delta $h=6{,}63\cdot10^{-34}\,J\cdot s$ $\pi=3{,}141593\ldots$

UWAGA !!!

J.H. Taylor i R.A. Hulse, odkrywcy pulsara – bohatera artykułu ze str. 2 – otrzymali nagrodę Nobla z fizyki za rok 1993.

SPIS TREŚCI

NUMERU 12(235)

W następnym numerze:

Kosmiczna superpanorama

Okładkę wykonał *Bernard BADZIOCH*

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa

„Delta" – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.

Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7
02-678 Warszawa
tel. 43-02-43 wewn. 21
DELTA@PLEARN.BITNET

Wydrukowano w Zakładach Graficznych w Warszawie, ul. Srebrna 16

Skład systemem TEX wykonała redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY w AMOS-ie

Od stycznia 1993 r. prenumeratę „Delty" prowadzi również firma **AMOS**, 01-506 Warszawa, ul. Szenwalda 1 (tel. 39-17-52). Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w pierwszym półroczu 1994 roku wynosi 8 000,-zł, a w drugim półroczu 10 000,-zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru wynosi w pierwszym półroczu 1994 r. 20 000,-zł, a w drugim – 22 000,-zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! AMOS dostarcza „Deltę" pod wskazany adres nie pobierając dodatkowej opłaty. Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Blankiet pocztowy na prenumeratę „Delty" w AMOS-ie zamieszczamy na str. 9/10.

Konto AMOS-u: **PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136**

WARUNKI PRENUMERATY w RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na II kwartał 1994 r. wynosi 24 000,– zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
   - na teren kraju
     - jednostki kolportażowe „Ruch" S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób,
   - na zagranicę
     - „Ruch" S.A. Oddział Warszawa, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – **dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty**, z wyjątkiem zlecenia dostawy pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni pokrywa prenumerator.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
   - na kraj i zagranicę – do 20 XI na I kwartał roku następnego
     do 20 II na II kwartał
     do 20 V na III kwartał
     do 20 VIII na IV kwartał.

Cena 1 egzemplarza 8 000,– zł

A tak konkretnie...

Niniejszy numer *Delty* zamyka dwudziestolecie jej istnienia. Z tej okazji nie będziemy pisali niczego wspomnieniowego i wzruszającego, tylko spróbujemy odpowiedzieć na pytanie:
A tak konkretnie, to co Delta zrobiła ?

Ukazało się 235 numerów *Delty* w nakładach zmiennych, układających się w krzywą zbyt, naszym zdaniem, przypominającą rozkład Maxwella – pomijając szczegóły: od 30 tys. egzemplarzy w 1974 roku, przez 50 tys. egzemplarzy w 1982 roku do 5,5 tys. egzemplarzy w 1993 roku.

Pięć brakujących numerów (bo $20 \times 12 = 240$) to nie efekt zawieszenia w stanie wojennym – nadrobiliśmy zawieszenie wydając numery co trzy tygodnie. Jest to efekt „przekształceń własnościowych", jak nazywa się w szczególności rozkradanie byłego RSW „Prasa–Książka–Ruch". Tego nadrobić nie umieliśmy.

Naszym największym hitem książkowym było *Czy umiecie się dziwić* – łącznie (*Ossolineum*, *Alfa*) wydane w 200 tys. egzemplarzy, które sprzedane zostały jak świeże bułeczki – gdyby książkę wznowić, miałaby i dziś nie mniejsze powodzenie. Jej drugi tom – *Zobaczcie inaczej* – został wydany raz (*Alfa*), w nakładzie 110 tys. egzemplarzy, które też zniknęły w trzy tygodnie.

Z książkami tymi związane jest zainicjowanie odpowiadającego im tematycznie czasopisma pod nazwą taką, jak jeden z działów *Delty*, mianowicie *Mała Delta*. Pismo takie przez rok działało pod naszym nadzorem, by po uzyskaniu samodzielności ukazywać się pod nowym tytułem *Szkiełko i Oko* (my przywróciliśmy wtedy u siebie dział *Mała Delta*). Pod oboma tytułami łącznie pismo to wydało 100 numerów w nakładach od 30, przez 20, do 35 tys. egzemplarzy. Zostało pokonane przez przemiany ekonomiczne, a kiedy się już wszystko na tyle uspokoiło, by można było zacząć od początku – okazało się, że zespół się rozpadł.

Innym działem *Delty*, który ukazał się jako książka, jest *Laboratorium w domu*. Działu takiego już w *Delcie* nie ma, bo nikt nie umiał zastąpić jego redaktora, (dziś) profesora Jana A. Gaja. Książka została wydana przez WNT bez wspomnienia o tym, skąd pochodzą zawarte w niej teksty, ale za to w dwóch 30-tysięcznych nakładach.

Pierwszą naszą serią były broszury pod wspólnym tytułem *Biblioteczka Delty* wydawane przez WSiP. Ukazało się 8 takich broszur w nakładzie 15 tys. egzemplarzy każda. Te broszury były eleganckie i nawet z dowcipami rysunkowymi.

Kolejna seria to broszury bardzo ubogie i, skutkiem tego, tanie. Takich broszur na gazetówie, pod wspólnym hasłem *Przeczytaj, może zrozumiesz*, ukazało się 23 (choć najwyższy numer był 26), każda w nakładzie 30 tys. egzemplarzy. Te broszurki wydawaliśmy sami.

Następna seria to już książki. Serię wydawało wydawnictwo *Alfa*, a nazywała się ona *Delta przedstawia*. Wyszło 6 ksiażek w nakładach od 30 do 15 tys. egzemplarzy. Rekord w zakresie naszych wydawnictw tzw. ulotnych ustanowił wydany w 200 tys. egzemplarzy plan lekcji z algorytmem układania kostki Rubika (wrzesień 1982). I to bodaj wszystko z tego, co niewielka i nieetatowa redakcja zdołała wydać.

Przez rok prowadziliśmy comiesięczną, półgodzinną audycję *Telewizyjne wydanie Delty* (było to w epoce przed *Sondą*), a ponadto wiele telewizyjnych audycji dla dzieci, w szczególności bardzo dobrze przyjmowane konkursy z *Klubu Delty*. W świetle tego nie dziwi, że prowadziliśmy również przedstawienia teatralne noszące tytuł naszej najlepszej książki – *Czy umiecie się dziwić*. Były też przez rok (również comiesięczne) nadawane w programie czwartym audycje *Radiodelta*.

Z naszych osiągnięć w ramach samej *Delty* chcemy wymienić największą (najbardziej szczegółową) z wydanych kiedykolwiek w Polsce mapę nieba (autorstwa Tomasza Chlebowskiego), tablice chronologiczne matematyki, fizyki i astronomii, wyróżniające się spośród innych liniową skalą czasu (to daje rewelacyjnie zaskakujące informacje) – mają one ponad 3 metry długości – oraz wydane wraz z okularami anaglify – wszystko to otrzymywał Czytelnik za darmo wraz z numerami *Delty*.

No i konkursy. Godne przypomnienia są *Drgania są wszędzie* (z którego zwycięskiego zdjęcia telewizja zrobiła sobie „chodzącą" przez ponad 3 lata planszę dziennika) oraz konkurs *Budujemy mosty* (z którego dowiedzieliśmy się, że można ze zwykłego papieru – i to prawie bez klejenia – zbudować most wytrzymujący cieżar ponad 57 kilogramów).

Stałym konkursem jest (organizowany wspólnie z PTM) Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki – powstałe w związku z nim prace naukowe uczniów szkół średnich okazały się już kilka razy „dorosłymi", publikowalnymi również w czasopismach specjalistycznych rezultatami matematycznymi. Są wreszcie ligi zadaniowe – w szczególności matematycznej zachwalać nie ma potrzeby: w 1992 roku prowadzący ją Marcin E. Kuczma uzyskał ważną międzynarodową nagrodę – medal Hilberta.

I to by było na tyle.

Redakcja

Kosmiczny ostrzał Ziemi

Krzysztof ZIOŁKOWSKI

Od dawna wiadomo, że Ziemia jest stale bombardowana materią kosmiczną. Najnowsze oceny, opublikowane w 1992 roku przez czeskiego astronoma Zdenka Ceplechę, wskazują, że – biorąc pod uwagę najszerszy zakres mas od 10^{-21} kg (najmniejsze rejestrowalne cząstki pyłu kosmicznego) do 10^{15} kg (typowe komety i planetoidy mogące zbliżać się do Ziemi), całkowity strumień materii napływającej na całą powierzchnię naszej planety wynosi $1,7 \times 10^8$ kg na rok. Zasadniczy wkład do niego wnoszą, naturalnie, największe obiekty o rozmiarach rzędu kilometrów. Prawdopodobieństwo uderzenia ich w Ziemię jest jednak bardzo małe. Pomijając je więc, czyli uwzględniając jedynie pył kosmiczny oraz tzw. meteoroidy (czyli bryłki materii o masach – jak przyjęto umownie – do 10^4 kg), oszacowano, że w ciągu doby do atmosfery ziemskiej dostaje się średnio kilkaset kilogramów materii kosmicznej. Niewiele z niej zdoła dotrzeć do powierzchni Ziemi. Ale średnio raz na kilka dni trafia się kilkukilogramowy obiekt, który – jeśli ma stosunkowo niewielką prędkość – może przeżyć przelot przez atmosferę i spaść na powierzchnię Ziemi jako meteoryt. Większość z nich trafia, oczywiście, do oceanów i na tereny nie zaludnione, a więc nic dziwnego, że pozostaje najczęściej nie zauważona. Czasem bywa jednak inaczej.

14 stycznia 1993 r. o godzinie $17^h59^m50^s$ UT (czasu uniwersalnego) w Jerzmanowicach koło Krakowa coś niezwykłego uderzyło w tamtejszą „Babią Skałę". Odłamki zostały rozrzucone w promieniu ponad 150 m, zniszczone zostały dachy budynków i wszystko, co było w pobliżu. Potężny impuls elektromagnetyczny przepalił bezpieczniki w domach i odbiornikach telewizyjnych. W odległym o 3,4 km obserwatorium sejsmologicznym zarejestrowano dwa silne wstrząsy. Po drugim zniszczona została antena do odbioru sygnałów czasu i dwa sejsmografy. Na dużym obszarze od Zawoi, Chrzanowa i Krakowa widziano wówczas przelot ogromnej kuli ognistej. Na Rynku Krakowskim przez ułamek sekundy było jasno jak w dzień...

Rewelacyjny pulsar (rówieśnik Delty)

Tadeusz JARZĘBOWSKI

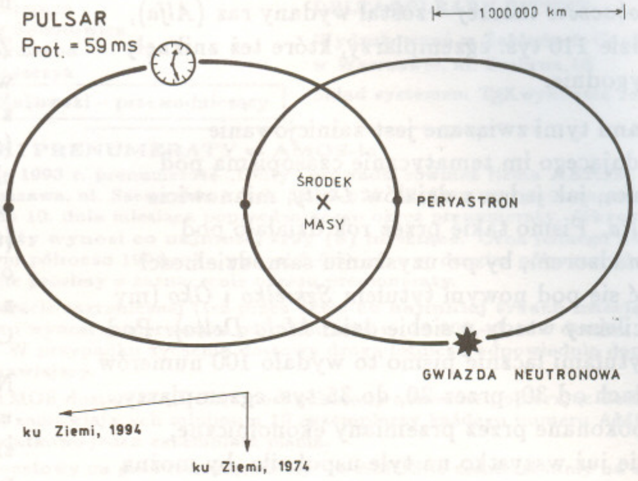
Na imię mu PSR 1913+16. Gdy odnajdywał go na niebie 300-metrowy teleskop z Arecibo, w Warszawie drukowały się pierwsze numery *Delty*. Od śmierci Einsteina mijało już wówczas drugie dziesięciolecie; można tylko wyobrażać sobie, jaką radość sprawiłoby to odkrycie twórcy teorii względności. Ta dostrzeżona podówczas gwiazda neutronowa okazała się wspaniałym laboratorium do badania wynikających z jego teorii subtelnych odstępstw od fizyki Newtona. Sygnały radiowe, nadbiegające od tego pulsara, w pełni potwierdzają przewidywane przez teorię Einsteina zjawiska.

