o masie m pod działaniem siły Hooke’a $F = -m\omega^2 x$. Przyjmijmy, że prędkości są małe w porównaniu z prędkością światła i możemy używać praw fizyki nierelatywistycznej.

Ruch oscylatora klasycznego odbywa się zgodnie z rozwiązaniem równania Newtona

$$(1) \quad x(t) = A \sin(\omega t), \quad p(t) = mA\omega \cos(\omega t),$$

gdzie $x(t)$ jest wychyleniem z położenia równowagi, a $p(t)$ jest pędem cząstki.

Całkowita energia dana jest więc przez zależność

$$(2) \quad E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}$$

i najniższa możliwa wartość $E = 0$ odpowiada $A = 0$, a więc sytuacji, gdy $x = 0$ i $p = 0$.

W fizyce kwantowej sytuacja jest zupełnie inna. Oscylator kwantowy może znajdować się w stanach numerowanych liczbami całkowitymi $n \geq 0$, którym odpowiada energia

$$(3) \quad E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right),$$

gdzie $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, a h jest stałą Plancka. Tak więc najniższa energia wynosi

$$(4) \quad E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$$

i jest różna od zera. Efekt ten, nazywany drganiami zerowymi, wyjaśnia wiele własności ciał fizycznych, na przykład ciepła właściwe, paramagnetyzm, niekrzepliwość ${}^4\text{He}$ oraz anomalne rozpraszanie promieni X na kryształach w niskich temperaturach.

Współczesna teoria cząstek elementarnych opisuje świat przy użyciu pól kwantowych. Są to pola materii (elektronów, kwarków, neutronów, ...) i pola cząstek przenoszących oddziaływania (fotonów, gluonów, ...). Pole kwantowe można sobie wyobrażać jako układ nieskończenie wielu oscylatorów harmonicznym. Próżnia – stan pól kwantowych o najniższej energii, nie zawierający cząstek materii ani kwantów oddziaływania – odpowiada drganiom zerowym oscylatorów. Fluktuacje próżni, które są źródłem dodatniej energii próżni, można wyjaśnić powstawaniem wirtualnych par cząstka-antycząstka o energii ΔE , żyjących tak krótko, że spełniona jest zasada nieoznaczoności Heisenberga

$$(5) \quad \Delta t \Delta E \leq \frac{\hbar}{2}.$$

Pole kwantowe ma nieskończoną liczbę stopni swobody, gdyż w każdym punkcie przestrzeni może przybierać niezależne wartości.

Całkowita energia drgań zerowych otrzymana przez całkowanie po wszystkich stopniach swobody, równa

$$(6) \quad \sum \frac{1}{2} \hbar \omega,$$

jest nieskończona. Pojawianie się nieskończonych wartości jest dobrze znaną cechą rachunków w kwantowej teorii pola. Nieskończoności te można wyeliminować z wyrażeń dla wielkości obserwowalnych za pomocą procedury renormalizacji. Ponieważ parametry wyjściowe teorii są niemierzalne, można przyjąć, że są one nieskończone i dobrać je tak, aby kasowały pojawiające się w rachunkach nieskończoności. Renormalizacja energii polega na dodaniu nieskończonej wielkości E_∞ dobranej tak, aby energia drgań zerowych w pustej przestrzeni była równa zeru

$$(7) \quad \sum \frac{1}{2} \hbar \omega_0 + E_\infty = 0.$$

Gdy w przestrzeni umieścimy powierzchnie ograniczające, na których pola znikają, to częstości drgań zerowych ulegają modyfikacji i energia różni się od energii w pustej przestrzeni o skończoną wartość, którą możemy zmierzyć! W 1948 roku H.B. Casimir wykazał, że energia próżni dla pola elektromagnetycznego, zamkniętego pomiędzy równoległymi płaszczyznami przewodzącymi o powierzchni S i odległymi o d , wynosi

$$(8) \quad \sum \frac{1}{2} \hbar \omega + E_\infty = -\frac{\pi \hbar c S}{720 d^3}.$$

Takiej energii potencjalnej odpowiada przyciąganie się płaszczyzn z siłą równą

$$(9) \quad F_{Casimir} = \frac{\pi \hbar c}{240 d^4}$$

na jednostkę powierzchni. Przypomnijmy, że płaszczyzny są nie naładowane, więc gdyby obowiązywały prawa elektrodynamiki klasycznej, efekt taki nie mógłby wystąpić. Pomiar wykonany w 1958 roku przez M.J. Sparnaya w laboratoriach Philipsa wykazał przyciąganie się płyt metalowych odległych o $d = 0,5 \mu$ z siłą $F = 0,2 \text{ dyn/cm}^2$. Niestety, pomiary te są niezwykle trudne i do dziś nie przeprowadzono ilościowego potwierdzenia wzoru Casimira.

Rozważano też inne efekty wywołane fluktuacjami próżni w ograniczonej przestrzeni. Casimir i Polder wykazali w 1948 r., że siła oddziaływania jednostki powierzchni na atom znajdujący się w odległości d od przewodzącej płaszczyzny wynosi

$$(10) \quad F = F_{C-P} + F_{elstat} + F_{interf}.$$

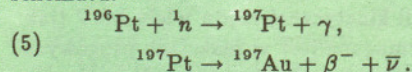
Siła Casimira-Poldera dana wyrażeniem

$$(11) \quad F_{C-P} = -\frac{3\alpha \hbar c}{2\pi d^5},$$

gdzie α jest współczynnikiem polaryzowalności cząstki, pochodzi od fluktuacji próżni i wnosi dominujący wkład przy dużych odległościach d . F_{elstat} jest oddziaływaniem elektrostatycznym dipola (powstającego na skutek fluktuacji ładunku w atomie) z płaszczyzną przewodzącą, a pozostałe wyrazy uwzględniające efekty interferencyjne można wyznaczyć przy użyciu elektrodynamiki kwantowej.

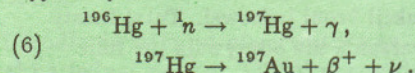
Eksperyment mający na celu potwierdzenie efektu Casimira-Poldera został przeprowadzony dopiero w 1993 roku na uniwersytecie w Yale (USA) przez grupę Hindsa. Wiązka atomów sodu była przepuszczana wzdłuż ścian klina utworzonego przez dwie płyty, które u dołu stykały się, a u góry odstęp między nimi wynosił $1,2 \mu\text{m}$. Płyty wykonane z idealnie płaskich warstw krzemionki o wymiarach $8 \times 30 \text{ mm}$ (z dokładnością 10^{-6} mm)

promieniotwórczych jąder ^{197}Pt według schematu:



Reakcje te, chociaż możliwe do przeprowadzenia, w odniesieniu do „produkcji” złota są też nieopłacalne, choćby z tej przyczyny, że platyna jest metalem droższym od złota.

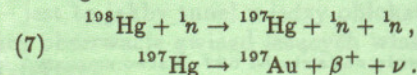
Innym przykładem pośredniego procesu prowadzącego do wytworzenia atomów ^{197}Au jest reakcja (n, γ) na rtęci, która jest względnie tanim surowcem wyjściowym:



Można ją zrealizować praktycznie, umieszczając próbkę rtęci w kanale reaktora jądrowego w strumieniu neutronów spowolnionych do energii poniżej 1 eV (tzw. neutronów termicznych). Wytworzone wtedy jądra ^{197}Hg są nietrwałe, ulegają rozpadowi promieniotwórczemu β^+ z okresem połowicznego zaniku $T_{1/2} = 64,1$ godziny.

Przez okres połowicznego zaniku pierwiastka promieniotwórczego rozumie się czas, po upływie którego połowa jąder promieniotwórczych w próbce ulega rozpadowi.

Warto jednak zauważyć, że atomy złota ^{197}Au w środowisku neutronów termicznych same wychwytyują neutrony ulegając przemianie w atomy ^{198}Au , które z okresem $T_{1/2} = 2,696$ dni ulegają rozpadowi β^- . Jądrem końcowym tego rozpadu jest rtęć ^{198}Hg . Zatem, złoto wytworzone w przykładowym procesie opisanym równaniem (6) powinno być dostatecznie szybko usuwane ze strumienia neutronów, aby zabezpieczyć je przed zniszczeniem. Uwagę tę można uczynić też w odniesieniu do wytwarzania złota w reakcji $(n, 2n)$ na rtęci ^{198}Hg poddanej oddziaływaniu neutronów prędkich o energii 14 MeV:

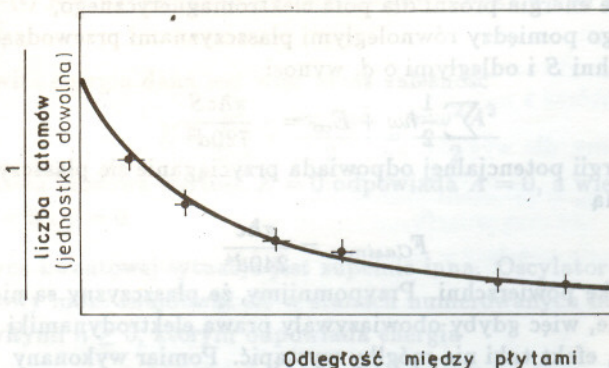
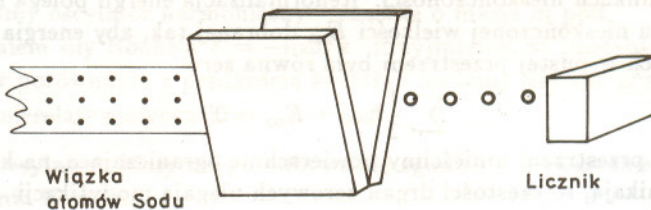


W podobny sposób, a więc wykorzystując odpowiednie reakcje jądrowe, można byłoby wytwarzać również inne drogocenne metale, na przykład platynę, srebro, rod. Jednak, jak już wspominaliśmy, główną przyczyną nieopłacalności takich prób są ogromne koszty, jakie należałoby ponieść

na zbudowanie akceleratorów cząstek naładowanych przyspieszających je do energii kinetycznej rzędu wielu MeV (jak to wymagane jest w reakcjach progowych, na przykład (4)). Koszty te znacznie przekroczyłyby wartość wytworzonych drogocennych metali. Omawiana metoda otrzymywania innych pierwiastków drogą reakcji jądrowych i procesów pośrednich jest jednak stosowana na przykład do wytwarzania izotopów promieniotwórczych, takich jak ^{24}Na , ^{32}P , ^{131}I , a nawet ^{198}Au , mających specjalne zastosowanie w medycynie. Podobnymi metodami uzyskuje się również pluton wykorzystywany jako paliwo jądrowe do produkcji broni jądrowej. Tutaj koszty wytwarzania nie odgrywają już roli.

