

okno

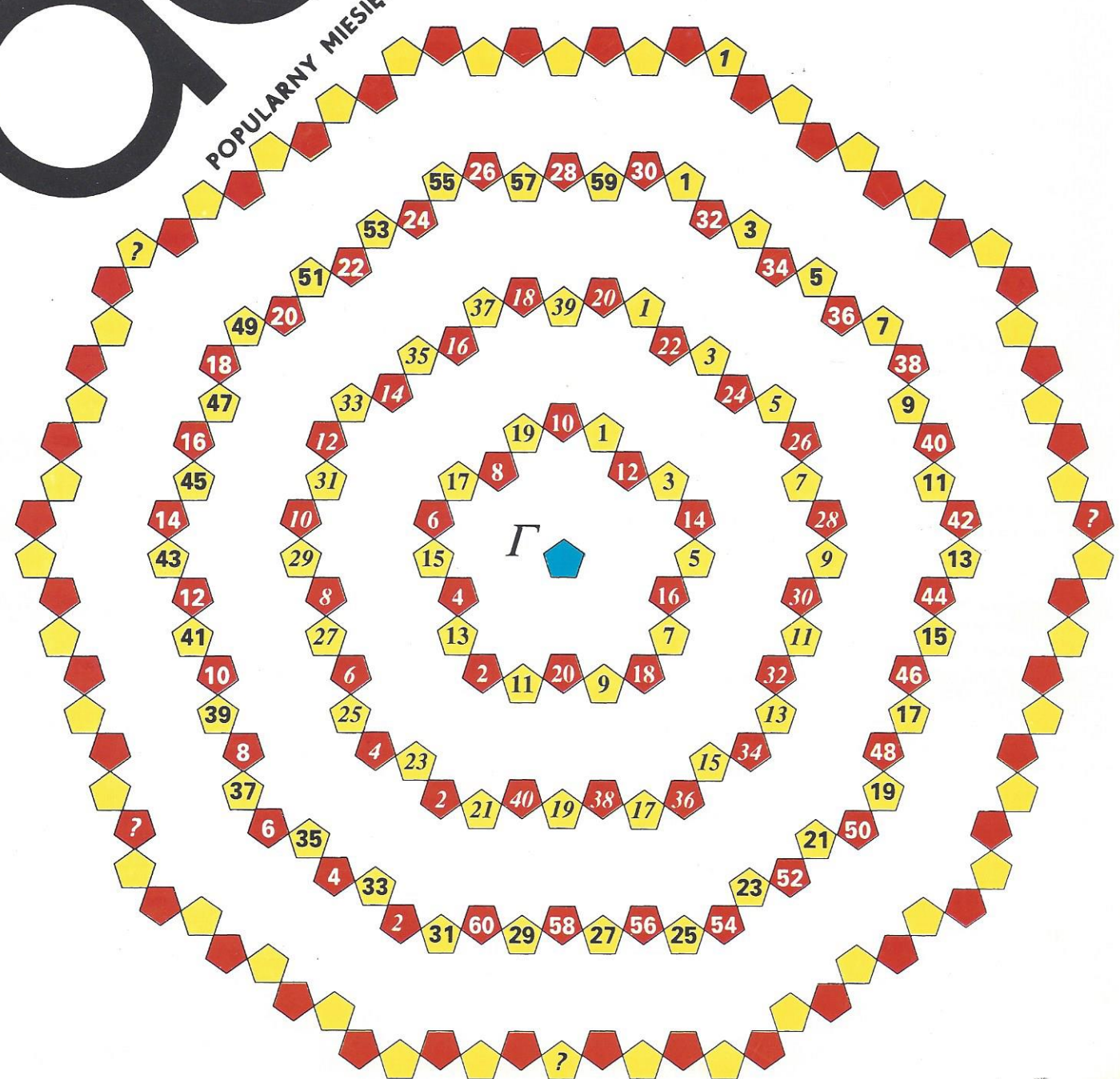
h=6.63·10⁻³⁴ J·s $\hbar=3,141593$

CENA ZŁ 8000,-

NR 11 (234) 1993

PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X

POPULARNY MIESIĘCZNIK MATEMATYCZNO-FIZYCZNO-ASTRONOMICZNY



n=53-10-1s 11-31139...