Pulsar ten wchodzi w skład układu podwójnego (rys. 1); mamy tu do czynienia z małżeństwem dwóch gwiazd neutronowych. Wyjątkowe znaczenie tego układu dla fizyki relatywistycznej wynika z trzech faktów:

1) odległość gwiazd jest bardzo mała,

2) z uwagi na znaczny mimośród (0,62) odległość ta podlega dużym wahaniom,

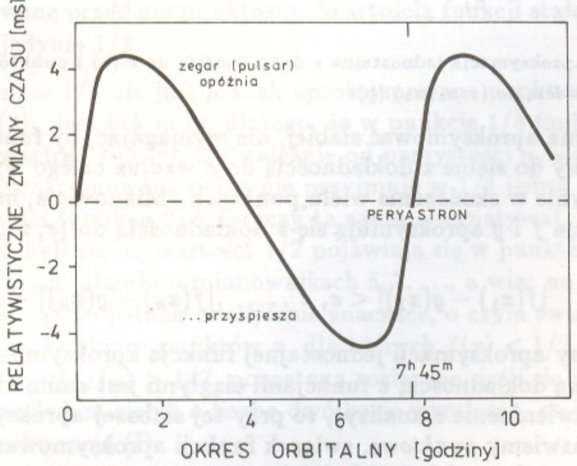
3) w układzie znajduje się naturalny, bardzo precyzyjny zegar; jednostką czasu jest tu okres rotacji gwiazdy neutronowej, „tyknięciami" zaś – pulsy rejestrowane przez radioteleskopy.



Rys. 1. Układ podwójny zawierający pulsar PSR 1913+16. Zwróćmy uwagę na małe rozmiary orbity, kilka tysięcy razy mniejsze od rozmiarów Układu Słonecznego. Okres obiegu gwiazd wynosi tu 7^h45^m. Strzałki ukazują tempo relatywistycznego obracania się układu w przestrzeni.

W myśl teorii, mierzone interwały czasu zależą od względnej prędkości obserwatora i zegara (efekt szczególnej teorii względności) oraz od względnej pozycji obserwatora i zegara w polu grawitacyjnym (ogólna teoria względności). W przypadku naszego pulsara ujawniają się obydwa te efekty. Pierwszy wiąże się z ruchem obiegowym pulsara na orbicie; nazywamy to dylatacją czasu, którą określa wielkość $(v/c)^2$. Co się zaś tyczy teorii ogólnej, wpływu grawitacji, to chodzi tu, oczywiście, o oddziaływanie tej drugiej gwiazdy; jej pole grawitacyjne modyfikuje rejestrowane przez nas wskazania zegara-pulsara. Wielkość wynikającego stąd relatywistycznego efektu czasowego zależy od masy M tej gwiazdy oraz od odległości r, jaka dzieli tę gwiazdę od pulsara. Charakterystycznym czynnikiem jest w tym przypadku wielkość GM/rc^2.

Oszacujmy obydwa efekty. Przy tak niewielkich odległościach prędkości orbitalne są znaczne; prędkość v oscyluje tu między 100 a 400 km/s. Mamy zatem $(v/c)^2 \approx 10^{-6}$. Prosty rachunek wskazuje, że czynnik GM/rc^2 jest również tego rzędu wielkości (masa tej gwiazdy wynosi 1,4 masy Słońca, odległość zaś między gwiazdami zmienia się w trakcie obiegania od około 800 000 do 3 300 000 km). Wpływ na jednostkę czasu prędkości i pola grawitacyjnego jest zatem porównywalny. Łatwo też zauważyć, że obydwa efekty działają zgodnie, w tym samym kierunku; największe odstępy między pulsami zarejestrujemy, gdy gwiazdy znajdą się najbliżej siebie, tj. w peryastronie. Działania te kumulują się, w sumie owo okresowe przyspieszanie i opóźnianie zegara dochodzi do ponad 4 ms (rys. 2).



Rys. 2. Przebieg wywołanych efektami relatywistycznymi obserwowanych zmian chodu zegara (częstotliwości pulsara). Krzywa przedstawia rejestrowane odstępstwa w stosunku do hipotetycznego pulsara, obiegającego drugą gwiazdę z jednakową prędkością i w niezmiennej odległości.

Zwróćmy uwagę na niezwykle wysoką dokładność tego kosmicznego zegara. Jego okres równy 59 ms to 16,94 obrotów gwiazdy na sekundę. Otóż ta częstotliwość pulsacji wyznaczona tu została z dokładnością do 12. miejsca po przecinku – i w tych granicach nie stwierdzono żadnych nieregularności. Pod względem dokładności pulsar ten może więc konkurować ze współczesnymi zegarami atomowymi.

Niezależnie od przedstawionych tu relatywistycznych zmian czasu w układzie tym równie spektakularnie ujawniają się i dwa inne przewidziane teorią zjawiska. Jednym z nich jest omawiane już na łamach *Delty* (Nr 8, 1991) skręcanie orbity, znane pod nazwą ruchu peryhelium (w tym przypadku: peryastronu); ukazane to zostało na rysunku 1. A tym drugim jest emisja fal grawitacyjnych; emisja ta zachodzi na koszt energii ruchu obiegowego, czego następstwem jest kurczenie się orbity o 3,5 metra i skracanie okresu obiegu o prawie 10^{-4} sekundy rocznie.

Sygnały od tego pulsara radioteleskopy odbierają już od blisko dwóch dziesięcioleci. Analiza danych wskazuje na zgodność przebiegu wymienionych trzech zjawisk z teorią Einsteina w granicach 0,5%.

Dodajmy na koniec, że nasz dwudziestolatek doczekał się już młodszego, trzyletniego braciszka. Jest to bardzo podobny układ podwójny z 38-milisekundowym pulsarem, któremu na imię PSR 1534+12. W układzie tym tak samo ujawniają się wymienione trzy relatywistyczne zjawiska. Ponadto można tu dokładniej badać jeszcze inny, wynikający z krzywizny czasoprzestrzeni efekt: opóźnianie fali elektromagnetycznej przy przechodzeniu w pobliżu masywnego ciała.

Z analizy zniszczeń wynika, że meteoryt miał masę końcową około 2 kg i nie został wyhamowany w atmosferze. Uderzył w skałę z prędkością około 13,5 km/s. Miał najprawdopodobniej średnicę 11 cm i gęstość 3,4 g/cm³. Kula ognista widziana w Krakowie, Chrzanowie, Zawoi, Szklarach i Rudawie osiągnęła maksymalną jasność około –22 mag. W końcowej sekundzie lotu, gdy zmieniała barwę z jasnoczerwonej na ciemnoczerwoną, jasność wizualna przewyższała jasność Księżyca w pełni i wynosiła –15 mag.

Tak opisał niezwykłe wydarzenie krakowski astronom dr Krzysztof Włodarczyk w liście do Centrum Badań Kosmicznych. Chociaż do dziś nie ustalono definitywnie, co się stało w Jerzmanowicach, to jednak całe zdarzenie wydaje się być dobrą ilustracją konsekwencji stosunkowo częstego zjawiska, jakim jest spadek na Ziemię niewielkiej bryłki materii kosmicznej.

Uderzenie w Ziemię większego obiektu, o rozmiarach rzędu kilkudziesięciu metrów, następuje – według najnowszych oszacowań – średnio co kilkaset lat, natomiast spadek na obszary gęsto zaludnione i miejskie – nawet co kilkaset tysięcy lat. Przykładem takiego wydarzenia, które – jak się dziś sądzi – było spadkiem na Ziemię maleńkiej planetoidy lub fragmentu komety, jest słynna katastrofa tunguska. Rankiem 30 czerwca 1908 roku w okolicach syberyjskiej rzeki Podkamienna Tunguska, na wysokości około 10 km nad powierzchnią Ziemi, nastąpił wybuch, który zniszczył tajgę na obszarze ponad 2000 km² oraz uszkodził wiele domów w oddalonym około 65 km osiedlu. Stacja sejsmologiczna, znajdująca się w położonym około 1000 km na południe od miejsca eksplozji Irkucku, zarejestrowała wstrząs o sile 4,5 stopnia; trzęsienie Ziemi w tym dniu odnotowały także obserwatoria w Jenie i w Londynie. W nocy z 30 czerwca na 1 lipca w Europie i w Azji dostrzeżono świecenie nieba. Obserwacje spektroskopowe tego niezwykłego zjawiska wykluczyły jego podobieństwo do zorzy polarnej. Analiza skutków wydarzenia doprowadziła do wniosku, że w wyniku eksplozji została wydzielona energia równa energii wybuchu około 16 megaton trotylu (TNT), czyli 800 razy więcej niż w przypadku bomby atomowej zrzuconej (wiele lat później) na Hiroszimę (patrz zadanie 371).

Katastrofę tunguską spowodował wybuch nad powierzchnią Ziemi i dlatego jej skutkiem było tylko powalenie tajgi syberyjskiej na dużym obszarze, a nie wybicie krateru. Jednym z najbardziej znanych i spektakularnych przykładów tworu powierzchniowego powstałego w wyniku uderzenia w Ziemię obiektu kosmicznego jest natomiast słynny krater meteorytowy w Arizonie (USA) o średnicy 1,2 km i głębokości 200 m. Rezultaty najnowszych badań wskazują, że powstał on około 50 tys. lat temu w wyniku spadku z prędkością 11 km/s małej planetoidy żelaznej o rozmiarach ocenianych na około 60 m i masie szacowanej na kilka milionów ton. Dotychczas na powierzchni Ziemi zidentyfikowano około 140 tego typu kraterów o średnicach do 200 km.

Przypuszcza się, że średnio w ciągu roku kilka obiektów o rozmiarach rzędu 100 m przelatuje – obrazowo mówiąc – między Ziemią a Księżycem, czyli w odległości od nas mniejszej niż 400 tys. km. Podczas tak dużego zbliżenia do Ziemi można je dostrzec, chociaż zaobserwowanie szybko poruszającego się po niebie i słabo świecącego ciała niebieskiego jest, oczywiście, bardzo trudne. Dotychczas tylko raz to się udało astronomom: 18 stycznia 1991 roku odkryta została planetoida 1991 BA, której minimalna odległość od Ziemi wyniosła zaledwie 0,0011 jednostki astronomicznej, czyli około 170 tys. km; jej średnicę oceniono na około 10 m.

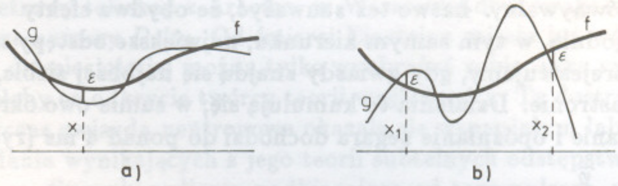
Uderzenie w Ziemię jeszcze większego obiektu, o rozmiarach rzędu 1 km, następuje – jak się dziś sądzi – raz na 500 tys. lat. Ale skutki takiego wydarzenia mogą już mieć charakter globalny. Hipoteza Luisa W. Alvareza dotycząca wyginięcia dinozaurów usiłuje wyjaśnić to tajemnicze wydarzenie sprzed 65 milionów lat zderzeniem naszej planety z planetoidą lub kometą o średnicy około 10 km. Nie wnikając tu w szczegóły tego interesującego zagadnienia wspomnijmy tylko, że ostatnio odkryto prawdopodobnie pozostałość tej katastrofy. Wydaje się nią być krater Chicxulub, którego południowa część znajduje się w północno-zachodnim Jukatanie, a północna jest pogrążona w wodach Zatoki Meksykańskiej. Krater ma średnicę około 200 km, a jego głębokość dochodzi do 9 km.

Ocenia się, że około 90% zagrażających Ziemi obiektów to tzw. planetoidy bliskie Ziemi i komety krótkookresowe (o okresach obiegu wokół Słońca krótszych niż 20 lat). Średnio co kilkadziesiąt lat następuje przelot takiej planetoidy koło Ziemi

Przeglądając prace Sierpińskiego

Jerzy MIODUSZEWSKI

Funkcje aproksymują się *jednostajnie* z dokładnością do ε, jeśli ich wykresy odchylają się od siebie w każdym miejscu mniej niż o ε (rys. 1a).



Rys. 1. Aproksymacja jednostajna z dokładnością do ε (a) i punktowa z dokładnością do $(\varepsilon; x_1, x_2)$ (b).

