

SPIS TREŚCI

NUMERU 1(236)

Kosmiczna superpanorama

Michał Heller

str. 1

Wbrew zdrowemu
rozsądkowi (VIII)

Tomasz Hofmokl

str. 1

Mała Delta

str. 6

Obalenie twierdzenia
Pitagorasa

*Małgorzata Mikołajczyk,
Krzysztof Omiljanowski*

str. 8

Konkurs Uczniowskich Prac
z Matematyki

str.13

Klub 44

str.14

Patrz w niebo

str.16

Zadania

str.16

Epsilon

str.17

W następnym numerze:

Porady dla działkowiczów

Okładkę wykonał

Bernard BADZIOCH

Wydawca:

Uniwersytet Warszawski

Krakowskie Przedmieście 26/28

00-927 Warszawa

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula

Bogdan Cichości

Roman Duda

Jan A. Gaj

Tomasz Hofmokl – wiceprzewodniczący

Tadeusz Jarzębowski

Marcin Kubiak

Andrzej Małowski

Andrzej Pelczar

Zbigniew Płochocki

Zdzisław Pogoda

Konrad Rudnicki

Zbigniew Semadeni

Grzegorz Sitarski

Józef I. Smak

Kazimierz Stępień

Mieczysław Subotowicz

Andrzej Szymacha

Andrzej Woszczyk

Wacław Zawadowski

Redaguje kolegium w składzie:

Krzysztof Biesaga

Piotr Hajlasz

Jan Kalinowski – z-ca red. nac.

Krystyna Kordos – sekr. red.

Marek Kordos – red. nac.

Tomasz Kwast

Stanisław Mrówczyński

Anna Rudnik

Joanna Udalska

Adres Redakcji:

ul. Smyczkowa 5/7

02-678 Warszawa

tel. 43-02-43 wewn. 21

HAJLASZ@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w Zakładach Graficznych
w Warszawie, ul. Srebrna 16

Skład systemem \TeX wykonała redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY w AMOS-ie

Od stycznia 1993 r. prenumeratę „Deltę” prowadzi również firma AMOS, 01-506 Warszawa, ul. Szenwalda 1 (tel. 39-17-52). Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w pierwszym półroczu 1994 roku wynosi 8 000,-zł, a w drugim półroczu 10 000,-zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru wynosi w pierwszym półroczu 1994 r. 20 000,-zł, a w drugim – 22 000,-zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! AMOS dostarcza „Deltę” pod wskazany adres nie pobierając dodatkowej opłaty. Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Blankiet pocztowy na prenumeratę „Deltę” w AMOS-ie zamieszczamy na str. 7/8.

Konto AMOS-u: **PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136**

WARUNKI PRENUMERATY w RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.

2. Cena prenumeraty na II kwartał 1994 r. wynosi 24 000,- zł.

3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.

4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:

– na teren kraju

– jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób,

– na zagranicę

– „Ruch” S.A. Oddział Warszawa, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – **dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty**, z wyjątkiem zlecenia dostawy pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni pokrywa prenumerator.

5. Terminy przyjmowania prenumeraty:

– na kraj i zagranicę – do 20 XI na I kwartał roku następnego
do 20 II na II kwartał
do 20 V na III kwartał
do 20 VIII na IV kwartał.

Cena 1 egzemplarza 8 000,- zł

Kosmiczna superpanorama

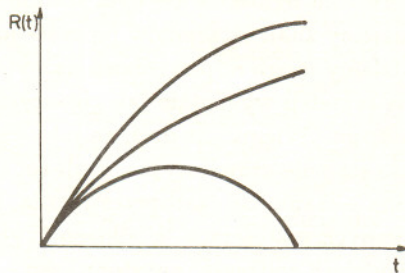
(Artykuł ten jest rozdziałem z książki przygotowywanej do druku.)

Michał HELLER

Ludziom trudno zgodzić się na cokolwiek. Jeśli w jakiejś sprawie możliwych jest kilka poglądów, to prędzej czy później każdy z nich znajdzie swoich zwolenników. Wystarczy przekartkować podręczniki historii filozofii – „tyle doktryn ile głów”. Wystarczy posłuchać politycznych dyskusji – nierzadko stanowisk jest więcej niż uczestników debaty (bo przecież polityczne poglądy można zmieniać zależnie od okoliczności). Wystarczy posłuchać rozmów w pociągu lub na ulicy – ci, co się zgadzają, na ogół milczą. W nauce również prowadzi się zacięte dysputy, ale stosunkowo często osiąga się coś bardzo przypominającego jednomyślność. Jak do tego dochodzi? Ktoś (bodaj Planck) powiedział, że nowe poglądy stają się powszechne, gdy wymiera pokolenie tych, którzy byli zwolennikami starych zapatrywań. Dlaczego jednak tylko jeden pogląd rozpowszechnia się w nowym pokoleniu?

W latach siedemdziesiątych naszego stulecia zaczął się utrwalac pewien powszechny pogląd na strukturę i ewolucję świata w jego największej skali. Z czasem wręcz zaczęto mówić o standardowym modelu kosmologicznym. Standard ten obejmował, jako swoje geometryczne tło, jedno z rozwiązań równań Einsteina, przedstawiające ekspandujący świat od początkowego Wielkiego Wybuchu aż do obecnego stanu przestrzeni równomiernie wypełnionej galaktykami. Na to geometryczne tło z czasem „nanesiono” rekonstrukcję procesów, sterujących kosmiczną ewolucją. Jest rzeczą zdumiewającą, że jedynie pierwsze ułamki sekundy (o ile czas w ogóle można wówczas mierzyć jakimikolwiek jednostkami) rozmywają się w domysłach i niepewnościach. Cała reszta, w swoich zasadniczych wątkach, odznacza się dużym stopniem wiarygodności, choć, oczywiście, pozostawia sporo otwartych możliwości i stawia szereg nowych znaków zapytania.

Trzy rozwiązania równań Einsteina, zwane rozwiązaniami Friedmana: t jest czasem odmierzającym ewolucję świata, a $R(t)$ – tzw. czynnikiem skali; reprezentuje on typową odległość między sąsiednimi galaktykami. Według modelu standardowego jedno z tych rozwiązań z dobrym przybliżeniem przedstawia ewolucję Wszechświata.



Nie jest prawdą, że zwolennicy starych koncepcji (np. teorii stanu stacjonarnego czy symetrycznego świata Alfvena) wymarli. Żyją i niekiedy nadal usiłują propagować swoje idee. Ale u ogromnej większości fizyków i astronomów nie znajdują posłuchu. Nie należy w tym upatrywać jakiegoś gigantycznego spisku (istnieje również spiskowa koncepcja nauki!). Myślę, że można to wyjaśnić prościej i bardziej przekonująco. Po pierwsze, wymową faktów – model standardowy przeszedł pomyślnie tak wiele prób konfrontacji z obserwacjami astronomicznymi (czego nie można powiedzieć o żadnym z modeli konkurencyjnych), że musi to dawać do myślenia.

Wbrew zdrowemu rozsądkowi (VIII)

(Według wykładów radiowych z audycji IV programu – *Widnokrąg*)

Czy można przejść przez zamknięte drzwi?

W naszych spotkaniach opowiadam Państwu o doświadczeniach, których wyniki jawnie przeczą zdrowemu rozsądkowi pojętemu jako uogólnienie naszych doświadczeń z życia codziennego, a mówiąc ogólniej – ze świata zjawisk makroskopowych, w którym przecież sami żyjemy. Poprzednim razem omawiałem pomiary dokonane niedawno przez zespół fizyków japońskich, które wykazały, że elektron może interferować sam ze sobą, co przekładając na język codzienny oznacza, że zachowuje się on w taki sposób, jakby mógł nie dzielać się przechodząc równocześnie przez dwa otwory. Teraz proponuję zajęcie się zjawiskiem, można powiedzieć odwrotnym, zjawiskiem przechodzenia przez zamknięte drzwi bez ich otwierania. Nie jest to może aż tak dziwne zjawisko jak poprzednie. Zdolności przenikania przez mury i zamknięte drzwi wykazywali w legendarnych czasach czarownicy, wróżki i magowie. Ten gatunek istot wydaje się być na wymarciu i na co dzień nie spotykamy się ze zjawiskiem przenikania przez ściany. Opowieść o czymś takim skłonni jesteśmy uważać za bajkę lub za zjawisko nadprzyrodzone. Tymczasem cząstka alfa...

Tak zaczynając moją opowieść znowu zapraszam Państwa w świat cząstek elementarnych, w których ujawniają się prawa rządzące również nami, ale których nie zauważamy, bo jesteśmy zbyt wielcy, oczywiście, w sensie rozmiarów i masy. Tymczasem cząstka alfa... I znowu muszę przerwać i przypomnieć to, o czym mówiłem w poprzednich artykułach. Dopiero wtedy możemy ocenić niezwykłość, chciałoby się powiedzieć bezsens, niektórych zjawisk.

Otóż opowiadałem Państwu, że fala świetlna zachowuje się jak strumień cząstek, które nazywamy fotonami. Niosą one porcje energii zwane kwantami. Strumień zaś cząstek, na przykład elektronów, zachowuje się w pewnych przypadkach jak fala. Mówimy o dualizmie falowo-korpuskularnym materii. Poruszająca się cząstka z dobrane

określonym pędem może zachowywać się tak, jak fala o długości równej stałej Plancka podzielonej przez pęd. Czyli: im większy pęd cząstki, tym krótsza fala. Fala kojarzy się z falowaniem czegoś, jakiegoś ośrodka. Na przykład fala na wodzie to falowanie wody. Kiedy omawiałem fale de Broglie'a, mówiłem o falach związanych z cząstką. Nie jest to dobry zwrot, gdyż sugeruje, że mamy klasyczną cząstkę podróżującą w jakiś sposób wraz z falą. Fale de Broglie'a nie są falami wędrującymi wraz z klasyczną cząstką i „wiodącymi” ją w jakimś sensie. Fale de Broglie'a i cząstka to jedna i ta sama rzecz; nie ma nic poza tym. Rzeczywiście cząstki znajdujące się w przyrodzie mają własności falowe i to jest faktem. Jeżeli chcemy, możemy mówić o fali de Broglie'a elektronu, ale zwrot ten jest w istocie synonimem elektronu.

Jeszcze raz wrócimy do doświadczenia z elektronami padającymi na przesłone z dwiema szczelinami, o którym pisałem poprzednio. Nie ma nic takiego w tym doświadczeniu, co mogłoby nam sugerować, że istnieje klasyczna korpuskuła przechodząca przez jedną ze szczelin, „prowadzona” przez falę, która przechodzi przez obie szczeliny. W zupełności wystarczy mówić o falach, których natężenia interpretowane są kwantowo-mechanicznie. Co to oznacza? Możemy to ująć następująco. W świecie bardzo drobnych składników materii, w świecie cząstek elementarnych do głosu dochodzą własności materii, które nazywamy własnościami falowymi cząstek. Zachowanie się cząstki opisuje pewna funkcja zwana funkcją falową. Kwadrat modułu tej funkcji w danym miejscu przestrzeni i czasu określa prawdopodobieństwo znalezienia tam cząstki. Kwadrat modułu funkcji to iloczyn wartości funkcji przez jej sprzężenie zespolone. W fizyce klasycznej jesteśmy pewni, że gdybyśmy tylko bardzo chcieli, to możemy się dowiedzieć, gdzie dana cząstka jest w określonej chwili i jaką w tej samej chwili ma energię. Zależy to tylko od naszej pomysłowości projektowania doświadczeń. W fizyce kwantowej niektórych pytań nie ma sensu w ogóle stawiać. Możemy tylko obliczyć prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w danym miejscu, a pytanie, gdzie cząstka „naprawdę” się znajduje, nie ma sensu.