Osiągnięty w XX wieku poziom wiedzy o budowie materii i przemianach jądrowych pozwala nam wyjaśnić istotę niepowodzeń alchemików. Stosowane przez alchemików metody, w zasadzie chemiczne, mogły najwyżej powodować zmiany w zewnętrznych powłokach elektronowych atomów nie sięgając do centralnie umieszczonego jądra atomowego. O przynależności atomu do określonego rodzaju pierwiastka chemicznego decyduje liczba protonów Z w jądrze atomowym. Nie można więc przemienić atomu jednego pierwiastka w atom innego pierwiastka (w tym przypadku w atom złota), jeżeli nie zmieni się liczby protonów w jądrze. Można tego dokonać wykorzystując reakcje jądrowe lub rozpady promieniotwórcze. Ale alchemicy nie znali budowy atomu ani nie dysponowali urządzeniami do wywoływania reakcji jądrowych, dlatego też ich poszukiwania i metody były bezskuteczne. Teraz wiemy, jak tego dokonać, i czasami w zamierzony sposób jest to czynione dla celów specjalnych. Choć koszty uzyskania złota tą drogą są wysokie, pozostaje nam satysfakcja, że wiemy, jak osiągnąć to, czego nie mogły osiągnąć pokolenia alchemików. A wiedza jest cenniejsza niż złoto!

zostały napyłone chromem i złotem. Mierzono liczbę atomów, które przeszły na różnych wysokościach od dołu klina i wykreślono wyniki pomiarów w zależności od odległości między płytami na danej wysokości. Otrzymaną zależność porównano z wynikami rachunków, w których przyjęto, że odchylenie atomów spowodowane jest siłą Casimira-Poldera. Wyniki doświadczalne zgadzają się bardzo dobrze z wynikami teoretycznymi w zakresie odległości $0,7\text{--}1,2\ \mu\text{m}$, przy których siła Casimira-Poldera wnosi dominujący wkład do całkowitej siły działającej na atomy.



Pomiar siły Casimira-Poldera stanowi ilościowe potwierdzenie różnicy energii drgań zerowych pomiędzy przestrzenią ograniczoną i nieograniczoną. Innym obserwowalnym efektem kwantowo-polowej natury oddziaływań elektromagnetycznych jest różnica energii drgań zerowych w zewnętrznym polu i bez pola. Daje ona wkład do niewielkiego przesunięcia poziomów energetycznych atomu wodoru w stosunku do przewidywań danych przez równanie Diraca. Przesunięcie to, zmierzone przez W.E. Lamba i R.C. Retherforda w latach 1947–1953, jest w znakomitej zgodności z rezultatami elektrodynamiki kwantowej. Siła Casimira-Poldera, podobnie jak przesunięcie Lamba-Retherforda, stanowi ważny dowód potwierdzający prawidłowość opisu oddziaływań elementarnych przy użyciu pól kwantowych.



Rozwiązanie zadania M 697. Łatwo zauważyć, korzystając ze wzoru dwumianowego, że liczba $(\sqrt{6} + 2)^{2n} + (\sqrt{6} - 2)^{2n}$ jest całkowita. Oczywiście, jest ona większa od $(\sqrt{6} + 2)^{2n}$. Ponieważ $0 < (\sqrt{6} - 2)^{2n} < 1$, to

$$N = (\sqrt{6} + 2)^{2n} + (\sqrt{6} - 2)^{2n}.$$

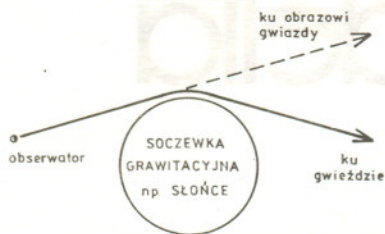
Ponownie korzystając ze wzoru dwumianowego mamy

$$\begin{aligned} N &= (10 + 4\sqrt{6})^n + (10 - 4\sqrt{6})^n = 2^n((5 + 2\sqrt{6})^n + (5 - 2\sqrt{6})^n) = \\ &= 2^n \left((5^n + 5^n) + \left(\frac{n(n-1)}{2} \cdot 5^{n-2} \cdot 4^2 \cdot 6 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 5^{n-2} \cdot 4^2 \cdot 6 \right) + \dots \right) = 2^{n+1} \cdot k \end{aligned}$$

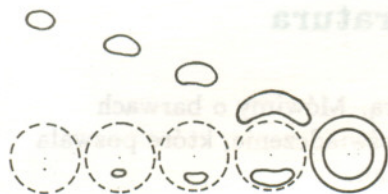
dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ (liczba w największym nawiasie w poprzedniej linijce jest parzysta, bowiem każdy składnik jest naturalny i występuje dwukrotnie).

Mikrosoczewkowanie grawitacyjne

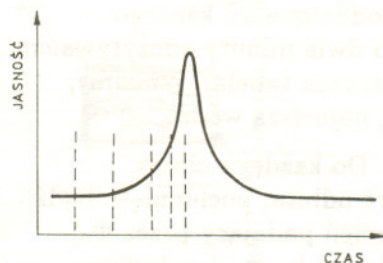
Tomasz KWAST



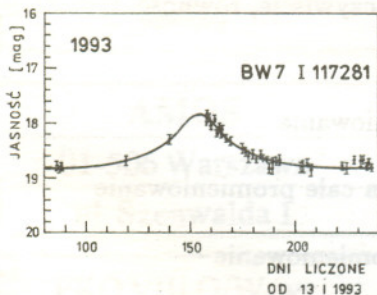
Rys. 1. Ugięcie promienia świetlnego w pobliżu dużej masy spełniającej rolę soczewki grawitacyjnej. Kąt ugięcia mocno wyolbrzymiony.



Rys. 2. a. Zniekształcenie obrazu źródła światła skrywającego się za punktową soczewką grawitacyjną; wyobraża ją punkt w środku okręgu narysowanego linią przerywaną, a sam okrąg obrazuje pierścień Einsteina.



b. Jasność źródła światła w trakcie tego zjawiska (na osiach jednostki umowne). Linie przerywane odpowiadają fazom przedstawionym na rys. 2a.



Rys. 3. Przebieg jasności gwiazdy w oknie Baadego zaobserwowany przez zespół polskich astronomów w 1993 roku. Punkty to obserwacje, linia ciągła to przebieg jasności dopasowany na podstawie OTW.

Do stycznia 1994 roku grupa polskich astronomów odkryła cztery zjawiska mikrosoczewkowania grawitacyjnego.

Według ogólnej teorii względności (OTW) wskutek obecności materii we Wszechświecie przestrzeń nie jest płaska. Mówiąc „po ludzku”, przejawem krzywizny przestrzeni powinno być nieprostoliniowe rozchodzenie się światła. Światło przelatując w pobliżu jakiejś (dużej) masy powinno zostać ugięte ku niej, pozornie tak, jakby fotony po prostu ważyły. W rezultacie zjawisko wygląda podobnie do załamania światła przez zwykłą soczewkę – stąd jego nazwa: soczewkowanie grawitacyjne (patrz np. *Delta* 5/1982, *Postępy Astronomii* 3/1993, *Urania* 6/1993). Każda gwiazda zawsze będzie widoczna na przedłużeniu promienia bezpośrednio wpadającego do oka obserwatora, a nie tam, gdzie jest „naprawdę” (rys. 1). Efekt ten został po raz pierwszy zaobserwowany jako zgodne z przewidywaniami przesunięcie (maksymalnie o 1,75”) gwiazd widocznych w pobliżu brzegu tarczy Słońca podczas jego zaćmienia w 1919 r., co stało się jednym z najpoważniejszych dowodów poprawności einsteinowskiej teorii grawitacji.

Gdy odległości soczewki grawitacyjnej i źródła światła od obserwatora są ogromne i obiekty te znajdują się niemal na jednej prostej, OTW przewiduje zniekształcenie i pojaśnienie obrazu źródła, ponieważ jego promieniowanie dociera wtedy do obserwatora wieloma różnymi drogami. Wreszcie gdyby znalazły się dokładnie na jednej prostej, pojaśnienie byłoby maksymalne, a wskutek osiowej symetrii tej konfiguracji obrazem źródła stałby się pierścień (tzw. pierścień Einsteina) (rys. 2). Jego kątowy promień jest równy

$$\Theta = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{d_2 - d_1}{d_1 d_2}},$$

gdzie d_1, d_2 oznaczają odległości soczewki i źródła, M masę soczewki, G stałą grawitacji, c prędkość światła. Jeżeli masa ta jest rzędu masy Słońca (przeciętnej gwiazdy), a odległości są rzędu kilku kiloparseków, promień pierścienia Einsteina jest drobnym ułamkiem sekundy łuku (rzędu 10^{-4}), a więc może być niemożliwy do zmierzenia i cała struktura obrazu niemożliwa do rozpoznania. Powinno się jednak dać zmierzyć stosunkowo łatwo pojaśnienie obrazu. Zjawisko to nazwane zostało mikrosoczewkowaniem grawitacyjnym. Należy więc cierpliwie obserwować wiele gwiazd i jeżeli któraś z nich pojaśnieje według określonego przez OTW prawa w skali miesięcy, może to oznaczać, że przesunął się przed nią obiekt spełniający wtedy rolę soczewki grawitacyjnej.

Pomysł takiego programu obserwacyjnego przedstawił kilka lat temu pracujący w USA polski astronom Bohdan Paczyński. Z jego oszacowań wynika, że aby zobaczyć jeden przypadek mikrosoczewkowania, trzeba śledzić jasności – powiedzmy – miliona gwiazd przez rok. Dzięki istnieniu kamer CCD i komputerów zdolnych opracować gigabajty danych przedsięwzięcie to nie jest tak absurdalne, jak mogłoby się z początku zdawać. Przynajmniej dwie grupy obserwatorów doniosły już o sukcesie. Jedna (astronomów australijskich i amerykańskich), kierowana przez Charlesa Alcocka, zaobserwowała pojaśnienie w marcu 1993 r. gwiazdy w Wielkim Obłoku Magellana o 2 wielkości gwiazdowe. Drugą jest zespół polskich astronomów (Andrzej Udalski, Michał Szymański, Janusz Kałużny, Marcin Kubiak, Wojciech Krzemiński i Amerykanin – Mario Mateo; projekt finansowany jest przez Komitet Badań Naukowych) obserwujących teleskopem w Las Campanas Observatory w Chile najgęściej wypełnione gwiazdami obszary Drogi Mlecznej. Oni z kolei wykryli, że w czerwcu 1993 r. pojaśniała o jedną wielkość gwiazdową jedna z mrowia gwiazd w tzw. oknie Baadego (rys. 3) – jest to jakby tunel między obłokami materii międzygwiazdowej umożliwiający obserwacje gwiazd leżących właściwie już w centralnym zgęszczeniu naszej Galaktyki.