Ale można aproksymować słabiej, nie wymagając, by funkcje f i g przylegały do siebie z dokładnością do ε wzdłuż całego wykresu, lecz jedynie w skończenie wielu punktach. Mianowicie, mówimy, że funkcje f i g aproksymują się z dokładnością do $(\varepsilon; x_1, \ldots, x_k)$, jeżeli

$$|f(x_1) - g(x_1)| < \varepsilon, \quad \ldots, \quad |f(x_k) - g(x_k)| < \varepsilon .$$

O ile przy aproksymacji jednostajnej funkcja aproksymowana z dowolną dokładnością ε funkcjami ciągłymi jest sama ciągła (znane twierdzenie z analizy), to przy tej słabszej aproksymacji, którą nazwiemy *punktową*, związek funkcji aproksymowanej z aproksymującymi ją jest luźniejszy.

Mimo to pewne własności – nazwijmy je umownie *arytmetycznymi* – przenoszą się. Odnotujmy na początek dwie tego rodzaju własności.

(I) Jeśli liczba jest okresem funkcji aproksymujących, jest także okresem funkcji aproksymowanej punktowo.

(II) Jeśli funkcje aproksymujące punktowo spełniają związek

(1) $\qquad g(1-x) = 1 - g(x) \qquad$ dla dowolnego x,

to funkcja aproksymowana też go spełnia.

Wspólny chwyt dowodowy – także i dla kilku późniejszych stwierdzeń – zilustrujemy dowodząc (I).

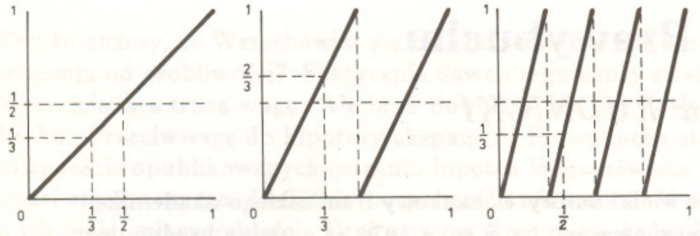
Oto, skoro funkcja f jest aproksymowana z dowolną dokładnością przewidzianą dla aproksymacji punktowej funkcjami o okresie r, więc jest aproksymowana nimi – dla każdego x i każdego ε – z dokładnością $(\varepsilon; x, x+r)$, co znaczy istnienie takiej funkcji g o okresie r, że $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ i $|f(x+r) - g(x+r)| < \varepsilon$, co zważywszy na okresowość, $g(x+r) = g(x)$, daje $|f(x+r) - f(x)| < 2\varepsilon$, a w rezultacie $f(x+r) = f(x)$ wobec dowolności ε.

Każda liczba dwójkowo wymierna, $r = k/2^s$, k całkowite, s naturalne, jest okresem każdej spośród funkcji

(2) $\qquad f_n(x) = \{2^n x\}$,

($\{a\}$ jest częścią ułamkową liczby a) jeśli tylko wskaźnik (liczba naturalna) n jest $\geq s$.

Wobec (I), liczby dwójkowo wymierne są okresami każdej funkcji nie będącej typu (2) aproksymowanej punktowo funkcjami (2). Okresy mogą być więc dowolnie małe. Wśród funkcji ciągłych jedynie funkcje stałe mają tę własność (zadanie z analizy na ciągłość).



Rys. 2. Funkcje $f_n(x) = \{2^n x\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $0 \le x < 1$.

Funkcje (2), jeśli zaniedbać ich zachowanie w punktach dwójkowo wymiernych, mają własność (1): ich wykresy są symetryczne względem $(1/2, 1/2)$. Ta własność, wobec (II), przenosi się na funkcje aproksymowane przez nie punktowo. Wartością funkcji stałej może być zatem jedynie 1/2.

Funkcja $f(x) = 1/2$ nie jest jednak aproksymowana punktowo funkcjami (2). Jest tak m.in. dlatego, że w punkcie 1/3 funkcje f_n przyjmują wartość 1/3 lub 2/3 zależnie od parzystości n, a stąd funkcja f aproksymowana przez nie przyjmuje w 1/3 jedną z tych wartości (punktu 2/3 dotyczy ta sama alternatywa). Podobne odchylenia od wartości 1/2 pojawiają się w punktach reprezentujących ułamki o mianownikach 5, 7, ..., a więc na zbiorze gęstym. Nie jest to jednak odchylenie znaczące, o czym świadczy spostrzeżenie, że zbiory punktów x, dla których $f(x) < 1/2$, oraz tych, dla których $f(x) > 1/2$, pozostaną rozłączne, jeśli się je przesunie względem siebie o liczbę dwójkowo wymierną, co jest prostą konsekwencją (I).

Ale i zbyt duża koncentracja funkcji f na wartości 1/2 nie jest możliwa. Nie wyjaśniając, czym jest miara (w sensie Lebesgue'a), odnotujmy tylko, że funkcje f nie mogą przyjmować wartości 1/2 na zbiorze miary dodatniej, i że w dowodzie tej własności wykorzystuje się spostrzeżenie, iż funkcje f_n mają własność *addytywności*, $\{g(x+y)\} = \{g(x) + g(y)\}$ (addytywnymi w tym sensie są wszystkie funkcje postaci $\{mx\}$, m całkowite), która przenosi się – jako jedna ze wspomnianych własności arytmetycznych – na funkcje aproksymowane punktowo.

Niech $A = \{x : f(x) = 1/2\}$. Jeśli, przeciwnie, miara A jest dodatnia, to istnieje takie $d > 0$, że jeśli $|t| < d$, to $A \cap (A + t) \neq \emptyset$ (twierdzenie Steinhausa). Weźmy, wśród wymienionych t takie, że $f_n(t)$ jest różna od 0 i 1/2 dla każdego n (jest tak dla wszystkich t będących ułamkami nieskracalnymi postaci l/m, gdzie m nieparzyste; wtedy bowiem $f_n(l/m)$ jest ułamkiem właściwym o mianowniku m).

Niech $a \in A \cap (A + t)$. Mamy $a = b + t$, gdzie $b \in A$. Z addytywności dostajemy
$$\frac{1}{2} = f(a) = f(b+t) = f(b) + f(t) = \frac{1}{2} + \frac{k}{m},$$
$k = 1, \ldots,$ lub $m - 1$; mamy $0 = \frac{k}{m}$; sprzeczność.

Urywamy tu rozważania matematyczne, które mogły pozostawić wrażenie, że funkcji aproksymowanych punktowo funkcjami (2), poza nimi samymi, w ogóle nie ma. W istocie, pokazaliśmy – markując dowody – że nie ma ich co szukać wśród funkcji w dostatecznym stopniu porządnych. Jakieś inne zapewne nam się „wymknęły".

Na funkcje aproksymowane punktowo funkcjami $\{2^n x\}$ zwrócił uwagę w dwu pracach (1938, 1945) Wacław Sierpiński. Istnienie takich funkcji różnych od $\{2^n x\}$ uzasadnił za pomocą pewnika wyboru.

Z punktu widzenia topologii, zbiór *funkcji Sierpińskiego* usytuowany w przestrzeni funkcji, w której obowiązuje aproksymacja punktowa – topologia Tichonowa – jest tym samym co przestrzeń Čecha-Stone'a, kompaktyfikacja βN zbioru $\mathbf{N}$ liczb naturalnych. Ujęcie Sierpińskiego jest jedną z realizacji tej ważnej przestrzeni.

w odległości mniejszej niż odległość Księżyca od Ziemi. Pozostałe 10% przypada na komety długookresowe i tzw. komety jednopojawieniowe (o orbitach quasiparabolicznych), które stwarzają znacznie większe niebezpieczeństwo, ponieważ niosą znacznie większą energię niż planetoidy o porównywalnych masach (przelatują w pobliżu Ziemi z większymi prędkościami). Średnio jedna taka kometa na stulecie może znaleźć się między Ziemią a Księżycem.

Ostatnio wiele emocji (wyrażających się, między innymi, w bałamutnych często doniesieniach prasowych) wywołało zbliżenie do Ziemi planetoidy (4179) Toutatis oraz powrót w pobliże Słońca – po 130 latach – komety Swifta-Tuttle'a. Czy te dwa interesujące ciała niebieskie rzeczywiście zagrażają Ziemi?

Planetoida Toutatis, pierwotnie oznaczana 1989 AC, została odkryta 4 stycznia 1989 roku przez francuskiego astronoma C. Pollasa. Nazwana została imieniem bożka galijskiego strzegącego mieszkańców okupowanej przez Rzymian starożytnej Galii przed niebezpieczeństwami niebios. Jest typowym członkiem tzw. grupy Apollo, czyli tych właśnie planetoid, które mogą zbliżać się do Ziemi. Tym, co ją wyróżnia spośród ponad 150 znanych dotychczas obiektów tego rodzaju, jest najmniejsze nachylenie płaszczyzny jej orbity do płaszczyzny ekliptyki wynoszące zaledwie 0,47°. Okrąża więc ona Słońce niemal w tej samej płaszczyźnie co Ziemia. Od momentu odkrycia obserwowano już tę planetoidę w trzech opozycjach, a także znaleziono kilka przedodkryciowych obserwacji z lipca 1988 roku oraz zidentyfikowano ją z planetoidą 1934 CT, tylko raz dotychczas obserwowaną w 1934 roku. Ten stosunkowo bogaty materiał obserwacyjny umożliwił dobre wyznaczenie jej orbity i zbadanie ewolucji jej ruchu.

Orbita Toutatisa ma mimośród równy 0,64 i wielką półoś wynoszącą 2,5 j.a. Przez peryhelium, oddalone od Słońca o 0,9 j.a., przeszła 13 listopada 1992 roku. Wkrótce potem, 8 grudnia 1992 roku, przeleciała koło Ziemi mijając ją w odległości 3,6 mln km (0,024 j.a.) z prędkością 11,2 km/s. Okres jej obiegu wokół Słońca wynosi prawie dokładnie 4 lata. Podobnych zbliżeń do Ziemi można więc oczekiwać co każde 4 lata w przyszłości. I rzeczywiście, precyzyjne obliczenia wykonane w Centrum Badań Kosmicznych

PAN wykazały, że 29 listopada 1996 roku Toutatis zbliży się do Ziemi na odległość 5,3 mln km, 31 października 2000 roku na odległość 10,9 mln km, a 29 września 2004 roku na odległość już tylko około 1,5 mln km (0,010 j.a.). Szczególnie to ostatnie zbliżenie może być interesujące, ale nie ze względu na – niemożliwe przecież – zderzenie jej z Ziemią, lecz na szansę dostrzeżenia wtedy planetoidy nawet gołym okiem (ale, niestety, tylko z półkuli południowej). Dodajmy, że w przeszłości (obliczenia przeprowadzono do 1900 roku) tak dużych zbliżeń do Ziemi nie miała.

Wykorzystując zbliżenie Toutatisa do Ziemi w 1992 roku zespół astronomów amerykańskich kierowany przez Stevena Ostro z Jet Propulsion Laboratory w Pasadenie wykonał sondowania radarowe tego obiektu za pomocą 70 m radioteleskopu w Goldstone w Kalifornii. W ich wyniku otrzymano jego obrazy w dniach 8, 9, 10 i 13 grudnia (reprodukujemy je na tylnej okładce). Po raz drugi w historii zobaczyliśmy tak dokładnie rzeczywiste kształty tego typu ciała niebieskiego (pierwszym obrazem asteroidy było zdjęcie Gaspry wykonane 29 października 1991 roku za pomocą sondy kosmicznej GALILEO). Największe zdziwienie wzbudziła podwójność planetoidy, która okazała się być jakby zlepkiem dwóch brył o średnicach 4 i 2,5 km. Okres jej rotacji oceniono na 10–11 dni. Powierzchnię pokrywają kratery; duży krater, wyraźnie widoczny na obrazie uzyskanym 9 grudnia, ma średnicę około 700 m.

Zainteresowanie astronomów kometą Swifta-Tuttle'a bierze się przede wszystkim stąd, że – jak od dawna już wiadomo – jest to obiekt macierzysty znanego roju meteorowego Perseid. Meteory tego roju obserwuje się co roku, najczęściej między 10 a 15 sierpnia, a zjawisko to jest znane pod nazwą łez św. Wawrzyńca. Dotychczas kometa ta była obserwowana tylko przez ponad trzy miesiące w 1862 roku. Nic więc dziwnego, że jej orbity nie dało się wyznaczyć na tyle dokładnie, by precyzyjnie przewidzieć jej powrót do Słońca w następnym pojawieniu. Wydawało się, że okres jej obiegu wokół Słońca wynosi około 120 lat. Komety poszukiwano więc już od początku lat osiemdziesiątych, ale udało się ją odnaleźć dopiero 26 września 1992 roku; szczęśliwym odkrywcą został japoński miłośnik astronomii Tsuruhiko Kiuchi.