Wrócimy do tych problemów następnym razem, a teraz wreszcie zajmę się bardzo prostym doświadczeniem obserwacji rozpadu promieniotwórczego polonu 214. W roku 1926 opublikowano zdjęcie

Niewątpliwie najważniejszą z tych prób było odkrycie mikrofalowego promieniowania tła i jego późniejsze badania, w szczególności przez satelitę COBE. Po drugie, model standardowy do tego stopnia wrósł we współczesną fizykę, że jego usunięcie z niej spowodowałoby trudne do uleczenia rany.

Model standardowy to nie tylko imponujący obraz kosmicznej ewolucji, lecz również zbiór metod, dzięki którym stworzenie tego obrazu stało się możliwe. W metodach tych uderza niezwykła współpraca (czasem więcej niż współpraca – rodzaj swoistej symbiozy) technik obserwacyjnych i matematycznych narzędzi. Stosowane metody są nie mniej imponujące niż obraz uzyskany za ich pomocą. Ponieważ jednak metody mogą przemówić tylko do kogoś, kto w wieloletnim procesie uczenia się ich i praktykowania zetknął się z ich skutecznością, w dalszym ciągu ograniczę się tylko do obrazu. Zapraszam zatem Czytelnika do superpanoramicznego kina, w którym postaram się pokazać dzieje Wszechświata tak, jak je widzi współczesna nauka. Niech naszym ekranem będzie wyobraźnia; pamiętajmy jednak, że to, co zobaczymy, nie jest wynikiem swobodnego błędzenia imaginacji, lecz dziełem mozolnego układania szczegółów z fragmentów informacji uzyskiwanych wspólnym wysiłkiem zmatematyzowanej teorii i kontrolowanego eksperymentu.

Z pierwszymi kadrami naszego superpanoramicznego filmu mamy poważne kłopoty. Nawet nie wiemy, czy to jest film. Bo film to seria następujących po sobie, a więc rozwijających się w czasie, ujęć. A wszystko wskazuje na to, że „stan początkowy” Wszechświata nie rozgrywa się w czasie. Nic się nie dzieje, **wszystko jest**. Wszystko, co potem przejawia się w bogactwie ewolucyjnych procesów, jest zawarte w Pierwotnej Symetrii. Ale symetria ta nie stanowi pustki i martwoty; przeciwnie, jest pełna dynamiki, wręcz harmonią i różnorodnością możliwych struktur. Nie są to tylko poetyckie określenia. Jeżeli znane nam dziś teorie supersymetrii choć w części są podobne do tej Prasyetrii, której Wszechświat zawdzięcza swoją historię, to mamy prawo sądzić, że odznaczała się ona niezwykłą dynamiką i pięknem.

Ale Pierwotna Symetria nie była stabilna. Uległa złamaniu. Dopóki nie będziemy znali szczegółów jej matematycznej architektury, nie będziemy mogli odpowiedzieć na pytanie, dlaczego. Pierwsze łamanie symetrii wyglądało jak gigantyczna eksplozja – eksplozja Wszystkiego. Wiemy już dziś, że jako pierwsze z Wszystkiego wyłoniło się pole grawitacyjne, czyli to, co – na mocy równań Einsteina – stanie się czasoprzestrzenią, zgniecioną jeszcze w ogromnych gęstościach Wielkiego Wybuchu, poszarpaną w konwulsjach rodzenia, ale stopniowo – w miarę gwałtownego spadania gęstości i temperatury – przechodzącą w gładką, choć ciągle jeszcze silnie zakrzywioną, arenę fizycznych procesów.

Wyglądzenie pola grawitacyjnego odpowiada pojawieniu się czasoprzestrzeni w formie, jaką zakłada einsteinowska teoria względności. Teraz już możemy używać znanych nam pojęć przestrzeni i czasu. Zaczął się proces przemijania.

Możemy więc uruchomić kosmiczny zegar, którym będziemy odmierzać kolejne etapy historii Wszechświata. Ale wygodnie jest nie rozpoczynać odliczania czasu od godziny zero, lecz nastawić

jego wskazówki na 10^{-44} sekundy i dopiero teraz zwolnić przycisk kosmicznego stopera. Czynimy to małe fałszerstwo po to, by nasze równania, które opisują ewolucję świata, ale które nie wiedzą, co naprawdę zdarzyło się na początku, funkcjonowały zgrabnie i elegancko. Dopóki nie będziemy znali teorii unifikującej całą fizykę (czyli teorii Pierwotnej Symetrii) i kwantowej teorii grawitacji, nie będziemy wiedzieli, czy świat miał początek, czy nie, a nawet, czy pytanie o jego początek ma w ogóle jakikolwiek sens. Ale wygodnie jest przyjąć, że wszystko zaczęło się od stanu z dosłownie nieskończoną gęstością (czyli od początkowej osobliwości) i przypisać temu stanowi chwilę zero (cokolwiek to znaczy). Wówczas warunki spójności (narzucone przez równania) wymagają, by uznać, że era Plancka miała miejsce 10^{-44} sekundy po „początku”. W erze tej gęstość materii, panująca we Wszechświecie, jest – z naszego punktu widzenia – ciągle gigantyczna i wynosi 10^{93} g/cm³, ale gwałtownie spada. Potem już wszystko toczy się gładko.

Godzina: 10^{-35} sekundy. Gęstość: 10^{70} g/cm³. Temperatura spada do wartości 10^{27} K, co odpowiada energii 10^{14} GeV. Jest to temperatura, w której następuje kolejne łamanie symetrii. Tym razem od tego, co było kiedyś Pierwotną Symetrią, oddzielają się silne oddziaływania jądrowe.

Istnieją poważne racje, by sądzić, że proces odłączania się silnych oddziaływań jądrowych istotnie wpływa na zmianę kwantowego stanu, zwanego kwantową próżnią, co z kolei powoduje gwałtowne, niejako nadprogramowe, rozdzęcie i tak już rozszerzającego się Wszechświata. Zjawisko to nazywa się kosmiczną inflacją. W ciągu małego ułamka sekundy rozmiary Wszechświata powiększają się 10^{50} razy! Wszechświat gwałtownie ochładza się, ale gdy inflacja dobiega końca i ekspansja wraca do swej standardowej prędkości, następuje ponowne podgrzanie materii i wszystko toczy się dalej zgodnie ze standardowymi równaniami.

Zjawisko inflacji wyjaśnia kilka trudności standardowej kosmologii, ale samo stawia pewne znaki zapytania. Na skutek inflacji cały obecnie obserwowany Wszechświat kiedyś, w epoce ogromnego zgniecenia, stanowił mały „element objętości”. Tłumaczy to, dlaczego dzisiejszy Wszechświat jest tak dobrze „zsynchronizowany”, tzn. dlaczego jego nawet bardzo odległe od siebie części mają takie same cechy fizyczne (np. taką samą temperaturę promieniowania tła). Ale najprawdopodobniej sam mechanizm inflacji wymaga „specjalnego dopasowania” warunków początkowych. Trzeba więc odpowiedzieć na pytanie: Co wymusiło właśnie takie a nie inne warunki początkowe? A także kosmologowie bardzo chcieliby dysponować jakimiś obserwacyjnymi potwierdzeniami idei inflacji. Dotychczas pozostaje ona jedynie teoretyczną hipotezą. Hipoteza ta jest bezpieczna w tym sensie, że jej przyjęcie lub odrzucenie nie zmienia zasadniczego toku wydarzeń, jakie nastąpiły w późniejszych epokach, nie narusza więc całości standardowego modelu. Możemy zatem spokojnie powrócić do oglądania dalszych sekwencji superpanoramicznego filmu.

Godzina: 10^{-12} sekundy po Wielkim Wybuchu, gęstość spada do 10^{25} g/cm³, a temperatura do 10^{15} K (około 100 GeV). Następuje kolejne łamanie symetrii. To, co pozostało po Pierwotnej Symetrii, rozpada się na słabe siły jądrowe i siły elektromagnetyczne.

wykonane przez K. Phillipa z urządzenia detekcyjnego, które potrafiło rejestrować tory cząstek. W urządzeniu tym umieszczono niewielką ilość pierwiastka promieniotwórczego wyodrębnionego po raz pierwszy z rudy uranowej w 1898 roku przez małżeństwo Marię Curie Skłodowską i Piotra Curie. Ściśle rzecz biorąc, do badań wzięto jeden z rodzajów, czyli izotopów tego pierwiastka, który oznaczamy liczbą 214. Komora pozwalała obserwować ślady cząstek wylatujących z polonu. Okazało się, że są to jądra helu, czyli atomy helu pozbawione elektronów. Takie jądro helu nazywamy cząstką alfa. Prawie wszystkie cząstki alfa miały dokładnie tę samą energię, którą zmierzono badając jak daleko mogą przelecieć w urządzeniu detekcyjnym. Każde pojedyncze jądro polonu użytego w tym doświadczeniu żyje średnio bardzo mały ułamek sekundy. Jest to jeden z krótkożyjących izotopów polonu. Na razie nie ma nic zaskakującego.

Problem zacznie się, jeżeli zaczniemy stawiać pytania: a dlaczego energia wylatującej cząstki alfa zawsze jest taka sama? a dlaczego żyje to jądro tyle właśnie ile żyje, a nie dłużej lub krócej? Jeżeli jądro rozpada się, to dlaczego nie natychmiast, a właściwie dlaczego w ogóle istnieje taki pierwiastek, z którego jądra cząstka alfa ucieka. Aby odpowiedzieć na takie i podobne pytania, trzeba starać się wyobrazić sobie, jak to jest w jądrze pierwiastka, czyli stworzyć jakiś model.

Utwórzmy na nasz użytek prymitywny model mechaniczny. Musi on tłumaczyć wszystkie zaobserwowane fakty. Fakt pierwszy: wszystkie cząstki alfa wylatują z tą samą energią. W modelu możemy to zapewnić umieszczając każdą cząstkę alfa na końcu jednakowej i jednakowo ściśniętej sprężynki. Fakt drugi: jądro przez pewien czas istnieje, a potem dopiero wysyła cząstkę alfa. Czasową stabilność zapewnimy otaczając jądro płaszczem ochronnym, który przytrzyma sprężynkę z cząstką alfa. Dotąd idzie nam wszystko dobrze. Możemy zapewnić stałą energię wyrzucanych cząstek, jeżeli usuniemy ochronny płaszcz (jednakowe sprężynki jednakowo wyrzucają cząstki alfa), zapewnić stabilność do czasu usunięcia płaszcza, ale natrafimy na kłopot, jeżeli chcemy zapewnić również pękanie lub usuwanie płaszcza. Mogą Państwo zapytać, gdzie leży problem? Można sobie wyobrazić, że naprężona osłona w pewnej chwili „puści” i sprężynka wypchnie cząstkę alfa. Takiego modelu nie wolno nam przyjąć.

Co bowiem oznacza, że osłona w pewnej chwili puści? Oznacza to tyle, że w osłonie zachodzą jakieś procesy, które zmniejszają jej wytrzymałość albo, co właściwie na jedno wychodzi, że wbudowany jest w nią mechanizm zegarowy. To zaś oznaczałoby, że jądra się starzeją. Takie założenie pachnie herezją i nie wolno go zrobić. Wszystkie doświadczenia wskazują na to, że pojedyncze jądro, jak również inne cząstki mikroświata nie starzeją się i nie można przewidzieć, kiedy ta właśnie określona cząstka lub to właśnie jądro ulegnie rozpadowi. Co więc możemy zrobić w tej sytuacji?

W naszym modelu cząstek alfa umieszczonych na ściśniętych przez niezmienną wieczną ściankę osłonową sprężynkach możemy założyć, że od czasu do czasu zdarza się cud i cząstka alfa może przejść przez ściankę nie naruszając jej. Naruszyć ścianki nie wolno, bo oznaczałoby to, że ścianka zmieniła swoje właściwości i zrobiła się zdolna do przepuszczenia cząstki, a ona przecież nie może zmienić właściwości. Pozostaje więc tylko cud. Przyznają Państwo, że koncepcja modelu rozpadu promieniotwórczego opowiedziana zwykłym codziennym językiem i przyjmująca jako założenie istnienie cudów wydaje się pozbawiona sensu. O to właśnie mi chodziło.

