

ISSN 0013-788X  
N 2(237) P 3144593...



## SPIS TREŚCI

### NUMERU 2(237)

Rozpad promieniotwórczy  
sukcesywny i jego model  
hydrodynamiczny  
*Stanisław Bednarek*

Jak pęcznieje wąż ogrodowy  
*Andrzej Szymacha*

Patrz w niebo

Mała Delta

O nierówności Cauchy'ego  
i pewnym jej uogólnieniu  
*Henryk Pawłowski*

Klub 44

Zadania

Epsilon

str. 1

str. 1

str. 5

str. 6

str. 8

str.12

str.16

str.17

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego  
i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,  
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula  
Bogdan Cichocki  
Roman Duda  
Jan A. Gaj  
Tomasz Hofmokl – wiceprzewodniczący  
Tadeusz Jarzębowski  
Marcin Kubiak  
Andrzej Mąkowski  
Andrzej Pelczar  
Zbigniew Płochocki  
Zdzisław Pogoda  
Konrad Rudnicki  
Zbigniew Semadeni  
Grzegorz SitarSKI  
Józef I. Smak  
Kazimierz Stępień  
Mieczysław Subotowicz  
Andrzej Szymacha  
Andrzej Woszczyk  
Wacław Zawadowski

Redaguje kolegium w składzie:

Krzysztof Biesaga  
Piotr Hajłasz  
Jan Kalinowski – z-ca red. nac.  
Krystyna Kordos – sekr. red.  
Marek Kordos – red. nac.  
Tomasz Kwast  
Stanisław Mrówczyński  
Anna Rudnik  
Joanna Udalska

Adres Redakcji:

ul. Smyczkowa 5/7

02-678 Warszawa

tel. 43-02-43 wewn. 21

HAJLASZ@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w Zakładach Graficznych  
w Warszawie, ul. Srebrna 16

Skład systemem  $\text{\TeX}$  wykonała redakcja.

#### WARUNKI PRENUMERATY w AMOS-ie

Od stycznia 1993 r. prenumeratę „Deltę” prowadzi również firma AMOS,  
01-506 Warszawa, ul. Szenwalda 1 (tel. 39-17-52). Wpłaty przyjmowane są  
non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres  
prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru  
w pierwszym półroczu 1994 roku wynosi 8 000,-zł, a w drugim półroczu 10 000,-zł.  
Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**)  
cena numeru wynosi w pierwszym półroczu 1994 r. 20 000,-zł, a w drugim –  
22 000,-zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę  
ponosi zamawiający.

**Uwaga!** AMOS dostarcza „Deltę” pod wskazany adres nie pobierając dodatkowej  
opłaty. Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS  
funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Blankiet pocztowy na prenumeratę „Deltę” w AMOS-ie zamieszczamy na str. 7/8.

Konto AMOS-u: **PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-186**

#### WARUNKI PRENUMERATY w RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na II kwartał 1994 r. wynosi 24 000,- zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku  
zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa  
prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
  - na teren kraju
    - jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania  
lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony  
sposób,
  - na zagranicę
    - „Ruch” S.A. Oddział Warszawa, 00-958 Warszawa, konto  
PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – **dostawa odbywa się  
pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty**, z wyjątkiem zlecenia  
dostawy pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni  
pokrywa prenumeratorem.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
  - na kraj i zagranicę – do 20 XI na I kwartał roku następnego  
do 20 II na II kwartał  
do 20 V na III kwartał  
do 20 VIII na IV kwartał.

Okładkę wykonał  
*Bernard BADZIOCH*

Wydawca:  
Uniwersytet Warszawski  
Krakowskie Przedmieście 26/28  
00-927 Warszawa

Cena 1 egzemplarza 8 000,- zł



# Rozpad promieniotwórczy sukcesywny i jego model hydrodynamiczny

Stanisław BEDNAREK

Wszystkie izotopy pierwiastków występujących w przyrodzie można podzielić na dwie grupy – izotopy trwałe oraz nietrwałe. Te drugie ulegają rozpadowi promieniotwórczemu. Wśród powstających w wyniku tego produktów mogą znajdować się izotopy trwałe lub nietrwałe. Izotopy nietrwałe ulegają kolejnemu rozpadowi i wtedy mamy do czynienia z rozpadem promieniotwórczym sukcesywnym. Powstające w tym rozpadzie izotopy tworzą tzw. szereg promieniotwórczy. W przyrodzie występują cztery naturalne szeregi promieniotwórcze – uranu, toru, aktynu i neptunu. Ich nazwy pochodzą od nazw pierwiastków, od których zaczynają się te szeregi.

Bezpośrednie badanie rozpadu promieniotwórczego w warunkach domowych, czy nawet szkolnych, nie jest łatwe. Potrzebna jest do tego celu specjalna aparatura, a poza tym istnieje niebezpieczeństwo napromieniowania eksperymentatora.

W sytuacji, gdy prowadzenie badań na rzeczywistych obiektach jest niemożliwe, trudne lub niebezpieczne, fizycy i technicy chętnie wykorzystują modele, które powinny odzwierciedlać interesujące nas cechy obiektów rzeczywistych. Podobnie postąpimy również z rozpadem promieniotwórczym sukcesywnym. Zastosujemy całkowicie bezpieczny i łatwy do zbudowania w warunkach domowych model hydrodynamiczny. Wykorzystamy w tym modelu ilościową analogię zależności od czasu wysokości słupa cieczy wypływającej przez poziomą rurkę z cylindrycznego pionowo ustawionego naczynia i liczby jąder izotopu, które nie uległy jeszcze rozpadowi. Ograniczymy się przy tym do szeregu promieniotwórczego złożonego z trzech izotopów. Nic jednak nie stoi na przeszkodzie, aby opisywać i modelować szeregi dłuższe, w których występuje większa liczba izotopów.

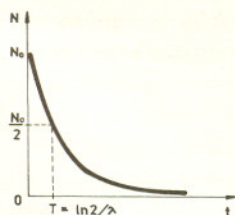
Rozpatrzmy najpierw wspomnianą analogię. Liczba jąder izotopu  $dN$ , która ulega rozpadowi w bardzo krótkim przedziale czasu  $dt$ , jest wprost proporcjonalna do pozostałej jeszcze liczby jąder  $N$  i zależy od rodzaju izotopu, co charakteryzuje stała rozpadu  $\lambda$ . Jest to prawo rozpadu promieniotwórczego. Można je zapisać równaniem

$$(1) \quad dN = -\lambda N dt.$$

Znak minus informuje o tym, że liczba jąder maleje. Czytelnicy, którzy poznali rachunek różniczkowy, mogą sprawdzić, że rozwiązaniem równania (1), przy warunku początkowym  $N(0) = N_0$  jest funkcja wykładnicza

$$(2) \quad N(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Wykres tej funkcji jest przedstawiony na rysunku 1.



Rys. 1

## Jak pęcznieje wąż ogrodowy

Andrzej SZYMACHA

Mam na działce długi, gumowy, czarny wąż połączony z pompą elektryczną z jednego końca i zaopatrzony w zawór na drugim końcu. Wąż służy do podlewania, ale także do grzania wody w pogodny dzień. Stąd znam dokładnie objętość wody w wężu – 12 l (to dużo – można spokojnie wziąć prysznic). Wąż ten służy także jako minihydrofor. Po wyłączeniu pompy (przy zamkniętym zaworze) wąż jest nabrzmiały i wyrzuca z siebie do 3 l wody (to też sporo – można wielokrotnie opłukać ręce bez włączania pompy). Innymi słowy, pod ciśnieniem pompy (około 2 atm) objętość węża przyrasta o 1/4. To jest fakt wzięty z **obserwacji**. Objętość cylindra, jaki stanowi wąż, jest iloczynem pola przekroju i długości. Zaintrygowało mnie któregoś dnia w jakim stopniu owe 25% bierze się ze wzrostu pola przekroju, a w jakim ze zwiększenia długości węża. Gdyby rozdymała się kostka, to ponieważ  $1,25 \approx 1,077^3$ , każdy wymiar liniowy zwiększyłby się o około 8%. Przy długości mojego węża – 60 m, 8% to prawie 5 m – zmiana bardzo wyraźna, łatwa do zauważenia. Tymczasem pomiar wydłużenia po napompowaniu węża wykazał w ramach dokładności po prostu... zero! Skoro analiza wymiarowa prowadzi do oszacowania wydłużenia rzędu długości węża, czyli metrów, a w praktyce są co najwyżej centymetry, to w problemie musi być jakiś mały bezwymiarowy parametr. Z pewnym fałszywym poczuciem zrozumienia wiązałem go zrazu z dysproporcją wymiaru średnicy węża i jego długości, ale coś mnie gryzło, że to nie tak i zacząłem się nad tym dokładniej zastanawiać.

Aby wyjaśnić **obserwację**, musimy odwołać się do prawa Hooke'a. Prawo Hooke'a sformułowane zostało niemal tak dawno jak prawa Newtona, jego praktyczne znaczenie w technice jest olbrzymie, jednak szerzej znane jest ono jedynie w uproszczonym przypadku szczególnym rozciągania czy ściskania pręta. Wzór, jaki się tu powinien nasunąć, to  $F = k \Delta l$ . W tym wzorze  $F$  jest, oczywiście, siłą rozciągającą, a  $\Delta l$  wydłużeniem pręta. Stała proporcjonalności  $k$  jest różna dla różnych prętów. Nie jest trudno



uzasadnić, że stała ta dla różnych prętów wykonanych z tego samego materiału powinna być wprost proporcjonalna do pola przekroju poprzecznego  $s$  i odwrotnie proporcjonalna do długości początkowej  $l$  pręta. Z uwzględnieniem tej obserwacji prawo Hooke'a można zapisać w postaci

$$\frac{F}{s} = E \frac{\Delta l}{l},$$

gdzie  $E$  zależy już tylko od rodzaju materiału, ale nie od rozmiarów pręta. Stała  $E$  nazywa się *modułem Younga*.

Dla dalszych rozważań wygodnie jest zamiast siły działającej na cały przekrój rozważać siłę przypadającą na jednostkę pola powierzchni zwaną *napięciem*  $N = F/s$ . Gdy  $N$  jest ujemne, nazywa się je też ciśnieniem. Podobnie, zamiast bezwzględnej wartości wydłużenia  $\Delta l$  lepiej wprowadzić wydłużenie względne  $x = \Delta l/l$ , które będziemy zwać *deformacją*.

Z użyciem tych wielkości napiszemy

$$x = \frac{1}{E} N.$$

A zatem deformacja jest wprost proporcjonalna do napięcia lub, jak oryginalnie ujął to Hooke, *jakie napięcie – taka deformacja*.

Gdy przyjrzeć się dokładniej rozciąganiu prętowi, zauważy się, że deformacji podłużnej, spowodowanej napięciem wzdłużnym, towarzyszy nieodłączna deformacja poprzeczna, mimo że nie występuje poprzeczne napięcie! Ma to szczególne znaczenie, gdy pręt nie jest wcale długi, a wręcz jest klockiem prostopadłościennym (np. sześcianiem). Kompletne prawo Hooke'a musi opisać więc także i to, co dzieje się z wymiarami poprzecznymi. Sprawa jest prosta. Jest niemal oczywiste, że wartość każdej z deformacji poprzecznych ( $y$  w kierunku  $y$  i  $z$  wzdłuż osi  $z$ ) powinna być pewnym stałym (dla danego materiału) *ułamkiem* deformacji podłużnej:

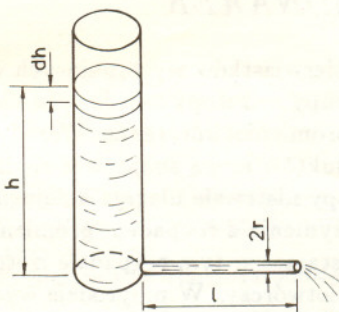
$$y = -\sigma x,$$

$$z = -\sigma x.$$

Stała  $\sigma$  jest, obok  $E$ , drugą stałą charakteryzującą własności sprężyste danego materiału. Nazywa się ona *stałą Poissona*.

Ścisłe biorąc, to, co zostało powyżej powiedziane, dotyczy tzw. ciał izotropowych, nie wyróżniających swą strukturą żadnego z kierunków. Ciałem takim będzie na przykład szkło czy zwykła bryła metalu będąca zlepkiem ogromnej ilości mikrokryształków chaotycznie zorientowanych. Przykładem ciała

Weźmy teraz pod uwagę cylindryczne pionowo ustawione naczynie napełnione do wysokości  $h$  cieczą o gęstości  $\rho$  i zaopatrzone w poziomą rurkę o długości  $l$  i promieniu  $r$ , przez którą ciecz może wypływać. Naczynie to przedstawione jest na rysunku 2.



Rys. 2

Objętość cieczy, która przepłynęła przez tę rurkę w bardzo małym przedziale czasu  $dt$ , jest określona wzorem Hageny–Poiseuille'a

$$(3) \quad dV = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8l\eta} dt,$$

w którym  $\eta$  oznacza współczynnik lepkości, a  $\Delta p$  różnicę ciśnień między końcami rurki. W naszym przypadku  $\Delta p$  jest ciśnieniem hydrostatycznym słupa cieczy w naczyniu i wyraża się znanym ze szkoły podstawowej wzorem

$$(4) \quad p = \rho gh.$$

Przyjmując, że ciecz jest nieściśliwa, można określić obniżenie się poziomu cieczy  $dh$  w naczyniu spowodowane jej wypływem

$$(5) \quad dV = -S dh,$$

$S$  – oznacza w tym wzorze pole przekroju poprzecznego naczynia. Łącząc równania (3) i (5) oraz podstawiając  $\Delta p$  otrzymujemy

$$(6) \quad dh = -\frac{\pi r^4 \rho g}{8l\eta S} h dt.$$

Równanie to ma strukturę analogiczną do równania (1). Wyrażenie stojące przed  $h$  jest stałe i oznaczmy je przez  $\lambda_m$

$$(7) \quad \lambda_m = \frac{\pi r^4 \rho g}{8l\eta S}.$$

Rozwiązaniem równania (6) przy warunku początkowym  $h(0) = h_0$  jest funkcja

$$(8) \quad h(t) = h_0 e^{-\lambda_m t}.$$

Patrząc na równania (2) i (8) widzimy, że charakter zmian  $N$  oraz  $h$  w zależności od czasu jest taki sam. To właśnie pozwala nam wykorzystać cylindryczne naczynie z poziomą rurką do budowy modelu.