Jeżeli soczewkowa interpretacja obserwacji przetrzyma wszelkie testy, będzie to miało wielkie znaczenie z kilku powodów. Po pierwsze, stanie się jeszcze jednym dowodem słuszności OTW. Po drugie, stanie się argumentem za obecnością w naszej Galaktyce niewidocznej dotychczas materii występującej przynajmniej w formie zwartych ciał (brązowe karły, obiekty planetopodobne). Po trzecie, masa ta musi mieć wpływ na geometrię i ewolucję naszego Wszechświata. Jednak o ilości tej formy ciemnej materii można będzie mówić dopiero w przyszłości, gdy zarejestruje się znacznie więcej takich zjawisk.



Kolor a temperatura

Jesteśmy skłonni wiązać kolory z temperaturą. Mówimy o barwach ciepłych i zimnych. Poniżej opisuję proste doświadczenie, które pozwala dostrzec obiektywny charakter takiego związku.

Do doświadczenia użyłem czterech cieczy: atramentu, mleka, wody i zielonego płynu do mycia naczyń. Cieczami tymi wypełniłem jednakowe, niewielkie, płaskie naczynka, które umieściłem we wgłębieniach w białej styropianowej płycie. W każdym naczynku znajdował się termometr. Nad tak wykonanym zestawem umieściłem żarówkę o mocy 150 W w odległości około 16 cm od powierzchni płyty. Żarówka, będąca jedynym źródłem ciepła w pomieszczeniu, była równo oddalona od każdego z czterech naczynek. Włączyłem żarówkę i co dwie minuty odczytywałem temperatury cieczy. Wyniki pomiarów przedstawia tabela. Widzimy, że najwyższą temperaturę osiągnął atrament, najniższą woda.

Spróbujmy zrozumieć, dlaczego tak się stało. Do każdej z cieczy dociera strumień energii. Energia ta może być odbita, pochłonięta bądź przepuszczona przez próbkę. Oznaczmy strumień padający przez Φ_0 , strumień odbity przez Φ_R , strumień pochłonięty jako Φ_A i w końcu strumień przepuszczony jako Φ_T . Dla scharakteryzowania każdej próbki możemy wprowadzić trzy wielkości

- 1) współczynnik odbicia (refleksji) $R = \Phi_R/\Phi_0$,
- 2) współczynnik pochłaniania (absorpcji) $A = \Phi_A/\Phi_0$,
- 3) współczynnik przepuszczania (transmisji) $T = \Phi_T/\Phi_0$.

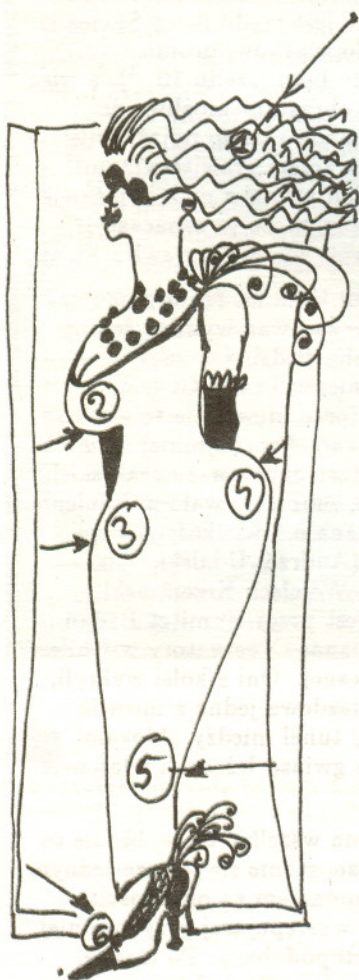
Ze względu na zachowanie energii zachodzi, oczywiście, równość

$$R + A + T = 1.$$

Możemy wyróżnić trzy skrajne przypadki:

- 1) ciało doskonale białe – odbija całe promieniowanie
 $R = 1, A = 0, T = 0$;
- 2) ciało doskonale przezroczyste – przepuszcza całe promieniowanie
 $R = 0, A = 0, T = 1$;
- 3) ciało doskonale czarne – pochłania całe promieniowanie
 $R = 0, A = 1, T = 0$.

Należałoby zaznaczyć, że współczynniki R, A, T dla różnych materiałów mogą istotnie zależeć od częstotliwości promieniowania. I tak na przykład szkło bardzo dobrze przepuszcza promieniowanie w obszarze światła widzialnego, głównie zaś odbija w obszarze podczerwieni, czyli fal cieplnych. Z tego powodu okna dostarczają nam światła pozostając izolatorami ciepła.

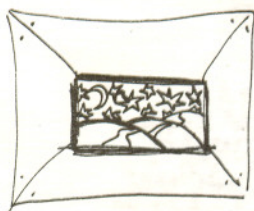


Czas pomiaru [min]	Temperatura cieczy [°C]			
	atrament	woda	zielony płyn	mleko
0	15,2	15,3	15,2	15,2
2	15,5	15,6	15,3	15,5
4	16,2	16,0	15,4	15,8
6	17,0	16,0	15,5	16,1
8	17,4	16,2	16,0	16,2
10	18,0	16,2	16,1	16,6
12	18,2	16,6	16,9	17,0
14	19,0	16,8	17,1	17,4
16	19,2	17,0	17,9	18,0
18	19,8	17,1	18,2	18,4
20	20,2	17,4	18,9	19,0
22	20,6	17,9	19,1	19,2
24	21,0	18,0	19,6	19,6
26	21,4	18,0	20,0	20,0
28	21,5	18,3	20,2	20,1
30	22,0	18,6	20,8	20,4
32	22,5	19,0	21,0	20,8

Wróćmy do naszego doświadczenia. Ciała nagrzewają się dzięki pochłanianiu energii. Atrament więc, najbliższy ciału doskonale czarnemu, podgrzał się najbardziej. Przezroczysta woda została najzimniejsza.

Z przeprowadzonych rozważań wynika cały szereg wniosków praktycznych, które są zresztą powszechnie znane i stosowane. Aby w pomieszczeniu było dużo światła, ściany malujemy jasną farbą. Biała ściana odbija 60–80 procent padającego światła, podczas gdy czarna jedynie 3–10. Zimą nosimy ciemne ubrania, aby pochłaniać jak najwięcej ciepła, latem jasne, aby promieniowanie ciepłe odbijać. Słońce szybciej nagrzewa mętną, brudną wodę niż czystą. Pnie drzew maluje się na biało, aby – w szczególności – zabezpieczyć je przed gwałtownymi zmianami temperatury wczesną wiosną.

Małą Deltę przygotował Kazimierz MIKULSKI



Odcinek dla poczty

Zł
słownie złotych

wplacający

AMOS

01-506 Warszawa
ul. Szenwalda 1

PKO VIII O/W-wa

Nr 1586-77578-136

Pobrano opłatę

zł

.....
podpis przyjmującego

Odcinek dla posiadacza rachunku

Zł
słownie złotych

Dokładny adres wplacający

na **AMOS**
r-k

Dokładna nazwa 01-506 Warszawa
ul. Szenwalda 1

nazwa banku **PKO VIII O/W-wa**

Nr r-ku 1586-77578-136

stempel

Pobrano opłatę

zł

.....
podpis przyjmującego

Potwierdzenie dla wplacającego

Zł
słownie złotych

Dokładny adres wplacający

na **AMOS**
r-k

Dokładna nazwa 01-506 Warszawa
ul. Szenwalda 1

nazwa banku **PKO VIII O/W-wa**

Nr r-ku 1586-77578-136

stempel

Pobrano opłatę

zł

.....
podpis przyjmującego



Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

M 696. Znaleźć przynajmniej jedno rozwiązanie równania $a^5 + b^6 = c^7$ w zbiorze liczb naturalnych.

Rozwiązanie na str. 13

M 697. Udowodnić, że liczba całkowita $N := [(\sqrt{6} + 2)^{2n}] + 1$ dzieli się przez 2^{n+1} .
(Uwaga: $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą, mniejszą lub równą x .)

Rozwiązanie na str. 4

M 698. Udowodnić, że liczba $\frac{(3n)!}{6^n n!}$ jest całkowita.

Rozwiązanie na str. 13

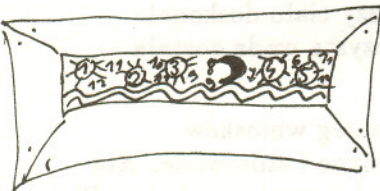
Redaguje Jarosław KULPA

F 377. W Zakopanem położonym na wysokości $h = 900$ m n.p.m. pewnego dnia wilgotność powietrza wynosiła $\epsilon = 65\%$, temperatura zaś $T_0 = 283$ K. Obliczyć minimalną wysokość, na jakiej zaczynały występować chmury. Zmianę ciśnienia σ pary nasyconej wraz z temperaturą T opisuje wzór Clausiusa-Clapeyrona $\frac{d\sigma}{dT} = \frac{\sigma C \mu}{RT^2}$, gdzie $C = 2,25 \cdot 10^6$ J/kg jest ciepłem parowania wody, $\mu = 0,018$ kg/mol jest masą molową wody, a R jest stałą gazową. W atmosferze temperatura średnio spada o $a = 6,5^\circ\text{C}/1000$ m.

Rozwiązanie na str. 12

F 378. Obliczyć maksymalne przyspieszenie tłoka silnika poloneza (w jednostkach przyspieszenia ziemskiego) przy oszczędnej jeździe, tj. przy $f = 4000$ obrotów na minutę. Skok tłoka wynosi $d = 8$ cm.