Zwykły rozpad promieniotwórczy, jak go nazywamy: alfa-promieniotwórczy, wymaga wprowadzenia koncepcji sprzecznej ze zdrowym rozsądkiem, koncepcji przenikania przez ścianki, koncepcji nazwanej efektem tunelowym. Oczywiście, fizycy w opisie tego zjawiska posługują się nieco innym językiem. Rozumiejąc istotę zjawiska możemy przedstawić je w terminologii bardziej precyzyjnej. Na cząstkę alfa w jądrze działają siły odpychania elektrycznego związane z ładunkiem elektrycznym cząstki i siły przyciągania jądrowego. Cząstka alfa ma w wyniku działania tych sił dość znaczną energię potencjalną – chciałaby wylecieć z jądra, ale nie może tego zrobić, bo wzbraniają jej siły jądrowe, które tworzą wokół niej ściankę zwaną przez fizyków barierą potencjału. Fizyka klasyczna w takiej sytuacji stwierdziłaby, że cząstka będzie uwięziona po wieczne czasy wewnątrz bariery i nigdy nie wyleci.

Fizyka kwantowa mówi co innego. Cząstka ma własności falowe. Zachowanie cząstki opisuje funkcja falowa. Jej kwadrat w danym punkcie przestrzeni opisuje prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w tym miejscu. W odróżnieniu od

Od tego momentu we Wszechświecie funkcjonują „niezależnie” cztery fundamentalne oddziaływania, znane współczesnej fizyce, tzn. oddziaływania grawitacyjne, jądrowe silne, jądrowe słabe i elektromagnetyczne. Ten fragment kosmicznego scenariusza nie jest już tylko teoretyczną spekulacją. Fizykom w CERN-ie koło Genewy udało się, za pomocą akceleratora, w bardzo małej objętości odtworzyć temperatury, jakie panowały we Wszechświecie 10^{-12} sekundy po Wielkim Wybuchu. W takich temperaturach oddziaływania jądrowe słabe i elektromagnetyczne rzeczywiście występują jako jedno oddziaływanie fizyczne (zwane elektrosłabym).

Kolejny kadr kosmicznej superpanoramy – czas: 10^{-6} sekundy po Wielkim Wybuchu, gęstość: 10^{16} g/cm³, temperatura: 10^{13} K. Tak „niska” temperatura pozwala już cząstkom fundamentalnym, zwanym kwarkami, łączyć się w protony i neutrony. W ten sposób rodzą się podstawowe składniki, z których zbudowana jest „nasza materia”, ale stanowią one jeszcze morze „niezależnych” cząstek, nie mogących połączyć się w jądra atomowe. Gdy tylko jakiś neutron i proton zbliżają się do siebie, chcąc stworzyć „parę”, są natychmiast rozbijane przez wszędzie obecne, gorące promieniowanie. Dopiero gdy temperatura spadnie do 10^{11} K (ma to miejsce około 1 sekundy po Wielkim Wybuchu, gęstość wynosi wówczas około 10^{10} g/cm³), rozpocznie się proces nukleosyntezy, czyli powstawania jąder atomowych. Proces ten w dziejach świata trwał zaledwie kilka minut, ale były to kluczowe minuty dla przyszłej ewolucji i dla naszego zaistnienia. To wówczas decydował się skład chemiczny przyszłego Wszechświata, a przecież chemia węgla to my.

W epoce nukleosyntezy świat był wielkim tygłem, w którym – jak w bombie wodorowej – wodór był spalany na hel i niewielkie ilości jąder innych lekkich pierwiastków, takich jak: deuter, lit i beryl. Jądra wszystkich innych pierwiastków powstaną potem we wnętrzach gwiazd i podczas ich wybuchów zostaną stamtąd wyrzucone w przestrzeń kosmiczną. Dokładna analiza tych procesów wykazuje, że nie wszystkie pierwiastki chemiczne mogły powstać w gwiazdach. Kluczową rolę odgrywał hel. Gwiazdy były zdolne wyprodukować jedynie około 30% helu istniejącego dziś we Wszechświecie. Pozostałe 70% jąder helu zrodziło się kilka minut po Wielkim Wybuchu. Wyniki badań rozprzestrzenienia helu i jego obfitości w obecnym Wszechświecie stanowią niezależny argument na rzecz standardowego modelu kosmicznej ewolucji.

Wszechświat rozszerza się nadal, temperatura i gęstość gwałtownie spadają. Ale ciągle jest jeszcze za gorąco i za gęsto, by mogły istnieć atomy, tzn. jądra atomowe otoczone powłokami elektronów. Gęsta mieszanina jąder atomowych silnie oddziałuje z gorącym promieniowaniem, dzięki czemu materia jest dla promieniowania całkiem nieprzezroczysta (podobnie jak obecnie wnętrze Słońca). Gęstość promieniowania przewyższa gęstość innych postaci materii i to właśnie promieniowanie rządzi dynamiką Wszechświata. Stąd też tę epokę nazywa się erą promienistą.

Sytuacja zmienia się radykalnie dopiero około 35 000 lat po Wielkim Wybuchu; gęstość materii wynosi wówczas już tylko 10^{-14} g/cm³, a temperatura około 10 000 K. Następują dwa ważne wydarzenia: jądra wodoru zaczynają już wychwytywać elektrony, tworząc atomy wodoru i promieniowanie przestaje oddziaływać z cząstkami.

Od tego momentu materia, głównie w postaci atomowej, i promieniowanie elektromagnetyczne ewoluują niezależnie. Ośrodek kosmiczny staje się przezroczysty dla promieniowania. Świat wkracza w erę galaktyczną.

Promieniowanie, odłączone już od materii, ciągle stygnie na skutek rozszerzania się Wszechświata. Dziś obserwujemy je jako promieniowanie tła. Przynosi nam ono informacje z epoki, w której po raz ostatni oddziaływało z materią, jest jakby skamieliną z bardzo wczesnego etapu kosmicznej historii.

U progu ery galaktycznej gęstość materii zaczęła przewyższać gęstość promieniowania i ta ostatnia przejęła sterowanie dynamiką Wszechświata. Po wyjściu z ery promienistej materia była bardzo równomiernie rozłożona w przestrzeni (w przeciwnym razie w momencie ostatniego oddziaływania z materią promieniowanie uległoby rozproszeniu na nierównomiernościach i dziś nie widzielibyśmy go tak gładkim, jakim go obserwujemy), ale tu i ówdzie musiały istnieć pewne drobne zagęszczenia – zarodki przyszłych galaktyk i ich gromad. Resztę sprawiła niestabilność siły grawitacyjnej, czyli coraz silniejsze przyciąganie sąsiednich cząstek przez ustawicznie wzrastające zagęszczenia materii. Ale niestanna ekspansja Wszechświata, zmuszająca cząstki do oddalania się od siebie, przeciwdziałała temu procesowi. Niezmierne bogactwo struktur galaktyk, ich gromad i supergromad, obszarów pustki i nieznanych nam jeszcze konfiguracji ciemnej materii jest wynikiem gry między powszechnym ciążeniem i globalną ucieczką. Tworzy się wiele koncepcji, proponuje wiele mechanizmów, które byłyby w stanie wyjaśnić to, co astronomowie ciągle jeszcze odkrywają na niebie. Standardowy model nie jest zamkniętą strukturą...

I wreszcie kosmiczne dziś – 15 lub 20 miliardów lat po Wielkim Wybuchu; średnia gęstość materii $10^{-31} - 10^{-28} \text{ g/cm}^3$; średnia temperatura panująca w międzygalaktycznej przestrzeni 2,735 K (temperatura promieniowania tła). Obraz z trudem mieszczący się na naszym superekranie. Trzeba go sklejać, jak dziecinną układankę, z kawałków dostarczanych przez teleskopy, radioteleskopy, sondy kosmiczne i satelitarne obserwatoria.

Na ekranie jeszcze tylko wykaz autorów scenariusza i ich wkładu do oglądanego filmu. Długa lista nazwisk i osiągnięć, dziwnie przypominająca spisy treści naukowych czasopism z ostatnich kilkunastu lat.

Scenariusz ewolucji Wszechświata

	Czas	Gęstość w g/cm^3	Temperatura w K
Kosmologia kwantowa	????????	??????????	??????????
Era Plancka			
Oddzielenie się grawitacji	10^{-44} s	10^{93}	10^{33}
Oddzielenie się silnych oddziaływań jądrowych – inflacja	10^{-35} s	10^{70}	10^{27}
Oddzielenie się słabych oddziaływań jądrowych i elektromagnetycznych	10^{-12} s	10^{25}	10^{15}
Powstanie protonów i neutronów	10^{-6} s	10^{16}	10^{13}
Nukleosynteza	kilka minut	$10^{10} - 10^1$	$10^{11} - 10^9$
Koniec ery promienistej – początek ery galaktycznej	35 000 lat	10^{-14}	10^4
Era obecna	15–20 mld lat	$10^{-31} - 10^{-28}$	2,735

fizyki klasycznej w każdym praktycznie miejscu przestrzeni możemy obliczyć prawdopodobieństwo znalezienia tam naszej cząstki. W fizyce klasycznej cząstka albo jest, albo jej nie ma. Mówienie o prawdopodobieństwie nie miałoby sensu. Rozpad jądra jest jednak zjawiskiem kwantowym. Możemy więc obliczyć, jakie jest prawdopodobieństwo, że cząstka znajdzie się poza barierą potencjału. Jeżeli to prawdopodobieństwo jest różne od zera, to kiedyś cząstka tam się znajdzie. Czyli znajdzie się poza naszą ścianką, czyli mówiąc uczenie, poza barierą potencjału. Zaobserwujemy efekt tunelowy. Cząstka znajdzie się poza jądrem i wyleci z prędkością odpowiadającą jej energii potencjalnej, jaką miała w jądrze. Nie pytajcie mnie Państwo, jak przeszła przez barierę potencjału. Nie wiem nawet, czy jest sens mówić, że przeszła. Przecież procesu przechodzenia nie obserwujemy. Wiemy tylko, że znalazła się poza jądrem i została zarejestrowana w urządzeniu detekcyjnym. Nie każdy rozpad związany jest ze zjawiskiem tunelowym. Rozpad polonu 214 zachodzi właśnie poprzez zjawisko tunelowania. Jest to jeszcze jedno zjawisko, które trudno sobie wyobrazić na gruncie fizyki klasycznej. Chociaż nie mam tak całkiem racji. Zaczęłam przecież opowieść o tym zjawisku od stwierdzenia, że wróżki mogły tego dokonać. Czyli wyobraźnia ludzka dopuszczała już dawno możliwość przenikania przez przeszkody. Jeżeli mogą dokonać tego cząstki alfa przez barierę potencjału, to czy my nie możemy tego samego dokonać przenikając przez ścianę mieszkania. Czasem byłoby to nawet wygodne... Prawa kwantowe obowiązują i nas. Niestety, stała Plancka jest bardzo, bardzo mała, więc efekty kwantowe są bardzo mało prawdopodobne. Odradzam więc bicie głową o mur w nadziei, że przenikniemy go kwantowym efektem tunelowym.

Pan Janusz Karkut,
ul. Tysiąclecia 21a/28,
13-300 Nowe Miasto Lubawskie,
oferuje sprzedaż wszystkich
dotychczas wydanych,
oprawionych roczników *Delty*.