Rozpatrzmy teraz najprostsz rozpad promieniotwórczy sukcesywny. Niech  $N_{01}, N_{02}, N_{03}$  i  $N_1, N_2, N_3$  oznaczają odpowiednio liczby jąder trzech izotopów w chwili  $t = 0$  i  $t > 0$ ,  $\lambda_1$  oraz  $\lambda_2$  niech oznaczają stałe rozpadu pierwszych dwóch izotopów, trzeci jest trwały. Zmiany liczby jąder poszczególnych izotopów  $dN_1, dN_2, dN_3$  w bardzo krótkim przedziale czasu  $dt$  wyrażają wzory wynikające z prawa rozpadu promieniotwórczego

$$(9) \quad dN_1 = -\lambda_1 N_1 dt,$$

$$(10) \quad dN_2 = (\lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2) dt,$$

$$(11) \quad dN_3 = \lambda_2 N_2 dt.$$



Liczba jąder pierwszego izotopu maleje o  $\lambda_1 N_1$ , stąd minus w równaniu (9). Jądra pierwszego izotopu po rozpadzie przekształcają się w jądra izotopu drugiego. Przyrost ich liczby wynosi  $\lambda_1 N_1$ . Jednocześnie izotop ten rozpada się z szybkością  $\lambda_2 N_2$ , przekształcając się w izotop trzeci. Z tą samą szybkością wzrasta więc liczba jąder tego izotopu.

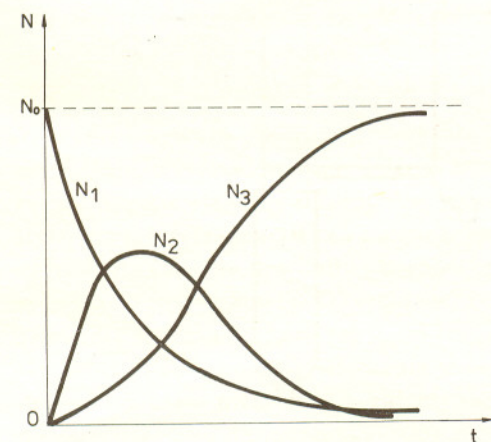
Załóżmy, że w chwili 0 istniał tylko pierwszy izotop, który po nieskończonym (praktycznie – bardzo długim) czasie przekształcił się za pośrednictwem izotopu drugiego w izotop trzeci. Te warunki brzegowe można zapisać w postaci  $N_1(0) = N_{01}$ ,  $N_2(0) = N_3(0) = 0$ ,  $N_1(\infty) = N_2(\infty) = 0$  i  $N_3(\infty) = N_{01}$ . Łatwo sprawdzić przez różniczkowanie, że przy tych warunkach rozwiązania układu równań (9), (10), (11) mają postać

$$(12) \quad N_1 = N_{01} e^{-\lambda_1 t},$$

$$(13) \quad N_2 = N_{01} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} [e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}],$$

$$(14) \quad N_3 = N_{01} \left[ 1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t}) \right].$$

Ich wykresy w zależności od czasu przedstawia rysunek 3.



Rys. 3

Równania analogiczne do równań (9), (10) i (11) opisują również zależności od czasu wysokości słupów cieczy w układzie naczyń pokazanym na rysunku 4.

W tym celu wystarczy zastąpić liczby jąder izotopów przez odpowiednie wysokości słupów cieczy, a stałe rozpadu przez współczynniki  $\lambda_{1m}$  i  $\lambda_{2m}$  zależne od parametrów modelu.

Otrzymujemy wtedy:

$$(15) \quad h_1 = h_{01} e^{-\lambda_{1m} t},$$

$$(16) \quad h_2 = h_{01} \frac{\lambda_{2m}}{\lambda_{2m} - \lambda_{1m}} [e^{-\lambda_{1m} t} - e^{-\lambda_{2m} t}],$$

$$(17) \quad h_3 = h_{01} \left[ 1 + \frac{\lambda_{1m}}{\lambda_{2m} - \lambda_{1m}} (e^{-\lambda_{2m} t} - e^{-\lambda_{1m} t}) \right].$$

Żeby zbudować hydrodynamiczny model sukcesywnego rozpadu promieniotwórczego, potrzebne będą: trzy przezroczyste plastikowe butelki o pojemności 1,5–2 l, trzy kawałki mocnej nici, dwie rurki do picia napojów (tzw. słomki), plastelina, linijka, mazak, nożyczki, zegarek z sekundnikiem, trochę piasku, naczynie z wodą i drewniany pręt o długości około 1 m lub większej (może to być np. kij od szczotki).

nieizotropowego może być drewno, które przy tym samym napięciu inaczej deformuje się, gdy rozciąga się je wzdłuż włókien, a inaczej gdy w poprzek włókien. Podobnie jest z monokryształami – uogólnieniem prawa Hooke'a na ciała anizotropowe zajmować się tu jednak nie będziemy.

Ponieważ za chwilę wprowadzimy napięcia w kierunku osi  $y$  i  $z$ , dla rozróżnienia oznaczymy napięcie dotychczasowe  $N$  działające wzdłuż osi  $x$  symbolem  $N_x$ . Zbierając wyrażenia na wszystkie trzy deformacje wywołane napięciem  $N_x$  mamy

$$x = \frac{1}{E} (N_x - 0),$$

$$y = \frac{1}{E} (0 - \sigma N_x),$$

$$z = \frac{1}{E} (0 - \sigma N_x).$$

Jeżeli oprócz napięcia  $N_x$  przyłożone jest i napięcie  $N_y$ , to wystąpią nowe deformacje:  $(1/E)(N_y)$  w kierunku  $y$  oraz  $(1/E)(-\sigma N_y)$  w każdym z kierunków  $x$  i  $z$  (które teraz są poprzeczne względem napięcia  $N_y$ ). Wreszcie jeśli działa także napięcie  $N_z$ , to kompletna deformacja wynosi:

$$x = \frac{1}{E} (N_x - \sigma(N_y + N_z)),$$

$$y = \frac{1}{E} (N_y - \sigma(N_x + N_z)),$$

$$z = \frac{1}{E} (N_z - \sigma(N_x + N_y)).$$

Nim przejdziemy do tytułowego węża, jeszcze chwilę poświęcimy rozważaniom ogólnym. Dodajmy stronami trzy powyższe równania. Otrzymamy:

$$x + y + z = \frac{1}{E} (1 - 2\sigma)(N_x + N_y + N_z).$$

Czytelnik łatwo sprawdzi, że dla małych deformacji suma  $x + y + z$  wyraża akurat względną zmianę objętości:

$$\frac{\Delta V}{V} = x + y + z.$$

Ponieważ przy ścisnaniu ze wszystkich stron ciało nie może zwiększać swej objętości (nastąpiłaby samorzutna eksplozja), przeto

$$\sigma \leq \frac{1}{2}.$$

Dla typowych metali jest  $\sigma \approx 1/3$ . Do górnej granicy wartości, tj. do  $1/2$ , stała Poissona zbliża się u ciał, których sprężystość względem zmiany objętości jest dużo większa niż względem zmiany kształtu. Ciałem takim jest guma, dla której  $\sigma = 0,49$ . Idealizując, możemy, dla uproszczenia, przyjąć dla gumy nawet  $\sigma = 1/2$ .



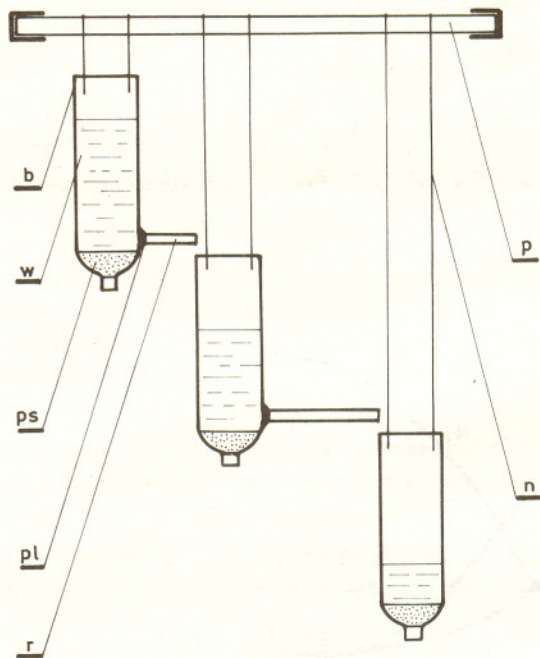
Wracamy teraz do węża. Spróbujmy wyznaczyć napięcia gumy w „nabitym” wodą wężu. Wyobraźmy sobie kwadracik wydzielony na powierzchni węża o jednej z par boków równoległych do osi. Z jakimi siłami ciągnięte są boki tego kwadratu, lub inaczej, z jaką siłą trzeba by trzymać każdy centymetr długości „rany”, jaka powstałaby na powierzchni węża, gdyby go autentycznie naciąć na całej grubości lancetem i starać się nie dopuścić do „wodotoku”? Dla kierunku podłużnego siłę tę najłatwiej wyznaczyć tnąc od razu wąż na całym obwodzie. Siła, którą musimy przyłożyć, równa się w tym przypadku parciu wody na denka cylindra. Oznaczając promień węża przez  $r$ , a ciśnienie wody (ponad atmosferyczne; ciśnienie atmosferyczne w dalszym ciągu zaniebamy jako nieistotne dla naszego problemu) przez  $p$  i zaniebując (chwilowo) grubość  $h$  gumy, ustalamy, że na obwodzie o długości  $2\pi r$  trzeba przyłożyć siłę  $\pi r^2 p$ . Na każdą jednostkę długości przypada więc  $pr/2$ , a na jednostkę pola powierzchni przeciętego materiału  $pr/2h$ .

W celu wyznaczenia napięcia poprzecznego wyobrażamy sobie, że przecinamy wąż na całej długości  $d$  (jak bagietkę, z której chcemy zrobić bardzo długą kanapkę). Siła oddalająca obie połówki węża równa się i teraz iloczynowi ciśnienia i pola przekroju (a nie pola powierzchni bocznej walca!), czyli  $2rdp$ , i trzeba ją rozłożyć równomiernie na długości dwóch „ran” wynoszącej razem  $2d$ . Daje to na jednostkę długości siłę równą  $pr$ , a napięcie równe  $pr/h$ . Zauważmy, że napięcie wzdłużne jest dokładnie dwa razy mniejsze od poprzecznego. Nic dziwnego, że na przykład parówki w gotowaniu, o ile pękają, to zawsze wzdłuż osi.

Trochę mniej oczywiste jest, jak sobie poradzić z napięciem (teraz ujemnym) w kierunku prostopadłym do powierzchni węża. Napięcie to zmienia się od zera na powierzchni zewnętrznej do wartości  $-p$  na powierzchni wewnętrznej. Szczęśliwie napięcie to nie zależy od wartości  $h$ , podczas gdy dwa poprzednie zawierały  $h$  w mianowniku. W przypadku węża o cienkich (w stosunku do promienia) ściankach można przyjąć, że napięcie prostopadłe do powierzchni jest równe zeru.

Przyjmując, że oś węża to oś  $x$ , kierunek prostopadły do powierzchni to  $z$ ,

Od butelek odcinamy dna, wykonujemy w pobliżu powstałego brzegu cztery otworki, przez które przewlekamy nić służącą do zawieszenia butelek. Nici te muszą być różnej długości, tak żeby druga butelka znalazła się poniżej korka pierwszej, a trzecia poniżej korka drugiej (rys. 4). Butelki zakręcamy korkami i wypełniamy piaskiem część zwężającą się w pobliżu szyjki. Otrzymamy w ten sposób naczynie o stałej powierzchni przekroju poprzecznego. W bocznych ścianach w pobliżu zwężającej się części dwóch wyżej zawieszonych butelek wycinamy jeszcze po jednym otworze, przez który przekładamy słomki. Miejsca przechodzenia słomek przez ścianki butelek uszczelniamy plasteliną. Butelki zawieszamy na niciach na podpartym na końcach, np. na oparciach dwóch ustawionych obok siebie krzeseł, drewnianym przecie.



Rys. 4. b – butelka, n – nić, pl – plastelina, p – pręt, ps – piasek, r – rurka, w – woda.

Za pomocą mazaka i linijki rysujemy skalę zaznaczając w równych odstępach, np. co 1 cm, poziome kreski. Koniec słomki wychodzącej z pierwszej butelki zatykamy korkiem z plasteliny, napełniamy tę butelkę wodą i notujemy wysokość, na której znajduje się górna powierzchnia tej cieczy. Następnie usuwamy plastelinowy korek i pozwalamy cieczy swobodnie przepływać. W równych odstępach czasu, np. co 20 s, odczytujemy na skalach wysokości poziomy wody we wszystkich trzech butelkach. Pomiary przeprowadzamy aż do momentu przepłynięcia całej cieczy do trzeciej – najniższej położonej butelki. Na podstawie tych wyników sporządzamy wykresy wysokości słupów cieczy w zależności od czasu i porównujemy te wykresy z rysunkiem 3.