delta

13 bardzo przystępnych tekstów
o geometrii
blisko 200 zadań, ponad 200 rysunków
na 160 stronach
wydanej przez Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne
książki

Szkoła Geometrii – Odczyty Kaliskie
w księgarniach za 65 000 zł
twarda oprawa

SPIS TREŚCI

NUMERU 11(234)

| | |
|---|--------|
| Komplementarność Marek Cinal i Berthold-Georg Englert | str. 1 |
| Punkty szczególne trójkąta Jarosław Górnicki | str. 1 |
| Łezki batawskie | str. 5 |
| Nowe zastosowania kryształów w fizyce wysokich energii | str. 6 |
| Doświadczenie Younga na dwóch atomach | str. 8 |
| Patrz w niebo | str. 9 |
| Mała Delta | str.10 |
| Zadania | str.12 |
| Klub 44 | str.13 |
| Antybilard Rafał Kołodziej | str.14 |
| Epsilon | str.17 |

W następnym numerze:

Dwudziestolecie *Delta*

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego
i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichoński
Roman Duda
Jan A. Gaj
Tomasz Hofmokl – wiceprzewodniczący
Tadeusz Jarzębowski
Marcin Kubiak
Andrzej Makowski
Andrzej Pelczar
Zbigniew Płochocki
Zdzisław Pogoda
Konrad Rudnicki
Zbigniew Semadeni
Grzegorz Sitarski
Józef I. Smak
Kazimierz Stępień
Mieczysław Subotowicz
Andrzej Szymacha
Andrzej Woszczyk

Wojciech Żakowski – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

Krzysztof Biesaga
Piotr Hajłasz
Jan Kalinowski – z-ca red. nacz.
Krzyszyna Kordos – sekr. red.
Marek Kordos – red. nacz.
Tomasz Kwast
Stanisław Mrówczyński
Anna Rudnik
Joanna Udalska

Adres Redakcji:

ul. Smyczkowa 5/7
02-678 Warszawa
tel. 43-02-43 wewn. 21
HAJLASZ@MIMUW.EDU.PL
Wydrukowano w Zakładach Graficznych
w Warszawie, ul. Srebrna 16
Skład systemem \TeX Wykonała redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY w AMOS-ie

Od stycznia 1993 r. prenumeratę „Delta” prowadzi również firma AMOS, 01-506 Warszawa, ul. Szenwalda 1 (tel. 39-17-52). Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące. Cena jednego numeru w pierwszym półroczu 1994 roku wynosi 8 000,-zł, a w drugim półroczu 10 000,-zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres co najmniej trzech miesięcy) cena numeru wynosi w pierwszym półroczu 1994 r. 20 000,-zł, a w drugim – 22 000,-zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! AMOS dostarcza „Delta” pod wskazany adres nie pobierając dodatkowej opłaty. Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Blankiet pocztowy na prenumeratę „Delta” w AMOS-ie zamieszczamy na str.11/12.
Konto AMOS-u: PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136

WARUNKI PRENUMERATY w RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na II kwartał 1994 r. wynosi 24 000,- zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
 - na teren kraju
 - jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób,
 - na zagranicę
 - „Ruch” S.A. Oddział Warszawa, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia dostawy pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni pokrywa prenumerator.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
 - na kraj i zagranicę – do 20 XI na I kwartał roku następnego
do 20 II na II kwartał
do 20 V na III kwartał
do 20 VIII na IV kwartał.