Odpowiedzi na quiz
z *EPSILONA*:

1a 2a 3d 4b 5c 6a 7c 8d 9a 10a



mała delta

Oglądanie wirujących przedmiotów, czyli o efekcie stroboskopowym

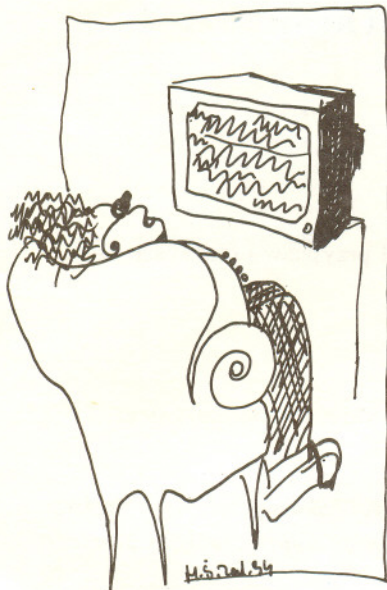
Koła jadącego dylizansu czy roweru widziane w kinie zdają się często kręcić z prędkością nie taką, jak na to wskazuje ruch pojazdu, czasem wręcz w niewłaściwą stronę. Bywa, że przez obraz telewizora pokazywanego w telewizji czy kinie przesuwają się poziome pasy. Za te i kilka innych podobnych zjawisk odpowiedzialny jest efekt stroboskopowy, który zamierzam tutaj opisać.

Choć pewnie każdy wie, na czym polega wynalazek kina i powstawanie „ruchomego obrazu”, krótko przypomnę, jak to się dzieje. Na klatkach taśmy filmowej zarejestrowane są kolejne położenia poruszającego się przedmiotu. Przy wyświetlaniu filmu każda klatka rzutowana jest na ekran przez dostatecznie krótki moment, tak byśmy nie zauważyli przesuwu taśmy. Następujące zaś po sobie kadry pojawiają się na ekranie tak szybko, że obserwowany przedmiot zdaje się poruszać płynnie, a nie skokowo.

Stroboskop (od greckiego *strobos* – wirowanie i *skopeo* – patrzę) to dawny przyrząd optyczny, pierwowzór projektora filmowego. Na wewnętrznej części zaciemnionej wirującej obręczy umieszczano rysunki, odpowiadające kolejnym kadrom taśmy filmowej. Efekt „ruchomego obrazu” uzyskiwano obserwując przez szczelinę określony fragment obręczy, który oświetlany był impulsowo dzięki otwierającemu się na krótkie momenty okienku.

Obecnie stroboskopem nazywa się przyrząd do pomiaru prędkości katowej szybko wirujących przedmiotów. Zasada działania przyrządu jest następująca. Wyobraźmy sobie wirującą tarczę z zaznaczoną na niej plamką. Tarczę oświetlamy krótkimi impulsami światła. Jeśli okres obrotu tarczy równy jest okresowi (lub wielokrotności okresu) oświetlającej lampy, wówczas plamka widziana jest ciągle w tej samej pozycji, więc wydaje się nieruchoma. Jeśli okres obrotu tarczy jest nieco krótszy niż lampy, wtedy plamka w każdym cyklu obraca się o trochę więcej niż o 360 stopni i zdaje się nam, że plamka przesuwa się powoli, zgodnie z ruchem tarczy. Jeżeli natomiast okres obrotu tarczy jest dłuższy niż lampy, plamka porusza się w kierunku przeciwnym niż tarcza.





Opisane działanie stroboskopu wyjaśnia jednocześnie, dlaczego koła na filmach kręcą się tak dziwnie. Problem poziomych pasów widzianych na ekranie telewizora pokazywanego w kinie czy telewizji jest podobny, gdyż „ruchomy obraz” telewizyjny powstaje również jako złożenie szybko zmieniających się obrazów, a częstotliwości tych zmian na pokazywanym i pokazującym ekranie mogą być różne.

Dobre gramofony wyposażone są w stroboskop do precyzyjnego określania prędkości obrotowej odtwarzanej płyty. Na oświetlonym niewielką neonówką brzegu wirującego talerza umieszczone są paski. Odległości między nimi dobrane są tak, że przy wzorcowej prędkości talerza paski zdają się spoczywać w świetle neonówki, która miga z częstotliwością 100 impulsów na sekundę.

Podobny stroboskop łatwo wykonać samodzielnie. Wycinamy z papieru koło z dziurką w środku, które później umieścimy na talerzu gramofonu. Jako źródło impulsowego światła wykorzystamy dowolną świetlówkę. Na papierowym kółku umieszczamy radialne linie w odległości katowej $\alpha = \omega\tau$, gdzie ω jest wzorcową prędkością katową talerza równą $200^\circ/\text{s}$ przy $33\frac{1}{3}$ obrotach na minutę, a τ jest okresem lampy równym 0,01 s. Tak więc $\alpha = 2^\circ$. Aby zaoszczędzić Ci, Czytelniku, wysiłku, opisane papierowe kółko zamieszczamy na tylnej okładce, wystarczy je wyciąć.

Małą Deltę przygotował Stanisław MRÓWCZYŃSKI

Odcinek dla poczty

Zł
słownie złotych
.....
adres
wplacający

AMOS
01-506 Warszawa
ul. Szenwalda 1

nazwa banku **PKO VIII O/W-wa**
Nr r-ku **1586-77578-136**

Pobrano opłatę
.....
zł

.....
podpis przyjmującego

Odcinek dla posiadacza rachunku

Zł
słownie złotych
.....
Dokładny adres
wplacający

na r-k **AMOS**
01-506 Warszawa
ul. Szenwalda 1

Dokładna nazwa banku **PKO VIII O/W-wa**
Nr r-ku **1586-77578-136**

stempel
.....
podpis przyjmującego

Pobrano opłatę
.....
zł

Potwierdzenie dla wplacającego

Zł
słownie złotych
.....
Dokładny adres
wplacający

na r-k **AMOS**
01-506 Warszawa
ul. Szenwalda 1

Dokładna nazwa banku **PKO VIII O/W-wa**
Nr r-ku **1586-77578-136**

stempel
.....
podpis przyjmującego

Pobrano opłatę
.....
zł

Obalenie twierdzenia Pitagorasa

Małgorzata MIKOŁAJCZYK,
Krzysztof OMILJANOWSKI

Wszystkich Czytelników, których powyższy tytuł przyprawił o szybsze bicie serca, pragniemy od razu uspokoić:

twierdzenie Pitagorasa jest prawdziwe!!!

A jednak.

Najpopularniejsze chyba z twierdzeń geometrii, zwane też twierdzeniem Pitagorasa, głosi, że:

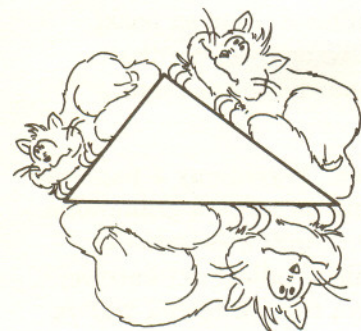
W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości boków przyległych do kąta prostego jest równa kwadratowi długości boku leżącego naprzeciw kąta prostego.

Powszechnie znane jest również twierdzenie odwrotne pozwalające z tego, że długości a, b, c boków trójkąta spełniają związek

$$a^2 + b^2 = c^2$$

wywnioskować, że jeden z kątów tego trójkąta jest prosty.

Podano wiele równoważnych wersji tego twierdzenia, a także jego uogólnień.



Rys. 1. Suma pól płaskich figur podobnych zbudowanych na przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa polu figury podobnej do poprzednich, zbudowanej na przeciwprostokątnej.

Prenumerata „Delfy”
za okres:

Prenumerata „Delfy”
za okres:

Prenumerata „Delfy”
za okres:

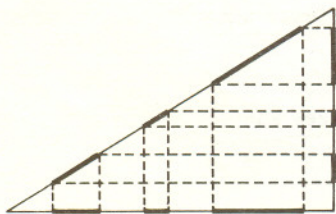
delfy

delfy

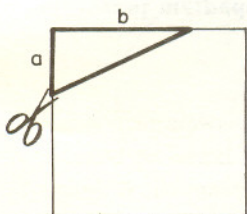
delfy

Z grubsza biorąc twierdzenie Pitagorasa można uogólnić w dwóch kierunkach:

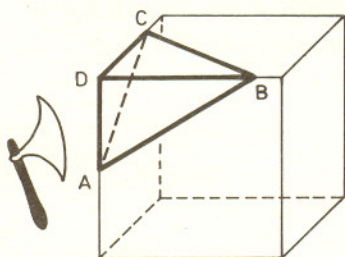
w
z
wszerz i w.
y
ż



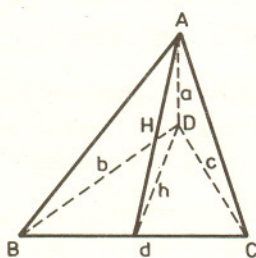
Rys. 2. Kwadrat miary zbioru zawartego w przeciwprostokątnej równa się sumie kwadratów miar jego rzutów na przyprostokątne.



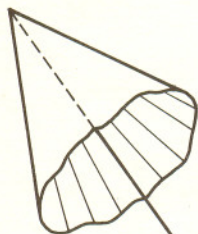
Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6. Przedłużenia tworzących stożka wycinają bardzo „porządny” kąt. Dołączenie półprostej zawierającej wysokość rodzi dylemat: czy uważać to za kąt w przestrzeni?

Uogólnienia „wszerz” dotyczą przypadku „płaskiego”: na przykład figuralne twierdzenie Pitagorasa, twierdzenie o mierzalnych podzbiorach przeciwprostokątnej (rys. 1, 2) i inne.

Uogólnienia „wzwyż” dotyczą wymiarów większych niż 2. Najprostsze z nich można otrzymać zastępując w cytowanym sformułowaniu twierdzenia Pitagorasa wszystkie wielkości płaskie – ich trójwymiarowymi odpowiednikami.

Trójkąt prostokątny to obcięty w pewien sposób „róg kwadratu”.

Trójwymiarowym odpowiednikiem kwadratu jest sześcian, długości – pole, boku – ściana, a zatem:

W „czworoscianie prostokątnym” suma kwadratów pól ścian przyległych do kąta prostego jest równa kwadratowi pola ściany leżącej naprzeciw kąta prostego.

To twierdzenie – UTP (uogólnione twierdzenie Pitagorasa) – łatwo jest udowodnić stosując TP (twierdzenie Pitagorasa). Wprowadzając oznaczenia jak na rysunku 5, należy wykazać, że

$$(P_{ABC})^2 = (P_{ABD})^2 + (P_{ACD})^2 + (P_{BCD})^2,$$

ale

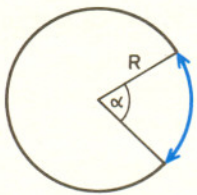
$$\begin{aligned} (P_{ABC})^2 &= \frac{1}{4}d^2H^2 = \frac{1}{4}d^2(a^2 + h^2) = \frac{1}{4}d^2a^2 + \frac{1}{4}d^2h^2 = \\ &= \frac{1}{4}(b^2 + c^2)a^2 + \frac{1}{4}d^2h^2 = \frac{1}{4}b^2a^2 + \frac{1}{4}c^2a^2 + \frac{1}{4}d^2h^2 = \\ &= (P_{ABD})^2 + (P_{ACD})^2 + (P_{BCD})^2. \end{aligned}$$

Nasze UTP można też uogólnić na jeszcze wyższe wymiary. Na przykład dla czterowymiarowego „hiperczworościanu prostokątnego” suma kwadratów objętości brył przyprostokątnych jest równa kwadratowi objętości bryły przeciwprostokątnej.