Na zakończenie trzy problemy do samodzielnego rozwiązania:

1. Mamy do dyspozycji tylko rurki o równych średnicach. Jak w najprostszy sposób można uzyskać układ do badania rozpadu izotopów o innych wartościach stałej rozpadu?
2. Jakie jeszcze zjawiska lub procesy można modelować za pomocą naszego układu?
3. Jak zmieni się kształt krzywych z rysunku 3 dla przypadku, gdy stałe rozpadu będą spełniały warunki:  $\lambda_1 = \lambda_2$ ,  $\lambda_1 \gg \lambda_2$  i  $\lambda_1 \ll \lambda_2$ ?



Galaktyki występują w czterech wyraźnie dających się rozróżnić typach: najliczniejsze to spiralne i eliptyczne, znacznie mniej liczne to nieregularne i soczewkowate. Nazwy te nie wymagają omawiania – może z wyjątkiem soczewkowatych. Oznacza się je symbolem S0 (S-zero), a ich budowa jest jakby pośrednia między budową galaktyk eliptycznych a spiralnych. Mianowicie, kształt centralnego zgęszczenia mają jak maksymalnie spłaszczone galaktyki eliptyczne, a ponadto rozległy płaski dysk – jak galaktyki spiralne – ale pozbawiony struktury. Inaczej mówiąc, galaktyka S0 wygląda jak galaktyka spiralna pozbawiona jasnych gwiazd, gromad otwartych i materii międzygwiazdowej.

Nasuwa się naturalne pytanie, skąd takie galaktyki się wzięły, co wiąże się z ogólnym problemem powstawania i ewolucji galaktyk. Niestety, obecnie problem ten jest daleki od rozwiązania. Panuje pogląd, że pierwotna wartość momentu pędu obłoku, z którego powstaje galaktyka, określa typ przyszłej galaktyki. Oczywiście, z obłoków o małym momencie pędu, tj. rotujących powoli, powstawałyby galaktyki eliptyczne, a z rotujących szybko – galaktyki spiralne. Przypuszcza się, że potem ani galaktyki eliptyczne nie stają się spiralnymi, ani odwrotnie. Nie mniej jednak S0 robią wrażenie, że powstały ze spiralnych wskutek utraty części budulca.

W wyniku nowych obserwacji wrażenie to należy jednak, jak się wydaje, wyjaśnić inaczej. Przede wszystkim obserwacje rentgenowskie ujawniły obecność w galaktykach S0 znacznych ilości gorącego (rzędu  $10^3$  eV) gazu międzygwiazdowego. Podobnie obserwacje radiowe dowiodły obecności również gazu zimnego, nawet w postaci cząsteczkowej. Okazało się, że galaktyki soczewkowate zawierają średnio do 1/10 tej ilości rozproszonego gazu co nasza Galaktyka i że tempo powstawania w nich gwiazd również jest około dziesięciokrotnie niższe niż w galaktykach spiralnych. Wydajność produkcji gwiazd na jednostkę masy materii międzygwiazdowej jest w przybliżeniu taka jak w zwykłych galaktykach spiralnych. Ponieważ zaś gwiazdy tworzące galaktyki S0 ewoluują i rozpraszają swoją materię powoli, nic dziwnego, że materii międzygwiazdowej jest w tych galaktykach niewiele.

Powyższe rozważania można uważać za jeszcze jeden argument ratujący nasz dotychczasowy pogląd, że typ galaktyki jest stały w trakcie jej życia. Przedstawione tu sprawy brzmią mało efektownie, ilustrują jednak fakt, jak dalecy jesteśmy od stworzenia spójnego modelu ewolucji galaktyk i jakie szczegóły model taki powinien uwzględnić.

Tomasz KWAST



**Rozwiązanie zadania M 694.** 9900 punktów przecięcia stu okręgów wielkich wyznacza nam  $9900 : 2 = 4950$  różnych średnic sfery. Z liczb  $1, 2, \dots, 9900$  tworzymy 4950 różnych par postaci  $(k, 9901 - k)$ , gdzie  $k = 1, 2, \dots, 4950$  i wpisujemy liczby z jednej pary na końcach tej samej średnicy (w jakikolwiek sposób przyporządkowując pary średnicom). Suma liczb położonych na dowolnym okręgu jest równa

$$S = \text{liczba średnic o końcach na jednym okręgu} \cdot (k + 9901 - k) = 99 \cdot 9901.$$

a kierunek na powierzchni stycznej do obwodu to  $y$ , mamy

$$N_x = N_x,$$

$$N_y = 2N_x,$$

$$N_z = 0.$$

Wstawiając powyższe wartości do prawa Hooke'a, obliczamy natychmiast, że

$$x = (1 - 2\sigma) \frac{N_x}{E},$$

$$y = (2 - \sigma) \frac{N_x}{E}.$$

A zatem przy stosunku napięć  $1 : 2$  stosunek deformacji wynosi w naszym przypadku  $(1 - 2\sigma) : (2 - \sigma)$ . Bez tej „sigmy” byłoby też  $1 : 2$ , a to musiałoby oznaczać przy dwudziestopięcioprocentowym wroście objętości około pięcioprocentowy wzrost długości naszego węża (około 3 m). Ale  $\sigma$  dla gumy jest prawie równe  $1/2$ ! W tym przybliżeniu stosunek deformacji wynosi  $0 : 2$ . Przyjmując bardziej realistycznie  $\sigma = 0,49$  dostaniemy stosunek deformacji równy  $0,02 : 1,51$ , a to prowadzi do wydłużenia węża o około 8 cm, wielkość trudną do zauważenia przy długości sześćdziesięciu metrów. Nieoczekiwanym małym parametrem, zmieniającym proces pęcznienia całkowicie wbrew intuicji, jest różnica między faktyczną wartością współczynnika Poissona dla gumy a wartością teoretycznie maksymalną, tj.  $1/2$ .

Wreszcie, na zakończenie, zastanówmy się, jak zachować się powinien przy rozdymaniu cylinder o ściankach grubych, na przykład gdy promień wewnętrzny cylindra stanowi, powiedzmy, połowę promienia zewnętrznego. Dla uproszczenia, niech ma miejsce przypadek graniczny materiału, dla którego  $\sigma = 1/2$ . Jeśli podzielić w myśli (lub nawet realnie!) taki cylinder na szereg koncentrycznych walców ściśle w siebie wpasowanych, to każdy z nich jest teraz cienki i spełnia założenia poprzednich rozważań. Jedyna różnica polega na tym, że, poza dwoma skrajnymi, nasze cylindryczne powłoki zamiast przez wodę od wewnątrz, a powietrze od zewnątrz, są ściskane przez przylegające powłoki gumowe. Mimo że guma nie podlega prawu Pascala, sama symetria problemu gwarantuje, że i w tym przypadku oddziaływanie ma wyłącznie kierunek radialny! A więc każda z powłok (**cienkich!**) jest w sytuacji mechanicznej, którą już rozpatrzyliśmy. Wiemy, że żadna z nich nie zmieni długości, a więc i wąż jako całość nie zmieni długości.





# mata delta

## Wielomino

Domino to prostokąt  $2 \times 1$  złożony z dwóch kwadratów. Uogólnieniem tego pojęcia jest wielomino. Wielomino to kilka kwadratów połączonych wzdłuż krawędzi, tworzących łącznie jeden kawałek – w tym sensie, że każde dwa kwadraty wielomina można połączyć ruchem wieży. Zamiast uściślać definicję wyjaśnijmy ją na przykładach. Wielomino złożone z  $n$ -kwadratów nazywać będziemy  $n$ -ominem. I tak monomino, czyli 1-omino, to po prostu kwadrat  $1 \times 1$ ; domino (2-omino) to kostka  $2 \times 1$ . Triomina (3-omina) są już dwa (rysunek). Tetromin (4-omin) jest 5, a pentomin (5-omin) aż 12 (patrz tylna okładka). Do dziś nie wiadomo, jaki jest wzór na liczbę  $n$ -omin.

MONOMINO



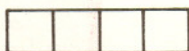
DOMINO



TRIOMINA



TETROMINA



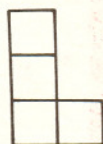
tetromino proste



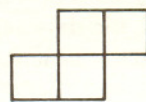
tetromino kwadratowe



T - tetromino



L - tetromino



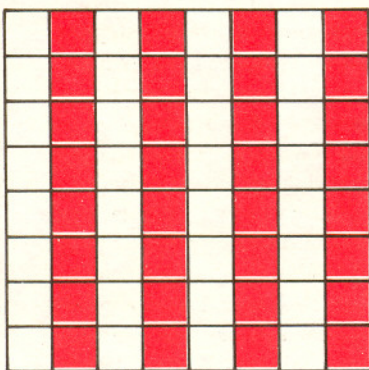
tetromino skośne

Wielomino to śliczny matematyczny obiekt. Dlaczego? Gdyż jak z rękawa wysypują się pytania, twierdzenia, hipotezy... i śliczne rysunki. Jeden, wciąż nie rozwiązany, problem znalezienia wzoru na liczbę  $n$ -omin już zasygnalizowaliśmy.

Autorem definicji wielomina jest Solomon W. Golomb. On właśnie zwrócił uwagę na wielomina jako skarbnicę matematycznych pomysłów.

*Szachownicy nie można pokryć za pomocą 15 L-tetromin i jednego tetromina kwadratowego.*

Liczba kwadratów  $16 \times 4 = 64$ , niestety, zgadza się. Aby więc udowodnić powyższe stwierdzenie, trzeba znaleźć jakiś inteligentniejszy argument. Pomalujmy szachownicę w paski, tak jak na rysunku. Zauważmy, że niezależnie od tego, jak położymy L-tetromino na szachownicy, zawsze pokryje ono trzy kostki jednego koloru i jedną drugiego.





Przypuśćmy, że udało się nam pokryć szachownicę za pomocą 15  $L$ -tetromin i jednego tetromina kwadratowego. Oznaczmy przez  $n$  liczbę tych  $L$ -tetromin, które pokrywają trzy kostki kolorowe i jedną białą. Wówczas każde z pozostałych  $15 - n$   $L$ -tetromin przykrywa trzy kostki białe i jedną kolorową. Ponieważ mamy 32 kostki kolorowe, a tetromino kwadratowe przykrywa dwie kostki białe i dwie kolorowe, więc  $n \cdot 3 + (15 - n) \cdot 1 + 2 = 32$ , skąd  $n = 7\frac{1}{2}$ , a to jest niemożliwe. Oznacza to, że nie da się wyżej wymienionymi tetrominami przykryć szachownicy.

*Szachownicy nie można przykryć za pomocą jednego tetromina kwadratowego oraz dowolnej kombinacji tetromin prostych i skośnych.*

To też można udowodnić za pomocą odpowiedniego – innego niż poprzednio – malowania szachownicy. Jak to zrobić?

Inne ciekawostki odnośnie wielomin drukujemy na tylnej okładce. Można wymyślać bardzo, bardzo dużo ciekawych twierdzeń, stawiać wiele hipotez i rysować wiele kolorowych rysunków.

**Uwaga!** Czekamy na ciekawe twierdzenia i rysunki. Najciekawsze wydrukujemy.

*Małą Deltę przygotował Piotr HAJŁASZ*



Odcinek dla poczty

Zł .....  
słownie złotych

adres .....  
wplacający

---

na  
r-k ..... **AMOS**  
01-506 Warszawa  
ul. Szenwalda 1

---

nazwa  
banku ..... **PKO VIII O/W-wa**  
Nr  
r-ku ..... **1586-77578-136**

---

.....  
podpis przyjmującego

Pobrano  
opłatę  
zł .....

Odcinek dla posiadacza rachunku

Zł .....  
słownie złotych

Dokładny  
adres .....  
wplacający

---

na  
r-k ..... **AMOS**  
01-506 Warszawa  
ul. Szenwalda 1

---

nazwa  
banku ..... **PKO VIII O/W-wa**  
Nr  
r-ku ..... **1586-77578-136**

---

.....  
podpis przyjmującego

Pobrano  
opłatę  
zł .....

Potwierdzenie dla wplacającego

Zł .....  
słownie złotych

Dokładny  
adres .....  
wplacający

---

na  
r-k ..... **AMOS**  
01-506 Warszawa  
ul. Szenwalda 1

---

nazwa  
banku ..... **PKO VIII O/W-wa**  
Nr  
r-ku ..... **1586-77578-136**

---

.....  
podpis przyjmującego

Pobrano  
opłatę  
zł .....



# O nierówności o średnich i pewnym jej uogólnieniu



**Rozwiązanie zadania F 376.**  
Prędkość elektronu wyznaczamy na podstawie bilansu energii

$$\frac{mv^2}{2} = eU, \text{ skąd } v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

Promień krzywizny w ziemskim polu magnetycznym wyznaczamy na podstawie drugiej zasady dynamiki

$$\frac{mv^2}{r} = evB \Rightarrow r = \frac{mv}{eB} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2Um}{e}}.$$

Uwzględniając geometrię toru elektronu (rys.) mamy

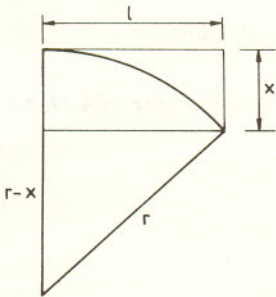
$$(r-x)^2 + l^2 = r^2.$$

Zakładając małe odchylenie  $x$  zaniedbujemy wyraz  $x^2$ , skąd

$$x \approx \frac{l^2}{2r}.$$

Ostatecznie

$$x = \frac{l^2 B}{2} \sqrt{\frac{e}{2Um}} = 2,1 \text{ mm}.$$



Henryk PAWŁOWSKI

Chyba nie było u nas takiej edycji Olimpiady Matematycznej, w której nie byłoby zadania dającego się rozwiązać (zawsze w elegancki sposób!) za pomocą nierówności o średniej arytmetycznej i średniej geometrycznej liczb nieujemnych, zwanej powszechnie nierównością Cauchy'ego. Ież zadań maturalnych i egzaminacyjnych jest w stanie za jej pomocą rozwiązać uczeń już klasy pierwszej szkoły średniej (a nierzadko wybitny – z klasy VII czy VIII szkoły podstawowej!).