Cena 1 egzemplarsza 8 000,- zł

Komplementarność

Marek CINAL

i Berthold-Georg ENGLERT

W mechanice klasycznej stan obiektu fizycznego jest opisany w pełni przez podanie wartości zmiennych dynamicznych charakteryzujących ten obiekt; w przypadku wyidealizowanego punktu materialnego tymi zmiennymi są: położenie punktu $\vec{r} = (x, y, z)$ i jego pęd $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$. Znając wszystkie siły działające na ten punkt materialny można, na podstawie praw Newtona, przewidzieć jego stan w dowolnej chwili w przeszłości i przyszłości. Tego typu przewidywanie nie jest możliwe dla obiektów mikroskopowych, np. atomów lub cząstek elementarnych, gdyż w świecie mikroskopowym nie jest możliwe jednoczesne określenie dokładnego położenia i pędu cząstki. Opisuje to kwantowo-mechaniczna relacja nieokreśloności Heisenberga

$$(*) \quad \delta x \delta p_x \geq \hbar/2,$$

gdzie δx (δp_x) jest dokładnością pomiaru składowej położenia x (składowej pędu p_x), $\hbar = h/(2\pi)$, h oznacza stałą Plancka. W teorii zjawisk mikroskopowych – mechanice kwantowej – stan cząstki opisuje się nie przez podanie wartości \vec{r} i \vec{p} , lecz przez podanie funkcji falowej $\varphi(\vec{r})$ określającej amplitudę prawdopodobieństwa znalezienia się cząstki w punkcie \vec{r} . Mierzalne wielkości fizyczne są reprezentowane wtedy przez operatory działające w przestrzeni funkcji falowych.

Mówimy, że dwie wielkości fizyczne są **komplementarne**, jeśli dokładna znajomość jednej z nich implikuje jednakowe prawdopodobieństwo każdego wyniku pomiaru drugiej. Przykładem wielkości komplementarnych są x i p_x . Wynika to w szczególności z relacji nieokreśloności (*). W przypadku ustalonego położenia cząstki pomiar jej pędu może dać dowolną wartość. I odwrotnie: cząstka o ustalonym pędzie może znajdować się w dowolnym punkcie. Oznacza to, że w zależności od tego, co z nią robimy, ujawnia swoje cechy korpuskularne (gdy dobrze określone jest jej położenie) lub falowe (gdy dobrze znamy jej pęd). Własność ta, nazywana korpuskularno-falowym charakterem materii, bywa często identyfikowana z komplementarnością. Komplementarność to jednak pojęcie znacznie ogólniejsze.

Sformułujmy teraz zasadę komplementarności.

Dla każdego stopnia swobody zmienne dynamiczne stanowią parę wielkości komplementarnych.

Można ją również bardziej swobodnie wyrazić następująco:
Niezależnie od tego, jak przygotowano układ, istnieje taki pomiar, którego wyniku zupełnie nie można przewidzieć.

Komplementarność jest własnością natury i, choć wydaje się niezgodna z naszym codziennym doświadczeniem, musimy jej istnienie przyjąć jako fakt. Największą zasługę w uświadomieniu nam tej fundamentalnej prawdy należy niewątpliwie przypisać Nielsowi Bohrowi. Nie przyszło mu to wcale łatwo, jednym z głównych oponentów był sam Albert Einstein.

Punkty szczególne trójkąta

Jarosław GÓRNICKI

W geometrii elementarnej na płaszczyźnie dwie figury odgrywają bardzo ważną rolę – trójkąt i koło. Przedstawię kilka faktów dotyczących trójkątów, które to fakty stanowią fragment tzw. *geometrii trójkąta*.

Od dawna znane są własności przecinania się w jednym punkcie:

- symetrycznych trzech boków trójkąta,
- dwusiecznych trzech kątów wewnętrznych trójkąta,
- prostych zawierających wysokości trójkąta,
- środkowych trzech boków trójkąta.