Tu mogą powstać wątpliwości – przecież odpowiednikiem podnoszenia do kwadratu dla przypadku trójwymiarowego jest podnoszenie do sześciastu, a dla czterowymiarowego – podnoszenie do czwartej potęgi. Może i tak, ale taka wersja UTP nie jest prawdziwa (by się o tym przekonać, wystarczy w „czworoscianie prostokątnym” z rysunku 5 przyjąć $a = b = c = \sqrt{2}$; wtedy $P_{ABD} = P_{ACD} = P_{BCD} = 1$, a na mocy otrzymanego poprzednio wyniku $P_{ABC} = \sqrt{3}$).

Nietrudno wyobrazić sobie w tym momencie skrzywione miny matematycznych purystów. Czym są bowiem te „czworosciany prostokątne”? Co oznacza prostokątność w wyższych wymiarach? Jak mierzy się niepłaskie kąty? Jak w ogóle określić takie kąty?

Poszukując określenia kąta w przestrzeni sformułujemy takie określenie kąta na płaszczyźnie, by łatwo dało się je „przetłumaczyć” na przypadek przestrzenny: kąt to każda z części wycięta z płaszczyzny przez pewną rodzinę półprostych o wspólnym początku. Niestety, podobne określenie kąta w przestrzeni budzi jednak zastrzeżenia. Zostawmy kłopotliwe doprecyzowanie, wystarczy nam dalej intuicyjne rozumienie kąta w przestrzeni. Pamiętajmy tylko, że różnorodność kształtów takich kątów jest przeogromna. Zajmijmy się mierzaniem kątów.



Rys. 7

Na płaszczyźnie (mierząc w radianach):

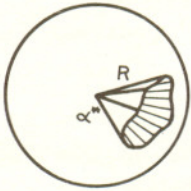
$$\alpha = \frac{\text{długość łuku okręgu wyciętego przez kąt}}{R},$$

w przestrzeni (mierząc w steradianach):

$$\alpha^* = \frac{\text{pole części sfery wyciętej przez kąt}}{R^2},$$

gdzie środek okręgu (sfery) leży w wierzchołku kąta.

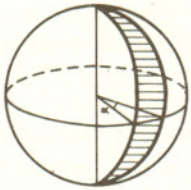
Kąt pełny w przypadku płaskim to 2π , a w przypadku przestrzennym 4π . Jak mierzyć inne kąty bryłowe?



Rys. 8

Jest to łatwe dla kątów wyciętych z przestrzeni przez dwie półpłaszczyzny o wspólnej krawędzi (kątów dwuściennych). Taki kąt wycina z kuli „częstkę pomarańczy”, a ze sfery – coś, co wygodnie jest nazwać dwukątem sferycznym. Taki kąt o mierze α^* jest taką częścią bryłowego kąta pełnego, jaką częścią płaskiego kąta pełnego jest kąt płaski α otrzymany w prostopadłym przekroju kąta dwuściennego (rys. 9).

Czyli $\alpha^* = 2\alpha$.



Rys. 9

Nieco trudniej jest zmierzyć kąt taki, jak w wierzchołku czworościanu. Wycina on ze sfery trójkąt sferyczny. Koła wielkie, których łukami są boki trójkąta, wyznaczają trzy pary przystających dwukątów sferycznych, w sumie pokrywających całą sferę... z nadwyżką: pole trójkąta ABC oraz pole trójkąta sferycznego będącego jego symetrycznym obrazem (względem środka kuli) są liczone trzykrotnie, zatem nadwyżka to cztery pola trójkąta sferycznego ABC . Jeśli α, β, γ oznaczają miary płaskich kątów otrzymanych w przekrojach kątów dwuściennych czworościanu, a S – pole trójkąta sferycznego ABC , to

$$4\pi r^2 = 4\alpha r^2 + 4\beta r^2 + 4\gamma r^2 - 4S,$$

stąd

$$S = r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi).$$

Zatem

$$\alpha^* = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Jeśli kąt bryłowy o mierze α^* wycina ze sfery pewien wypukły n -kąt sferyczny, to wykonując jego sferyczną triangulację (podział na trójkąty) otrzymujemy:

$$\alpha^* = \left(\sum \text{„płaskich miar kątów dwuściennych”}\right) - (n-2)\pi.$$

Skoro potrafimy już zmierzyć podstawowe kąty w przestrzeni, powróćmy do przestrzennego twierdzenia Pitagorasa. Na płaszczyźnie kąt prosty jest ćwiartką kąta pełnego i ma miarę $\frac{\pi}{2}$ (rys. 11). Przestrzenny kąt prosty ma również miarę $\frac{\pi}{2}$ (ale steradianów) i jest ósmą częścią kąta pełnego (rys. 12).

Kąt o mierze $\frac{\pi}{2}$ może powstać także w wierzchołku stożka. Jego powierzchnia boczna jest wtedy „przyprostokątną”, a „przeciwprostokątną” jest koło odcinające na sferze czaszę kulistą o polu $\frac{\pi}{2}R^2$. Niech $R = 1$, wtedy

$$\text{pole czaszy} = 2\pi R h = 2\pi h = \frac{\pi}{2},$$

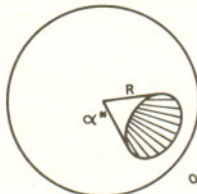
stąd $h = \frac{1}{4}$,

$$r = \sqrt{R^2 - (R-h)^2} = \sqrt{1 - (1-h)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4},$$

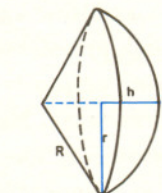
$$(\text{pole przyprost.})^2 = \left(\frac{2\pi r}{2\pi R} \cdot \pi R^2\right)^2 = \left(\frac{2\pi r}{2\pi} \cdot \pi\right)^2 = (r\pi)^2 = \frac{7}{16}\pi^2,$$

$$(\text{pole przeciwprost.})^2 = (\pi r^2)^2 = \pi^2 r^4 = \left(\frac{7}{16}\right)^2 \pi^2$$

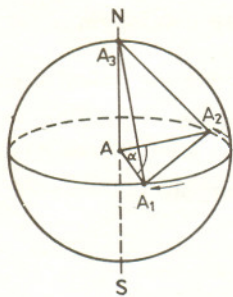
i wielkości te są różne!



Rys. 13

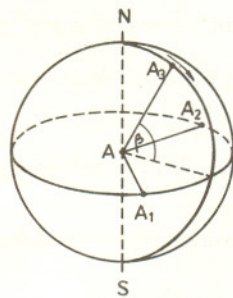


Rys. 14



Rys. 15

Zatem obaliliśmy nową wersję UTP? Nie, przecież w twierdzeniu płaskim wyraźnie mówi się o prostokątnym trójkącie. Jego trójwymiarowym odpowiednikiem nie jest przecież stożek (choćby najbardziej prostokątny), lecz prostokątny czworościan. Prostokątny – to znaczy taki, w którym jeden z kątów w wierzchołku ma miarę $\frac{\pi}{2}$ steradianów. Rozpatrzone przez nas na początku „ścięte rogi sześcianu” z całą pewnością mają kąt bryłowy w wierzchołku o mierze $\frac{\pi}{2}$. Dla tych czworościanów teza UTP jest spełniona. Ale to zapewne nie jedyne „prostokątne czworościany”. Spróbujmy znaleźć inne. Czwościan foremny, niestety, odpada – „na oko” widać, że w wierzchołkach ma kąty mniejsze od prostego.



Rys. 16

Weźmy czworościan wycięty z sześcianu o krawędzi 1 płaszczyzną przechodzącą przez trzy jego wierzchołki. Umieścmy go w kuli jednostkowej tak, aby wierzchołek o kącie prostym pokrywał się ze środkiem kuli, krawędzie AA_1 i AA_2 leżały w płaszczyźnie równika, a krawędź AA_3 wskazywała biegun północny. Rozchylamy teraz tak krawędzie AA_1 i AA_2 (dalej w płaszczyźnie równika), by zamiast kąta 90° tworzyły np. kąt 120° . W takim czworościanie kąt bryłowy w wierzchołku A jest, oczywiście, większy niż poprzednio (ma miarę $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi - \pi$).

Opuszczając teraz wierzchołek A_3 po południku połowiącym łuk A_1A_2 , będziemy otrzymywali czworościany o coraz mniejszym kącie bryłowym w wierzchołku A .

Spróbujmy znaleźć teraz takie β (kąt pomiędzy krawędzią AA_3 i płaszczyzną równika), dla którego kąt bryłowy otrzymanego czworościanu w wierzchołku A jest prosty, tzn. ma miarę $\frac{\pi}{2}$ steradianów.

Przypomnijmy, że $AA_1 = AA_2 = AA_3 = 1$. Przy ustalonym β mamy (rys. 17):

$$AP = \cos \beta, \quad PA_3 = \sin \beta, \quad \frac{PQ}{AP} = \sin \frac{\alpha}{2}, \quad \angle A_3QP = \arctg \frac{PA_3}{PQ}$$

i jest to miara płaska kąta dwuściennego o krawędzi AA_1 w tym czworościanie. Jest to zarazem miara płaska kąta dwuściennego o krawędzi AA_2 .

By wyznaczyć miarę kąta bryłowego (według wcześniej wyprowadzonego wzoru) w wierzchołku A , musimy jeszcze obliczyć miarę płaską kąta dwuściennego o krawędzi AA_3 . Oznaczmy ją przez γ . Gdy R jest rzutem prostokątnym punktu A_1 na prostą AA_3 , to

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{\frac{1}{2}A_1A_2}{A_1R}.$$

Licznik wyznaczyć łatwo:

$$A_1A_2 = 2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

A mianownik? Trzeba zauważyć, że $\triangle AA_1A_3$ jest równoramienny (rys. 18), zatem wysokości opuszczone do ramion są równe, czyli

$$A_1R = QA_3 = \sqrt{PQ^2 + PA_3^2}.$$

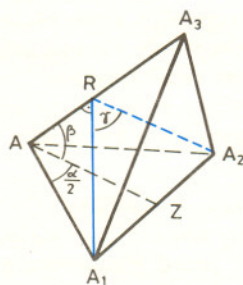
Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami

$$\text{miara kąta } A = \gamma + 2 \cdot \angle A_3QP - \pi$$

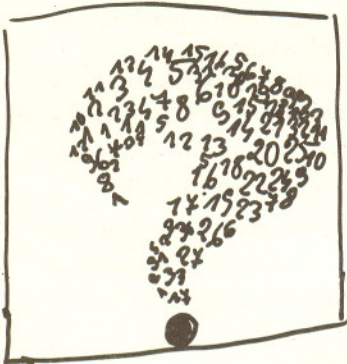
i „jedyne”, co zostało do zrobienia, to wyznaczenie tej wielkości w zależności od parametrów α, β . Do tego potrzeba albo wiele cierpliwości i samozaparcia, albo systemu komputerowego typu DERIVE, który daje sobie radę z takimi przekształceniami. A oto, co otrzymujemy:

$$2 \arcsin \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \beta + \sin^2 \beta}} + 2 \arctg \frac{\sin \beta}{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \beta} - \pi.$$

Taki przesympatyczny wzorek. Czym prędzej jakoś to oznaczmy, na przykład $f_\alpha(\beta)$.



Rys. 18



Przypomnijmy, iż szukamy takiego β , że $f_\alpha(\beta) = \frac{\pi}{2}$ przy ustalonym α

(u nas $\alpha = \frac{2}{3}\pi$). Z tym to i DERIVE ma kłopoty (albo my nie potrafimy go odpowiednio użyć), ale w szkole równania rozwiązuje się odczytując pierwiastek z wykresu; uczyńmy podobnie. Rysujemy na komputerze wykres funkcji $f_\alpha(\beta)$ (przy zadanym $\alpha = \frac{2}{3}\pi$) i odczytujemy przybliżoną wartość $\beta \approx 1,2446 \text{ rad} \approx 71,3^\circ$, przy której $f_\alpha(\beta) = \frac{\pi}{2}$.

Zajmijmy się teraz UTP.