Rozwiązanie na str. 13



Prenumerata „Deltą”
za okres:

Prenumerata „Deltą”
za okres:

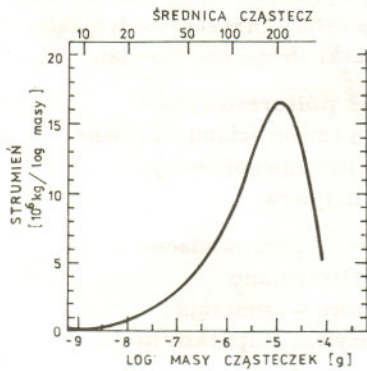
Prenumerata „Deltą”
za okres:

deltą

deltą

deltą

W artykule „Kosmiczny ostrzał Ziemi” Krzysztofa Ziolkowskiego (*Delta* 12/1993) podane zostało oszacowanie całkowitego strumienia materii napływającej na całą powierzchnię naszej planety na $1,7 \times 10^8$ kg/rok. Wynik ten otrzymano po uwzględnieniu również strumienia bardzo małych obiektów bombardujących Ziemię, a wielkość tego strumienia została uzyskana metodami pośrednimi. Dopiero pod koniec ubiegłego roku opublikowane zostały wyniki pomiarów uzyskane metodą bezpośrednią pozwalającą również na pomiar rozkładu strumienia materii jako funkcji rozmiarów bombardujących cząstek. Strumień meteoroidów o masach w zakresie $10^{-9} - 10^{-4}$ g został wyznaczony na podstawie badania kraterów wybitych na skutek ich zderzeń z powierzchnią satelity amerykańskiego tzw. Long Duration Exposure Facility. Rozkład masy meteoroidów (na rysunku) ma maksimum dla $1,5 \times 10^{-5}$ g (200 μ m średnicy), a całkowity strumień w badanym zakresie mas wynosi $(40 \pm 20) \times 10^6$ kg/rok. Wynik ten pokazuje, że strumień materii w tym zakresie jest porównywalny, a może i większy niż strumień większych obiektów o rozmiarach 1 cm – 10 km.



J.K.



Maszyna parowa, wynaleziona w 1814 roku przez G. Stephensona (1781 – 1848), która zrewolucjonizowała cały świat w XIX wieku, odeszła praktycznie w zapomnienie. Była wielka, kłopotliwa w eksploatacji i nic dziwnego, że wyparły ją łatwiejsze w obsłudze i sprawniejsze silniki spalinowe i elektryczne. Być może, że nastąpi jej tryumfalny powrót, ale w zminiaturyzowanej postaci i w zupełnie innych zastosowaniach niż kiedyś.

Grupa naukowców kierowana przez Jeffa Sniegowskiego z Narodowego Laboratorium Sandia w Albuquerque, Nowy Meksyk, skonstruowała silnik parowy z krzemu o rozmiarach 50 mikrometrów! Można go dobrze obejrzeć jedynie pod mikroskopem. Jego tłok ma powierzchnię $12 \mu\text{m}^2$, a skok tłoka wynosi jedynie $20 \mu\text{m}$. Cylinder tłoka jest wypełniony wodą ogrzewaną przez miniaturową grzałkę elektryczną do temperatury nieznacznie powyżej 100°C . Tworzące się bąbelki pary wodnej popychają tłok z siłą $0,5 \mu\text{N}$. Jest to około 100 razy więcej niż w używanych obecnie miniaturowych silniczkach elektrostatycznych, w których części ruchome wprowadzane są w ruch przez siły oddziaływania elektrostatycznego ładunków. Kontrolując temperaturę grzałki można regulować położenie i szybkość przesuwu tłoka.

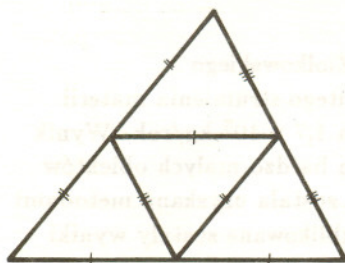
Jeff Sniegowski ma nadzieję, że dzięki „dużej mocy” jego maszyny parowej znajdzie ona zastosowania, między innymi, do wykonywania operacji w mikrochirurgii, sterowania położeniem mikroskopowych lusterek itp.

Na zakończenie warto zwrócić uwagę na ciekawe rozwiązanie uszczelnienia tak małego tłoczka w cylindrze. Przy tych rozmiarach napięcie powierzchniowe między wodą i krzemem uniemożliwia swobodny przepływ wody. Dlatego zostawiono dosyć duży odstęp między tłokiem i cylindrem, a tworzący się menisk stanowi bardzo dobre uszczelnienie tłoka.

J.K.

O czworościanie równościennym

Waldemar POMPE



Rys. 1

Czy istnieje czworościan, który nie jest foremny, a którego ściany są trójkątami przystającymi? Istnieje. Aby się o tym przekonać, wystarczy narysować dowolny nierównoboczny trójkąt ostrokątny, podzielić go na cztery przystające trójkąty, (jak na rysunku 1), i z otrzymanej w ten sposób siatki złożyć czworościan.

Czworościan taki nazywamy **równościennym** bądź **półforemnym**.

W *Delcie* 5/93 można przeczytać, że jeśli pola ścian czworościanu są równe (tzw. czworościan **równopolowy**), to czworościan jest równościenny.

My udowodnimy nieco ogólniejsze twierdzenie, ale najpierw

Definicja. Przez każdą krawędź czworościanu $ABCD$ poprowadzono płaszczyznę równoległą do przeciwległej krawędzi. Otrzymano w ten sposób trzy pary równoległych płaszczyzn, które wyznaczają równoległościan. Równoległościan ten będziemy nazywać **dopisanym** do czworościanu $ABCD$ (rys. 2).

Twierdzenie. Wszystkie poniższe własności czworościanu $ABCD$ są równoważne (tzn. z dowolnej własności wynika każda inna):

1. wszystkie ściany są przystające,
2. wszystkie ściany to trójkąty ostrokątne o takim samym promieniu okręgu opisanego,
3. suma kątów płaskich przy każdym wierzchołku wynosi 180° ,
4. sumy kątów płaskich przy wierzchołkach A, B, C wynoszą po 180° ,
5. siatka czworościanu jest trójkątem ostrokątnym podzielonym na cztery przystające trójkąty (rys. 1),
6. $\angle BAC = \angle ABD = \angle ACD = \angle BDC$,
7. przeciwległe krawędzie są równej długości,
8. trzy odcinki łączące środki przeciwległych krawędzi są parami prostopadłe,
9. równoległościan dopisany do czworościanu jest prostopadłościanem,
10. wszystkie ściany mają równe pola,
11. rzut czworościanu na dowolną płaszczyznę równoległą do dwóch przeciwległych krawędzi jest prostokątem,
12. każdy odcinek łączący środki przeciwległych krawędzi jest prostopadły do tych krawędzi.

Dowód. Zamiast dowodzić $12 \cdot 11 = 132$ twierdzenia, udowodnimy jedynie 12. Schemat dowodu przedstawiony jest na rysunku 3.

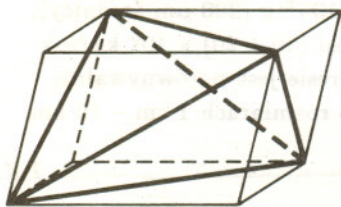
$1 \Rightarrow 2$ (rys. 4). Ponieważ ściany są trójkątami przystającymi, więc promienie okręgów na nich opisanych są równe. Wystarczy zatem wykazać, że ściany są trójkątami ostrokątnymi. Ponieważ BC jest wspólnym bokiem trójkątów przystających ABC i BCD , więc $\angle BAC = \angle CDB = \alpha$. Analogicznie $\angle ACB = \angle ADB = \beta$ oraz $\angle ABC = \angle ADC = \gamma$. Kąty α, β, γ są kątami płaskimi przy każdym wierzchołku czworościanu, zatem mają tę własność, że suma dowolnych dwóch spośród nich jest większa od trzeciego. Ale jeśli kąty trójkąta mają ową własność, to musi to być trójkąt ostrokątny. Pozostaje więc zauważyć, że α, β, γ są kątami płaskimi każdej ściany.

$2 \Rightarrow 3$ (rys. 4). Jeśli promienie okręgów opisanych na ścianach ABC i BCD są równe, to $\angle BAC = \angle BDC$, gdyż są to kąty ostre (bardzo ważne założenie!) wpisane, oparte na tym samym łuku. Analogicznie $\angle ACB = \angle ADB$, $\angle ABC = \angle ADC$, skąd

$$\angle ADC + \angle CDB + \angle ADB = \angle ABC + \angle CAB + \angle ACB = 180^\circ.$$

$3 \Rightarrow 4$. Oczywiście.

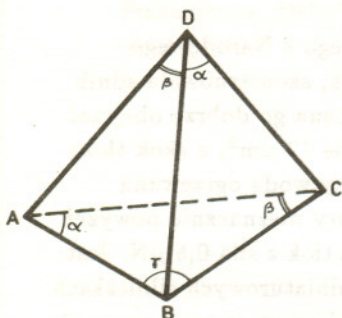
$4 \Rightarrow 5$. Siatka czworościanu $ABCD$ jest sześciokątem $D_1AD_2BD_3C$ podzielonym na cztery trójkąty (rys. 5). Z własności 4 wynika, że punkt A leży na prostej D_1D_2 , punkt B na prostej D_2D_3 , punkt zaś C na prostej D_1D_3 .



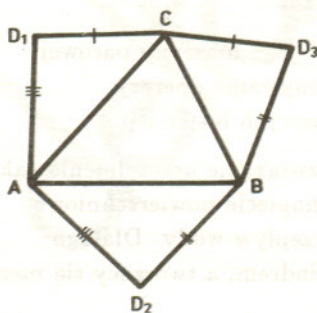
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Zatem A, B, C są środkami boków trójkąta $D_1D_2D_3$. Pozostaje jeszcze zauważyć, że trójkąt $D_1D_2D_3$ jest ostrokątny. Istotnie, jego kąty są kątami płaskimi przy wierzchołku D , z czego wynika, że suma dowolnych dwóch spośród nich jest większa od trzeciego.

5 \Rightarrow 6. Oczywiście.

6 \Rightarrow 7. Udowodnimy najpierw dwa lematy.

Lemat 1. Dany jest wypukły kąt czwórścienny $SABCD$ o wierzchołku S . Można przeciąć go płaskim cięciem tak, aby w przekroju otrzymać równoległobok, przy czym wszystkie takie przekroje są równoległe.