Nie wiem, czy doczekam się, kiedy nierówność ta znajdzie swoje należne miejsce w programie nauczania matematyki obowiązującym wszystkie profile. Prosta w sformułowaniu, dająca się bardzo elementarnie udowodnić i przebogata w swoich zastosowaniach.

W niniejszym artykule zaprezentujemy bodaj najpiękniejszy jej elementarny dowód i uogólnimy ją.

Udowodnimy najpierw następujący

**Lemat.** Dla każdej liczby naturalnej  $n$  oraz dla dowolnych  $n$  liczb nieujemnych  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , takich że  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$  zachodzi nierówność

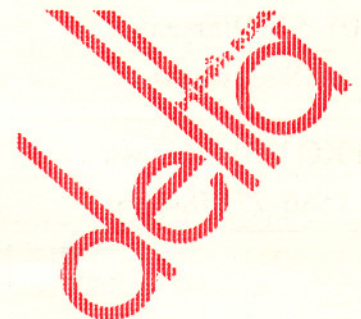
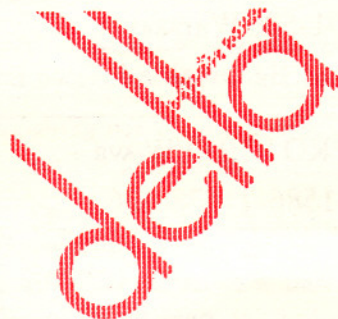
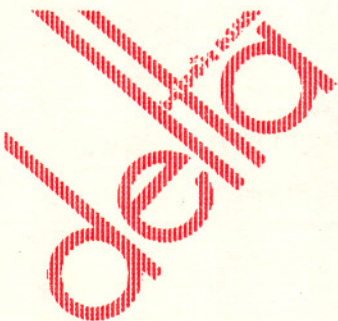
$$(1) \quad a_1 a_2 \dots a_n \leq 1.$$

**Dowód.** Zastosujemy indukcję względem  $n$ .  
Dla  $n = 1$  twierdzenie jest oczywiste.

Prenumerata „Deltę”  
za okres:

Prenumerata „Deltę”  
za okres:

Prenumerata „Deltę”  
za okres:







**Rozwiązanie zadania M 698.**

Dobierzmy  $k$  tak, żeby mieć  $2^k \leq n < 2^{k+1}$ . Wtedy wśród liczb  $1, 2, \dots, n$  dokładnie jedna dzieli się przez  $2^k$ , pozostałe zaś mogą być podzielne tylko przez mniejsze potęgi 2. Niech  $l = 2^{k-1}(2N+1)$  oznacza połowę najmniejszej wspólnej wielokrotności liczb  $1, 2, \dots, n$ ; wtedy, dla pewnego całkowitego  $M$ ,

$$l \cdot S_n = M + \frac{l}{2^k} = l \cdot M + N + \frac{1}{2}.$$

Znaczy to, że  $l \cdot S_n$ , a więc tym bardziej  $S_n$ , nie jest liczbą naturalną.



**Rozwiązanie zadania M 695.**

Zdarzenie elementarne dla doświadczenia opisanego w tym zadaniu polega w istocie na losowym wyborze jednej kuli spośród dwunastu (pięciu białych i siedmiu czerwonych); zawily jest tylko sam sposób wybierania. Wybiera się po prostu pierwszą kulę „nie-czarną”. Wszystkie zdarzenia są przy tym jednakowo prawdopodobne, bo żadna z kul nie jest wyróżniona. Szukane prawdopodobieństwo jest zatem równe  $7/12$ .

Dla niezadowolonych z powyższego rozumowania szkicujemy niżej inne, bardziej „szkolne” (i dużo bardziej zawile) rozwiązanie. Tym razem zbiór zdarzeń elementarnych  $\Omega$  składa się ze wszystkich  $17!$  permutacji naszych siedemnastu kul. Zdarzenie  $A$ : „kulę czerwoną otrzymamy wcześniej niż białą” jest sumą następujących pami rozłącznych zdarzeń  $A_1, A_2, \dots$ :

- $A_1$ : „za pierwszym razem wylosujemy kulę czerwoną”,
- $A_2$ : „za pierwszym razem wylosujemy kulę czarną, a za drugim czerwoną”,
- $A_3$ : „za pierwszym i drugim razem wylosujemy kulę czarną, a za trzecim czerwoną”, itd. (Skrupulatny Czytelnik, oczywiście, policzy, ile tych zdarzeń jest!). Prawdopodobieństwo sumy zdarzeń pami rozłącznych to suma prawdopodobieństw, a zatem

$$p = \frac{7}{17} + \frac{6}{17} \cdot \frac{7}{16} + \frac{6}{17} \cdot \frac{5}{16} \cdot \frac{7}{15} + \dots$$

Prowadząc takie samo rozumowanie dla zdarzenia przeciwnego  $A'$  dostajemy drugą równość

$$1 - p = \frac{5}{17} + \frac{6}{17} \cdot \frac{5}{16} + \frac{6}{17} \cdot \frac{5}{16} \cdot \frac{5}{15} + \dots$$

(Kule białe i czerwone zamieniły się rolami, a więc wszystkie siódemki w licznikach zamieniły się na piątki.)

Dzieliąc obie równości stronami dostajemy  $p/(1-p) = 7/5$ , a stąd, jak poprzednio,  $p = 7/12$ .

Dla  $n = 2$  mamy

$$a_1 a_2 = a_1(2 - a_1) = -a_1^2 + 2a_1 = -(a_1 - 1)^2 + 1 \leq 1.$$

Załóżmy więc, że dla pewnego naturalnego  $n \geq 2$  oraz dla dowolnych  $n$  liczb nieujemnych o sumie równej  $n$  zachodzi nierówność (1) i rozważmy  $n + 1$  takich liczb nieujemnych  $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ , że

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} = n + 1.$$

Wśród nich jest taka liczba, która jest nie większa od 1 oraz taka, która jest nie mniejsza od 1 (w przeciwnym razie byłoby  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} > n + 1$  lub  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} < n + 1$ ). Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że  $a_n \leq 1$  i  $a_{n+1} \geq 1$ . Wówczas  $(a_n - 1)(a_{n+1} - 1) \leq 0$ , czyli  $a_n a_{n+1} \leq a_n + a_{n+1} - 1$ .

Rozważmy teraz liczby  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n + a_{n+1} - 1$ . Są one nieujemne, jest ich  $n$  oraz ich suma wynosi  $n$ .

Zatem, na mocy założenia indukcyjnego, otrzymujemy

$$a_1 a_2 \dots a_{n-1} (a_n + a_{n+1} - 1) \leq 1.$$

Stąd oraz z poczynionej wcześniej uwagi wynika, że

$$a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n a_{n+1} \leq a_1 a_2 \dots a_{n-1} (a_n + a_{n+1} - 1) \leq 1,$$

czyli, że  $a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} \leq 1$ .

Kończy to dowód kroku indukcyjnego oraz dowód słuszności lematu dla dowolnej liczby naturalnej  $n$ . ■

Niech  $x_1, x_2, \dots, x_n$  będą dowolnymi liczbami dodatnimi. Wówczas liczby

$$\frac{n x_i}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

też są dodatnie, jest ich  $n$  oraz ich suma wynosi  $n$ . Na mocy lematu otrzymujemy

$$\prod_{i=1}^n \frac{n x_i}{x_1 + \dots + x_n} \leq 1.$$

Nierówność ta jest równoważna kolejno nierównościami:

$$n^n \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^n} \leq 1,$$

$$\prod_{i=1}^n x_i \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)^n,$$

$$(2) \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}.$$

Ostatnia nierówność, to właśnie nierówność Cauchy'ego.

Zauważmy jeszcze, że gdy któraś z liczb  $x_1, x_2, \dots, x_n$  jest zerem, to nierówność (2) zachodzi w oczywisty sposób.

Odnotujmy na koniec tej części artykułu, iż równość w nierówności Cauchy'ego ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

Jeśli  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ , to istotnie średnie arytmetyczna i geometryczna tych liczb są równe. Załóżmy teraz, że średnie arytmetyczna i geometryczna  $x_1, x_2, \dots, x_n$  są równe, oraz że, na przykład,  $x_1 \neq x_2$ . Wówczas

$$(x_1 - x_2)^2 > 0, \quad \text{czyli } x_1 + x_2 > 2\sqrt{x_1 x_2}.$$





**Rozwiązanie zadania F 375.**  
 Przyrost ciśnienia hydrostatycznego wynosi  $dp = \rho \gamma dr$ , gdzie  $\gamma = \frac{Gm}{r^2}$  jest natężeniem pola grawitacyjnego w odległości  $r$ , a  $m = \int_0^r 4\pi \rho r^2 dr$ .

Zakładając liniową zmianę gęstości  $\rho = \rho_1 - \rho_2 \frac{r}{R}$ , gdzie  $R$  oznacza promień Ziemi, mamy

$$m = 4\pi \left( \rho_1 \frac{r^3}{3} - \rho_2 \frac{r^4}{4R} \right),$$

$$p = 4\pi G \int_0^R \left( \rho_1 \frac{r}{3} - \rho_2 \frac{r^2}{4R} \right) \left( \rho_1 - \rho_2 \frac{r}{R} \right) dr$$

$$= 4\pi R^2 G \left( \frac{\rho_1^2}{6} - \rho_1 \rho_2 \frac{7}{36} + \frac{\rho_2^2}{16} \right).$$

Z warunków zadania mamy:

$$\rho_1 - \rho_2 = \frac{1}{2} \rho_0.$$

Masa Ziemi jest równa

$$M = 4\pi \left( \rho_1 \frac{R^3}{3} - \rho_2 \frac{R^3}{4} \right) = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_0,$$

skąd otrzymujemy

$$4\rho_1 - 3\rho_2 = 4\rho_0.$$

Rozwiązując równania otrzymujemy

$$\rho_1 = \frac{5}{2} \rho_0, \quad \rho_2 = 2\rho_0,$$

uwzględniając zaś, że  $\rho_0 = \frac{3M}{4\pi R^3}$ , oraz że przyspieszenie ziemskie jest równe  $\frac{GM}{R^2}$ , otrzymujemy

$$p = \frac{23}{32\pi} \frac{g^2}{G} = 330 \text{ GPa}.$$

Bardziej realistyczne modele zakładają ciśnienie 370 GPa, natomiast gdybyśmy założyli stałą gęstość Ziemi, otrzymalibyśmy

$$p = \frac{3}{8\pi} \frac{g^2}{G} = 172 \text{ GPa}.$$

W konsekwencji otrzymujemy

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} > \frac{\sqrt{x_1 x_2} + \sqrt{x_1 x_2} + x_3 + \dots + x_n}{n} \geq$$

$$\geq \sqrt[n]{(\sqrt{x_1 x_2})^2 x_3 \dots x_n} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n},$$

a więc sprzeczność. Jeśli więc średnie te są równe, to  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

Otrzymaliśmy ostatecznie następujące

**Twierdzenie.** Jeżeli  $n$  jest dowolną liczbą naturalną,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  - dowolnymi liczbami nieujemnymi, to

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n},$$

przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

Wprowadźmy teraz oznaczenia

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Rozważmy macierz prostokątną  $[a_{ij}]_{m \times n}$  liczb nieujemnych i obliczmy średnie geometryczne liczb każdego jej wiersza, oznaczając je odpowiednio przez

$G_1, G_2, \dots, G_m$ , oraz średnie arytmetyczne liczb każdej kolumny tej macierzy, oznaczając je odpowiednio przez  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{matrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_m \end{matrix}$$

$$A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad \dots \quad A_n$$

Okazuje się, że prawdziwe jest następujące

**Twierdzenie**

$$(3) \quad G(A_1, A_2, \dots, A_n) \geq A(G_1, G_2, \dots, G_m).$$

**Dowód.**

a) Jeżeli któraś ze średnich  $A_1, A_2, \dots, A_n$  będzie zerem, na przykład  $A_1 = 0$ , wówczas, oczywiście, będzie  $a_{11} = a_{21} = \dots = a_{m1} = 0$ ,  $G(A_1, A_2, \dots, A_n) = 0$ ,  $G_1 = G_2 = \dots = G_m = 0$ ,  $A(G_1, G_2, \dots, G_m) = 0$ . Nierówność jest więc w tym przypadku oczywista.

b) Niech więc  $A_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Wówczas z nierówności Cauchy'ego, dla każdego  $i = 1, 2, \dots, m$ , mamy

$$\sum_{j=1}^n \frac{a_{ij}}{A_j} \geq \frac{nG_i}{G(A_1, A_2, \dots, A_n)},$$

skąd, po dodaniu tych nierówności stronami, otrzymujemy, że

$$\frac{mA_1}{A_1} + \frac{mA_2}{A_2} + \dots + \frac{mA_n}{A_n} \geq \frac{n \cdot m \cdot A(G_1, G_2, \dots, G_m)}{G(A_1, A_2, \dots, A_n)},$$

czyli, że

$$G(A_1, A_2, \dots, A_n) \geq A(G_1, G_2, \dots, G_m). \quad \blacksquare$$

Zauważmy, że nierówność (3) staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedna z kolumn jest zerowa lub gdy liczby we wszystkich wierszach są proporcjonalne.