Obliczenie kwadratów pól „przyprostokątnych” jest łatwe:

$$(P_{AA_1A_2})^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \alpha\right)^2 = \frac{\sin^2 \alpha}{4},$$

$$(P_{AA_1A_3})^2 = (P_{AA_2A_3})^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot Q_{A_3}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot (\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \beta + \sin^2 \beta).$$

Gorzej z kwadratem pola „przeciwprostokątnej”. Wzór Herona? Brrr! Może lepiej tak:

$$\begin{aligned} (P_{A_1A_2A_3})^2 &= \left(\frac{1}{2} A_1 A_2 \cdot A_3 Z\right)^2 = \quad [\text{gdzie } Z \text{ oznacza } \text{środek odcinka } A_1 A_2] \\ &= \frac{1}{4} (2 \sin \frac{\alpha}{2})^2 (A_3 Z)^2 = \quad [\text{tw. kosinusów w } \triangle AA_3 Z] \\ &= \frac{1}{4} (2 \sin \frac{\alpha}{2})^2 \left(1 + (\cos \frac{\alpha}{2})^2 - 2 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cos \beta\right) = \\ &= \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \beta\right). \end{aligned}$$

Dalej bez kalkulatora nie obejdzie się; wstawiamy $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ oraz $\beta = 1,2446$ wyliczone poprzednio i dostajemy

$$(*) \quad \begin{aligned} (P_{AA_1A_2})^2 + (P_{AA_1A_3})^2 + (P_{AA_2A_3})^2 &\approx 0,674669803, \\ (P_{A_1A_2A_3})^2 &\approx 0,6972170699. \end{aligned}$$

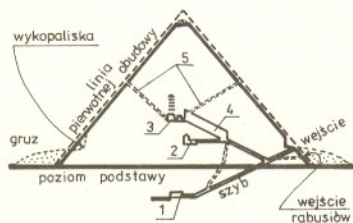
Różnica jest bardzo mała (rzędu 3%). Ale jednak jest! Czy to wystarcza, aby obalić UTP? Może ta różnica spowodowana jest tylko błędami zaokrążeń? Poza tym odczytywaliśmy przecież z wykresu! Może zbadajmy jeszcze raz to samo zagadnienie, ale już przy innym α , na przykład $\alpha = \frac{5}{6}\pi$.

Dla takiego α mamy $f_\alpha(\beta) = \frac{\pi}{2}$, gdy $\beta \approx 0,99 \text{ rad} \approx 56,7^\circ$, natomiast wartości we wzorze (*) różnią się już o około 0,178. To chyba sporo! To już nie mogą być błędy zaokrążeń. Zatem UTP nie jest prawdziwe dla wszystkich czworościanów prostokątnych! Jeśli tak, to z powyższego wynika, że twierdzenie Pitagorasa, tylko przez czysty przypadek (i tylko na płaszczyźnie) jest twierdzeniem o kącie prostym. Ogólnie, nie zależy ono wyłącznie od miary kąta, ale... od jego kształtu. Jest to więc twierdzenie nie o kącie prostym, ale o kwadracie (sześciacie), a raczej o ich „narożnikach”.

Na koniec zajmijmy się problemem, który Czytelnik zechce, być może, potraktować jako zadanie domowe; mianowicie spróbujmy zbadać, czy jakieś uogólnienia twierdzenia Pitagorasa nie były znane już... przed Pitagorasem. (Egipcjanie, na długo przed Pitagorasem, znali związek między bokami trójkąta prostokątnego, Pitagorasowi przypisuje się tylko (aż?) dowód tej zależności.)

Egipskie piramidy kryją jeszcze wiele niezbadanych tajemnic. Ich proporcje są imponujące: 147 metrów wysokości i 227 metrów długości boku podstawy w przypadku piramidy Cheopsa w Gizie. Czy może kąt bryłowy w wierzchołku tej piramidy jest prosty? Jaką ma miarę? A jakie są kąty bryłowe przy podstawie? Czy kwadrat pola podstawy jest równy sumie kwadratów pól ścian trójkątnych? Jeśli odpowiedź brzmi *nie*, to jakie wymiary musiałaby mieć piramida, by zachodziła równość? A gdyby zbudowano ją na planie sześciokąta foremnego (n -kąta foremnego)?

Hej, Maturzysto! Czy to nie jest ciekawsze niż kolejne zadanie o ostrosłupie prawidłowym o podstawie czworokątnej?



1. Właściwa komora królewska
2. Komora grobowa królowej
3. Główna komora królewska
4. Wielki korytarz
5. Kanaty wentylacyjne

Rys. 19. Piramida Cheopsa

Protokół z posiedzenia Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

Rozwiązanie zadania M 691. Przypuśćmy, że teza zadania jest fałszywa i po k -krotnym wykonaniu opisanej operacji po raz pierwszy otrzymujemy na okręgu jedenaście kul białych. Znaczący to, że w poprzednim kroku mieliśmy same kule czarne. Same kule czarne można zaś otrzymać tylko wtedy, gdy uprzednio, tj. po $(k-2)$ powtórzeniach naszej operacji, każde dwie sąsiednie kule miały różne kolory. Taka sytuacja nie jest możliwa wtedy, gdy liczba wszystkich kul jest nieparzysta (na przykład równa 11). Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Rozwiązanie zadania M 693. Niech p będzie liczbą pierwszą (jak wiadomo, liczb pierwszych jest nieskończenie wiele). Połóżmy $a = \sqrt{p}$. Liczba a jest niewymierna (dowód tego faktu jest taki sam, jak znany szkolny dowód niewymierności $\sqrt{2}$).

Weźmy teraz dowolną liczbę pierwszą $q \neq p$ i niech $b = \log_{\sqrt{p}} q$. Wtedy, wprost z definicji logarytmu,

$$a^b = (\sqrt{p})^{(\log_{\sqrt{p}} q)} = q.$$

Pozostaje tylko udowodnić, że liczba b jest niewymierna. Gdyby było $b = \frac{m}{n}$ dla pewnych naturalnych m i n , to wówczas

$$(\sqrt{p})^{\frac{m}{n}} = q,$$

a stąd $p^m = q^{2n}$ – sprzeczność, bowiem każda ze stron tego równania ma inny rozkład na czynniki pierwsze.

Rozwiązanie zadania F 373. Ze względu na słabą przewodność termiczną powietrza procesy adiabaticzne kształtują rozkład temperatury. Równanie przemiany adiabaticznej zapisane za pomocą ciśnienia p , temperatury T przyjmuje postać

$$p^{1-\kappa} T^\kappa = \text{const}.$$

Stąd $\frac{dT}{dp} = \frac{T(\kappa-1)}{p^\kappa}$, gdzie κ jest stosunkiem ciepła właściwego przy stałym ciśnieniu do ciepła właściwego przy stałej objętości. Zmiana ciśnienia z wysokością wyraża się wzorem $\frac{dp}{dh} = \rho g$, gdzie ρ jest gęstością powietrza. Mnożąc oba równania stronami dostajemy

$$\frac{dT}{dh} = \frac{\rho g T (\kappa - 1)}{p^\kappa}.$$

Zapisując równanie stanu gazu doskonałego w postaci $p = \frac{\rho}{\mu} R T$ i zakładając, że zmiany są liniowe, po podstawieniu $\kappa = 1,4$ otrzymujemy ostatecznie

$$\Delta T = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\mu g h}{R} = 9,8^\circ C.$$

Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki obradując dnia 9 września 1993 roku w Rzeszowie w składzie: Jerzy Bednarczuk, Antoni Dawidowicz – przewodniczący, Andrzej Mąkowski, Agnieszka Wojciechowska i Krzysztof Oleszkiewicz, biorąc pod uwagę dobór tematu pracy, poziom pracy i przebieg obrony, postanowiło przyznać:

1. Srebrny medal i nagrodę w wysokości 700 000 zł Ilonie Królak z LO „Carolinum” w Nysie za prace „Symbol Newtona – inaczej” i „Kilka ciekawych dociekań”.
2. Brązowy medal i nagrodę w wysokości 500 000 zł Romanowi Wencłowi z Technikum Elektrycznego w Opolu za pracę „Czytając Sierpińskiego”.
3. Dyplom uczestnictwa w finale Romanowi Wencłowi za pracę „O różniczkowaniu ciągów prawie wszystko”.
4. Nagrody pieniężne w wysokości 400 000 zł każda opiekunom prac: Janowi Sosulskiemu i Stanisławie Polak. [Złotego medalu nie przyznano].

Tradycyjnym zwyczajem redakcja *Delty* ogłasza Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki. Zachęcamy uczniów zainteresowanych matematyką do opracowywania swoich matematycznych rozważań i nadsyłania rezultatów do redakcji *Delty*. Poniżej przypominamy szczegółowy regulamin konkursu.

Regulamin Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

1. Konkurs organizowany jest corocznie przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i redakcję miesięcznika *Delta*, przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
2. W konkursie mogą brać udział uczniowie wszystkich typów szkół.
3. Konkurs składa się z eliminacji i finału.
4. W eliminacjach bierze udział każdy uczeń, który w terminie do 1 maja prześle pod adresem redakcji *Delty* jeden egzemplarz swojej pracy matematycznej. Do pracy należy dołączyć następujące informacje: adres prywatny autora, klasa, nazwa i adres szkoły; imię, nazwisko i adres opiekuna pracy.
5. Praca powinna zawierać samodzielny wkład ucznia i pełną informację o źródłach, z których korzystał jej autor. Prace czysto kompilacyjne nie będą dopuszczone do finału konkursu.
6. Prace nadesłane na eliminacje zostaną ocenione przez Jury Konkursu i kompetentnych recenzentów. Te spośród prac, które spełniają warunki konkursu, zostaną zakwalifikowane przez Jury do finału. Finał odbędzie się w trakcie Dorocznej Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego.
7. Zawiadomienia o zakwalifikowaniu do finału zostaną przesłane autorom prac i ich opiekunom przed końcem roku szkolnego.
8. Finałiści i opiekunowie ich prac otrzymają od Zarządu Głównego PTM zaproszenia do udziału w Sesji na koszt Towarzystwa.
9. Finał polega na wygłoszeniu (nie odczytaniu) przez ucznia, podczas specjalnego otwartego posiedzenia sesji, referatu (trwającego nie dłużej niż 15 minut) i wzięciu udziału w dyskusji na temat, któremu poświęcona była praca.
10. Rezultaty finału oceni Jury Konkursu. Jury będzie brało pod uwagę, oprócz merytorycznej wartości pracy, również samodzielność i oryginalność ujęcia tematu oraz przebieg referatu i dyskusji. Jury przyznaje medale: złoty, srebrny i brązowy, wyróżnienia oraz nagrody pieniężne ufundowane przez Ministerstwo Edukacji Narodowej.
11. Ogłoszenie wyników finału następuje w trakcie Walnego Zgromadzenia Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Medale wręcza Prezes Towarzystwa. Wszyscy uczestnicy finału otrzymują dyplomy.
12. Wyniki konkursu i skrót zwycięskiej pracy będą opublikowane w miesięczniku *Delta*.
13. Jury Konkursu jest powoływane przez Zarząd Główny PTM na wniosek Komitetu Redakcyjnego *Delty*.



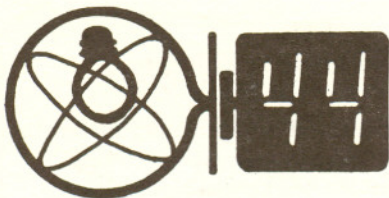
Rozwiązanie zadania M 692. Dla każdej liczby naturalnej $n > 2$ zachodzi nierówność $(n!)^2 > n^n$. Istotnie, mamy

$$(n!)^2 = (1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n)(n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1) = (1 \cdot n) \cdot (2 \cdot (n-1)) \cdot (3 \cdot (n-2)) \cdot \dots \cdot (n \cdot 1).$$

Po prawej stronie jest n czynników; każdy z nich jest większy lub równy n . Ponadto, dla wszystkich czynników poza pierwszym i ostatnim nierówność jest ostra:

$$(l+1)(n-l) = n + l(n-1) > n \quad \text{dla } l = 1, 2, \dots, (n-2).$$

Stosując udowodnioną nierówność dla $n = 19941994$ otrzymujemy natychmiast odpowiedź: większa z dwóch liczb to $(19941994!)^2$.



Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 157 ($WT=1,90$) i 158 ($WT=3,93$)
z numeru 4/1993

Przemysław Gworys	-	Częstochowa	34,82
Tomasz Wietecha	-	Tarnów	33,90
Andrzej Nowogrodzki	-	Chocianów	28,96
Andrzej Borowski	-	Aleksandrów	21,20
		Kujawski	
Roman Wencel	-	Komprachcice	11,60

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki,
Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

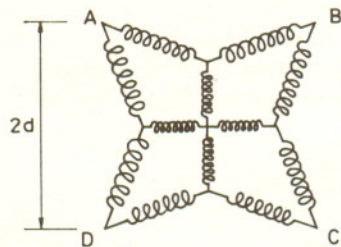
Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgrupowaniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1993.

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 1993

Zadania z fizyki nr 171, 172

Redaguje Jerzy B. BROJAN



Rys. 1

171. Dwanaście sprężynek o stałej sprężystości k i długości swobodnej zero (tzn. przyjmujących długość l pod wpływem siły $F = kl$) połączono jak na rysunku 1 i naciągnięto rozpinając je na czterech punktach A, B, C i D tworzących kwadrat o boku $2d$. Jaką siłę wywierają sprężynki na każdy z tych czterech punktów?

172. Aby przelać sok z puszkii do szklanki, trzeba w wieczku wybić dziurki do wylewania soku i dziurki do wlotu powietrza (rys. 2). Jacek wybił dziurki o jednakowej średnicy (np. około 5 mm) i zastanawia się: Więcej niż 10 dziurek nie chce mi się wybić, więc ile z nich powinno służyć do wlotu powietrza, a ile do wylewania soku, żeby wylać go najszybciej?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/1993

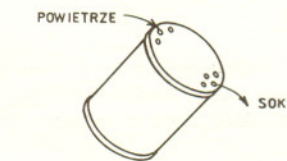
Przypominamy treść zadań:

- 163.** Zafrasowany Węchosław Szlabańczyk szukał porady u inspektora Wnikliwego (czasowo oddelegowanego do służby celnej).
– Otrzymałmśmy poufną informację, że na tej ciężarówce w niektórych puszkach zamiast piwa przemycane są narkotyki, ale jak odróżnić te puszkii? – zastanawiał się. – Nie możemy przecież otwierać wszystkich po kolei, a tu w Zapadłej Dziurze nie mamy nawet przyzwoitej wagi, nie mówiąc już o rentgenie.
– Czy dźwięk nie może być wskazówką? – inspektor wziął jedną z puszek do ręki i potrząsnął.
– Niestety, nie. Ten narkotyk ma formę pasty wypełniającej puszkę, ale na wierzchu i spodzie dla lepszego maskowania nalewają trochę wody, więc odgłos jest taki, jak zwykłej puszkii z piwem.
Dłuższą chwilę trwała cisza.
– Chyba gdzieś znajdziemy jakąś gładką deskę? – zapytał wreszcie inspektor.
Jaki pomysł przyszedł do głowy inspektorowi Wnikliwemu?

164. Plastikowy krążek o średnicy 20 cm i masie 10 g jest równomiernie naładowany ładunkiem 100 nC. Z jaką prędkością kątową musiałby wirować ten krążek w płaszczyźnie poziomej, aby mógł zawiśnąć podtrzymywany tylko przez pionowe pole magnetyczne o indukcji 2 T? Ile wynosiłaby wtedy w środku krążka indukcja jego własnego pola magnetycznego?

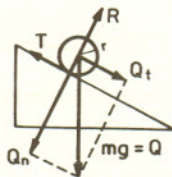
163. Jeśli z równi pochyłej staczają się dwie puszkii, z których jedna jest wypełniona cieczą, a druga substancją stałą, to szybciej stoczy się puszkii z cieczą. Przyczyna leży w tym, że ciecz nie obraca się wraz z puszką (albo obraca się z pewnym opóźnieniem), więc prawie cała początkowa energia grawitacyjna przechodzi podczas staczania się w energię kinetyczną ruchu postępowego. Dla puszkii z ciałem stałym część energii pochłania ruch obrotowy, zatem ruch postępowy jest wolniejszy.

164. Podzielmy krążek na cienkie pierścienie zawierające się między promieniami r i $r + dr$. Ładunek takiego pierścienia jest – zgodnie z założeniem o równomiernym rozkładzie – proporcjonalny do jego powierzchni $2\pi r dr$, czyli równy $dQ = \frac{2\pi r dr}{\pi R^2} \cdot Q$, gdzie R – promień krążka, Q – ładunek całkowity. Ruch tego ładunku z prędkością kątową ω jest równoważny przepływowi prądu $dJ = \frac{dQ}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \cdot dQ = \frac{\omega Q}{\pi R^2} r dr$. Korzystając dalej ze wzoru $dF = dJ \cdot l \cdot B$ oraz ze wzoru na pole własne w środku pętli $dB_w = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{dJ}{r}$ i całkując znajdujemy $F = \frac{2}{3} \omega Q B R$, czyli $\omega = \frac{3F}{2QB R} \approx 7,5 \cdot 10^6$ rad/s (wynik niezbyt realny!), natomiast $B_w = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\omega Q}{\pi R} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3F}{B R^2} \approx 1,5 \mu T$.



Rys. 2

Rozwiązanie zadania F 374.
Rozpisujemy siły działające na kulkę na równi (rys.).



$$Q_t = mg \sin \alpha$$

$$Q_n = mg \cos \alpha$$

Niech T oznacza siłę tarcia, $I = \frac{2}{5} m r^2$ jest momentem bezwładności kulki. Moment siły działający na kulkę jest równy $M = T \cdot r$, a przyspieszenie kątowe $\epsilon = a/r$, gdzie a jest przyspieszeniem kulki. Równania ruchu przyjmują postać

$$mg \sin \alpha - T = ma,$$

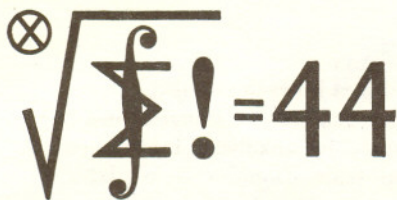
$$Tr = I\epsilon.$$

Rozwiązując powyższe równania otrzymujemy

$$T = \frac{2}{7} mg \sin \alpha.$$

Porównując z maksymalną siłą tarcia $T_{max} = \mu_s mg \cos \alpha$, otrzymujemy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{2} \Rightarrow \alpha \approx 74^\circ.$$



Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 259 (WT=2,14) i 260 (WT=3,07)
z numeru 4/1993

Lesław Skrzypek	- Rzeszów	43,95
Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	43,33
Piotr Kumor	- Olsztyn	42,12
Janusz Olszewski	- Suwałki	40,24
Jan Ciach	- Ostrowiec Św.	35,39

Zadania z matematyki nr 273, 274

Redaguje Marcin E. KUCZMA

273. Dany jest ciąg liczb rzeczywistych x_0, x_1, x_2, \dots . Tworzymy dwa nowe ciągi o wyrazach $y_n = (x_{n-1} + x_{n+1})/2$ oraz $z_n = (x_{n-2} + x_n + x_{n+2})/3$. Udowodnić, że jeżeli $x_n \leq y_n$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$, to $y_n \leq z_n$ dla $n = 2, 3, 4, \dots$

274. Liczby naturalne $a \geq 1$ i $b \geq 1$ są względnie pierwsze; $k \geq 1$ jest dowolną liczbą naturalną. Dowieść, że każdy dzielnik nieparzysty liczby $a^{2^k} + b^{2^k}$ ma postać $2^{k+1}t + 1$, gdzie t jest liczbą całkowitą.

Zadanie 274 zaproponował pan Janusz Olszewski z Suwałk.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/1993

Przypominamy treść zadań:

265. Dwieściana kąta C trójkąta ABC przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punkcie N . Okrąg wpisany ma promień r i jest styczny do boku AB w punkcie T . Punkt M jest środkiem boku AB . Dowieść, że $|AT| \cdot |BT| = r(r + 2|MN|)$.

266. Rozważamy wielomian

$$P(t) = \prod_{k=0}^{n-1} (t+k).$$

Przypuśćmy, że liczby dodatnie x, y, u, v spełniają związki: $P(x) = u^n, P(y) = v^n, x \geq y$. Dowieść, że $x - y \leq u - v$.

265. Punkt N jest środkiem łuku AB , zatem trójkąt AMN jest prostokątny. Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Oznaczając miary kątów A, B, C tego trójkąta przez α, β, γ mamy równości

$$\begin{aligned} 2 \cdot |\angle ANM| &= |\angle ANB| = 180^\circ - |\angle ACB| = 180^\circ - \gamma, \\ |\angle MAN| &= 90^\circ - |\angle ANM| = 90^\circ - (180^\circ - \gamma)/2 = \gamma/2, \\ |AT| &= |IT| \operatorname{ctg} |\angle IAT| = r \operatorname{ctg} (\alpha/2), \quad |BT| = |IT| \operatorname{ctg} |\angle IBT| = r \operatorname{ctg} (\beta/2), \\ 2|MN| &= 2|AM| \operatorname{tg} |\angle MAN| = |AB| \operatorname{tg} (\gamma/2) = (|AT| + |BT|) \operatorname{tg} (\gamma/2) = \\ &= r (\operatorname{ctg} (\alpha/2) + \operatorname{ctg} (\beta/2)) \operatorname{tg} (\gamma/2), \end{aligned}$$

i ostatecznie

$$\begin{aligned} \frac{r(r + 2|MN|)}{|AT| \cdot |BT|} &= \frac{r^2 + r^2 (\operatorname{ctg} (\alpha/2) + \operatorname{ctg} (\beta/2)) \operatorname{tg} (\gamma/2)}{r \operatorname{ctg} (\alpha/2) \cdot r \operatorname{ctg} (\beta/2)} = \\ &= \frac{\operatorname{ctg} (\gamma/2) + \operatorname{ctg} (\alpha/2) + \operatorname{ctg} (\beta/2)}{\operatorname{ctg} (\alpha/2) \operatorname{ctg} (\beta/2) \operatorname{ctg} (\gamma/2)} = 1. \end{aligned}$$

266. Gdy $x = y$, nie ma czego dowodzić. Przyjmijmy więc, że $x > y > 0$. Weźmy pod uwagę funkcję $f(t) = (P(t))^{1/n}$. Ponieważ $u = f(x), v = f(y)$, zatem zgodnie z twierdzeniem Lagrange'a (o wartości średniej)

$$\frac{u-v}{x-y} = f'(\xi) \quad \text{dla pewnego } \xi \in (y; x).$$

Dla $t > 0$ możemy napisać $P(t) = e^{g(t)}$, gdzie

$$g(t) = \ln P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(t+k).$$

Obliczamy pochodne rozważanych funkcji:

$$g'(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{t+k}, \quad P'(t) = e^{g(t)} \cdot g'(t) = P(t) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{t+k},$$

$$f'(t) = \frac{1}{n} (P(t))^{(1/n)-1} P'(t) = \frac{1}{n} (P(t))^{1/n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{t+k}.$$

Stąd

$$\frac{u-v}{x-y} = \frac{1}{n} (P(\xi))^{1/n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\xi+k} = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\xi+k} \right)^{-1/n} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\xi+k} \right) \geq 1,$$

na mocy nierówności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną liczb $1/(\xi+k)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.