W 1803 roku Klügel nadał tym i podobnym im punktom nazwę *punkty szczególne trójkąta*, gdyż każdy z nich jest wyznaczony przez większą liczbę warunków, niż jest to potrzebne do jednoznacznego wyznaczenia punktu. Mianowicie, każdy z powyższych punktów wyznaczony jest przez trzy proste, mimo że punkt jest jednoznacznie wyznaczony przez dwie. Później termin ten rozszerzono również na inne punkty trójkąta wyróżnione przez jakąś własność, np. ekstremalną, pewnych funkcji związanych z trójkątem. Takimi punktami są na przykład:

- punkt Torricellego, dla którego suma odległości od wierzchołków trójkąta osiąga minimum;
- punkt Lemoine'a, dla którego suma odległości od wszystkich trzech boków trójkąta osiąga minimum;
- punkty Brocarda (mogą być dwa) mające tę własność, że trójkąty o wierzchołkach będących rzutami prostopadłymi tych punktów na poszczególne boki danego trójkąta są do niego podobne oraz mają najmniejsze pole wśród wszystkich trójkątów wpisanych w dany trójkąt i podobnych do trójkąta wyjściowego.

Jak te punkty wyznaczyć?

Wskażemy metodę pozwalającą na niemal jednoczesne uzasadnienie wymienionych na samym początku czterech faktów. W tym celu zaprezentujemy łatwe do zapamiętania twierdzenia dwojakiemu rodzajowi: opisujące warunki, przy których kilka wyróżnionych punktów (więcej niż dwa) leży na jednej prostej; oraz warunki gwarantujące, że kilka wyróżnionych prostych (więcej niż dwie) przecina się w jednym punkcie.

Około 80 r.n.e. Menelaus z Aleksandrii wykazał:

Twierdzenie 1. Jeżeli prosta nie przechodząca przez żaden wierzchołek trójkąta ABC przecina jego boki AB , BC , CA lub ich przedłużenia odpowiednio w punktach M , N , P , to

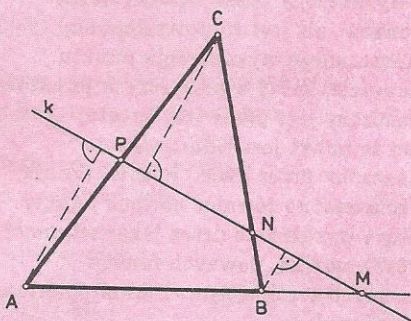
$$(1) \quad \frac{|AM|}{|MB|} \cdot \frac{|BN|}{|NC|} \cdot \frac{|CP|}{|PA|} = 1.$$

Dowód. Prowadzimy prostą k zgodnie z warunkami twierdzenia. Z wierzchołków trójkąta ABC prowadzimy odcinki prostopadłe do prostej k (rys. 1, 2), których długości wynoszą odpowiednio d_A , d_B , d_C . Korzystając z twierdzenia Talesa mamy:

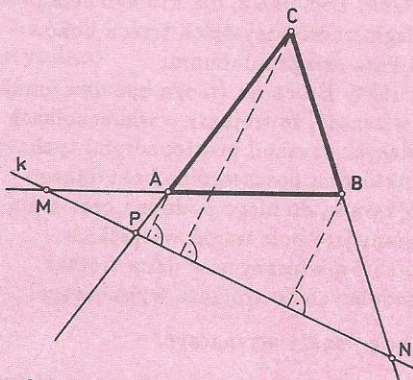
$$\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{d_A}{d_B}, \quad \frac{|BN|}{|NC|} = \frac{d_B}{d_C}, \quad \frac{|CP|}{|PA|} = \frac{d_C}{d_A},$$

a stąd

$$\frac{|AM|}{|MB|} \cdot \frac{|BN|}{|NC|} \cdot \frac{|CP|}{|PA|} = 1. \quad \blacksquare$$