Dowód. Niech l będzie wspólną prostą płaszczyzn SAB i SCD , k zaś wspólną prostą płaszczyzn SBC i SAD . Przecinając dany kąt płaszczyzną równoległą do płaszczyzny wyznaczonej przez proste k i l otrzymamy w przekroju równoległobok – boki otrzymanego czworokąta będą bowiem równoległe do k bądź do l . Przecinając w inny sposób otrzymamy czworokąt, w którym przedłużenia przeciwległych boków przecinają się (na prostej k lub l).

Lemat 2. Dany jest wypukły kąt czwórścienny $SABCD$, przy którym wszystkie kąty płaskie są równe. Wówczas każdy przekrój tego kąta, będący równoległobokiem, jest rombem.

Dowód. Udowodnimy najpierw, że taki kąt można tak przeciąć, aby w przekroju otrzymać romb. W tym celu wybierzmy tak punkty A i C , aby było $SA = SC$ (rys. 6). Niech P będzie punktem wspólnym prostej AC i płaszczyzny SBD . Nietrudno zauważyć, że punkty B i D można wybrać tak, aby $SB = SD$ i odcinek BD przechodził przez punkt P . Ponieważ kąty ASB, BSC, CSD, DSA są równe, więc trójkąty ASB, BSC, CSD, DSA są przystające, skąd otrzymujemy, że czworokąt $ABCD$ jest rombem. Z lematu 1 wynika, że wszystkie przekroje będące równoległobokami są podobne (a nawet jednokładne). A ponieważ nasz kąt można tak przeciąć, aby w przekroju otrzymać romb, więc wszystkie przekroje będące równoległobokami będą także rombami.

Niech K, L, M, N, S będą odpowiednio środkami krawędzi AB, AC, CD, BD, BC (rys. 7). Nietrudno zauważyć, że $\angle KSN = \angle ACD, \angle NSM = \angle BDC, \angle MSL = \angle DBA, \angle LSK = \angle BAC$, co w połączeniu z założeniem daje $\angle KSN = \angle NSM = \angle MSL = \angle LSK$. Ponadto $KLMN$ jest równoległobokiem, ponieważ $KN \parallel AD \parallel ML$ i $KL \parallel BC \parallel MN$ (twierdzenie Talesa). Zatem na mocy lematu 2, $KLMN$ jest rombem, skąd wynika, że $AD = BC$ (gdyż $AD = 2KN = 2KL = BC$). Co więcej, z dowodu lematu 2 wynika również, że $SN = SL$ i $SK = SM$, skąd $AB = CD$ i $AC = BD$.

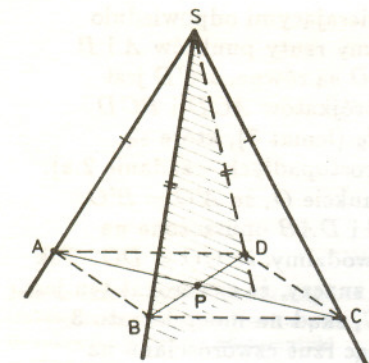
7 \Rightarrow 8 (rys. 8). Niech K, L, M, N będą odpowiednio środkami krawędzi AB, AC, CD, BD . Czworokąt $KLMN$ jest oczywiście równoległobokiem (twierdzenie Talesa). Ponadto skoro $AC = BD$, to $KN = KL$. Zatem $KLMN$ jest rombem, co znaczy, że jego przekątne KM i NL są prostopadłe.

8 \Rightarrow 9 (rys. 9). Niech K, L, M, N, P, Q będą odpowiednio środkami krawędzi AB, BC, CA, AD, CD, BD . Płaszczyzny $KMPQ, NQLM$ i $KLPN$ przecinają się parami wzdłuż prostych KP, LN i QM , które są parami prostopadłe. Zatem płaszczyzny $KMPQ, NQLM, KLPN$ są również parami prostopadłe. A ponieważ każda z tych płaszczyzn jest równoległa do dwóch krawędzi, których nie przecina, więc równoległościan dopisany do czworoscianu $ABCD$ jest prostopadłościanem.

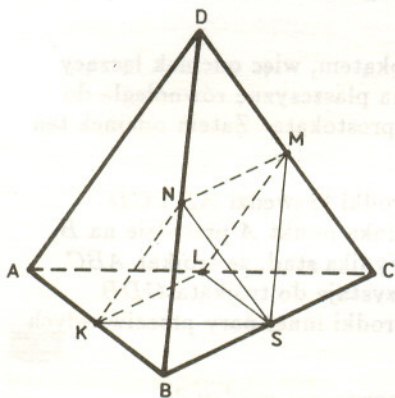
9 \Rightarrow 10. Z twierdzenia Pitagorasa wynika natychmiast, że ściany są trójkątami przystającymi. W szczególności mają równe pola.

10 \Rightarrow 11. **Lemat 3.** Dane są dwie równoległe płaszczyzny p_1 i p_2 oraz punkty $A, B \in p_1$ i $C, D \in p_2$. Niech A' i B' będą odpowiednio rzutami prostokątnymi punktów A i B na płaszczyznę p_2 . Wówczas $AC = BD$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A'C = B'D$.

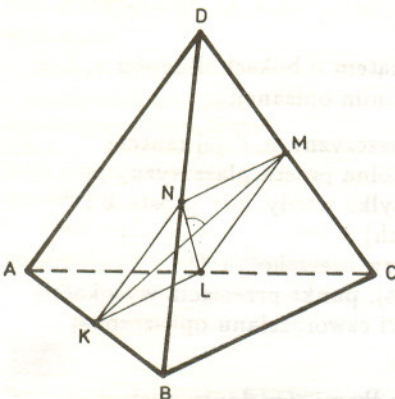
Dowód bardzo prosty – przy użyciu twierdzenia Pitagorasa.



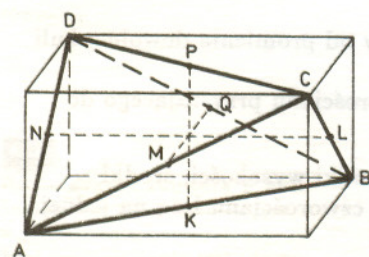
Rys. 6



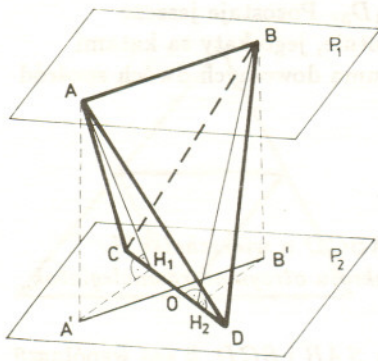
Rys. 7



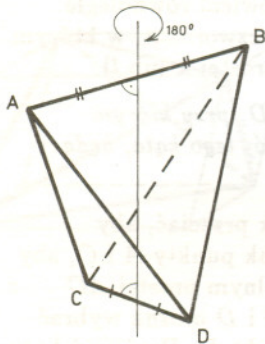
Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10



Rys. 11

Niech p_1 i p_2 będą równoległymi płaszczyznami zawierającymi odpowiednio krawędzie AB i CD (rys. 10). Przez A' i B' oznaczmy rzuty punktów A i B na płaszczyznę p_2 . Ponieważ pola ścian ACD i BCD są równe, a CD jest ich wspólną podstawą, więc wysokości AH_1 i BH_2 trójkątów ACD i BCD są równe. Równe są więc także odcinki $A'H_1$ i $B'H_2$ (lemat 3), które są również prostopadłe do CD (twierdzenie o trzech prostopadłych – zadanie 2.a). Zatem odcinki CD i $A'B'$ przecinają się w takim punkcie O , że $A'O = B'O$. Analogicznie rozpatrując wysokości trójkątów CAB i DAB opuszczone na wspólną podstawę i ich rzuty na płaszczyznę p_2 , dowodzimy, że $CO = DO$. Tak więc przekątne czworokąta $A'DB'C$ połowią się, co znaczy, że czworokąt ten jest równoległobokiem. Zatem $A'C = B'D$ i $A'D = B'C$, skąd na mocy lematu 3 otrzymujemy, że $AC = BD$ i $AD = BC$. Rozpatrując rzut czworosięca na płaszczyznę równoległą do innej pary przeciwległych krawędzi dowodzimy, że $AB = CD$, skąd $A'B' = CD$. A ponieważ równoległobok, w którym przekątne są równej długości, jest prostokątem, więc czworokąt $A'DB'C$ jest prostokątem.

11 \Rightarrow 12. Ponieważ rzut czworosięca jest prostokątem, więc odcinek łączący środki przeciwległych krawędzi, po rzutowaniu na płaszczyznę równoległą do tych krawędzi, zredukuje się do punktu – środka prostokąta. Zatem odcinek ten musi być prostopadły do tych krawędzi.

12 \Rightarrow 1 (rys. 11). Rozpatrzmy odcinek łączący środki krawędzi AB i CD . Przy obrocie czworosięca o 180° wokół tego odcinka punkt A przejdzie na B , punkt B na A , punkt C na D , punkt D na C . Wynika stąd, że trójkąt ABC przystaje do trójkąta ABD oraz trójkąt CDA przystaje do trójkąta CDB . Obracając czworosięca wokół odcinka łączącego środki innej pary przeciwległych krawędzi otrzymujemy tezę.

Na koniec proponuję Czytelnikowi zastosowanie powyższej wiedzy do rozwiązania następujących zadań.

Zadania.

1. Każda ściana pewnego czworosięca jest trójkątem o bokach długości a, b, c . Znaleźć objętość czworosięca i promień sfery na nim opisaney.

2. a) Niech l będzie prostą nieprostą do płaszczyzny p , l' jej rzutem prostokątnym na płaszczyznę p , natomiast k dowolną prostą płaszczyzny p . Wykazać, że proste k i l są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy proste k i l' są prostopadłe (twierdzenie o trzech prostopadłych).

b) Wykazać, że jeśli wszystkie kąty płaskie przy wierzchołku D czworosięca $ABCD$ są proste, to ortocentrum (tj. punkt przecięcia wysokości) trójkąta ABC pokrywa się ze spodkiem wysokości czworosięca opuszczonej z wierzchołka D .

3. Niech O_A, O_B, O_C, O_D będą odpowiednio środkami sfer dopisanych, stycznych do ścian BCD, ACD, ABD, BCA czworosięca $ABCD$. Wykazać, że trójścienne kąty $O_A BCD, O_B ACD, O_C ABD, O_D ABC$ są proste wtedy i tylko wtedy, gdy czworosięca $ABCD$ jest równościenny. (Sfera dopisana do czworosięca to taka, która będąc styczną do wszystkich płaszczyzn zawierających ściany czworosięca jest z nim – poza punktem styczności – rozłączna.)