Mit Prawybuchu

Konrad RUDNICKI

Gdyby nie wielki autorytet naukowy francuskiego akademika J.C. Peckera, uważano by w roku 1976 za zupełną brednię jego ówczesną wypowiedź, że **Prawybuch** (*Big Bang*) jest takim samym mitem, jak starożytna opowieść o **Pierwotnym Jaju**, z którego się wylągł Kosmos. Dziś natomiast jego pogląd zyskuje coraz więcej zwolenników. Coraz więcej znamy argumentów przeciw Prawybuchowi.

Za nim przemawiały dotąd przede wszystkim dwa fakty obserwacyjne. Pierwszy to korelacja odległości obiektów pozagalaktycznych z przesunięciami ku czerwieni w ich widmach interpretowanymi jako efekt Dopplera. Drugi to promieniowanie tła tłumaczone jako promieniowanie z wczesnej epoki po Prawybuchu.

Interpretacja dopplerowska przesunięć ku czerwieni staje się coraz bardziej wątpliwa. Wykryto wiele obiektów podwójnych o przesunięciach zupełnie odmiennych od siebie. Stwierdzono, że w grupach zawsze obiekt liniowo największy ma najmniejsze przesunięcie widmowe (a więc efekt zależny wyłącznie od budowy fizycznej galaktyki), wreszcie w ubiegłym roku stwierdzono pełną „kwantyzację" w przesunięciach ku czerwieni. Wszystkie przesunięcia w widmach galaktyk są wielokrotnościami przesunięć, jakie odpowiadałyby (w zaokrągleniu) prędkościom dopplerowskim 24, 36 lub 72 km/s, a odstępstwa od tych wartości odpowiadają ściśle niedokładnościom pomiarów. Jeśli tłumaczyć te przesunięcia dopplerowsko i kojarzyć z odległościami i rozszerzaniem Wszechświata, to trzeba by uznać, że wszystkie galaktyki leżą na „kryształowych" sferach o promieniach odpowiadających wspomnianym „kwantowym" wielkościom i o środku (Wszechświata!) w naszej Galaktyce.

Właściwości promieniowania tła o temperaturze 3 kelwinów można najprościej wytłumaczyć istnieniem pyłu międzygalaktycznego podgrzewanego przez okoliczne galaktyki.

Ważnym argumentem przeciw Prawybuchowi jest też istnienie wielkich aglomeracji galaktyk, jakie nie miałyby czasu powstać w żadnym scenariuszu ekspansji Wszechświata zgodnym z Prawybuchem. Istnieją dziesiątki innych ważkich argumentów.

Coraz częściej organizowane są imprezy naukowe przedstawiające alternatywne obrazy ewolucji Wszechświata w stosunku do „klasycznych" wyobrażeń jego rozwoju po Prawybuchu. Taką była narada robocza (tak zwany *workshop*) w maju 1993 roku w Princeton. Taką była XIII Krakowska Szkoła Kosmologii w roku 1992.

Te pasjonujące, świeżo odkrywane fakty obserwacyjne i poświęcane im imprezy są lekceważone przez stale jeszcze licznych, zagorzałych zwolenników Prawybuchu. I można tych zwolenników zrozumieć. Niektórzy całe życie poświęcili cyzelowaniu szczegółów tej hipotezy... Smutno by im było...

Czy to znaczy, że Wszechświat się nie rozszerza i że nie zaczynał istnienia od osobliwości? Faktycznie dawne argumenty za ekspansją Wszechświata tracą wagę. Ale brak dowodów nie jest dowodem braku. Przeciwwagę do hipotezy ekspansji i Prawybuchu stanowi kilkanaście opublikowanych ostatnio hipotez Wszechświata *quasi-stacjonarnego.* I właśnie ta mnogość i różnorodność stanowi o ich małej wiarygodności. Brak nowego Kopernika, który by stworzył całościowe wytłumaczenie tego, co obserwujemy. Mówi się tylko dość mgliście o **nowej fizyce**.

Można fakty empiryczne kojarzyć w całościowe hipotezy lub teorie, ale można też zestawiając je, pozwolić im samym mówić za siebie. Przyrodnik i poeta J.W. Goethe powiedział: „Kto nie odróżnia teorii od rzeczywistości, jest jak ten, kto nie odróżnia rusztowania od budynku". Hipoteza, teoria jest tylko narzędziem, nigdy zaś głównym obiektem badań przyrodnika. Wszystkie teorie są w istocie mitami, nieraz wspaniałymi mitami.

Mit o Prawybuchu jest nie mniej piękny niż mit o kosmicznym Pra-Jaju. Nawet jeśli merytorycznie będzie ostatecznie obalony, pozostanie trwale w historii myśli ludzkiej.

Redakcja czuje się w obowiązku zaznaczyć, że zdecydowana większość kosmologów nie podziela poglądów Autora – uważają hipotezę Prawybuchu za dobrze ugruntowaną. Ostatnie wyniki pomiarów wykonanych przez satelitę COBE są bardzo ważnym argumentem na rzecz tej hipotezy.

Współczesne obserwacje, w sposób istotny wzbogacające materiał dla wyznaczenia orbity, umożliwiły już znacznie lepsze poznanie jej ruchu wokół Słońca, a nawet zidentyfikowanie jej z kometą obserwowaną w 1737 roku przez misjonarza jezuitę w Pekinie. Wykorzystanie danych z trzech pojawień się komety w latach 1737, 1862 i 1992/93 doprowadziło też do wniosku, że znalezione w dawnych zapiskach kronikarskich informacje o obserwacjach komet w latach 64 p.n.e. i 188 n.e. najprawdopodobniej także dotyczą komety Swifta-Tuttle'a. Dziś już wiadomo więc, że okres obiegu tej komety wokół Słońca wynosi 130 lat i że porusza się ona ruchem wstecznym po orbicie o mimośrodzie 0,96 i wielkiej półosi 26 j.a. położonej w płaszczyźnie nachylonej do płaszczyzny ekliptyki pod kątem 113°.

Podczas następnego powrotu w pobliże Słońca, 5 sierpnia 2126 roku, kometa Swifta-Tuttle'a minie Ziemię z prędkością 58 km/s w odległości 23,8 mln km. O zderzeniu jej wtedy z Ziemią nie może być więc mowy. Warto jednak wspomnieć, że minimalna odległość między orbitami komety i Ziemi wyniesie w tym czasie zaledwie 0,5 mln km. Jeszcze mniejsza odległość dzieliła orbity Ziemi i komety w 1992 roku: tylko około 60 tys. km! Gdyby więc kometa przeszła przez peryhelium kilka miesięcy wcześniej, bylibyśmy zapewne świadkami niezwykłego zjawiska na niebie. Jednak rzeczywista odległość, w jakiej przeleciała ona wtedy koło nas, była równa aż 175 mln km.

Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

M 688. Udowodnić, że dla żadnego $k \in \mathbf{N}$ liczba 3^k nie jest sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych różnych od zera.
Rozwiązanie na str. 12

M 689. Załóżmy, że n jest liczbą naturalną, a liczby a_i (dla $1 \le i \le n$) oraz p są rzeczywiste i dodatnie. Udowodnić nierówność

$$n \sum_{i=1}^{n} a_i^p \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{p+1}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{-1}\right).$$

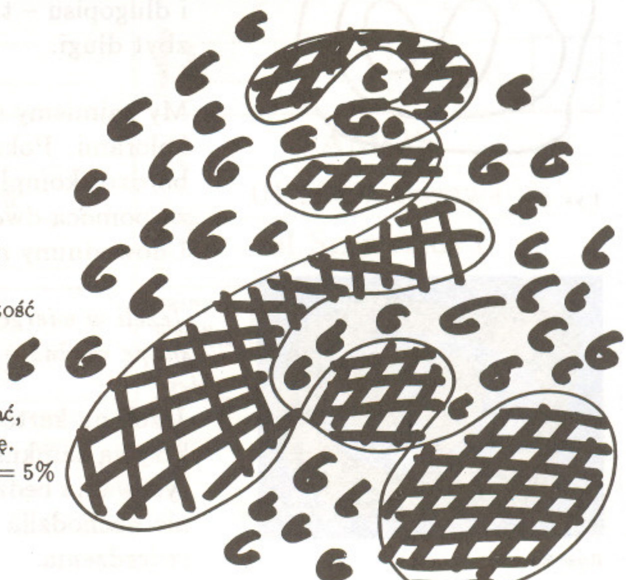
Rozwiazanie na str. 12

M 690. O liczbach $a_1, \ldots, a_n$ wiadomo, że dla każdego k zachodzi nierówność $a_{k+1} - 2a_k + a_{k-1} \ge 0$ oraz $a_1 = a_n = 0$. Wykazać, że wówczas wszystkie a_j są niedodatnie.
Rozwiązanie na str. 12

Redaguje Jarosław KULPA

F 371. 30 czerwca 1908 roku na Syberii odnotowano wybuch o sile 16 megaton trotylu. Przypisuje się to upadkowi meteorytu zwanego Tunguskim, którego szczątków nie odnaleziono. Ocenić promień meteorytu Tunguskiego zakładając, że był to obiekt, którego prędkość względem Ziemi była rzędu prędkości Ziemi w ruchu wokół Słońca, tj. $v = 30$ km/s, a jego gęstość wynosiła $\rho = 2000$ kg/m^3 (typowa gęstość planetoid). Siła wybuchu 1 kg trotylu jest równa 3,7 MJ.
Rozwiązanie na str. 13

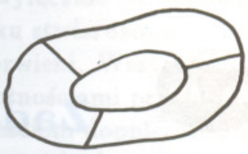
F 372. Pocisk wystrzelono pod kątem 45° z prędkością v_0. Oszacować, o ile będzie mniejsza prędkość pocisku w momencie uderzenia o ziemię. Zakładamy, że siła oporu powietrza w momencie wystrzału stanowi $\varepsilon = 5\%$ wagi pocisku. Siła oporu powietrza jest proporcjonalna do kwadratu prędkości pocisku.
Rozwiązanie na str. 13



Na cztery, a czasem na dwa

W 1852 roku Francis Guthrie – student Londyńskiego University College zaobserwował (lecz nie potrafił tego udowodnić), że każdą mapę można tak pomalować czterema kolorami, aby sąsiednie państwa były różnych kolorów. Sąsiednie, czyli takie państwa, które stykają się wzdłuż linii, a nie w pojedynczych punktach.

Na rysunku 1 mamy przykład mapy, której nie można pomalować trzema kolorami (dlaczego?).



Rys. 1

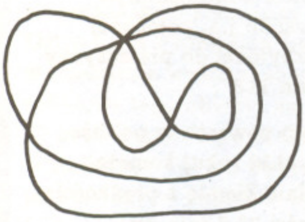
Francis przedstawił swój problem bratu, który też nie mogąc poradzić sobie z nim zapytał profesora, na którego wykłady uczęszczał. Wkrótce potem wielu wybitnych matematyków zainteresowało się tym problemem, lecz nikt nie potrafił go rozwiązać. Tak zrodziła się słynna hipoteza czterech barw.

Hipoteza ta została w końcu udowodniona w 1976 roku przez Kennetha Appela i Wolfganga Hakena. Ich dowód wymagał użycia komputera do sprawdzenia wielu tysięcy bardzo skomplikowanych przypadków, tylu, że nie ma możliwości sprawdzenia tego dowodu za pomocą kartki i długopisu – tak jak zwykli to czynić matematycy. Jest on po prostu zbyt długi.

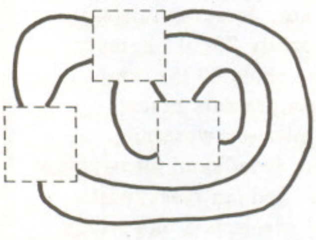
My zajmiemy się teraz mapami, które można pomalować dwoma kolorami. Pokażemy, jak od ręki można bez zastanowienia rysować bardzo skomplikowane mapy i mieć pewność, że da się je pomalować za pomocą dwóch barw. Od ręki..., a raczej od jednego ruchu ręki. Udowodnimy mianowicie następujące twierdzenie

Jeżeli w wierzchołkach schodzi się zawsze parzysta liczba państw, to taką mapę można pomalować za pomocą dwóch barw.