Rys. 1

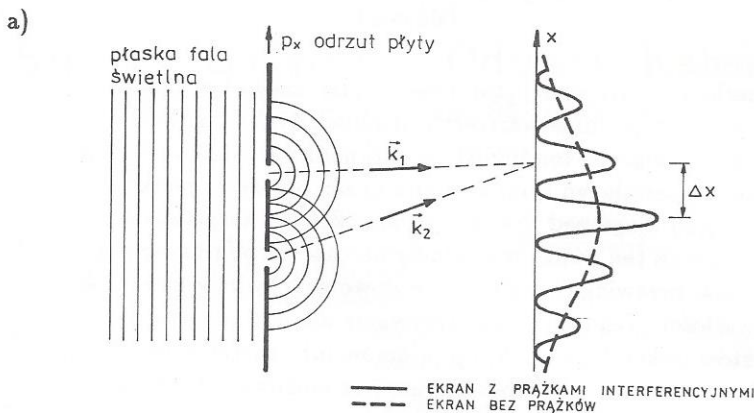


Rys. 2

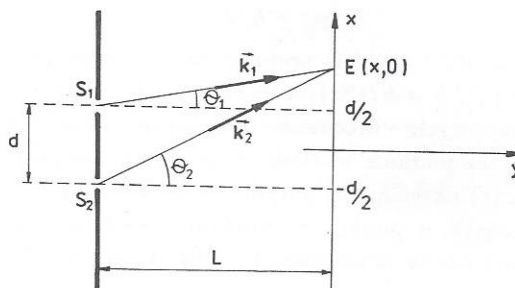
Prawdziwe jest również, łatwe do udowodnienia, twierdzenie odwrotne: Niech na prostych AB , BC , CA leżą odpowiednio punkty M , N , P , z których żaden nie jest wierzchołkiem trójkąta ABC . Jeśli wyznaczają one odcinki spełniające warunek (1) oraz parzysta ich liczba leży na bokach trójkąta, to punkty M , N , P leżą na jednej prostej.

Czy komplementarność zawsze jest wymuszana przez zasadę nieokreśloności lub jej jakiś wariant?

Klasycznym przykładem, przy tej okazji omawianym w podręcznikach i na wykładach, jest doświadczenie myślowe Einsteina-Bohra (rys. 1).



b)



Rys. 1 Schemat eksperymentu Einsteina-Bohra. Ponieważ długość fali świetlnej λ nie zmienia się, zatem $|\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = \frac{2\pi}{\lambda} \equiv k$. Składowe obu wektorów falowych wynoszą (dla $l \gg d$):

$$k_x^{(i)} = k \sin \theta_i \approx k \theta_i \approx k \frac{x + s_i d/2}{L},$$

$$k_y^{(i)} = k \cos \theta_i \approx k \left(1 - \frac{1}{2} \theta_i^2\right) \approx k \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x + s_i d/2}{L}\right)^2\right], \quad i = 1, 2,$$

gdzie $s_1 = -1$, $s_2 = 1$. Stąd mamy

$$(**) \quad \Delta k_x = k_x^{(2)} - k_x^{(1)} = \frac{kd}{L}.$$

Faza fali kulistej rozchodzącej się od i -tej szczeliny wynosi w punkcie E na ekranie

$$\phi_i = \vec{k}_i \cdot \vec{S}_i E = k_x^{(i)}(x + s_i d/2) + k_y^{(i)} L.$$

Zatem różnica obydwu faz równa się

$$\Delta \phi = \phi_2 - \phi_1 = \frac{kd x}{L}.$$

$\Delta \phi = 0$ w punkcie centralnego maksimum: $x = 0$. Zwiększając x od 0 do Δx znajdziemy się w punkcie pierwszego boczego maksimum, gdzie $\Delta \phi = 2\pi$. Stąd

$$\Delta x = \frac{2\pi L}{kd},$$

a następnie korzystając z (**), otrzymujemy

$$\Delta k_x \Delta x = 2\pi.$$

A więc pęd fotonu (składowa x -owa), który dotarł do punktu E na ekranie przelatując przez szczelinę S_2 , będzie się różnił od pędu fotonu, który dotarł tam przez szczelinę S_1 , o wielkość