4. Wykazać, że w równościennym czworosięciu

a) promień kuli wpisanej jest dwa razy mniejszy od promienia dowolnej kuli dopisanej do tego czworosięca,

b) środki kul dopisanych są wierzchołkami czworosięca przystającego do danego.

5. Wykazać, że w równościennym czworosięciu spodki wysokości, środki wysokości i punkty przecięcia wysokości ścian tego czworosięca leżą na jednej sferze (sfera 12 punktów).

6. Wykazać, że czworosięca jest równościenny wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z poniższych warunków

– obwody ścian są równe,

– środki sfer – wpisanej i opisaney na tym czworosięciu – pokrywają się.



Rozwiązanie zadania F 877. Niech η_0, σ_0, p_0 oznaczają odpowiednio ciśnienie pary, ciśnienie pary nasyconey oraz ciśnienie powietrza w Zakopanem, η_1, σ_1, p_1 zaś odpowiednie wielkości na wysokości h względem Zakopanego. Ciśnienie zmienia się wraz z wysokością zgodnie ze wzorem $dp = -\rho g dh$, a z równania gazu doskonałego mamy $p = \frac{\rho}{\mu} RT$. Stąd po scałkowaniu i uwzględnieniu zmiany T wraz z wysokością otrzymujemy $p_1 = p_0 e^{-\frac{\mu g}{RT_1} h}$. Stosunek ciśnień pary równa się stosunkowi ciśnień

powietrza $\frac{\eta_1}{\eta_0} = \frac{p_1}{p_0} \Rightarrow \eta_1 = \eta_0 e^{-\frac{\mu g}{RT_1} h}$.

Całkując obustronnie równanie Clausiusa-Clapeyrona

$$\int \frac{d\sigma}{\sigma} = \int \frac{C\mu}{RT^2} dT$$

otrzymujemy $\sigma_1 = \sigma_0 e^{A(1/T_0 - 1/T_1)}$,

gdzie $A = \frac{C\mu}{R}$. Chmury występują

na wysokości, na której wilgotność

jest 100%, tj. $\eta_1 = \sigma_1$. Stąd

$\eta_0 e^{-\frac{\mu g}{RT_1} h} = \sigma_0 e^{A(1/T_0 - 1/T_1)}$.

Podstawiając $\epsilon = \frac{\eta_0}{\sigma_0}$ i uwzględniając,

że $\epsilon = e^{\ln \epsilon}$, otrzymujemy

$$-\frac{\mu g}{RT} h + \ln \epsilon = A \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1} \right),$$

$$T_1 = T_0 - ah,$$

skąd

$$h = \frac{-RT_0^2 \ln \epsilon}{aC\mu - \mu g T_0 - RT_0 a \ln \epsilon} = 1300 \text{ m.}$$

Ostatecznie

$$H = h + h_0 = 2100 \text{ m n.p.m.}$$

Symbol Newtona – inaczej

Ilona KRÓLAK

Omówimy jeden z kilku problemów, którymi zajmowałam się w pracy nadesłanej na Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki.

Przypomnijmy definicję symbolu Newtona

$$(1) \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

gdzie n i k są liczbami naturalnymi, przy czym $n \geq k$. Ma on następującą własność

$$(2) \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Zajmiemy się teraz następującym zagadnieniem.

Problem. Jak rozszerzyć definicję symbolu Newtona $\binom{n}{k}$ na dowolne liczby rzeczywiste n , k , aby był on funkcją ciągłą obu zmiennych n i k oraz aby była spełniona tożsamość (2).

Nietrudno jest rozszerzyć pojęcie symbolu Newtona na przypadek, gdy n jest dowolną liczbą rzeczywistą, k zaś dowolną liczbą całkowitą. Mianowicie łatwo udowodnić, że jeżeli przyjmiemy dla dowolnego $n \in \mathbb{R}$

$$(3) \quad \binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} & \text{dla } k \in \mathbb{N}, \\ 1 & \text{dla } k = 0, \\ 0 & \text{dla } k \text{ całkowitego ujemnego,} \end{cases}$$

to tak zdefiniowana funkcja $\binom{n}{k}$ ma własność (2).

Dowód pomijamy. Pozostaje teraz zdefiniować $\binom{n}{k}$ w przypadku, gdy k nie jest liczbą całkowitą. Przy definicji $\binom{n}{k}$ wykorzystamy zdefiniowane już wartości $\binom{n}{[k]}$ oraz $\binom{n}{[k]+1}$; przypominamy, że $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie przekraczającą x .

Twierdzenie 1. Dla dowolnych rzeczywistych n i k przyjmijmy

$$\binom{n}{k} = g_1(k - [k]) \binom{n}{[k]} + g_2(k - [k]) \binom{n}{[k]+1},$$

gdzie g_1 i g_2 są funkcjami ciągłymi określonymi na $[0, 1]$, takimi, że $g_1(0) = g_2(1) = 1$, $g_1(1) = g_2(0) = 0$, natomiast $\binom{n}{[k]}$ i $\binom{n}{[k]+1}$ są określone wzorem (3). Wówczas funkcja $\binom{n}{k}$ jest funkcją ciągłą obu zmiennych n i k oraz spełniony jest warunek (2).

Dowód pomijamy.

Drugim problemem, którym zajmowałam się w pracy, było poszukiwanie takiej definicji silni $x!$ dla x rzeczywistego, aby funkcja $\binom{n}{k}$ określona wzorem (1) spełniała (2). Zauważmy, że wówczas automatycznie spełniona jest inna znana tożsamość, a mianowicie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Okazuje się, że niezależnie od tego jak zdefiniujemy $x!$, nie dla wszystkich rzeczywistych n i k wzór (1) daje sensowną wartość $\binom{n}{k}$.

Na zakończenie przytoczymy pewien wzór udowodniony w pracy. Otóż, jak dobrze wiadomo, dla dowolnego naturalnego n prawdziwe są następujące wzory

$$\sum_{i=1}^n i^0 \binom{n}{i} = 2^n \quad \sum_{i=1}^n i^1 \binom{n}{i} = n2^{n-1}.$$

Okazuje się, że prawdziwe jest też następujące uogólnienie tego wzoru dla dowolnych liczb naturalnych n i s :

$$\sum_{i=1}^n i^s \binom{n}{i} = w_s(n) 2^{n-s},$$

gdzie $w_s(n)$ jest pewnym wielomianem stopnia s zmiennej n . Wzór ten przytaczamy również bez dowodu.

Jest to skrót pracy nagrodzonej srebrnym medalem na Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki w 1993 roku.



Rozwiązanie zadania M 698.

Mianownik rozpatrywanego ułamka możemy zapisać w postaci

$$6^n n! = 2^n 3^n n! = 2^n \cdot (3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots 3n).$$

W iloczynie

$$(3n)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots 3n$$

w każdej spośród n „luk”

wyznaczonych przez liczby

$3, 6, 9, \dots, 3n$ występują dwie liczby,

jedna z nich jest liczbą parzystą.

Zatem

$$(3n)! = 2^n \cdot (3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots 3n) \cdot k$$

dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, co kończy dowód.



Rozwiązanie zadania M 696.

Skorzystamy z równości

$2^n + 2^n = 2^{n+1}$. Jeżeli jednocześnie

$n = 5 \cdot 6 \cdot k$ oraz $n + 1 = 7l$, to mamy

$(2^{6k})^5 + (2^{5k})^6 = (2^l)^7$, skąd trójka

liczb $a = 2^{6k}$, $b = 2^{5k}$, $c = 2^l$ jest

rozwiązaniem równania. Zauważmy

teraz, że np. liczba $n = 90$ ma żądane

własności, wobec czego liczby $a = 2^{18}$,

$b = 2^{15}$, $c = 2^{13}$ spełniają nasze

równanie

$$(2^{18})^5 + (2^{15})^6 = (2^{13})^7.$$



Rozwiązanie zadania F 378.

Zakładamy, że ruch tłka jest w przybliżeniu harmonicznym.

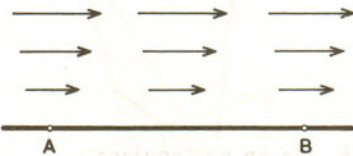
Stąd przyspieszenie jest równe

$a = \omega^2 x = 4\pi f^2 x$. Przy założeniu

maksymalnego wychylenia

amplituda wynosi $x = d/2$. Dlatego

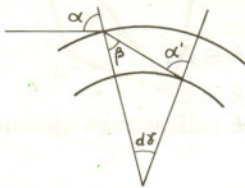
$a = 2\pi^2 f^2 d = 3500 \text{ m/s}^2 \approx 360 g$.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1994.

Zadania z fizyki nr 175, 176

Redaguje Jerzy B. BROJAN

175. Nad ziemią wieje poziomo wiatr, którego prędkość jest proporcjonalna do wysokości: na każde 100 m wysokości prędkość rośnie o 50 m/s. Prędkość dźwięku względem powietrza wynosi 330 m/s. Po jakim czasie sygnał dźwiękowy dotrze z punktu A do punktu B odległego o 2 km w kierunku wiatru (rys. 1)?

Uwaga: Ścisłe rozwiązanie tego zadania prawdopodobnie nie istnieje. Mile widziane będą więc wszelkie rozwiązania przybliżone, nawet najbardziej orientacyjne.

176. Oto fragment artykułu z jednego z zeszłorocznych numerów *Świata Nauki*, poświęconego pomiarom temperatury ziemi na różnych głębokościach i możliwościom odtworzenia w ten sposób historii zmian temperatury powietrza:

„Dobowe cykle ciepłych dni i chłodnych nocy wywołują zakłócenia jedynie w najwyższej, metrowej warstwie gleby czy skały, oscylacje zaś sezonowe (wynikające z pór roku) docierają na głębokość około 15 metrów. Cykl stuletni da się obserwować na głębokości około... metrów, a milenijny – około... metrów”.

Uzupełnić wartości wy kropkowane i uzasadnić. Wskazówka: Zastosować analizę wymiarową.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 11/1993

Przypominamy treść zadań:

167. W prostoliniowym przewodniku, którego 1 metr waży 2 gramy, płynie prąd stały o natężeniu 50 A. Na jakiej wysokości zawiesznie ten przewodnik nad poziomą płaszczyzną nadprzewodzącą? Wskazówka: Pole magnetyczne we wnętrzu nadprzewodnika jest równe zeru.