Nierówność (3) jest uogólnieniem nierówności Cauchy'ego, choć nie tylko tej nierówności.





1. Rozważmy macierz kwadratową  $n \times n$  postaci

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_1 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix},$$

gdzie  $a_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$ .

Wówczas

$G_1 = G_2 = \dots = G_n = G(a_1, a_2, \dots, a_n)$  oraz

$A_1 = A_2 = \dots = A_n = A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , a nierówność (3) przyjmuje postać nierówności Cauchy'ego

$$A(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq G(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

2. Jeżeli byśmy, na przykład, rozważyli macierz prostokątną  $n \times 2$  postaci takiej jak obok, to nierówność (3) przyjęłaby postać

$$\begin{bmatrix} a_1^2 & b_1^2 \\ a_2^2 & b_2^2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n^2 & b_n^2 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n} \cdot \frac{b_1^2 + \dots + b_n^2}{n}} \geq \frac{|a_1 b_1| + |a_2 b_2| + \dots + |a_n b_n|}{n},$$

z której bez trudu otrzymamy znaną nierówność Schwarz'a, tj. nierówność

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2.$$

3. A teraz rozważmy  $m$  ciągów liczb nieujemnych

$$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}; \quad a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}; \quad \dots; \quad a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}$$

oraz liczby wymierne dodatnie  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ , których suma wynosi 1.

Sprowadźmy te liczby do wspólnego mianownika  $M$ :

$$\alpha_1 = \frac{A_1}{M}, \quad \alpha_2 = \frac{A_2}{M}, \quad \dots, \quad \alpha_m = \frac{A_m}{M},$$

gdzie  $A_1, A_2, \dots, A_m$  są liczbami naturalnymi oraz ich suma wynosi  $M$ .

Spójrzmy na macierz  $n \times M$  postaci

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & \dots & a_{11} & a_{21} & a_{21} & \dots & a_{21} & \dots & a_{m1} & a_{m1} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{12} & \dots & a_{12} & a_{22} & a_{22} & \dots & a_{22} & \dots & a_{m2} & a_{m2} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{1n} & \dots & a_{1n} & a_{2n} & a_{2n} & \dots & a_{2n} & \dots & a_{mn} & a_{mn} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{A_1 \text{ kolumn}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{A_2 \text{ kolumn}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{A_m \text{ kolumn}}$

Widzimy, że nierówność (3) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} & a_{11}^{\alpha_1} a_{21}^{\alpha_2} \dots a_{m1}^{\alpha_m} + a_{12}^{\alpha_1} a_{22}^{\alpha_2} \dots a_{m2}^{\alpha_m} + a_{1n}^{\alpha_1} a_{2n}^{\alpha_2} \dots a_{mn}^{\alpha_m} \leq \\ & \leq (a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n})^{\alpha_1} \cdot (a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2n})^{\alpha_2} \cdot \dots \\ & \quad \dots \cdot (a_{m1} + a_{m2} + \dots + a_{mn})^{\alpha_m}, \end{aligned}$$

a więc postać znanej nierówności Höldera.

4. Weźmy teraz pod uwagę macierz

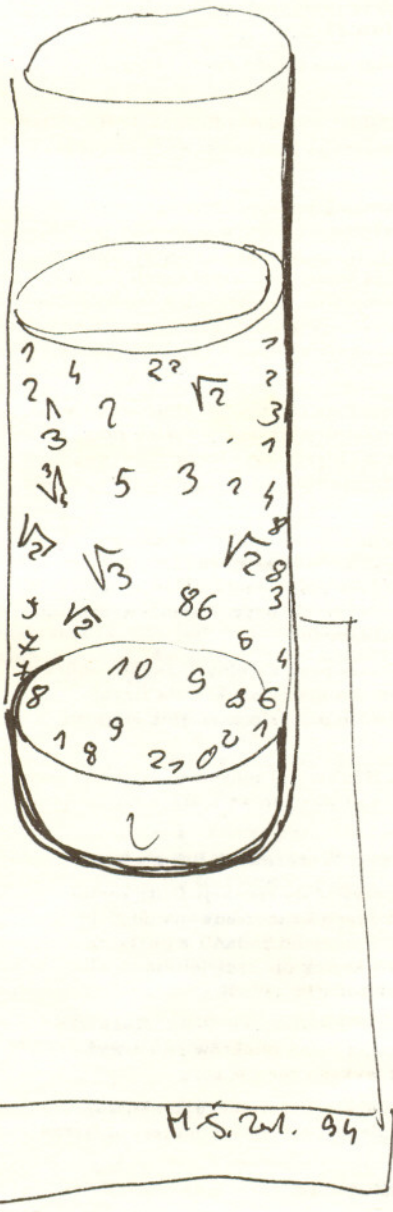
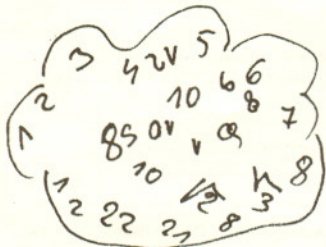
$$\begin{bmatrix} a_1^\beta & a_1^\beta & \dots & a_1^\beta & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2^\beta & a_2^\beta & \dots & a_2^\beta & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^\beta & a_n^\beta & \dots & a_n^\beta & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\alpha} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\beta - \alpha}$

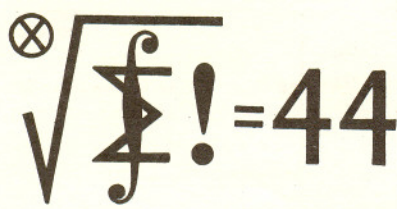
gdzie  $a_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n; \alpha, \beta \in \mathbf{N}$  i  $\alpha \leq \beta$ .

Wówczas, jeżeli obie strony otrzymanej dla tej macierzy nierówności (3) podniesiemy do potęgi  $\alpha^{-1}$ , to otrzymamy kolejną znaną nierówność o średnich potęgowych, czyli nierówność

$$\left( \frac{a_1^\beta + a_2^\beta + \dots + a_n^\beta}{n} \right)^{\frac{1}{\beta}} \geq \left( \frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \dots + a_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$







## Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki,  
Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

### Regulamin

Lista uczestników ligi zadaniowej  
**Klub 44 M**  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 261 ( $WT=2,33$ ) i 262 ( $WT=3,06$ )  
z numeru 5/1993

Lesław Skrzypek	- Rzeszów	49,34
Piotr Kumor	- Olsztyn	2-47,51
Janusz Olszewski	- Suwałki	1-45,63
Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	7-43,33
Krzysztof Zawislawski	- Warszawa	1-42,82
Józef Siwy	- Łaziska Górne	1-42,42
Leszek Gasiński	- Stalowa Wola	41,46
Mirosław Matłaga	- Skoczów	38,76
Jan Ciach	- Ostrowiec Świętokrzyski	3-37,72
Krzysztof Jedziniak	- Katowice	2-34,66
Leszek Krzywonoś	- Ornatowice	32,51
Krzysztof Witek	- Ostrowiec Maz.	1-32,00
Marek Karaś	- Tarnów	31,81
Eukasz Wiechecki	- Legnica	31,48
Jan Kraszewski	- Legnica	30,77
Tomasz Kulpa	- Katowice	29,64
Tadeusz Józefczyk	- Poznań	2-28,44
Krzysztof Zapisek	- Warszawa	28,00
Ryszard Pagacz	- Zawadzkie	2-27,16
Paweł Lizak	- Puławy	26,53
Mikołaj Rotkiewicz	- Warszawa	1-25,42
Waldemar Pompe	- Warszawa	24,22

Legenda (przykładowo): stan konta 7-43,33  
oznacza, że uczestnik już siedmiokrotnie  
zdobył 44 punkty, a w kolejnej (6smej)  
rundzie ma 43,33 punktów.

Trzech uczestników w tej właśnie rundzie  
przekroczyło próg 44 punktów:  
L. Skrzypek – po raz pierwszy, J. Olszewski  
– po raz drugi oraz P. Kumor – po raz  
trzeci, zostając trzynastym Weteranem  
matematycznego Klubu 44.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników  
ligi, którzy spełniają następujące dwa  
warunki:

- stan ich konta (w aktualnie wykonywanej  
rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;
- przystali rozwiązanie co najmniej jednego  
zadania z rocznika 1991, 1992 lub 1993.

Nie drukujemy więc nazwisk tych  
uczestników, którzy zostali się z ligą trzy  
lata temu (lub dawniej); oczywiście, jeśli  
ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do  
naszych matematycznych łamigłówek, jego  
nazwisko automatycznie wróci na listę.  
Serdecznie zapraszamy!

Weterani Klubu 44M (w kolejności  
uzyskiwania statusu Weterana):  
J. Janowicz (7), P. Kamiński (5),  
M. Galecki (5), J. Uryga (4),  
A. Pawłowski (4), D. Sowidrzal, T. Rawlik,  
M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach,  
M. Prauza, P. Kumor  
(jeśli uczestnik przekroczył bariera  
44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje  
to cyfra w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44M  
(alfabetycznie; nie powtarzamy nazwisk  
figurujących na liście powyżej):  
„dwukrotni”: Z. Bartold, A. Czornik,  
P. Gadziński, P. Jędrzejewicz, H. Kasprzak,  
T. Komorowski, H. Kornacki, Z. Koza,  
D. Kurpiel, J. Malopolski, J. Mikuta,  
B. Orzechowski, K. Pióro, S. Solecki,  
T. Wletecha, G. Zakrzewski;  
„jednokrotni”: T. Biegański, W. Boratyński,  
M. Czerniakowska, P. Figurny, M. Fiszer,  
Z. Gallas, A. Gluza, T. Grzesiak,  
K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Kasperski,  
A. Krzysztofowicz, P. Kubit, A. Langer,  
R. Latała, J. Mańdziuk, M. Marczak,  
R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki,  
J. Milczarek, R. Mitraszewski, W. Olszewski,  
M. Roman, A. Ruzel, A. Smolczyk,  
Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk,  
K. Trautman, P. Wach, A. Wyrwa,  
M. Zając, Z. Zaus.

1. Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego oraz Redakcja miesięcznika *Delta* organizują konkurs – ligę zadaniową pod nazwą **Klub 44**.

2. Zadania konkursowe są ogłaszane w miesięczniku *Delta*, po cztery zadania w każdym numerze: dwa z matematyki i dwa z fizyki, z dwumiesięczną przerwą (nr 6 i 7 każdego roku).

3. Uczestnikiem ligi może być każdy.

4. Uczestnictwo w lidze polega na rozwiązywaniu zadań konkursowych i przysyłaniu opracowanych rozwiązań do redakcji *Delty*. Uczestnikiem zostaje się po przysłaniu rozwiązania co najmniej jednego zadania.

5. Moment przystąpienia do ligi można wybrać dowolnie. Nie ma konieczności rozwiązywania zadań z każdego miesiąca.

6. Rozwiązania zadań z numeru  $n$  należy nadsyłać do końca miesiąca  $n + 3$  (dodawanie modulo 12; na przykład termin nadsyłania rozwiązań zadań z numeru 11/1993 upływa 28 lutego 1994). W numerze  $n + 4$  podane są szkieletowe rozwiązania.

7. Rozwiązanie każdego zadania powinno być pisane na oddzielnym arkuszu papieru oraz podpisane imieniem i nazwiskiem. Uczniowie proszeni są o podanie klasy, studenci – roku i uczelni. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, z dopiskiem na kopercie: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**.

8. Prace powinny być samodzielne. Jednobrzmiące rozwiązania pisane przez różnych uczestników nie będą brane pod uwagę.

9. Rozwiązanie każdego zadania jest ocenione w skali od 0 do 1, z dokładnością do 0,1. Przy ocenie brana jest pod uwagę nie tylko poprawność merytoryczna i rachunkowa, lecz także pomysłowość metody i elegancja rozwiązania.

10. Każde zadanie otrzymuje współczynnik trudności ustalany po wystawieniu ocen. Współczynnik ten jest liczbą pomiędzy 1 a 4 obliczaną według następującej reguły: jeśli  $N$  oznacza liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (matematyka lub fizyka), a  $S$  oznacza sumę ocen uzyskanych przez wszystkich uczestników za dane zadanie, wówczas otrzymuje ono współczynnik trudności  $WT = 4 - 3S/N$ . Za nadesłane rozwiązanie uczestnik otrzymuje w punktacji ligowej liczbę punktów równą iloczynowi uzyskanej oceny przez współczynnik trudności (z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku).

11. Niektóre z zadań można znaleźć (w brzmieniu identycznym lub bardzo zbliżonym) wraz z rozwiązaniami w różnych książkach i czasopismach. Uczestnicy, którzy w takich przypadkach przyślą zamiast własnego rozwiązania dokładny odsyłacz do literatury, otrzymają ocenę maksymalną, pod warunkiem, że w cytowanym źródle istotnie znajduje się pełne rozwiązanie (dowód, obliczenie, konstrukcja).

12. Czytelnicy *Delty* mogą zgłaszać propozycje zadań; jeśli zadanie nie jest własnego autorstwa, należy podać źródło. Gdy zadanie wykorzystane w lidze pochodzi z propozycji uczestnika ligi (tj. osoby, która przysłała już rozwiązanie jakiegoś zadania – por. p. 4), a dostarczone zostało wraz z rozwiązaniem (choćby szkicowym, ale poprawnym, ewentualnie odsyłaczem do literatury), uczestnik otrzymuje ocenę maksymalną.

13. Punkty zdobyte przez każdego uczestnika za rozwiązania poszczególnych zadań, obliczone według reguły podanej w p. 10, są sumowane – oddzielnie dla matematyki i dla fizyki. Z chwilą osiągnięcia sumy 44 punktów w jednej z tych dwóch dziedzin uczestnik staje się członkiem Klubu 44.