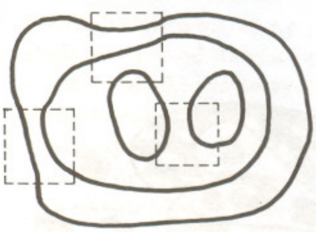
Jeżeli na kartce papieru bez odrywania długopisu narysujemy dowolną krzywą zamkniętą z samoprzecięciami, przy czym jeżeli podczas rysowania będziemy dbać o to, aby rysowana linia na żadnym odcinku nie nachodziła na siebie, to otrzymamy mapę spełniającą założenia twierdzenia.



Rys. 2a

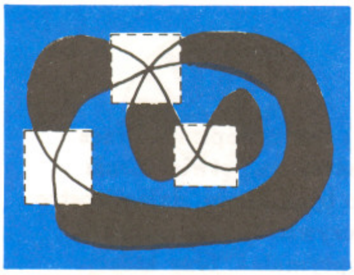


Rys. 2b

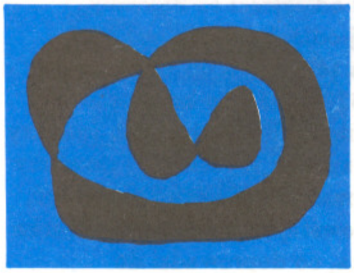


Rys. 2c

Rys. 2d



Rys. 2e



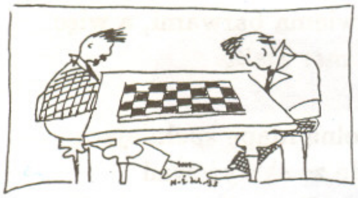
Rys. 2f

Kilka tak otrzymanych map pokolorowanych dwiema barwami, a więc w „szachownicę” zdobi tu i ówdzie niniejszy numer *Delty*.

Przystąpmy teraz do dowodu. Rozważmy dowolną mapę spełniającą założenia twierdzenia (rys. 2a). Następnie każde ze skrzyżowań przykryjmy małym skrawkiem papieru (rys. 2b). Teraz linie urywają się po dojściu do brzegu papierków. Ponieważ liczba krzywych dochodzących do brzegu danego papierka jest parzysta, więc możemy je połączyć w pary. Połączmy tak owe pourywane linie, aby się nie przecinały (rys. 2c). Zróbmy to na jeden, dowolnie wybrany sposób spośród wielu możliwych. Otrzymamy układ nie przecinających się krzywych zamkniętych – takich zdeformowanych okręgów. Łatwo zauważyć, że tak otrzymaną nową mapę można pomalować na dwa kolory: dowolnie wybrane (nowe) państwo malujemy jednym kolorem, jego sąsiadów drugim, sąsiadów sąsiadów pierwszym itd. Łatwo zauważyć, że nie dojdziemy do sytuacji, w której sąsiednie państwa przyjdzie nam malować tym samym kolorem. Po pomalowaniu usuńmy karteczki (rys. 2 d, e). Zostaną niezamalowane fragmenty. Teraz już jest oczywiste, że owe fragmenty można zamalować we właściwy sposób (rys. 2f).

Udowodnione przed chwilą twierdzenie ma zastosowanie w teorii węzłów, ale to już całkiem inna historia.

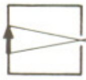
Małą Deltę przygotował Piotr HAJŁASZ



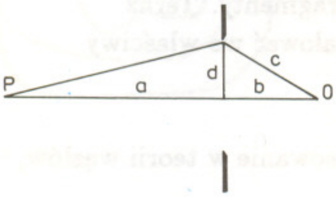
Camera obscura

Kazimierz PIETRASZKIEWICZ

Camera obscura, czyli ciemnia optyczna (dalej c.o.) została opisana przez Leonarda da Vinci (1452–1519). Działanie c.o. uważano za potwierdzenie prostoliniowego rozchodzenia się światła. Wiadomo było, że c.o. daje nieostre obrazy przy zbyt dużej średnicy otworka (co jest oczywiste), ale i także przy średnicy zbyt małej. Istnieje zatem średnica optymalna, przy której odwzorowanie w c.o. jest najlepsze. Jednak odpowiedź na pytanie: jaka powinna być optymalna średnica otworka w c.o., dała dopiero teoria dyfrakcji światła sformułowana przez A. Fresnela (1788–1827). Zastosujmy tę teorię do obliczenia średnicy otworka c.o. Przyjmijmy, że odległość punktu przedmiotu P od c.o. wynosi a, natomiast punkt obrazu O jest w odległości b. Załóżmy na początek, że mamy przedmiot w bardzo wielkiej odległości i że jest on źródłem fali monochromatycznej o długości λ. Fala ta dociera do c.o. jako fala płaska. Przyjmijmy też za Ch. Huygensem (1629–1695), że każdy punkt ośrodka, do którego dociera fala, staje się źródłem nowych fal wtórnych (punkty znajdujące się na powierzchni fazowej emitują fale zgodne w fazie). Wykreślmy na froncie falowym tej fali okrąg o promieniu c, z punktu O. Łatwo zauważyć, że jeżeli c będzie wynosić $b + \lambda/2$, to fale wtórne powstające na brzegu otworka będą się różnić o $\lambda/2$ od fal pochodzących ze środka, co doprowadzi do częściowego wygaszenia się tych fal w punkcie O. Z kolei wartość $c = b + \lambda/4$ zapewnia „praktycznie” zgodność faz fal wtórnych docierających do O. Jednak, czy nie jest to warunek zbyt ostry? Otóż jest! Kierując się zdrowym rozsądkiem przyjmiemy $c = b + \lambda/3$. Łatwo wyliczyć, że promień otworka wynosi $d \approx 0,8\sqrt{b\lambda}$, czyli jego średnica wynosi $D = 2d \approx 1,6\sqrt{b\lambda}$.



Rys. 1



Rys. 2

W tym miejscu warto zauważyć, że zdrowy rozsądek jest tutaj dobrym doradcą, gdyż ścisły wynik uzyskany przez Lorda Rayleigha (1842–1919) jest bardzo zbliżony do naszego szacowania. Według Rayleigha $D = 1,8\sqrt{b\lambda}$, a my otrzymaliśmy $D = 1,6\sqrt{b\lambda}$. Jednak ogólnie prawdą jest, że zdrowym rozsądkiem należy posługiwać się w fizyce bardzo ostrożnie.

Prenumerata „Delty”
za okres:

Prenumerata „Delty”
za okres:

Prenumerata „Delty”
za okres:

Oszacujmy teraz wielkość plamki dyfrakcyjnej, czyli obrazu dyfrakcyjnego punktu. Plamka dyfrakcyjna składa się z obszaru centralnego (tzw. dysku Airy'ego, w którym skupione jest 83,8% energii) i otaczających go, coraz to słabszych, pierścieni. Przyjmijmy, że miarą tej wielkości będzie średnica centralnego dysku Airy'ego. Z teorii dyfrakcji wynika, że wynosi ona:

$$\Delta = \frac{1,22\lambda b}{D}.$$

Wzór powyższy jest słuszny dla układów bezaberracyjnych. Zastosowanie go do c.o. da nam jedynie wynik przybliżony, gdyż naszej c.o. nie możemy traktować jako układu bezaberracyjnego (dlaczego?). Otrzymamy $\Delta \approx 0,5D$.

A więc plamka dyfrakcyjna jest mniejsza od średnicy otworka! Do sprawdzenia uzyskanych wyników możemy użyć popularnego aparatu typu *Zenit*. Wystarczy tylko wykręcić obiektyw. W jego miejsce przyklejamy (na przykład plastrem) kartonik z otworem w środku. Do otworka wklejamy kawałek folii aluminiowej. Teraz należy tylko wykonać w folii otworek. Jaka powinna być jego średnica? Otóż we wzorze na D należy podstawić $b = 45,5$ mm (jest to odległość otworka od płaszczyzny kliszy fotograficznej), a za λ podstawiamy 550 nm (jest to długość fali odpowiadająca maksimum czułości oka ludzkiego, a także maksimum czułości większości negatywowych materiałów czarno-białych). Otrzymamy $D \approx 0,25$ mm. Tak mały otworek można wykonać końcem igły krawieckiej. (Dla orientacji: średnica najcieńszych igieł wynosi około 0,6 mm.)

Zdjęcie wykonane za pomocą *camera obscura*.

Aby wykonać zdjęcie poprawnie naświetlone, powinniśmy jeszcze określić wartość otworu względnego naszej c.o. Jest to stosunek ogniskowej do średnicy. W naszym przypadku wynosi on 180. Jeżeli światłomierz wskazuje, że w danych warunkach poprawne naświetlenie uzyskamy przy otworze względnym 8 i czasie 1/250 s, to dla naszej c.o. wyniesie on:

$$\tau = \frac{1}{250}\,\mathrm{s}\,\frac{180^2}{8^2} \approx 2\ \mathrm{s}.$$

Skorzystaliśmy tutaj z prawa, które mówi, że fotochemiczne działanie promieniowania świetlnego zależy od iloczynu oświetlenia przez czas naświetlania. Niestety, prawo to zawodzi przy małych wartościach oświetlenia. Mamy tu do czynienia z efektem Schwarzschilda. Wyjaśnienia jego należy szukać na poziomie molekularnym.

Uwaga praktyczna: czas naświetlania powinien być około dwóch razy dłuższy, niż wynikałoby to z naszych szacowań. Z doświadczeń autora wynika, że dla zdjęć w jasny słoneczny dzień należy stosować czasy naświetlania około 4–8 s (dla średnio czułej błony).

Możemy także podjąć próby z materiałami barwnymi, jednak musimy sobie zdawać sprawę, że wielkość efektu Schwarzschilda dla poszczególnych warstw fotoczułych może być różna, co się objawi dominacją jednej z barw.

Oczywiście, aparat *camera obscura* możemy sami wykonać z kartonu.

Wielkie Twierdzenie Fermata

Władysław NARKIEWICZ

Niewiele problemów matematycznych osiągnęło taką sławę jak pytanie o to, czy dla $n > 2$ istnieje n-ta potęga liczby naturalnej, dająca się przedstawić w postaci sumy dwóch potęg o tym samym wykładniku, tj. czy istnieją liczby naturalne x, y, z, spełniające równanie

$$x^n + y^n = z^n. \tag{1}$$

W przypadku $n = 2$ odpowiedź na to pytanie jest prosta, mamy bowiem $5^2 = 3^2 + 4^2$ i nietrudno stwierdzić, że równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań. Już w starożytności matematyk aleksandryjski, Diofantes, potrafił opisać wszystkie rozwiązania równania

$$x^2 + y^2 = z^2. \tag{2}$$

Dzieła jego zostały opublikowane we Francji w połowie XVII wieku i jeden z egzemplarzy tego wydania trafił w ręce wybitnego francuskiego matematyka, Pierre'a Fermata, który około roku 1637 na marginesie (a były one wówczas dość spore) napisał:

Nie można rozbić sześcianu na dwa sześciany, ani bikwadratu na dwa bikwadraty, ani żadnej potęgi wyższej od 2 na dwie potęgi o tym samym wykładniku. Znalazłem naprawdę zadziwiający dowód tego twierdzenia, lecz ten margines jest zbyt wąski, by go zmieścić.

To stwierdzenie, które we współczesnej terminologii można wysłowić następująco:
dla $n > 2$ równanie (1) *nie ma naturalnych rozwiązań,*
nosi od dawna nazwę **Wielkiego Twierdzenia Fermata (WTF)**.

Zauważmy, że wystarczy twierdzenie to udowodnić dla wszystkich nieparzystych wykładników pierwszych oraz dla wykładnika 4, gdyż z prawdziwości WTF dla pewnego wykładnika n wynika jego słuszność dla wszystkich wielokrotności n, a każda liczba naturalna większa od 2 ma dzielnik pierwszy nieparzysty lub też jest potęgą dwójki, a więc dzieli się przez cztery.