167. Jeśli linie pola magnetycznego mają nie wnikać do wnętrza nadprzewodnika, to w pobliżu jego powierzchni muszą mieć kierunek styczny (poziomy). Prądy indukowane płynące po powierzchni nadprzewodnika wytwarzają więc pole takie, jak pole fikcyjnego przewodnika prostoliniowego umieszczonego pod tą powierzchnią symetrycznie do przewodnika danego. Zwrot prądu w przewodniku fikcyjnym jest przeciwny (proponujemy sprawdzenie, że pole dwóch przewodników prostoliniowych, w których płyną jednakowe prądy o przeciwnych zwrotach, jest styczne do płaszczyzny symetrii). Zatem oddziaływanie danego przewodnika z płaszczyzną jest takie, jak oddziaływanie z przewodnikiem fikcyjnym, tzn.

$$F = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi 2h},$$

gdzie h – szukana wysokość wzniesienia, l – długość przewodnika. Przystawiając tę siłę do ciężaru $\rho l g$ otrzymujemy wynik

$$h = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi \rho g} = 1,25 \text{ cm}.$$

Zastosowana tu „metoda odbicia” jest bardziej znana w elektrostatyce, gdzie stosuje się ją do rozważania oddziaływania ładunku z płaszczyzną przewodzącą (por. np. zeszłoroczne zadanie 146).

168. Przezroczysta kula wykonana jest z materiału o współczynniku załamania zależnym od odległości r od środka kuli. Jaka powinna być ta zależność, aby dowolny promień światła krążył po okręgu?

168. Odpowiedź na powyższe pytanie najprościej znaleźć rozpatrując „skracanie” promienia w obrazie falowym, tzn. analizując rozprzestrzenianie się frontu fali (rys. 2). Aby ten front zachowywał kierunek radialny, prędkość fali powinna być proporcjonalna do odległości od środka r , czyli współczynnik załamania $n = c/v$ powinien być odwrotnie proporcjonalny do r .

Redakcja przeprasza za nieporozumienie, w wyniku którego treść tego zadania zamieszczona w *Delcie* 11/1993 uległa zniekształceniu. Oczywiście, nie każdy promień światła będzie krążył po okręgu, lecz tylko te, dla których styczna do promienia w danym punkcie jest prostopadła do linii łączącej ten punkt ze środkiem kuli. Dla promienia biegnącego ukośnie (tzn. tworzącego w danym punkcie kąt α z kierunkiem do środka kuli) przyjmijmy, że na granicy warstwy kulistej następuje skokowa, nieskończenie mała zmiana współczynnika załamania z n do $n + dn$. Prawo załamania Snella

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n + dn}{n}$$

dla małej różnicy kątów sprowadza się do równania

$\beta = \alpha - \text{tg } \alpha \frac{dn}{n}$. Po przebyciu warstwy kulistej o grubości dr kąt padania α' (rys. 3) znajdujemy ze wzoru $\alpha' = \beta + d\gamma$,

gdzie $d\gamma = -\text{tg } \beta \frac{dr}{r} \approx -\text{tg } \alpha \frac{dr}{r}$ (minus ze względu na ujemny znak dr). Gdy n jest odwrotnie proporcjonalne do r , mamy

$\frac{dn}{n} = -\frac{dr}{r}$ i widzimy, że $\alpha' = \alpha$. Krzywą, która spełnia ostatni warunek, jest spirala logarytmiczna.



277. Ciąg (a_n) jest określony przez zależności

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{a_0 + \dots + a_n} - \sqrt{2} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Czy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny?

278. Rozwiązać w liczbach całkowitych x, y, z równanie

$$(x + y + z)^3 = 4(x^3 + y^3 + z^3) + 12xyz + 9.$$

Zadanie 278 zostało opracowane na podstawie propozycji zgłoszonej przez pana Krzysztofa Zapiska z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 11/1993

Przypominamy treść zadań:

269. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną $n \geq 3$ o następującej własności: Jeżeli T_1, \dots, T_n są zbiorami trójelementowymi, z których każde dwa mają dokładnie jeden element wspólny, to istnieje wspólny element wszystkich zbiorów T_i .

270. Niech $f(x) = x^{x^x}$. Obliczyć $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(\sin x)}{f(x)}$.

269. Wykażemy, że liczba $n = 8$ ma żądaną własność.

Załóżmy, że każde dwa spośród danych trójelementowych zbiorów T_1, \dots, T_8 mają dokładnie jeden element wspólny. Niech $T_1 = \{a, b, c\}$. Weźmy pod uwagę następujące zbiory wskaźników:

$$A = \{j: 2 \leq j \leq 8, a \in T_j\}, \quad B = \{j: 2 \leq j \leq 8, b \in T_j\}, \\ C = \{j: 2 \leq j \leq 8, c \in T_j\}.$$

Zbiory A, B, C są parami rozłączne (gdyby pewien numer j_0 należał jednocześnie np. do A i do B , to część wspólna zbiorów T_1 i T_{j_0} zawierałaby dwa różne elementy a i b , wbrew założeniu). Zbiory A, B, C w sumie wyczerpują cały zbiór $\{2, \dots, 8\}$ (gdyby pewien numer j_0 nie należał ani do A , ani do B , ani do C , to zbiór T_{j_0} byłby rozłączny z T_1 , wbrew założeniu). Wobec tego co najmniej jeden ze zbiorów A, B, C zawiera co najmniej trzy różne numery. Nie tracimy ogólności przyjmując, że jest to zbiór A i że należą do niego numery 2, 3, 4. Znaczy to, że a jest jednocześnie elementem zbiorów T_2, T_3, T_4 .

Wykażemy, że a jest wówczas także elementem zbiorów T_5, T_6, T_7, T_8 (i tym samym wszystkie zbiory T_i mają element wspólny). Zgodnie z założeniem, zbiór T_5 ma element wspólny z każdym ze zbiorów T_1, T_2, T_3, T_4 . Niech $x_i \in T_i \cap T_5$ dla $i = 1, 2, 3, 4$. Skoro T_5 jest zbiorem trójelementowym, zatem elementy x_1, x_2, x_3, x_4 nie mogą być wszystkie różne. Tak więc pewien element x zbioru T_5 należy jednocześnie do dwóch różnych zbiorów T_k, T_l ($1 \leq k < l \leq 4$). Ale jedynym wspólnym elementem zbiorów T_k i T_l jest a . Stąd wniosek, że $x = a$. Wobec tego $a \in T_5$. W ten sam sposób dowodzimy, że $a \in T_6, a \in T_7, a \in T_8$.

Wykażemy teraz, że żadna liczba naturalna n spełniająca nierówności $3 \leq n \leq 7$ nie ma omawianej własności.

Spójrzmy na zbiory

$$T_1 = \{1, 2, 3\}, \quad T_2 = \{1, 4, 5\}, \quad T_3 = \{2, 4, 6\}, \quad T_4 = \{1, 6, 7\}, \\ T_5 = \{2, 5, 7\}, \quad T_6 = \{3, 4, 7\}, \quad T_7 = \{3, 5, 6\}.$$

Każde dwa spośród nich mają dokładnie jeden element wspólny. Ustalmy n ($3 \leq n \leq 7$). Zbiory T_1, \dots, T_n stanowią szukany przykład: już część wspólna $T_1 \cap T_2 \cap T_3$ jest pusta.

Wniosek: najmniejszą liczbą o omawianej własności jest $n = 8$.

270. Ze znanych wzorów

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{x} \ln x = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

wynika, że

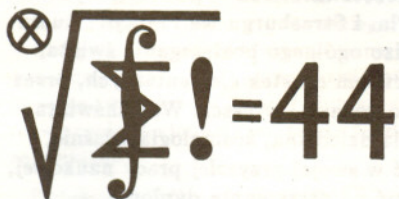
$$\lim_{x \rightarrow 0+} \ln \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \ln x^{(x^x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0+} (x^x - 1) \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+} (e^{x \ln x} - 1) \ln x = \\ = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x} \cdot x \ln x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x} \cdot (\sqrt{x} \ln x)^2 = 1 \cdot 0 = 0.$$

Stąd

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} = e^0 = 1$$

i ostatecznie

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(\sin x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{f(\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{x}{f(x)} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$



Gdy w roku 1959 pojawiły się pierwsze zdjęcia odwrotnej strony Księżyca (Łuna 3), natychmiast zaczęły się rozważania, czy jest ona podobna do strony widocznej, czy właśnie nie i dlaczego. Różnica między widoczną i niewidoczną półkulą Księżyca jest zauważalna raczej łatwo, mianowicie na zwróconej ku nam widać kilka tzw. mórz, podczas gdy na odwrotnej mórz właściwie nie ma. Nie bardzo wiadomo, jak ważne jest to spostrzeżenie i fakt ten jest w literaturze najchętniej przemilczany. Dotyczy to zresztą także Ziemi, na której łatwo jest wyróżnić półkulę morską i lądową, z czego jednak nic specjalnego nie wynika.

Wkrótce po odkryciu w 1671 r. Japetusa, satelity Saturna, zauważono, że w elongacji zachodniej (tzn. gdy akurat jest widoczny na zachód od planety) jest on aż o 2 mag jaśniejszy niż we wschodniej. Ponieważ jest on satelitą synchronicznym, tj. obraca się w tym samym okresie, co obiega Saturna, to stąd wynika, że porusza się stale ciemniejszą półkulą naprzód (pamiętajmy, że obiega on Saturna tzw. ruchem prostym, zgodnym z kierunkiem obrotu i obiegu większości ciał w Układzie Słonecznym). Powierzchnię Japetusa w całej okazałości zobaczyliśmy dopiero na obrazach przesłanych przez Voyagery, w wyniku czego, oczywiście, potwierdzony został fakt silnego kontrastu między jego dwiema półkulami.