14. Po zgromadzeniu 44 punktów (i zostaniu członkiem Klubu 44) można w dalszym ciągu brać udział w konkursie ligowym. Nadwyżka punktów ponad wartość 44 zostaje zaliczona na poczet ponownego uczestnictwa w lidze.

15. Trzykrotne uzyskanie członkostwa Klubu 44 daje tytuł **Weterana Klubu 44**.

16. Aby uzyskać informacje o swoich wynikach, należy przysłać do redakcji *Delty* kartkę pocztową (oddzielną dla matematyki i dla fizyki), ofrankowaną i zaadresowaną do siebie, ze sporządzoną tabelką z umieszczonymi w jej rubrykach numerami zadań i z pustymi okienkami do wpisania ocen. Zaleca się przysyłanie takich kartek nie częściej niż co kilka miesięcy, gdy uzbiera się materiał dotyczący rozwiązań kilkunastu zadań.

17. Czołówka listy ligowej jest systematycznie ogłaszana w miesięczniku *Delta*. Nazwisko uczestnika może być wymienione w czołówce z nie zmienioną sumą punktów co najwyżej trzykrotnie; następny raz ukaże się wtedy, gdy uczestnik wykona ruch w górę.

18. Raz do roku, w numerze lutowym, drukowane jest omówienie przebiegu konkursu, prezentowane są w skrócie ciekawsze rozwiązania i uogólnienia oraz ogłaszana jest obszerna czołówka (kilkadziesiąt nazwisk).

19. Członkowie Klubu 44 są zapraszani na spotkania Klubu 44.

20. Organizatorzy zastrzegają sobie wyłączne prawo interpretacji i możliwość zmian regulaminu.



275. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  spełniające warunki

$$f(f(f(x))) = f(x) \geq 0 \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbf{R}.$$

### Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/1993

Przypominamy treść zadań:

267. Dowieść, że jeśli  $Q_n = (a^n + b^n + c^n)/n$ ,  $a + b + c = 0$ , to  $Q_5 = Q_2Q_3$ .

268. Udowodnić, że  $\sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n-k}{k} = F_n$ , gdzie  $F_0 = F_1 = 1$ ,  
 $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$  dla  $n \geq 0$ .

267. Liczby  $a, b, c$  są pierwiastkami równania  $x^3 + Ax - B = 0$ , gdzie  $A = bc + ca + ab$ ,  $B = abc$ . Jeśli więc  $u$  jest jedną z liczb  $a, b, c$ , to  $u^3 = B - Au$ , a stąd

$$(1) \quad u^{n+3} = Bu^n - Au^{n+1} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Oznaczmy sumę  $a^n + b^n + c^n$  przez  $T_n$ . Podstawiając w (1) kolejno  $u = a, u = b, u = c$  i dodając stronami dostajemy związek

$$(2) \quad T_{n+3} = BT_n - AT_{n+1} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Przy tym:  $T_0 = 3, T_1 = 0$  (z założenia);

stąd  $0 = T_2^2 = (a + b + c)^2 = T_2 + 2A$ , czyli  $T_2 = -2A$ . Dalej ze wzoru (2) (dla  $n = 0$  i  $n = 2$ ):

$$T_3 = BT_0 - AT_1 = 3B,$$

$$T_5 = BT_2 - AT_3 = -2AB - 3AB = -5AB.$$

Tak więc  $Q_2 = T_2/2 = -A$ ,  $Q_3 = T_3/3 = B$ ,

$$Q_5 = T_5/5 = -AB = Q_2Q_3.$$

276. Cięciwy  $AC$  i  $BD$  okręgu o środku  $O$  przecinają się w punkcie  $P$ . Okręgi opisane na trójkątach  $PAB$  i  $PCD$  przecinają się w punktach  $Q$  oraz  $R$ . Zakładamy, że  $O, P, Q$  są trzema różnymi punktami. Dowieść, że kąt  $QQP$  jest prosty.

268. Oznaczmy podaną sumę przez  $S_n$ . Wykażemy, że  $S_n$  wyraża liczbę ciągów zero-jedynkowych długości  $n$ , kończących się jedynką i nie zawierających dwóch zer pod rząd. Ciąg spełniający te warunki nazwijmy „dobrym”.

Weźmy pod uwagę dowolny dobry ciąg długości  $n$  i przypuśćmy, że jest w nim dokładnie  $k$  zer. Po każdym zerze musi wystąpić jedynka; ciąg jest więc zbudowany z  $k$  bloków  $01$  oraz jeszcze z  $n - 2k$  jedynek. Mamy więc  $n - k$  „cegiełek” dwóch rodzajów, odpowiednio  $k$  oraz  $n - 2k$  każdego rodzaju. Możliwych ustawień mamy  $\binom{n-k}{k}$ , bo na tyle sposobów można wybrać  $k$  miejsc, na których kładziemy „cegiełki” pierwszego rodzaju. Ponieważ  $k$  może przyjąć wartości od  $0$  do  $[n/2]$ , zatem mamy istotnie  $S_n$  dobrych ciągów długości  $n$ .

Zauważmy teraz, że każdy dobry ciąg długości  $n + 2$  ma jedną z następujących dwóch postaci: albo na początku jedynka, a po niej dowolny dobry ciąg długości  $n + 1$ , albo na początku zero, potem jedynka, a dalej dowolny dobry ciąg długości  $n$ . Stąd wynika rekurencja  $S_{n+2} = S_n + S_{n+1}$ . Bezpośrednio sprawdzamy, że  $S_1 = 1, S_2 = 2$  i wnosimy, że  $S_n = F_n$  dla każdego  $n$ .

Pora na doroczne omówienie. Jak zwykle, uczestnicy ligi znajdują dowody i wyprowadzenia ogólniejsze lub bardziej pomysłowe od naszych „firmowych”. Oto ciekawsze rozwiązania zadań oraz uogólnienia i komentarze (uczestników ligi oraz nasze). Gdy zadanie zostało zrobione przez nie więcej niż sześć osób, podajemy ich nazwiska.

Zadanie 244. [Dany punkt  $P$ ;  $\sup\{\text{pole}(\Delta ABC) : |PA| + |PB| + |PC| = 1\} = ?$ ] (współczynnik trudności  $WT=2,78$ ; liczba poprawnych rozwiązań  $LPR \leq 7$ ). Poprawne rozwiązania przysłali: **J. Olszewski, M. Rotkiewicz, T. Wietecha, L. Skrzypek, J. Ciach**; a przy milczącym założeniu, że konfiguracja optymalna istnieje: **M. Prauza, M. Zygmunt**. Metody różne (trygonometria, rachunek wektorowy). **J. Olszewski** rozważa analogiczny problem dla  $n$ -kąta wypukłego  $A_1A_2 \dots A_n$  (zamiast trójkąta): wystarczy ograniczyć uwagę do wielokątów zawierających punkt  $P$  w swoim wnętrzu; oznaczając przez  $B_1, \dots, B_n$  takie punkty, by każdy z czworokątów  $PA_iB_iA_{i+1}$  był równoległobokiem otrzymujemy  $2n$ -ką  $A_1B_1A_2B_2 \dots A_nB_n$  o ustalonym obwodzie. Korzystając z faktu (który też wymaga dowodu), że pole tego  $2n$ -kąta jest maksymalne, gdy jest on foremny, znajdujemy maksimum pola  $n$ -kąta  $A_1A_2 \dots A_n$  przy warunku  $\sum |PA_i| = 1$ , równe  $(1/4n) \operatorname{tg}(\pi/2n)$ .

Zadanie 245. [ $\inf\{\max_{P,Q,R \in H} |LPQR| : H$  — siedmiopunktowy zbiór na płaszczyźnie} = ?] ( $WT=2,93$ ;  $LPR=4$ ). Autorzy poprawnych rozwiązań (nie różniących się istotnie od naszego): **P. Gądziński, J. Olszewski, M. Rotkiewicz, L. Skrzypek**. Szukany kres dolny wynosi  $120^\circ$ ; ciekawie, że ten sam wynik dostajemy rozważając zbiory ośmiopunktowe; na to zwrócił uwagę **P. Gądziński**.

Zadanie 247. [ $A, G, H$  — średnie (arytm., geom., harm.) trzech liczb  $a, b, c > 0 \implies 3A^2 + G^2 \geq 4G^3H^{-1}$ ] ( $WT=2,45$ ;  $LPR=10$ ). Dowód chyba najzgrabniejszy przedstawił (niezależnie) panowie **J. Ciach** i **J. Olszewski**: podstawiając  $a = x^{3/2}, b = y^{3/2}, c = z^{3/2}$ , po prostych przekształceniach otrzymujemy do udowodnienia nierówność  $U \geq W$ , gdzie

$$U = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz, \quad W = 2(xy)^{3/2} + 2(yz)^{3/2} + 2(zx)^{3/2}.$$

Niech  $V = xy(x+y) + yz(y+z) + zx(x+z)$ ; oczywiście,  $V \geq W$  (bo  $x+y \geq 2(xy)^{1/2}$ ). Zakładając, że  $x \geq y \geq z$  oraz dodając stronami nierówności  $z(x-z)(y-z) \geq 0$  i  $(x-y)^2(x+y-z) \geq 0$  stwierdzamy, że  $U \geq V$ ; koniec dowodu.

Wzmocnienie tezy, bardzo pomysłową metodą, podał **L. Skrzypek**:

$$3A^2 + A^{-1}G^3 \geq 4G^3H^{-1}.$$

Ta nierówność, po przekształceniach, przybiera postać

$$(a+b+c)(u+v+w)uvw \leq 9abc,$$

gdzie

$$u = \sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{a}, \quad v = \sqrt{c} + \sqrt{a} - \sqrt{b}, \quad w = \sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}.$$

Można zakładać, że  $u, v, w > 0$  (w przeciwnym razie  $uvw \leq 0$  — przypadek trywialny). Istnieje więc trójkąt o bokach długości  $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ . Dowodzona nierówność łatwo sprowadza się do następującej:  $a + b + c \leq 9R^2$  (gdzie  $R$  to promień koła opisanego) — ta zaś jest znana, choć wcale nie prosta; dowód np. w książce: **S.I. Zetel, Geometria trójkąta**, Warszawa 1964r, s. 62–63.

Zadanie 249. [ $a_1 = 1/(x+1)$ ,

$$a_n = (n/(x+n)) \prod_{j=1}^{n-1} ((x-j)/(x+j)); x > 0 \text{ dane;}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = ?$ ] ( $WT=2,83$ ;  $LPR=4$ ). Dobre rozwiązania (nie prostsze od naszego): **P. Gądziński, J. Olszewski, M. Rotkiewicz** i (z drobną luką) **T. Wietecha**.

Zadanie 252. [ $W_0(x) = 1, W_{n+1}(x) = W_n'(x) - 2xW_n(x) \implies W_{2k+1}(0) = 0, W_{2k}(0) = (-1)^k (2k)!/(k!)^2$ ] ( $WT=2,88$ ;  $LPR=6$ ). Rozwiązanie „firmowe” opierało się na spostrzeżeniu, że wielomiany  $W_n(x)$  pojawiają się przy obliczaniu pochodnych kolejnych rzędów funkcji  $\exp(-x^2)$ . Tą samą metodą zadanie rozwiązały **P. Gądziński** i **M. Rotkiewicz**. Dobre rozwiązania przez wyprowadzenie wzorów (jawnych lub rekurencyjnych) na wszystkie współczynniki badanych wielomianów przysłali: **L. Gasiński, P. Lisak, A. Czornik** oraz **L. Skrzypek**, który zwrócił też uwagę, że zagadnienie jest opracowane w literaturze; zachodzi bowiem równość  $W_{[n/2]}(x) = (-1)^n H_n(x)$ , gdzie

$$H_n(x) = (2x)^n + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-2k)!k!} (2x)^{n-2k}$$

to tzw. wielomiany *Hermite'a*; informacje o nich można znaleźć w każdym obszerniejszym podręczniku analizy matematycznej.