Dowód WTF w przypadku $n = 4$ podał sam Fermat, opierając się na wyniku Diofantesa o rozwiązaniach równania (2). Przez wiele lat matematycy szukali dowodu WTF dla innych wykładników. W roku 1770 Leonard Euler znalazł dowód w przypadku $n = 3$, a w 1828 r. P.G.L. Dirichlet rozstrzygnął przypadek $n = 5$. Ważnym krokiem naprzód stała się stworzona przez E.E. Kummera teoria liczb idealnych, która później doprowadziła do wytworzenia się wielu podstawowych pojęć nowoczesnej algebry. Za pomocą tej teorii Kummer potrafił udowodnić WTF dla wszystkich liczb $n > 2$, mających dzielnik pierwszy mniejszy od 100. (Jego dowód nie był w pełni dokładny, ale pozostawioną lukę wypełnił D. Hilbert w 1897 roku.)

Wyraźny wzrost zainteresowania problemem Fermata zaznaczył się po roku 1909, kiedy to Getyngeńska Akademia Nauk ogłosiła, iż niejaki Paul Wolfskehl zapisał w testamencie sto tysięcy marek (co było wówczas ogromną fortuną) osobie, która udowodni twierdzenie sformułowane przez Fermata. Swoje „dowody" zgłaszało setki amatorów, często niewiele z matematyki rozumiejących i nie zdających sobie sprawy z trudności zagadnienia. Trwa to aż po dzień dzisiejszy, aczkolwiek liczba nadsyłanych prób dowodu znacznie zmalała, gdy okazało się, że wartość nagrody spadła i aktualnie wynosi kilka tysięcy marek. (Zauważmy tu, że do dzisiaj jedynie w niewielu przypadkach znany jest elementarny dowód WTF i specjaliści są przekonani, że nie jest możliwe istnienie prostego i elementarnego dowodu, tak więc próby jego znalezienia są jedynie stratą czasu.)

Rozwiązanie zadania M 688.
Przypuśćmy, że teza zadania jest fałszywa. Weźmy najmniejszą liczbę naturalną k, dla której istnieją całkowite, niezerowe m i n spełniające równość $m^2 + n^2 = 3^k$. Kwadrat liczby całkowitej daje z dzielenia przez 3 resztę zero lub jeden, zatem obie liczby m i n są podzielne przez 3, co oznacza, że $(3j)^2 + (3l)^2 = 3^k$, a więc $j^2 + l^2 = 3^{k-2}$, a to już jest sprzeczność (łatwo zauważyć, że $k - 2$ też jest liczbą naturalną!).

Rozwiązanie zadania M 689.
Rozważmy funkcję f daną wzorem

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^x\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{p-x}\right).$$

Lewa strona nierówności, której dowodzimy, jest równa $f(p)$, a prawa $f(p+1)$. Łatwo zauważyć, że f jest wypukła (bo jest sumą funkcji wypukłych $a_j^p \cdot (a_i/a_j)^x$) i ma własność

$$f((p/2) + x) = f((p/2) - x).$$

Oznacza to, że wykres f ma pionową oś symetrii, skąd wobec wypukłości funkcji f ma ona minimum dla $x = p/2$ i rośnie dla $x > p/2$. Zatem $f(p) < f(p+1)$, co należało udowodnić.

Rozwiązanie zadania M 690.
Teza zadania staje się niemal oczywista, jeśli zapiszemy nierówność podaną w założeniu w postaci $a_{k+1} - a_k \geq a_k - a_{k-1}$. Znaczy to, że kolejne odcinki łamanej L o wierzchołkach (k, a_k) mają coraz większe współczynniki kierunkowe, czyli L jest wykresem funkcji wypukłej, określonej na przedziale $[1, n]$ i znikającej na jego końcach. Stąd wynika, że wszystkie punkty wykresu leżą poniżej osi odciętych.
A oto inne rozwiązanie. Przypuśćmy, że teza zadania jest fałszywa i weźmy taką liczbę j, że $a_{j-1} \leq 0 < a_j$. Mamy wówczas

$$a_n - a_{n-1} \geq a_{n-1} - a_{n-2} \geq \ldots \geq$$
$$\geq a_{j+1} - a_j \geq a_j - a_{j-1} > 0.$$

Ponieważ $a_k - a_{k-1} > 0$ dla $k = j, j+1, \ldots, n$, więc otrzymujemy

$$0 = a_n > a_{n-1} > \ldots > a_j > 0.$$

Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Używając metody Kummera wspomaganej techniką komputerową potrafiono powiększyć zbiór wykładników, dla których WTF jest prawdziwe. I tak w 1987 roku J.W. Tanner i S.S. Wagstaff wykazali jego słuszność dla wszystkich wykładników pierwszych $p < 150\,000$, a w tzw. pierwszym przypadku nawet dla $p < 156\,442\,236\,847\,241\,650$. („Pierwszy przypadek" WTF zachodzi wtedy, gdy dodatkowo się żąda, by żadna z liczb x, y, z w równaniu (1) nie była podzielna przez wykładnik, o którym zakładamy, że jest liczbą pierwszą.)

Ostatnie lata przyniosły istotny postęp. Najpierw G. Faltings udowodnił w 1983 roku bardzo ogólne twierdzenie o równaniach z rozwiązaniami całkowitymi, z którego wynika m.in., że dla ustalonego $n > 2$ równanie (1) może mieć jedynie skończenie wiele rozwiązań spełniających warunek $\mathrm{NWD}(x, y, z) = 1$. Następny ważny rezultat został uzyskany przez L.M. Adlemana i D.R. Heath-Browna w 1985 roku, którzy wykorzystali pewien rezultat E. Fouvry'ego z teorii rozmieszczenia liczb pierwszych do wykazania, że WTF jest słuszne w pierwszym przypadku dla nieskończenie wielu wykładników pierwszych.

Wreszcie w czerwcu 1993 roku Andrew Wiles zaprezentował na konferencji w Cambridge dowód WTF, słuszny dla wszystkich wykładników większych od 2. Dowód ten nie jest jeszcze opublikowany (będzie prawdopodobnie zawierał ponad 200 stron) i jest bardzo trudny, opiera się bowiem na najnowszych osiągnięciach algebry, analizy i geometrii. Obecnie jest on sprawdzany przez czołowych specjalistów, ale panuje przekonanie, że doczekaliśmy się wreszcie rozwiązania jednego z najsławniejszych problemów matematyki.

Patrz w niebo

Kiedy ostatnio wybuchła supernowa w naszej Galaktyce? Wbrew pozorom nie jest łatwo odpowiedzieć na tak proste pytanie, ponieważ większa część Galaktyki jest ukryta przed naszymi oczami za warstwami materii międzygwiazdowej. Ostatnią jasną i widoczną gołym okiem była supernowa Keplera z 1604 roku, ale niekoniecznie musiała to być w ogóle ostatnia. Promieniowanie optyczne nie jest tym, które najłatwiej przenika materię międzygwiazdową i np. radioźródło Cassiopeia A jest uważane za pozostałość po młodszej supernowej. Jej eksplozja nastąpiła prawdopodobnie w połowie XVII wieku i była zupełnie nie zauważona przez ówczesnych obserwatorów. John J. Cowan z University of Oklahoma (USA) twierdzi, że jego zespół znalazł pozostałość po supernowej, która wybuchła najwyżej 100 lat temu.

Podejrzanym o to obiektem jest radioźródło w Tarczy oznaczone katalogowym symbolem 25.5 + 0.2. Został on odkryty w trakcie przeglądu pasa Drogi Mlecznej prowadzonego za pomocą zespołu radioteleskopów wchodzących w skład *Very Large Array*. Obiekt ten w zakresie radiowym wygląda jak tarczka o rozmiarach 15×20 sekund łuku, co przy odległości ocenianej na co najmniej 7000 pc odpowiadałoby liniowym rozmiarom około pół parseka. Tarczka nie wykazuje żadnej struktury, podejrzewa się jednak obecność pulsara w centrum (jak w mgławicy Krab).

O obiekcie tym na razie informacje są bardzo skąpe. Nie wiadomo nawet na przykład, czy jego jasność spada czy rośnie. Nie ma w tym nic dziwnego, ponieważ leży on blisko płaszczyzny Galaktyki, w dodatku w obszarze bardzo gęsto wypełnionym gwiazdami, gwiazdozbiór Tarczy leży wszak niedaleko kierunku ku centrum Galaktyki. W ogóle obserwacje supernowych są z natury rzeczy skazane na los szczęścia, w naszej Galaktyce są szczególnie trudne, tak że nawet częstość pojawiania się supernowych jest bardzo źle określona. A informacja ta miałaby ogromne znaczenie dla teorii ewolucji gwiazd.

Tomasz KWAST

Rozwiązanie zadania F 871.
Energia kinetyczna meteorytu jest równoważna sile wybuchu

$$\frac{mv^2}{2} = E\,.$$

Podstawiając $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$, oraz przeliczając energię na jednostki układu SI, otrzymujemy

$$r = \sqrt[3]{\frac{3E}{2\pi\rho v^2}} = 25 \text{ m}\,.$$

Warto zauważyć, że masa meteorytu wynosi 0,15 megatony i jest wielokrotnie mniejsza od masy trotylu powodującego równoważny wybuch.

Rozwiązanie zadania F 872.
Potraktujmy siłę oporu powietrza jako małe zaburzenie. Prędkość w ruchu niezaburzonym jest równa:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \frac{v_0^2}{2} + \left(v_0\frac{\sqrt{2}}{2} - gt\right)^2.$$

Czas ruchu zaś wynosi

$$T = \frac{v_0\sqrt{2}}{g}\,.$$

Stąd siła oporu powietrza jest równa

$$F = kv^2 = kv_0^2\left(1 - \frac{2t}{T} + \frac{2t^2}{T^2}\right).$$

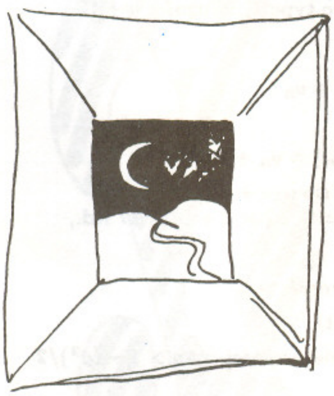
Zmiana pędu pocisku równa jest popędowi siły

$$\Delta p = \int_0^T F\,\mathrm{d}t\,,$$

$$m\Delta v = \frac{2}{3}kv_0^2 T\,.$$

Podstawiając wyrażenie na T oraz uwzględniając, że $kv_0^2 = \varepsilon g$ otrzymujemy

$$\Delta v = \frac{2\sqrt{2}}{3}\varepsilon v_0 \approx 0{,}047 \cdot v_0\,.$$



W rozwiązaniu zadania 865 z fizyki w numerze 9/1993 zamiast „dla potencjału postaci $\frac{1}{r}$" powinno być „dla potencjału postaci r^2".

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 III 1994

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 257 (WT=2,66) i 258 (WT=1,65)
z numeru 3/1993

Leszek Gasiński	– Stalowa Wola	41,46
Jerzy Janowicz	– Bolesławiec	41,19
Janusz Olszewski	– Suwałki	40,24
Lesław Skrzypek	– Rzeszów	39,05

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1993.

Zadania z matematyki nr 271, 272

Redaguje Marcin E. KUCZMA

271. Do każdej ściany ośmiościanu foremnego o objętości V doklejamy czworościan foremny (ściana ośmiościanu jest ścianą czworościanu). Powstała bryła B nie jest wypukła. Obliczyć objętość najmniejszego wielościanu wypukłego zawierającego B. (Zabawki na choinkę...)

272. Udowodnić, że dla liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{ab(A+B)}{ab(A+B)+ABC} + \frac{bc(B+C)}{bc(B+C)+ABC} + \frac{ca(C+A)}{ca(C+A)+ABC} \le 1,$$

gdzie $A = b+c$, $B = c+a$, $C = a+b$.

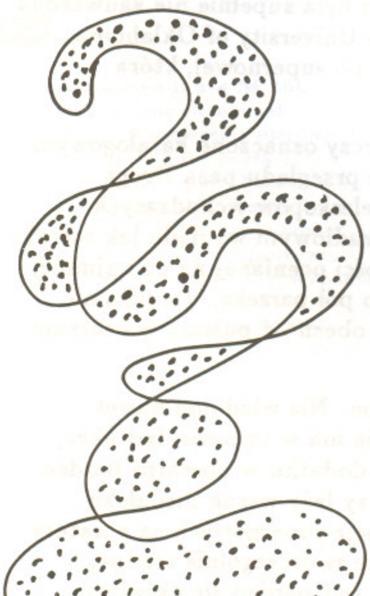
Zadanie **272** zaproponował pan Waldemar Pompe z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 8/1993

Przypominamy treść zadań:

263. W każdym okienku tabeli prostokątnej o wymiarach 10×2 umieszczamy tak kółko lub krzyżyk, by żadne dwa krzyżyki nie znalazły się w okienkach sąsiednich. Ile jest takich rozmieszczeń?