Sprawa słonecznych neutrin ciągle nie jest rozwiązana. Jak pamiętamy, chodzi o to, że obserwuje się strumień tych cząstek wyraźnie słabszy, niż przewidują najlepsze obecnie modele Słońca. Wniosek stąd, że albo owe modele nie są doskonałe, albo nasza wiedza o reakcjach jądrowych w ogóle nie jest kompletna, albo pomiary są jakoś błędne – a może wreszcie wszystkie te trzy czynniki powodują rozbieżność obserwacji i teorii.

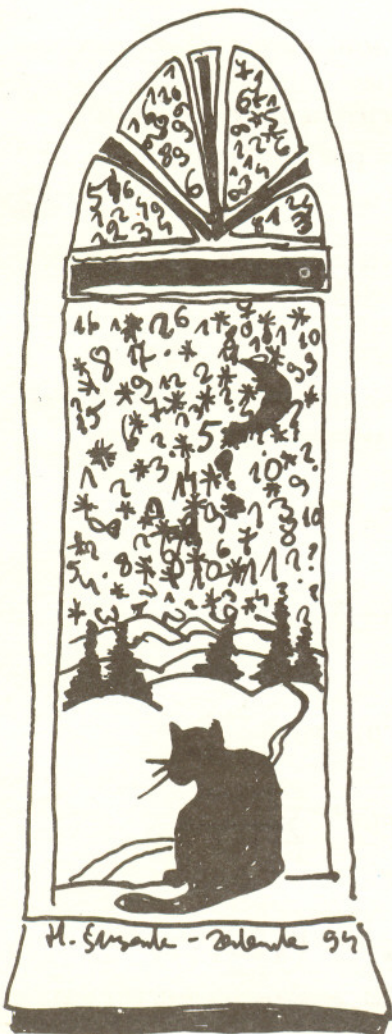
Prawdę powiedziawszy do niedawna było jeszcze gorzej, mianowicie nie było nawet pewności, czy obserwowane neutrina rzeczywiście pochodzą ze Słońca. Pierwsze pomiary strumienia neutrin przenikającego Ziemię zostały wykonane około 20 lat temu przez Raymonda Davisa (z University of Pennsylvania, USA). Przyrządem pomiarowym wtedy i w następnych eksperymentach były cysterny z czterochlorkiem węgla (płyn do czyszczenia garderoby). Istotny jest tu chlor, który – jak twierdzą fizycy jądrowi – w reakcji z neutrinami może przejść w nietrwały izotop argonu, którego z kolei atomy w cysternie czterochlorku węgla można policzyć (w sztukach!) i znając prawdopodobieństwa reakcji oszacować w ten sposób strumień samych neutrin.

Oczywiście, taki detektor zupełnie nie reaguje na kierunek, milcząco więc przyjmowano, że w ten sposób mierzymy strumień neutrin akurat słonecznych. Usprawiedliwieniem

były obliczenia teoretyczne, z których wynikało, że w okolicy Ziemi gęstość neutrin słonecznych musi być znacznie większa od gęstości jakichkolwiek innych neutrin – ale w końcu było to założenie. Dopiero około 1987 r. stwierdzono to obserwacyjnie. Wtedy mianowicie rozpoczął pracę m.in. japoński detektor neutrin Kamiokande-II działający na innej zasadzie. Jest to zbiornik zawierający 3000 ton wody z umieszczoną wewnątrz ogromną liczbą fotopowielaczy. Neutrino o dużej energii zderzając się np. z elektronem nadaje mu energię, przy której jego prędkość przekracza prędkość światła w wodzie. Tak szybki elektron staje się więc źródłem błysku promieniowania Czerenkowa, który rejestrowany jest przez niektóre z owych licznych fotopowielaczy, skąd można odtworzyć kierunek ruchu elektronu i, przynajmniej statystycznie, kierunek nadlatującego neutrina. Nawiasem mówiąc, ten właśnie detektor (choć nie jedyny) zasłynął zaobserwowaniem kilku neutrin pochodzących od supernowej w Wielkim Obłoku Magellana SN 1987A.

Teraz więc mamy już pewność, że rzeczywiście obserwujemy neutrina słoneczne. Duże to czy małe osiągnięcie? Niektórzy astrofizycy uważają je za ogromne, chociaż o samych neutrinach nic nowego nie dowiedzieliśmy się. Nowe detektory są w budowie i z każdym wiąże się nadzieje na postęp naszej wiedzy.

Tomasz KWAST



Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

M 691. Na okręgu umieszczonych jest sześć kul czarnych i pięć białych. Wykonujemy następującą operację: Pomiedzy kule jednakowego koloru kładziemy kulę białą, a pomiedzy kule różnego koloru – kulę czarną; na zakończenie usuwamy kule, które pierwotnie leżały na okręgu. Udowodnić, że w wyniku wielokrotnego powtarzania tej operacji nie da się doprowadzić do tego, by wszystkie kule na okręgu były białe. Rozwiązanie na str. 13

M 692. Która z liczb jest większa:

$$(19941994!)^2 \text{ czy } 19941994^{19941994} ?$$

Rozwiązanie na str. 13

M 693. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb niewymiernych a o tej własności, że dla nieskończenie wielu liczb niewymiernych b liczba a^b jest naturalna. Rozwiązanie na str. 13

Redaguje Jarosław KULPA

F 373. Nad pustynią znajdują się masy suchego powietrza. Oszacować spadek temperatury na wysokości $h = 1000$ m nad ziemią. Masa molowa powietrza jest równa $\mu = 0,029$ kg/mol. Rozwiązanie na str. 13

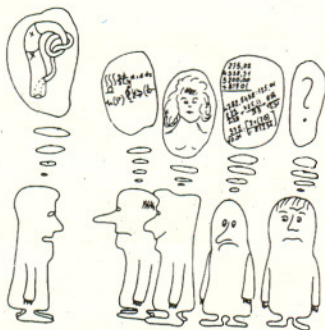
F 374. Praktycznie dla prawie wszystkich materiałów współczynnik tarcia statycznego nie przekracza wartości 1. Obliczyć maksymalny kąt nachylenia równi, z której kulka może staczać się bez poślizgu. Rozwiązanie na str. 14

Ona ma dwadzieścia lat

Jak ten czas leci – *Delcie* właśnie stuknęło dwadzieścia lat, pierwszy numer ukazał się w styczniu 1974! Z tej okazji proponujemy stałym Czytelnikom *Delty* mały quiz – odpowiedzi na stronie 5.

1. Pierwszym przewodniczącym Komitetu Redakcyjnego *Delty* był: a) Leon Jeśmanowicz, b) Zofia Krygowska, c) Roman Sikorski, d) Wojciech Żakowski.
2. Kto ze znanych postaci polskiej sceny politycznej pisał w *Delcie*: a) Janusz Korwin-Mikke, b) Janusz Onyszkiewicz, c) Janusz Lewandowski, d) Leszek Balcerowicz.
3. W ciągu dwudziestu lat Redakcja *Delty* miała swe siedziby: a) w dwóch miejscach, b) trzech, c) czterech, d) co najmniej pięciu.
4. Jubileuszowy, setny numer *Delty* kosztował: a) 5 zł, b) 10 zł, c) 35 zł, d) 150 zł.
5. W serii *Delty* „Przeczytaj może zrozumiesz” ukazało się pozycji: a) 18, b) 20, c) 23, d) 26.
6. Książka Marka Kordosa „O różnych geometriach” ukazała się w serii: a) *Delta przedstawia*, b) *Biblioteczka Delty*, c) *Przeczytaj może zrozumiesz*, d) w żadnej z nich.
7. Rozwiązując zadania z Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej w Warszawie w warunkach takich jak uczestnicy zawodów, reprezentacja **Klubu 44** wypadła w porównaniu z reprezentacją Polski: a) znacznie lepiej, b) znacznie gorzej, c) porównywalnie, d) nic takiego nie miało miejsca.
8. Obecny skład redakcji *EPSILONA* w porównaniu ze składem w jego pierwszym numerze: a) jest taki sam, b) odeszła jedna osoba, c) doszła jedna osoba, d) odeszła jedna osoba i doszła jedna osoba.
9. Gdy *Delta* skończyła 18 lat, na okładce był m.in. rysunek: a) tortu z 18 świeczkami, b) dowodu osobistego, c) liczby 18 w systemie dwójkowym d) na okładce nie było nic wspólnego z 18.
10. Tytuł quizu „Ona ma dwadzieścia lat” został zapożyczony – jest to: a) tytuł piosenki z okazji 20-lecia PRL, b) tytuł piosenki o chłopaku i dziewczynie, c) tytuł wiersza miłosnego, d) jedynie tytuł tego quizu.

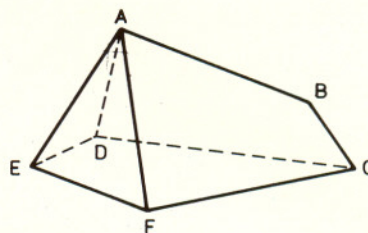
Rysunek z książki K. Ciesielskiego i Z. Pogody „Bezmiar matematycznej wyobraźni” – w księgarniach na początku 1994 roku.



– Sądę, że wyobrażacie sobie matematykę tak samo jak ja ...

Jeszcze raz o wielościanie

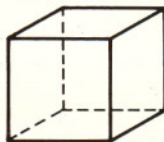
Niedawno poświęciliśmy w *EPSILONIE* trochę miejsca rysunkowi:



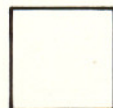
Rys. 1

gdyż na pytanie: „ile przekątnych ma ten wielościan?” wiele osób odpowiadało, że jedną, nie zauważając, że bryła taka nie istnieje – daliśmy więc to zadanie i Czytelnikom *EPSILONA*. Pan Jerzy Bednarczuk zwrócił nam uwagę, że można jednak wielościan odpowiadający rysunkowi skonstruować. Jak?

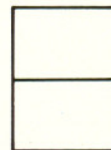
Otóż przyjęło się (i słusznie) rysować wielościany na kartce papieru tak, by pokazać oddzielnie wszystkie ich krawędzie – te widoczne rysuje się linią ciągłą, niewidoczne – przerywaną. W ten sposób najłatwiej na podstawie dwuwymiarowego rysunku wywnioskować, o jaką trójwymiarową bryłę chodzi. Inne rysunki doprowadziłyby do komplikacji; gdy widzimy rysunek (a), od razu wiemy, że chodzi o sześcian, który jednak można narysować np. jako (b), (c) lub (d) – wszystko zależy od tego, z której strony patrzymy.



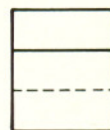
a)



b)



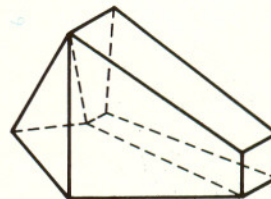
c)



d)

Rys. 2

W epsilonowym zadaniu o wielościanie nie założyliśmy jednak, że rysunek jest rzutem najwięcej widzowi mówiącym. Jeśli niektóre krawędzie będą schowane za innymi lub będą równoległe do linii rzutu, to bryłę odpowiadającą rysunkowi skonstruować można. Oto ona (tym razem widać wszystkie krawędzie – poprzednio niektóre były schowane za krawędziami AB , BC , CD oraz DA i wierzchołkami A, B, C i D – uwaga: odcinki AB i CD nie leżą w jednej płaszczyźnie!):



Rys. 3

Tym, którzy lubią łamać sobie głowę nad takimi zadaniami, proponujemy próbę znalezienia odpowiedzi na następujące pytanie: Czy istnieją inne wielościany, których rzut będzie wyglądać tak jak na pierwszym rysunku? Jeśli istnieją, to ile ich jest? (wielościany różniące się jedynie długościami krawędzi czy kątami między ścianami uważamy za takie same). Czy istnieje taki wielościan wypukły?