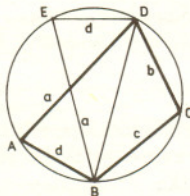
Zadanie 255.  $[a, b, c, d, S -$  boki i pole czworokąta wpisanego w koło o promieniu  $R$  oraz opisanego na kole  $\Rightarrow S(a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} + d^{-1}) \leq 2S^{1/2} + 4R^2S^{-1/2}]$  (WT=3,00; LPR=4). Wszystkie poprawne rozwiązania były zgrabniejsze od naszego. Ich autorzy: **J. Ciach, W. Pompe, J. Olszewski** oraz **A. Czornik**. Trzej pierwsi dowodzą, że wyrażenie po prawej stronie można zastąpić przez mniejszą liczbę  $4\sqrt{2}R$ ; uzyskana w ten sposób nierówność jest bardziej naturalna i mocniejsza od tej, która była treścią zadania. Oto dowód – tak, jak go przedstawił W. Pompe:

Niech  $|AD| = a, |CD| = b, |BC| = c, |AB| = d$  i niech  $E$  będzie punktem symetrycznym do  $A$  względem symetralnej odcinka  $BD$  (rysunek). Któryś z kątów  $CBE$  oraz  $CDE$  jest nieostry; przyjmijmy, że to kąt  $CDE$ . Wówczas  $b + d = |DE| + |DC| \leq 2\sqrt{2}R \sin |\angle CDE|$  (tę ostatnią nierówność wyprowadza się nietrudno ze wzoru sinusów). A ponieważ czworokąt  $ABCD$  ma koło wpisane i koło opisanie, zatem zachodzą związki

$$a + c = b + d, \quad S = \sqrt{abcd}.$$

Stąd wobec równości  $\sin |\angle CBE| = \sin |\angle CDE|$ :

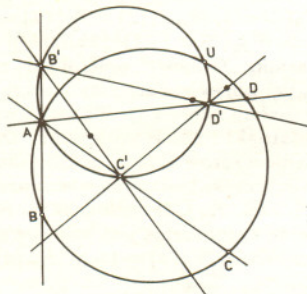
$$\begin{aligned} S(a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} + d^{-1}) &= S^{-1}(bcd + acd + abd + abc) = \\ &= S^{-1}(ac + bd)(b + d) \leq \\ &\leq S^{-1}(ac + bd) \cdot 2\sqrt{2}R \sin |\angle CDE| = \\ &= S^{-1} \cdot 4\sqrt{2}R \left( (ac/2) \sin |\angle CBE| + (bd/2) \sin |\angle CDE| \right) = \\ &= S^{-1} \cdot 4\sqrt{2}R \cdot \left( (S/2) + (S/2) \right) = 4\sqrt{2}R. \end{aligned}$$



Zadanie 257. [Czworościan o danych długościach krawędzi wpisany w sferę o środku  $O$  i promieniu  $R$ ; odległość  $O$  od środka sfery przechodzącej przez środki ciężkości ścian = ?] (WT=2,66; LPR=5). Dobre rozwiązania, w większości tą samą metodą, co nasze (rachunek wektorowy lub wzór cosinusów): **J. Ciach, T. Kulpa, J. Olszewski, W. Pompe, L. Skrzypek**. Pan Ciach rozwiązuje analogiczne zadanie dla sympleksu  $n$ -wymiarowego; metoda identyczna, jak dla czworoscianu (przypadek  $n = 3$ ); wynik:

$$(1/n) \left[ (n+1)^2 R^2 - (\text{suma kwadratów długości krawędzi}) \right]^{1/2}.$$

Zadanie 260.  $[A, B, C, D, U -$  różne punkty na okręgu  $\Rightarrow$  rzuty punktu  $U$  na proste Simsona tego punktu względem trójkątów  $ABC, ABD, ACD, BCD$  są współliniowe] (WT=3,07; LPR=6). No, tutaj uczestnicy ligi udzielili nam prawdziwej lekcji, jak należy brać się za tego typu problemy (kto ciekawy jak *nie należy*, niech spojrzy do numeru 8/1993 na rozwiązanie „firmowe”: długie rachunki na liczbach zespolonych; na naszą obronę może tylko to, że rachunki owe dają też, niejako „przy okazji”, dowód istnienia prostej Simsona dla trójkąta).



Nie da się ukryć, nie udało się nam ta ostatnia przedwakacyjna seria: oba zadania (261, 262) znajdują się w nietrudno dostępnych książkach; my zaś nie zadaliśmy sobie trudu, aby się o tym zawczasu przekonać. Za niefrasobliwość przepraszamy.

Krótkie rozwiązanie geometryczne podali: **P. Bechler, T. Kulpa, W. Pompe, T. Wietecha, R. Wencel** oraz (bardziej okężnie, choć idea w istocie ta sama) **L. Skrzypek**. Najzgrabniej przedstawił to rozwiązanie W. Pompe:

Niech  $B', C', D'$  będą rzutami  $U$  na proste  $AB, AC, AD$ ; punkty te, wraz z punktem  $U$ , leżą na okręgu o średnicy  $AU$  (rysunek). Rzuty  $U$  na proste  $B'C', B'D', C'D'$  leżą na prostej Simsona punktu  $U$  względem trójkąta  $B'C'D'$  – są więc współliniowe. A te trzy proste – to właśnie proste Simsona punktu  $U$  względem trójkątów  $ABC, ABD, ACD$ . Analogicznie dowodzimy współliniowości rzutów punktu  $U$  na jego proste Simsona względem trójkątów  $BAC, BAD, BCD$ ; stąd teza.

Autor rozwiązania kończy je następującą uwagą: Prosta, o której mowa w zadaniu, nosi nazwę *prostej Simsona* punktu  $U$  względem czworokąta  $ABCD$ . Dalej, przez indukcję: jeśli  $\mathcal{W}$  jest  $n$ -kątem wpisanym w okrąg, zaś  $U$  jest pewnym punktem tego okręgu, i jeśli wiadomo już, co to prosta Simsona punktu  $U$  względem dowolnego  $(n-1)$ -kąta wpisanego w ten okrąg, wówczas (dowodzi się, że) rzuty punktu  $U$  na jego proste Simsona względem wszystkich  $(n-1)$ -kątów wyznaczonych przez wierzchołki wielokąta  $\mathcal{W}$  leżą na jednej prostej, która nazywa się *prostą Simsona* punktu  $U$  względem  $n$ -kąta  $\mathcal{W}$ .

Start tego postępowania indukcyjnego – czyli istnienie prostych Simsona dla trójkątów – został w treści zadania podany „do uwierzenia”, jako fakt znany. Dowód (geometryczny): patrz np. S. Straszewicz, *Zbiór zadań z olimpiad matematycznych*, tom I, zad. 82.

Zadanie 261. [Równanie  $x^n + (x+1)^n = (x+2)^n$  w liczbach naturalnych  $n, x$ ] (WT=2,33; LPR=9). Autorzy poprawnych rozwiązań albo rozumowali, jak w rozwiązaniu „firmowym”, albo – bardziej uciążliwie – przechodzili do metod analizy matematycznej, albo – najmniej uciążliwie – odsyłali do literatury; okazało się bowiem, że równanie to można znaleźć w jednym z popularnych zbiorów zadań.

Natomiast na 0 punktów zostały ocenione „rozwiązania” odwołujące się do Wielkiego Twierdzenia Fermata. U schyłku lata '93 nie ma w literaturze matematycznej dowodu tego twierdzenia! Praca A. Wileasa, której zaanonowanie wywołało tak wielkie poruszenie w świecie matematycznym, jest na etapie recenzji. Warto nadmienić, że wynik tej pracy to częściowe potwierdzenie hipotezy matematyka japońskiego o nazwisku Taniyama, dotyczącej problematyki z zaawansowanej geometrii algebraicznej. (*W C<sup>2</sup> każda krzywa eliptyczna nad Q jest modularna* – tak brzmi owa hipoteza; zaś Wiles w swej pracy prowadzi dowód pod dodatkowym założeniem tzw. półstabilności; samo wyjaśnienie użytych terminów wymaga przygotowania specjalistycznego.) Otóż te zagadnienia są w opinii specjalistów nieporównanie ważniejsze niż hipoteza Fermata, której prawdziwość istotnie daje się wydedukować z prawdziwości hipotezy Taniyamy (półstabilność wystarczy).

Praca Wileasa (w wersji preprintowej) liczy kilkaset stron. Podobną objętość mają (łącznie) prace, których wyniki są w niej wykorzystywane. Uczestnik naszej ligi, chcący tą metodą „zaliczyć” rozwiązanie omawianego prościutkiego równania, powinien, przede wszystkim, upewnić się, czy zasadniczy wynik został opublikowany; a gdyby tak było, powinien jeszcze (poza zacytowaniem wszystkich źródeł – por. *Regulamin*, p. 11) wyjaśnić, w jaki sposób wynik Wileasa implikuje twierdzenie Fermata...

Oto dlaczego „Fermatowskie rozwiązania” zostały uznane za zwykły bluff.

Zadanie 262. [Czy istnieje płaski zbiór wypukły, który można podzielić trzema prostymi na siedem części o równych polach?] (WT=3,06; LPR=4). Nie istnieje. A dokładniej: jeśli sześć części przylegających do brzegu figury ma równe pola, to pole środkowego trójkąta nie przekracza  $1/8$  pola całej figury. Dowód podaje np. B. Grünbaum w książce *Étudy po kombinatoj geometrii i teorii wypukłych ciał*, Moskwa 1971, s. 52. I do tego właśnie odsyłać sprowadzają się cztery dobre rozwiązania (A. Czornik, P. Kumor, L. Skrzypek, R. Wencel).



po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 159 (WT=3,85) i 160 (WT=2,90)  
z numeru 5/1993

Przemysław Gworys	- Częstochowa	1-37,72
Tomasz Wietecha	- Tarnów	1-33,90
Dzierżysław Lipniacki	- Lublin	3-29,11
Andrzej Nowogrodzki	- Chocianów	28,96
Anna Gluza	- Toruń	1-24,35
Andrzej Borowski	- Aleksandrów Kujawski	1-23,81
Dariusz Wilk	- Rzeszów	18,75
Konrad Banaszek	- Gdynia	13,70
Jacek Piotrowski	- Rzeszów	12,08
Roman Wencel	- Komprachcice	11,60
Sławomir Oszwaldowski	- Grudziądz	9,70
Aleksander Surma	- Myszków	2-9,50
Artur Poliński	- Koszalin	9,14
Paweł Perkowski	- Szczecin	2-7,09
Adam Sikorski	- Lublin	3-6,95
Stanisław Świątek	- Kłodzko	6,50
Artur Stapien	- Bełchatów	5,97
Leszek Motyka	- Kraków	1-5,80
Arkadiusz Kowalski	- Lublin	5,63
Andrzej Rostworowski	- Kraków	5,17

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 1991-1993, oraz mają w bieżącej rundzie na swoim koncie co najmniej 5 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

Pozostali członkowie Klubu 44F (alfabetycznie; liczba w nawiasach oznacza wielokrotność przekroczenia 44 punktów):

Piotr Bala (3),  
Wiesław Kacprzak (1),  
Jerzy Lipkowski (2),  
Bogusław Mikieliewicz (1),  
Roman Musiał (1),  
Tomasz Rawlik (1),  
Robert Repucha (1),  
Jacek Stelmach (1),  
Leszek Szalast (1),  
Piotr Wach (1).

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań 31 V 1994

**173.** Porcję mięsa o temperaturze  $+5^{\circ}\text{C}$  włożono do zamrażalnika, w którym temperatura wynosi  $-18^{\circ}\text{C}$ , a jednocześnie taką samą porcję mięsa o temperaturze  $-18^{\circ}\text{C}$  przełożono z zamrażalnika do komory lodówki (gdzie temperatura wynosi  $+5^{\circ}\text{C}$ ). Niech  $t_1$  oznacza czas, po którym pierwsza porcja osiągnie temperaturę  $-15^{\circ}\text{C}$ , a  $t_2$  - czas, po którym druga porcja osiągnie temperaturę  $+2^{\circ}\text{C}$ . Który z tych czasów jest dłuższy i ile razy (czy też są one jednakowe)? Wystarczy ocena przybliżona.

Wskazówka: Mięso składa się głównie z wody. Niezbędne dane wziąć z tablic!

**174.** Planetoida o masie  $m = 50$  ton znajduje się w odległości  $r = 100$  tys. km od środka Ziemi (rys. 1). Czy planetoida minie Ziemię, czy rozbije się o jej powierzchnię? Czy porusza się po torze eliptycznym, parabolicznym czy hiperbolicznym? Promień Ziemi jest równy 6370 km.

### Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/1993

Przypominamy treść zadań:

**165.** Dzielnicowy mówił, pokazując ręką widoczne za ogrodzeniem budynki szklarni: - Właściciel wszystko ogrzewa elektrycznie, a rachunki płaci niewielkie. Jak on to robi? - A czy nie podłączył się do wysokiego napięcia? - zapytał inspektor Wnikliwy wskazując przewody linii przesyłowej biegnącej wzdłuż drogi. - Zastanawiam się, czy to byłoby możliwe - powiedział przyglądając się czemuś uważnie. Czemu przyglądał się inspektor Wnikliwy i do jakich doszedł wniosków?

**166.** W chwili początkowej jednorodny pręt o długości  $l$  miał kierunek osi  $x$ , przy czym jeden jego koniec poruszał się wzdłuż tej osi w przód z prędkością  $v_1$ , a składowa  $y$  prędkości drugiego końca była równa  $v_2$  (rys. 2). W tym momencie przedni koniec pręta wsunął się do wnętrza pierścienia, który może się swobodnie obracać w ustalonym miejscu. Jaki warunek musi spełniać podane wielkości, aby pręt przeleciał przez pierścień na drugą stronę?

**165.** Inspektor przyglądał się ogrodzeniu. Druty ogrodzenia mogłyby tworzyć uzwojenie wtórne „transformatora” kradnącego energię z linii przesyłowej. Spróbujmy orientacyjnie ocenić napięcie uzyskiwane z jednego zwoju. Przyjmijmy, że górny drut biegnie w odległości 3 m, a dolny w odległości 5 m od przewodu, w którym płynie prąd 100 A. Średnia wartość indukcji magnetycznej w zwoju wynosi więc  $B = \frac{1}{2\pi} \mu_0 \frac{I}{r} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \cdot \frac{100 \text{ A}}{4 \text{ m}} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ T}$ , a podstawiając długość ogrodzenia równą 100 m mamy strumień  $\Phi = 5 \cdot 10^{-6} \text{ T} \cdot 100 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 10^{-3} \text{ Wb}$  (ściśle rzecz biorąc należałoby obliczyć ten strumień jako całkę, ale do naszych celów podstawienie średniego pola jest zupełnie wystarczające). Jeśli częstotliwość drgań wynosi 50 Hz, a podana wartość natężenia 100 A jest wartością skuteczną, to otrzymujemy skuteczną wartość napięcia  $U = 2\pi \cdot 50 \text{ s}^{-1} \cdot 10^{-3} \text{ Wb} \approx 0,3 \text{ V}$ . Nie jest to zbyt wiele; co prawda zwiększając liczbę zwojów można by w zasadzie zwiększyć uzyskiwane napięcie, ale wątpliwe jest, czy opór takiego uzwojenia byłby dostatecznie mały, aby czerpana moc wystarczała do zasilania choćby jednej żarówki (nie mówiąc już o ogrzewaniu szklarni). Kradzież energii nie mogła następować tą drogą.