Według aktualnych poglądów jasna powierzchnia satelity to głównie lód, podczas gdy obszary ciemne pokryte są związkami węgla i krzemu podobnymi do tych, jakie spotykamy w meteoroidach. Rozważane były cztery możliwe przyczyny takiego osobliwego ich rozkładu na powierzchni globu. Po pierwsze mogły pochodzić z wnętrza globu i wyrzucone zostały na powierzchnię w wyniku działalności wulkanicznej. Po drugie, mogły leżeć tam zawsze, a tylko kiedyś były przykryte warstwą lodu. Według wersji trzeciej mogą pochodzić z zewnątrz, czyli być zagarniane przez Japetusa w trakcie jego ruchu orbitalnego. Wszystkie te trzy możliwości są raczej odrzucane na podstawie dość zawiłych rozważań geologicznych. Wreszcie podana niedawno pod rozważanie czwarta możliwość, a właściwie „trzecia bis”, to spadek akurat na przednią półkulę satelity większego ciała kosmicznego. W wyniku takiego kataklizmu woda, jako substancja lotniejsza, mogłaby ulecieć bezpowrotnie z dużego obszaru powierzchni globu, podczas gdy substancje mineralne mogłyby na tę powierzchnię powrócić i rozproszone pokryć ją wielką ciemną plamą. Można się obawiać, że rozstrzygnięcia między tymi czterema możliwościami szybko się nie doczekamy.

Tomasz KWAST

Fizycy Fizycy Fizycy Fizycy Fizycy Fizycy Fizycy Fizycy Fizycy Fizycy

Studenci fizyki

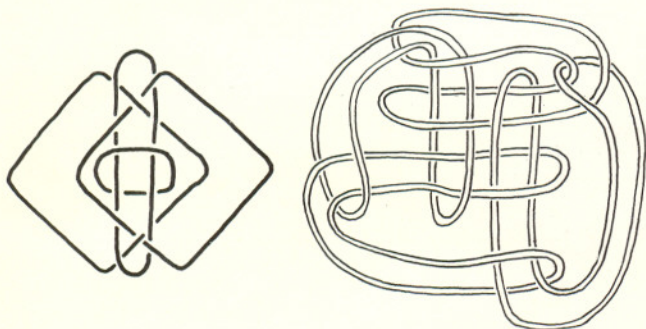
Na tylnej okładce znajduje się reklamówka Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego. Tutaj zaś publikujemy wypowiedzi studentów, którzy wyjaśniają, jak to się stało, że wybrali fizykę, co ich na studiach spotkało i jakie mają plany.

Małgorzata Rowicka – W liceum nie myślałam o studiowaniu fizyki. Dużo bardziej pociągała mnie chemia, matematyka czy nawet historia. Ostatecznie wybrałam studia chemiczne, lecz zaczęłam też chodzić na zajęcia, głównie matematyczne, na Wydział Fizyki. Zajęcia te podobały mi się coraz bardziej, chciałam uczestniczyć w coraz to nowych i tak po dwóch latach zostałam studentką Wydziału Fizyki UW. Najbardziej podobała mi się tutaj... matematyka, mniej oderwana od życia i bardziej „zageszczona” niż ta wykładana na Wydziale Matematyki. Również fizyka, w większym stopniu „zmatematyzowana” i przez to łatwiejsza dla mnie do zrozumienia, bardziej mi się podobała niż w szkole średniej. Wrażenie też robiły na mnie pokazy doświadczeń, lecz skłonność do matematyki sprawiła, że specjalizację wybrałam w Katedrze Metod Matematycznych Fizyki. Uczę się teraz o tzw. grupach kwantowych, które będą prawdopodobnie tematem mojej pracy magisterskiej. Po jej szczęśliwym zakończeniu chciałabym pozostać na uczelni i zajmować się fizyką matematyczną.

Andrzej Kudlicki – Astronomia interesowała mnie od początku szkoły średniej, było to jednak jedynie hobby. W klasie maturalnej chodziłem na niektóre zajęcia dla pierwszego roku Wydziału Fizyki. Spodobały mi się bardzo wykłady fizyki doświadczalnej, gdy w sali wykładowej mierzono, na przykład, prędkość światła lub pokazywano znikanie w punkcie krytycznym granicy między cieczą a gazem. Ciekawe, choć bardzo trudne wydały mi się wykłady z analizy matematycznej. Postanowiłem studiować astronomię. Okazało się, że – poza wstępnym wykładem – nauka astronomii zaczyna się na dobre dopiero na trzecim roku. Przedtem wraz z przyszłymi fizykami studiuje się matematykę i fizykę. Nauka zaczyna się od podstaw, lecz tempo jest bardzo szybkie i wielu odpada. Na starszych latach studia stają się ciekawsze. Jeszcze przed uzyskaniem dyplomu można uczestniczyć w projektach badawczych. Studenci bywają przyjmowani jako „wakacyjni” asystenci w ośrodkach naukowych, często zagranicznych. Dzięki temu udało mi się odwiedzić i trochę popracować w obserwatoriach astronomicznych w Armagh w Irlandii Płn. i Strasburgu we Francji. Studia dały mi możliwość bardzo ogólnego postrzegania świata, od mikroświata z bogactwem cząstek elementarnych, przez świat nas otaczający, do gwiazd i wreszcie Wszechświata jako całości. Tą ostatnią dziedziną, kosmologią właśnie, chciałbym się zajmować w swojej przyszłej pracy naukowej, którą myślę kontynuować po otrzymaniu dyplomu.

Rozwiązania epsilonowych zadań z numeru 12/93

2. Rysunek pokazuje, jak spleść cztery pętle (zdeformowane okręgi) w ten sposób, żeby po rozcięciu dowolnej, reszta okazała się niespleciona (o to chodziło w zadaniu). Przedstawiamy dwa takie sploty. Jeden z nich w oczywisty sposób uogólnia się na dowolną liczbę ogniwo-pętli.



Rys. 1

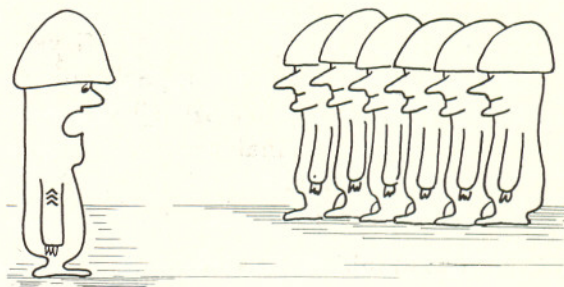
3. W czasie pierwszej wojny światowej pocisk z działa zburzył statuetkę rycerza z piką w ręku. Stało się to ostatniego dnia miesiąca. Iloczyn daty dnia, numeru miesiąca, wyrażonej w stopach długości piki, połowy wyrażonego w latach wieku dowódcy baterii strzelającej do zamku oraz połowy wyrażonego w latach czasu, jaki stała statua, równa się 451 066, przy czym wiek dowódcy, wiek statuy itd. są liczbami całkowitymi. Kiedy postawiono statuetkę?

Rozwiązanie się nasuwa: $451\ 066 = 2 \times 7 \times 11 \times 29 \times 101$. Ostatni dzień miesiąca musi dać 29, miesiąc to luty, a rok był przestępny, czyli 1916 – dowódca miał 22 lata, statua stała 202 lata, postawiono ją w 1714. Ale...

Żądaliśmy, by odpowiednie liczby były całkowite – lecz stąd nie wynika, że połowy tych liczb też mają być całkowite! Przy tym zastrzeżeniu należy rozkładać na czynniki liczbę $2 \times 2 \times 451\ 066$ i spośród potencjalnych ostatnich dni miesiąca może się wtedy pojawić jeszcze 28. Miesiącem nadal musi być luty, zostają liczby 11, 29 i 101. Tylko 11 może być długością piki w stopach, zatem dowódca miał 29 lat, a statua stała lat 101. Mogła zatem zostać postawiona w roku 1814, 1816 lub 1817.

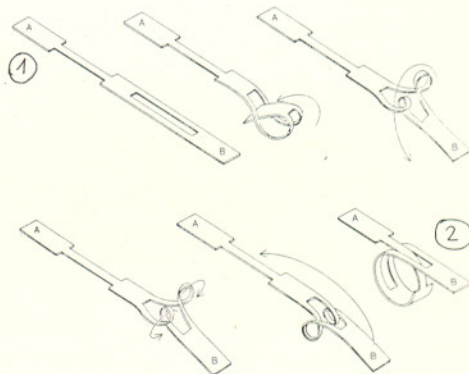
Zadanie o statui zostało wydrukowane w *Matematyce* 3-4/1952. Podał je p. Żuczkiwicz powołując się na nieokreślone źródło czeskie. Ukazało się ono również w 1972 roku w „Rozkoszach Łamania Głowy” Lecha Pijanowskiego. Wykorzystano je w I stopniu Olimpiady Matematycznej w roku 1973. Co ciekawe – wszędzie przy publikowaniu rozwiązań podane jest tylko to jedno, wyznaczone przez 29 lutego – mimo że trzy dalsze rozwiązania, podane wyżej, też są zgodne ze wszystkimi założeniami...

– Dodatni obrót o 90° wykonać!



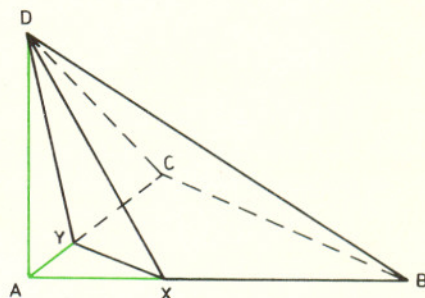
Rysunek z książki K. Ciesielskiego i Z. Pogody „Bezmiar matematycznej wyobraźni” – w księgarniach na początku 1994 roku.

4. Koniec A paska przykleiliśmy klejem do stołu i wtedy zażądano od nas przekształcenia go do pozycji 2 z pozycji 1. Jak to można zrobić, pokazują poniższe rysunki.



Rys. 2

5. Czy istnieje ostrosłup, którego podstawą jest czworokąt wypukły i którego dwie przeciwległe ściany boczne są prostopadłe zarówno do siebie, jak i do podstawy ostrosłupa? Pierwsze przemyślenie tematu może sugerować, że chyba raczej nie – ale istnieje! I łatwo go otrzymać. Weźmy ostrosłup, którego podstawą jest trójkąt prostokątny ABC (kątem prostym w A), a górny wierzchołek D dokładnie nad punktem A . Wystarczy teraz odciąć część ostrosłupa płaszczyzną DXY , gdzie X i Y są środkami boków AB i AC . W ostrosłupie $BCXYD$ ściany $BCXY$, BXD i CYD są wzajemnie do siebie prostopadłe.



Rys. 3

Rozwiązanie zadania 1 podaliśmy miesiąc temu; ze względu na różnice czasu między oddaniem *Delty* do druku i jej ukazaniem się, napiszemy wkrótce o tym, kto poprawnie rozwiązał zadania.