264. Udowodnić, że dla $x \in (0; \pi/4)$ zachodzi nierówność $\sin(\operatorname{tg} x) > x$.



263. Każde dopuszczalne rozmieszczenie krzyżyków i kółek można utożsamiać ze słowem utworzonym z 10 znaków A, B lub C: na k-tej pozycji piszemy symbol A, jeśli w k-tej parze okienek tabeli figuruje układ kółko–krzyżyk; symbol B, gdy krzyżyk–kółko; symbol C, gdy dwa kółka. Nie mogą wystąpić pod rząd dwa znaki A ani dwa znaki B.

Rozważmy analogicznie tworzone słowa długości n. Słowo kończące się symbolem A lub B nazwijmy słowem typu I; słowo zakończone symbolem C — słowem typu II. Liczby słów (długości n) typu I oraz II oznaczmy odpowiednio przez u_n oraz v_n.

Ze słowa typu I, długości n, można otrzymać (przez dopisanie kolejnego znaku) dokładnie jedno słowo typu I oraz dokładnie jedno słowo typu II, długości $n+1$. Ze słowa typu II, długości n, można otrzymać dwa słowa typu I oraz jedno słowo typu II, długości $n+1$.

Wynikają stąd wzory rekurencyjne

$$u_{n+1} = u_n + 2v_n\,, \qquad v_{n+1} = u_n + v_n\,.$$

Wobec tego

$$v_{n+2} = u_{n+1} + v_{n+1} = (u_n + 2v_n) + (u_n + v_n) = v_n + 2v_{n+1}\,.$$

Szukana łączna liczba dopuszczalnych słów długości 10 równa się $u_{10} + v_{10}$, czyli v_{11}. Dla $n = 1$ i $n = 2$ mamy $v_1 = 1$, $v_2 = 3$. A zatem $v_3 = 1 + 6 = 7$, $v_4 = 3 + 14 = 17$ itd., $v_{11} = 8119$.

264. Wprowadźmy zmienną $y = \operatorname{tg} x$. Należy wykazać nierówność

$$\sin y > \operatorname{arctg} y \qquad \text{dla} \quad y \in (0; 1\rangle\,.$$

Przyjmując $f(y) = \sin y - \operatorname{arctg} y$ oraz korzystając ze znanej nierówności $\cos y > 1 - (y^2)/2$ mamy

$$f'(y) = \cos y - \frac{1}{1+y^2} > 1 - \frac{y^2}{2} - \frac{1}{1+y^2} = \frac{y^2(1-y^2)}{2(1+y^2)} > 0 \qquad \text{dla} \quad y \in (0; 1)\,.$$

Funkcja f jest więc rosnąca w przedziale $\langle 0; 1\rangle$. Wobec równości $f(0) = 0$ uzyskujemy dowodzoną nierówność $f(y) > 0$ dla $y \in (0; 1\rangle$.

Zadania z fizyki nr 169, 170

Redaguje Jerzy B. BROJAN

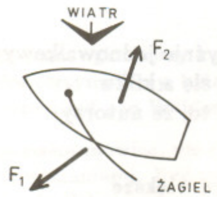
169. Jak wiadomo, żaglówka może płynąć pod wiatr, tzn. w kierunku tworzącym z kierunkiem wiatru kąt większy od 90° (do około 150°). Taką możliwość żaglówka zawdzięcza kilowi lub mieczowi, który bardzo ogranicza przesunięcia prostopadłe do osi jachtu, pozostawiając jedynie swobodę przesunięcia wzdłuż tej osi. Na rysunku 1 przedstawione zostały siły działające na żaglówkę przy kursie pod wiatr: $\vec{F}_1$ jest siłą działania powietrza na żagiel, a $\vec{F}_2$ – siłą reakcji wody na kil (lub miecz). Wypadkowa tych dwóch sił jest skierowana do przodu, powodując opisany ruch. Dzięki halsowaniu, czyli okresowym zmianom kursu (rys. 2), żaglówka może przemieszczać się średnio wprost pod wiatr – pod kątem 180°.

A oto zadanie. Dwaj zawodnicy rozgrywali regaty na identycznych jachtach płynąc w dół rzeki. Ponieważ nie było wtedy żadnego wiatru, więc zawodnik A zwinął żagle, aby zmniejszyć opór powietrza. Zawodnik B postąpił inaczej: zauważył, że płynąc z prądem odczuwa jakby wiatr z przeciwka. Postawił więc żagle i zaczął halsować. Który wygrał wyścig?

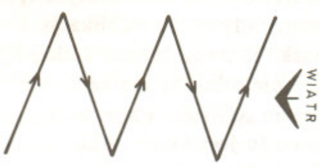
170. Z początkowo nieruchomego pistoletu oddano strzał. Obliczyć „kąt podbicia" (kąt między początkowym kierunkiem lufy a torem pocisku) zakładając, że siła odrzutu działająca na pistolet w chwili strzału jest znacznie większa od siły działającej ze strony ręki. Dane: masa pocisku m, masa pistoletu M, moment bezwładności pistoletu względem środka masy I, środek masy pistoletu znajduje się w odległości h od początku lufy o długości l w kierunku prostopadłym do niej (rys. 3). Pominąć pęd gazów prochowych w porównaniu z pędem pocisku.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 155 (WT=1,00) i 156 (WT=3,16) z numeru 3/1993

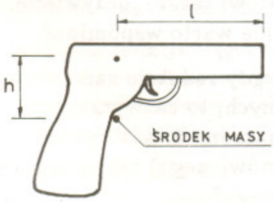
Tomasz Wietecha	– Tarnów	33,90
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	28,77



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 8/1993

Przypominamy treść zadań:

161. Zbrodnia w ciemni fotograficznej

Inspektor Wnikliwy przesłuchiwał Męczysława Rozwalkę, fotografa z dalekiego przedmieścia Czarny Koniec.

– A więc, jeśli to nie ty zamordowałeś twojego wspólnika Naiwińskiego, to kto to zrobił?

– Nie znam go, panie inspektorze. Widziałem go tylko przez krótką chwilę, i to w słabym świetle lampy ciemniowej. Wywoływałem właśnie odbitki, gdy nagle usłyszałem hałas. Odwróciwszy się zobaczyłem biednego Naiwka na podłodze z nożem w plecach, i tamtego drania uciekającego. Był raczej niskiego wzrostu, miał na sobie zielony sweter i niebieskie spodnie. W uchu zauważyłem błyszczący kolczyk.

– Wystarczy, Rozwalko. Wyjątkowo nieudolnie kłamiesz – widać, że brakuje ci podstawowych wiadomości z fizyki. To zeznanie będzie koronnym dowodem przeciw tobie. Sierżancie, odprowadźcie go!

W jaki sposób inspektor Wnikliwy zdemaskował mordercę?

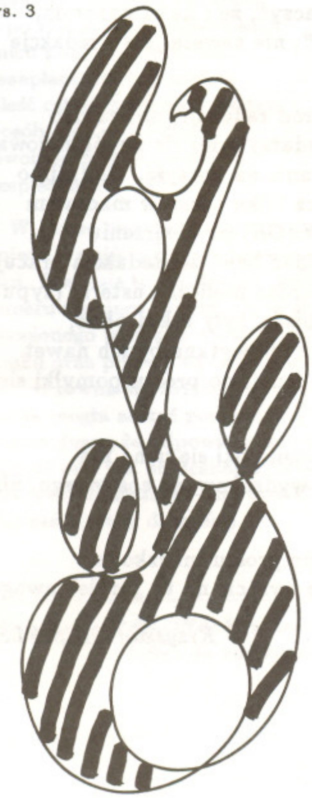
162. Strumień wody wypływa z poziomej rury. Prędkość wody w rurze zmienia się z odległością r od osi rury zgodnie ze wzorem $v(r) = v_0[1-(r/r_0)^2]$, gdzie r_0 jest promieniem rury, a maksymalna prędkość v_0 ma wartość 10 m/s. Zakładając, że dzięki siłom spójności strumień nie rozdzieli się, obliczyć wysokość spadku wody do chwili uderzenia w pionową ścianę odległą o 1 metr od wylotu rury.

161. Widmo światła lampy ciemniowej jest ograniczone do czerwieni, nie można więc przy takim oświetleniu widzieć różnych barw. Rozwalko musiał zmyślić opowiastkę o tajemniczym mordercy.

162. Załóżmy, że poszczególne elementy objętości wody zachowują w czasie spadku swoją prędkość poziomą (wydaje się to rozsądne ze względu na małą lepkość wody i dość krótki czas spadku). Przyjmijmy ponadto, że strumień będzie miał kształt paraboli $y = \frac{1}{2}kx^2$, gdzie x jest współrzędną poziomą, a y – pionową (ze zwrotem w dół). Z tych założeń wynika, że współrzędna x elementu o prędkości v zależy od czasu zgodnie ze wzorem $x = vt$, a współrzędna y – zgodnie ze wzorem $y = \frac{1}{2}kv^2t^2$, czyli przyspieszenie pionowe tego elementu wynosi $a = kv^2$. To przyspieszenie należy przyrównać do wyrażenia $g + \frac{F}{m}$, gdzie F jest siłą działającą na element o masie m ze strony innych elementów strumienia. Stąd $F = m(kv^2 - g)$. Jeśli rozpatrujemy część strumienia zawartą w warstwie cylindrycznej od promienia r do $r + dr$, to jej objętość jest równa $2\pi r dr \cdot l$, gdzie l – odległość od wylotu rury do ściany, a masa – $2\pi l\rho r\,dr$. Oczywiście, łączna siła działająca między wszystkimi elementami musi być równa zeru, czyli otrzymujemy warunek w postaci

$$\int_0^{r_0} (kv_0^2(1-(r/r_0)^2)^2 - g)r dr = 0.$$

Obliczając całkę znajdujemy $k = \frac{3g}{v_0^2}$, zatem strumień opadnie o $\frac{3gl^2}{2v_0^2} \approx 15$ cm. Wartość ta jest stosunkowo niewielka w porównaniu z odległością $l = 1$ m, co *post factum* usprawiedliwia niektóre z poczynionych przybliżeń (np. obliczanie objętości warstwy cylindrycznej, chociaż w rzeczywistości warstwa jest wygięta).

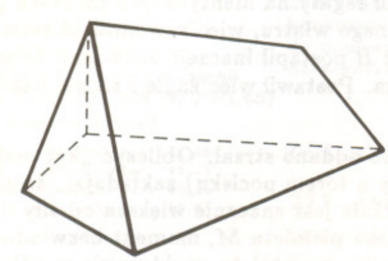


Póty dzban...

W *EPSILONIE* 12/1992 zaproponowane zostały Czytelnikom zadania świąteczne. Pierwsze z nich brzmiało:

Ile przekątnych ma przedstawiony na rysunku wielościan?

Czytelnicy, którzy zechcieli pobawić się epsilonowymi zadaniami, zapewne zdziwieni byli pytaniem o liczbę przekątnych najzwyklejszego ostrosłupa. Problem w tym, że oryginalny rysunek wyglądał troszkę inaczej, a mianowicie tak:



Czemu takie zadanie się w świątecznym numerze znalazło? Otóż, rysunek ów (wymyślony przez parę: DC & KC) pokazywaliśmy, pytając o liczbę przekątnych, wielu matematykom (dobrym! – i bynajmniej nie stroniącym od geometrii). I z reguły po pierwszym rzucie oka odpowiadali oni – „No przecież gołym okiem widać, że jedną!". Po drugim rzucie oka już tak nie uważali, ale w efekcie owych pierwszych – licznych – odpowiedzi wydało nam się, że zagadkę warto dać Czytelnikom *Delty*. Niestety – gdzieś po drodze między oddanym *EPSILONEM* a ostatecznie wydrukowaną wersją – rysunek uległ metamorfozie i zadanie przestało być ciekawe... Co gorsze, oddane były już do druku (w chwili, gdy ukazał się numer 12/1992, w stadium nie do zmiany) odpowiedzi na zadania świąteczne – tak, że nie można było zadania powtórzyć, już w wersji oryginalnej.