**166.** Oznaczmy odległość środka pręta od pierścienia przez  $d$ , szybkość zmiany  $d$  (czyli prędkość przesuwu) przez  $v$ , a prędkość kątową przez  $\omega$ . Tak więc składowa prędkości środka pręta wzdłuż niego wynosi  $v$ , a w poprzek  $-\omega d$ . Przy podanych założeniach zachowane są dwie wielkości: energia kinetyczna pręta oraz moment pędu względem pierścienia. Każda z nich jest sumą dwóch wyrażeń odnoszących się do ruchu postępowego środka masy i do ruchu obrotowego względem środka masy. Korzystając ze wzoru na moment bezwładności pręta względem środka masy  $I = \frac{1}{12} ml^2$  mamy równania

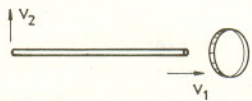
$$(1) \frac{m}{2} v^2 + \frac{m}{2} (\omega d)^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{m}{2} \left( v_1^2 + \left( \frac{1}{2} v_2 \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} ml^2 (v_2/l)^2 = \frac{m}{2} \left( v_1^2 + \frac{1}{3} v_2^2 \right),$$

$$(2) I \omega + m d^2 \omega = \left( \frac{1}{12} ml^2 + m \left( \frac{l}{2} \right)^2 \right) (v_2/l) = \frac{1}{3} ml v_2.$$

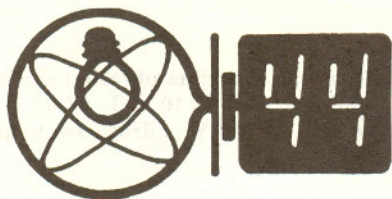
W miarę tego, jak pręt wsuwa się do pierścienia ( $d$  maleje), rośnie - jak wynika z (2) - prędkość kątowna, osiągając dla  $d = 0$  maksymalną wartość  $\omega_{max} = 4v_2/l$ . Z równania (1) widzimy, że prędkość przesuwu  $v$  wtedy maleje. Odpowiedź na postawione pytanie zależy od tego, czy  $v$  osiąga wartość 0 (pręt przestaje się wsuwać), czy też nie. Podstawienie  $\omega = \omega_{max}$  i  $d = 0$  do (1) prowadzi po przekształceniach do wyniku  $v_{min}^2 = v_1^2 - v_2^2$ , zatem pręt przeleci przez pierścień wtedy, gdy  $v_1 > v_2$ .



Rys. 1



Rys. 2





Zainteresowanie Czytelników ligą fizyczną wyraźnie „faluje”. Przesłano stosunkowo dużo rozwiązań zadań 155 i 157 (obwody elektryczne) oraz do zadania 149 (drabinka na Księżyc). Mniej standardowe zadania (np. wymagające zastosowania przybliżeń) są często pomijane, tak więc nikt nie tknął zadań 145 (całkowite wewnętrzne odbicie dźwięku), 148 (kraśnienie wody w naczyniu) i 153 (przyporządkowanie obrazów dyfrakcyjnych otworom). Bardzo małym powodzeniem cieszyły się też zadania 141 (pole ładunków dodatnich i ujemnych na przemian), 143 (wypływ wody z dwóch śródeł), 147 (zderzenia lekkiej kulki) i 158 (wiotki przewód w polu magnetycznym). Nie mogą zwłaszcza przeboleć zignorowania przez Czytelników oryginalnego zadania 153. Zapewne niektórzy z Was zrezygnowali z przysłania listów nie mogąc przedstawić rozwiązania kompletnego, opartego na ścisłym rozumowaniu. Zadanie fizyczne różni się jednak od matematycznego – w razie konieczności można się tu kierować przybliżeniami, analogiami i rozważaniami jakościowymi, i nawet jeśli istnieje rozwiązanie dokładniejsze, to taka niepełna analiza problemu może zostać oceniona dość wysoko. Apeluję więc o próby rozwiązywania zadań nietypowych, które bynajmniej nie muszą być w istocie trudniejsze.

Przejdźmy teraz do szczegółowego omówienia niektórych zadań.

**Zadanie 157** [40 jednakowych oporników] ( $WT = 1,90$ ;  $LPR = 5$ ). Rozwiązaniem prostszym i bardziej eleganckim od podanego w *Delcie* było wyszukanie w obwodzie punktów o jednakowym potencjale, tak że po ich zwarciu można zastosować wzory na łączenie szeregowo i równoległe oporników. W ten sposób postąpili J. Neszropa i R. Wencel. Ciekawy był również sposób użyty przez P. Gworysa, polegający na „sprytnym” podziale układu na cztery części, oraz A. Borowskiego, który zamiast II prawa Kirchhoffa wykorzystał warunek minimum mocy cieplnej wydzielonej w układzie (co jednak było bardziej pracochłonne). Piąte bezbłędne rozwiązanie nadesłał A. Surma.

**Zadanie 159** [wahadło na wciąganej nici] ( $WT = 3,85$ ;  $LPR = 0$ ). Bardzo słabe rezultaty, wynikające z przyjęcia błędnego warunku stałości energii wahadła. Powoływanie się na zasadę zachowania energii nie ma sensu, jeśli wciąganie nici może tę energię zmienić! Rozwiązanie podane w *Delcie* 9/1993 zawiera błąd w znaku pracy, gdyż przy wciąganiu  $dl$  jest ujemne. Prawidłowy wzór końcowy ma postać

$$\alpha_1 = \alpha_0 (l_0/l_1)^{3/4}$$

(wykładnik  $3/4$  zamiast  $1/4$ ).

**Zadanie 160** [lodówka spalająca ropę] ( $WT = 2,90$ ;  $LPR = 2$ ). Rozwiązania P. Gworysa i A. Borowskiego są nie tylko prawidłowe, ale nawet staranniejsze niż podane w *Delcie*, gdyż uwzględniono w nich zmieniającą się sprawność procesu oziębiania wody.



## Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

**M 693.** Wykazać, że dla żadnego  $n > 1$  suma częściowa  $S_n$  szeregu harmonicznego

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n},$$

nie jest liczbą naturalną.

Rozwiązanie na str. 9

**M 694.** Na sferze danych jest 100 różnych okręgów wielkich (to znaczy leżących w płaszczyźnie przechodzącej przez środek sfery), tak że przecinają się one w 9900 punktach. W jaki sposób rozmieścić w punktach przecięcia okręgów liczby 1, 2, 3, ..., 9900, by dla każdego okręgu suma położonych na nim liczb była taka sama? Rozwiązanie na str. 5

**M 695.** W urnie jest pięć kul białych, sześć czarnych i siedem czerwonych. Wyciągamy po kolei wszystkie kule z urny (w losowy sposób). Jakie jest prawdopodobieństwo wyciągnięcia pierwszej kuli czerwonej wcześniej niż pierwszej kuli białej?

Rozwiązanie na str. 9

Redaguje Jarosław KULPA

**F 375.** Oszacować ciśnienie, jakie panuje we wnętrzu Ziemi. Założyć, że gęstość Ziemi rośnie liniowo w kierunku środka i że na powierzchni gęstość jest dwukrotnie mniejsza od średniej gęstości Ziemi.

Porównać uzyskane wartości ciśnienia z prostym modelem, w którym zakłada się stałą gęstość Ziemi.

Rozwiązanie na str. 10

**F 376.** Oszacować maksymalne odchylenie wiązki elektronowej na obrazie telewizora spowodowane ziemskim polem magnetycznym o indukcji  $B = 5 \cdot 10^{-5}$  T. Wiadomo, że elektrony są przyspieszane różnicą potencjałów  $U = 20\,000$  V, a droga swobodna elektronów wynosi około 20 cm.

Rozwiązanie na str. 8



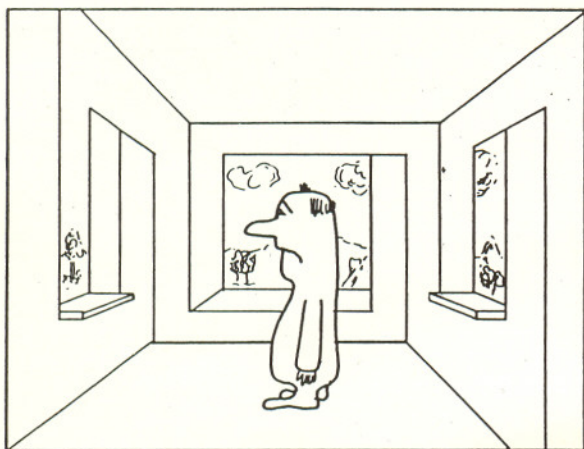


Dwa miesiące temu zaproponowaliśmy Czytelnikom pięć zadań świątecznych pod wspólnym hasłem: „Czy Pan istnieje?”. Tekst zamieszczony obok zawiera rozwiązanie zadania pierwszego – obiekt o żądanych własnościach nie istnieje. W przypadku pozostałych czterech pytań odpowiedź jest inna – opisane sytuacje mogą zajść! Opiszemy je w następnym numerze *EPSILONA*; jeśli ktoś przy rozwiązywaniu któregoś z zadań doszedł do wniosku przeciwnego, ma przed sobą miesiąc na odnalezienie (zapewne niestandardowego) tworu spełniającego zadane warunki.



A takie bryły nie istnieją... Tę serię znaczków wydano w Szwecji; w katalogach filatelistycznych nosi ona nazwę: Niemożliwe figury, nieeuklidesowe konstrukcje brył. Autorem znaczków jest Oskar Reutersvärd według sztynchów, które wykonał Polak, Czesław Ślania.

Rysunek z książki K. Ciesielskiego i Z. Pogody „Bezmiar matematycznej wyobraźni” – w księgarniach na początku 1994 roku.



## Stuknąłem młotkiem

Czy istnieje funkcja  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  ciągła, która dowolną liczbę wymierną przeprowadza w liczbę niewymierną, każdą zaś liczbę niewymierną w liczbę wymierną? ( $f(\mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ ,  $f(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{Q}$ )?

Stary dowcip mówi, że ongiś pewnemu podróżnemu zepsuł się samochód i nikt nie potrafił auta naprawić. Dopiero zawezwany blacharz... stuknął raz młotkiem i silnik zaczął pracować! Blacharz zażądał 100 złotych; właścicielowi auta wydało się to opłatą zbyt wygórowaną (widać, że dowcip istotnie jest stary), poprosił więc o szczegółowy rachunek. Otrzymał go, o treści następującej: „Stuknąłem młotkiem – 1 zł; wiedziałem, gdzie – 99 zł”.

Podobnie jest z wieloma problemami matematycznymi. Często, by odpowiedzieć, wystarczy tylko wiedzieć, gdzie – i jakim – „młotkiem” stuknąć... Tak jest i tu. Zbiór  $\mathbf{R}$  i funkcje ciągłe mają wiele własności. Z czego korzystać przy próbie rozwiązania?

Wykorzystamy trzy fakty. Przed ich sformułowaniem sprecyzujmy, że gdy mówimy o przedziale (w  $\mathbf{R}$ ), to nie będzie dla nas istotne, czy którykolwiek z końców przedziału należy do niego, czy nie. Ponadto przyjmujemy, że przedziałami są także zbiory jednoelementowe, jak i cały zbiór liczb rzeczywistych.

A oto obiecane własności:

- (1) funkcja ciągła przekształca przedziały na przedziały.
- (2) wszystkie liczby wymierne można ustawić w ciąg (ponumerować liczbami naturalnymi) – mówimy, że  $\mathbf{Q}$  jest zbiorem przeliczalnym.
- (3) jeśli przedział ma więcej niż jeden element, to jego elementów nie da się ustawić w ciąg (skończony lub nie) – przedział nie jest zbiorem przeliczalnym ani skończonym.

Wszystkie trzy fakty były znane już w XIX wieku, dziś należą do elementarza wiedzy każdego matematyka. Pierwszy to nieco inne sformułowanie twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich (znanego niektórym ze szkoły). Drugi i trzeci to jedne z najbardziej podstawowych stwierdzeń teorii mnogości. Wszystkie trzy są w miarę proste do wykazania.

Przejdźmy teraz do naszego zadania. Przypuśćmy, że szukana funkcja istnieje; na mocy własności (1) zbiór  $f(\mathbf{R})$  jest przedziałem. Ma on jednak co najmniej dwa elementy, bo  $f(\sqrt{2})$  jest liczbą wymierną, zaś  $f(0)$  nie. Nie da się zatem elementów  $f(\mathbf{R})$  ustawić w ciąg (korzystamy z (3)).

Z drugiej strony jednak,  $f(\mathbf{R})$  musi być skończony lub przeliczalny! Czem? Wiemy, że  $f(\mathbf{R}) = f(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \cup f(\mathbf{Q})$ . Elementy  $\mathbf{Q}$  można ponumerować liczbami naturalnymi, można zatem to zrobić także i z wszystkimi elementami dowolnego podzbioru  $\mathbf{Q}$ , a więc w szczególności zbioru  $f(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})$ , który to zbiór w  $\mathbf{Q}$  jest zawarty. Ponumerować potrafimy także wszystkie liczby z  $f(\mathbf{Q})$  (dlaczego?). Stąd wynika (jak?), że możemy ustawić w ciąg (skończony lub nie) wszystkie elementy z  $f(\mathbf{R})$ .

Warunki zadane funkcji  $f$  doprowadziły do sprzeczności. Oznacza to, że funkcja o szukanych własnościach nie istnieje.

Dowód nie jest trudny. Trzeba tylko wpaść na to, z czego skorzystać...

Krzysztof CIESIELSKI