Przy okazji chciałbym się podzielić paroma uwagami.

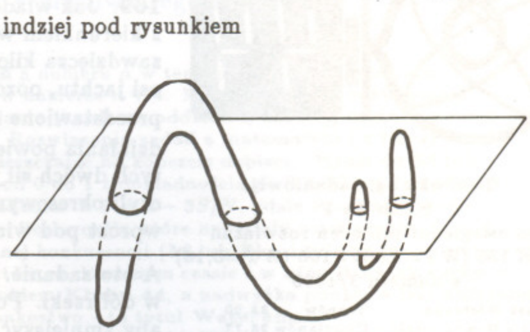
Od kilku lat piszemy (KC & ZP) od czasu do czasu artykuły popularne o matematyce, ukazało się już ich trochę w rozmaitych pismach. Niestety, bywało, że znajdywały się w nich niekiedy usterki, i to z reguły nie z winy autorów. Czasami zdarzały się przykre błędy w druku, czasami pechowe ingerencje redakcyjne w tekst. Może warto podać parę przykładów.

Do artykułu o fraktalach (już nie w *Delcie*) dołączyliśmy krótką notkę bibliograficzną Benoita Mandelbrota. Redakcja pisma zdziwiła się bardzo, że autorzy nie napisali o tym, że Mandelbrota wyróżniono najwyższym matematycznym odznaczeniem, Medalem Fieldsa, i dopisała tę wiadomość do notki, dodając również parę wyrywkowych informacji o tym medalu – nie powiadamiając jednak autorów o ingerencji w tekst... Drobiazgu, że Mandelbrot nigdy Medalu Fieldsa nie otrzymał, pod uwagę nie wzięto.

Kiedyś (również nie w *Delcie*) pisaliśmy o hipotezie Poincarégo. Po wytłumaczeniu odpowiednich pojęć hipoteza (mówiąca o rozmaitości zwartej, spójnej i jednospójnej) została sformułowana. W ostatecznej wersji tekstu słowo „jednospójna" zostało przez redakcję pisma usunięte – bo po co powtarzać drugi raz to samo? W efekcie niektórzy matematycy poddali artykuł ostrej krytyce – jak można pisać o hipotezie Poincarégo, skoro nawet nie umie się jej sformułować?

W jednym z artykułów ukazał się wzór: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{!}$.

Kiedy indziej pod rysunkiem



ukazał się podpis: „Ślady na płaszczyźnie jednowałkowych figur trójwymiarowych mogą składać się z kilku oddzielnych części". Kto wpadnie na to, że autorzy napisali „jednokawałkowych"?

Artykułowi o fraktalach groziło jeszcze większe niebezpieczeństwo, którego przypadkowo (ZP odwiedził akurat odpowiednią redakcję w momencie dokonywania poprawki) udało się uniknąć. Jeden z redaktorów odkrył zdjęcie fraktala podpisane „Julia set", stwierdził, że ktoś skonstruował taki ładny kolorowy fraktal i nazwał go imieniem „Julia", chciał więc zdjęcie wraz z romantycznym komentarzem dołączyć do tekstu. Gdyby do publikacji tego fragmentu doszło, środowisko matematyczne śmiałoby się z nas chyba przez wiele lat – nie udałoby się każdemu z osobna wytłumaczyć, że panowie KC i ZP naprawdę wiedzą, kim był Gaston Julia i co to jest zbiór Julii.

O poprawkach drobniejszych, jak przeredagowywanie fragmentów tekstów czy zmiana tytułów (na nie odpowiadające głównemu tematowi tekstu, oczywiście, bez konsultacji z autorami) nawet nie warto wspominać.

Co ciekawe, skądinąd wiem, że gdy redakcje zamieszczają tłumaczenia tekstów zagranicznych, to zazwyczaj przed publikacją dają przekłady tłumaczom do autoryzacji. Autor polski (nawet tekstu zamówionego) takiej możliwości z reguły nie ma. Ciekawe, dlaczego?

Gwoli ścisłości wypada zaznaczyć, że i nam, autorom, zdarzały się drobne „wpadki", nie zawsze przez redakcje „wyłapane"...

Chciałbym podkreślić, że wśród redakcji (nb. bardzo sympatycznych), z którymi zdarzyło mi się współpracować, *Delta* wyróżnia się zdecydowanie na korzyść. Tu (mimo że okazji było dużo, bo oprócz kilku tekstów maczałem palce w ... dziestu *EPSILONACH*) po obejrzeniu wydrukowanych numerów widać było, że Redakcja pracuje nad wyraz profesjonalnie. Bardzo nieliczne usterki (typu „literówek"), które miały miejsce, były tak drobne, że absolutnie niegodne uwagi; nie wytknąłby ich nawet najbardziej złośliwy krytyk. *Delcie* po prostu pomyłki się nie zdarzają.

Ale cóż – póty dzban wodę nosi, póki się ucho nie urwie... W końcu i w *Delcie* wydrukowano coś innego, niż chcieli autorzy.

Zaś zadania z wielościanem po prostu mi szkoda i chciałbym choć w tę sposób zwrócić na tę „bryłę" uwagę.

Krzysztof CIESIELSKI

epsilon

12/93
(34)

Czy Pan istnieje?

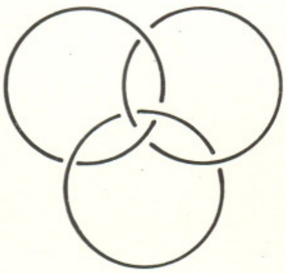
Rok temu ogłosiliśmy konkurs świąteczny. Wśród odpowiedzi, które otrzymaliśmy, była zaledwie jedna w pełni poprawna. Jej autorem był pan Waldemar Pompe z Warszawy. Gratulujemy!

Nawiasem mówiąc, nie otrzymaliśmy lawiny listów z rozwiązaniami. Być może Czytelnicy uznali nasze zagadki za mało ciekawe – a może za zbyt proste, by się bawić w korespondencję. Nie zrażeni ani tym, ani „wypadkiem przy pracy" (por. sąsiednia strona) proponujemy kolejne „*EPSILONOWE* zadania na Święta". Tym razem pod wspólnym hasłem, wzorowanym na znakomitym utworze Stanisława Lema „Czy pan istnieje, Mr Jones?". Wydaje nam się, że tym razem zagadki są trochę trudniejsze niż rok temu (choć, oczywiście, pogląd o większej lub mniejszej trudności jakiegoś zadania jest rzeczą niezwykle subiektywną). Jeśli ktoś rozwiąże wszystkie, zachęcamy do napisania do nas – przewidujemy nagrody!

Myśl wszystkich zadań jest taka sama – podany jest opis jakiegoś zjawiska matematycznego; należy stwierdzić, czy dana sytuacja jest możliwa, czy nie. W przypadku, gdy tak, należy podać konkretny przykład, gdy nie – w miarę przekonywająco to uzasadnić. Na odpowiedzi czekamy do miesiąca od ukazania się tego numeru *Delty*. Do dzieła zatem!

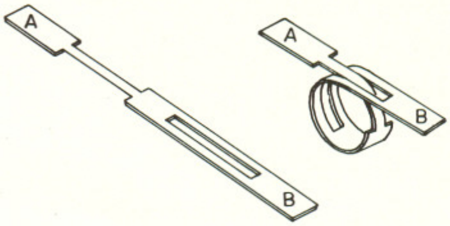
1. Czy istnieje funkcja ciągła określona na zbiorze liczb rzeczywistych, o wartościach rzeczywistych, która każdą liczbę wymierną przeprowadza w liczbę niewymierną, każdą zaś liczbę niewymierną w wymierną?

2. Wiadomo, iż można tak spleść ze sobą trzy okręgi (pętle wykonane ze sznurka), że po rozcięciu któregokolwiek z nich pozostałe dwa będą niezaplecione. Czy można spleść cztery takie pętle w ten sposób, aby po rozcięciu dowolnej reszta okazała się niespleciona?



3. W czasie pierwszej wojny światowej pocisk z działa zburzył stojącą u wejścia do pewnego zamku statuę rycerza z piką w ręku. Stało się to ostatniego dnia miesiąca. Iloczyn daty dnia, numeru miesiąca, wyrażonej w stopach długości piki, połowy wyrażonego w latach wieku dowódcy baterii strzelającej do zamku oraz połowy wyrażonego w latach czasu, jaki stała statua, równa się 451066. Czy jedynym rokiem, w którym statua mogła zostać postawiona, był rok 1714? (Oczywiście, przyjmujemy, że odpowiednie liczby – wyrażające wiek dowódcy, długość piki itd. są liczbami całkowitymi, oraz że są to wartości praktycznie możliwe – np. dowódca nie mógł mieć sześciu lat, pika zaś 70 stóp długości).

4. Czy pasek papieru można przekształcić z pozycji 1 na pozycję 2, jeśli koniec *A* paska jest przyklejony do stołu klejem *Super Glue* – rzecz jasna, nie rozrywając paska ani nie odklejając końca *A* od stołu?



5. Czy istnieje ostrosłup, którego podstawą jest czworokąt wypukły i którego dwie przeciwległe ściany boczne są prostopadłe zarówno do siebie, jak i do podstawy ostrosłupa?

Rozwiązania – za dwa miesiące. Przy haśle „Czy Pan istnieje?" nie można nie przypomnieć pewnej słynnej anegdoty... Historię tę opowiadał Andrzej Turowicz, który z kolei słyszał ją od Hugona Steinhausa.

Wybitni angielscy matematycy, Godfrey Harold Hardy (1877–1947) i John Edensor Littlewood (1885–1977), umówili się, że wszystkie swoje prace będą podpisywali wspólnie. Zrobili tak dlatego, że ciągle ze sobą rozmawiali o problemach matematycznych i później nie wiedzieli, czy daną rzecz zrobił tylko jeden z nich, czy też przypadkiem drugi również nie miał jakiegoś wkładu. Oczywiście, zanim zawarli tę umowę, pisali samodzielnie, także i po śmierci Hardy'ego Littlewood pisał sam. Poza tym Hardy napisał sam kilka książek. Anegdota mówi, że kiedyś Littlewood przyjechał do Berlina, do Edmunda Landaua (1877–1938) i Landau, który był bardzo arogancki, powiedział, gdy Littlewood się przedstawił: „O, to pan istnieje? A ja myślałem, że jest to tylko pseudonim, którego Hardy używa, gdy wstydzi się swoją pracę podpisać swoim nazwiskiem."

Do anegdoty należy dołączyć komentarz. Powyższa historia znalazła się w wywiadzie z A. Turowiczem dla pisma *The Mathematical Intelligencer* (przeprowadzonym przez K. Ciesielskiego i Z. Pogodę) i nie została (w przeciwieństwie do wielu innych anegdot) w wydrukowanej wersji zamieszczona. Jest to o tyle ciekawe, że dwa lata po opublikowaniu wywiadu ta sama anegdota (przy czym jej głównym bohaterem był nie Landau, lecz Norbert Wiener, choć Landau też został tam wspomniany jako wątpiący w istnienie Littlewooda) została w *Intelligencerze* wydrukowana w artykule S. Krantza *Mathematical Anecdotes*... Uważny Czytelnik *Delty* dostrzeże, że ta właśnie anegdota (w wersji Krantza) została umieszczona w *Delcie* pół roku temu. Czemu więc ją powtarzać?
W *EPSILONIE* nr 6 opublikowaliśmy tekst o indukcji wstecznej. Rok później *Delta* zamieściła artykuł o indukcji, którego spora część była poświęcona modelowi indukcji wstecznej i praktycznie była powtórzeniem tekstu z *EPSILONA* (żeby nie było wątpliwości: nie ma mowy o żadnym plagiacie, znając terminy wydawniczo-drukarskie jesteśmy przekonani, że drugi artykuł dotarł do Redakcji *Delty*, zanim *EPSILON* nr 6 ukazał się drukiem). Jeśli więc *Delta* uważa pewne treści matematyczne za tak ciekawe, by je powtarzać w krótkich odstępach czasu, nie widzimy powodu, dla którego nie mamy przypomnieć zabawnej historii, gdy ładnie się ona wiąże z resztą *EPSILONA*. Zresztą, jeśli chodzi o porównanie anegdot i matematyki... ale o tym kiedy indziej.

(*KC*)

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski, Marcin Poźniak.
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ϵ.