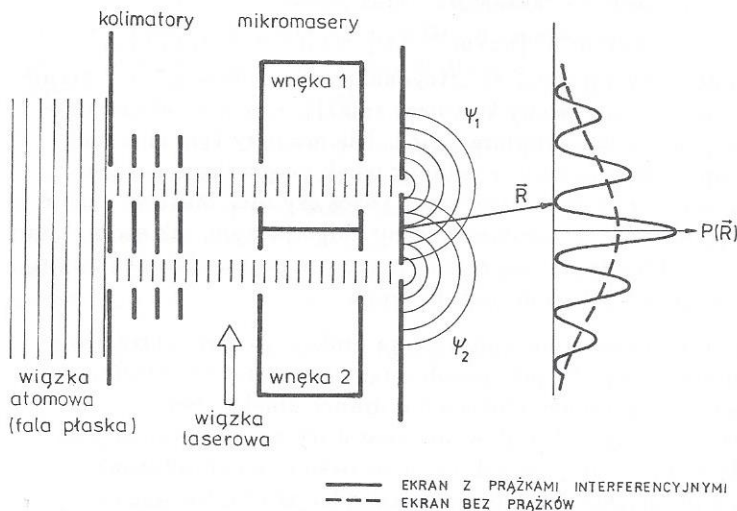
$$\Delta p_x = \hbar \Delta k_x = \frac{h}{\Delta x}.$$

A zatem, aby odróżnić jedną drogę fotonu od drugiej, pęd płyty musi być wyznaczony z błędem mniejszym niż ta różnica, tzn. $\delta p_x \ll h/\Delta x$. Wówczas jednak z zasady nieokreśloności (*) wynika, że nieokreśloność położenia płyty δx jest większa od Δx , czyli odległości między sąsiednimi prążkami interferencyjnymi. To jednak oznacza sprzeczność, gdyż warunkiem koniecznym powstania obrazu interferencyjnego jest $\delta x < \Delta x$.

Pojedyncze fotony (lub elektrony) po przejściu przez układ otworów w przesłonie tworzą na ekranie charakterystyczny układ prążków interferencyjnych. Wydawać by się mogło, że obserwując kierunek odrzutu przesłony na skutek zmiany kierunku lotu fotonu (lub elektronu) od źródła do ekranu, można bez zniszczenia obrazu interferencyjnego stwierdzić, przez który otwór przeszedł foton (lub elektron). Do tego potrzebna jest jednak dokładna znajomość pędu przesłony. Zasada nieokreśloności (*) wymaga wtedy dużej nieokreśloności jej położenia. Wówczas nieokreśloność ta staje się większa od odległości między sąsiednimi prążkami interferencyjnymi i obraz interferencyjny ginie.

Odpowiedź na postawione powyżej pytanie, czy komplementarność wynika z relacji nieokreśloności, powinna jednak brzmieć: nie!

W powyższym eksperymencie, gdy chcemy zarejestrować, przez który otwór przeszedł foton (lub elektron), przesłona zaburza jego ruch w sposób przypadkowy i niekontrolowany. Od niedawna umiemy jednak konstruować takie detektory, które nie zaburzają istotnie ruchu obserwowanych obiektów. Detektorem takim może być wnęka rezonansowa mikromasera, a obiektami atomy. Rozważmy teraz układ eksperymentalny przedstawiony schematycznie na rysunku 2.



Rys. 2. Zmodyfikowany eksperyment Einsteina-Bohra, pozwalający na określenie drogi fotonu bez zaburzenia jego ruchu.

Atomy po przejściu przez układ kolimatorów (szerokich szczelin) są oświetlane wiązką laserową, a następnie przelatują przez jedną z dwu mikromaserowych wnęk rezonansowych, po wyjściu z której trafiają na odpowiadającą jej szczelinę w płycie. Atomy są rejestrowane na ekranie ustawionym za płytą. W nieobecności lasera i wnęk rezonansowych tworzy się znany obraz interferencyjny. W obszarze za płytą funkcja falowa φ opisująca ruch środka masy atomu jest sumą dwu członów odpowiadających dwóm szczelinom: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Wówczas gęstość prawdopodobieństwa $|\varphi|^2$ znalezienia atomu w danym punkcie ekranu wynosi

$$|\varphi|^2 = |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + \varphi_1^* \varphi_2 + \varphi_1 \varphi_2^*.$$

Wyrażenia $\varphi_1^* \varphi_2 + \varphi_1 \varphi_2^*$ są, oczywiście, odpowiedzialne za powstanie charakterystycznych prążków interferencyjnych.

Posługując się twierdzeniem Menelausa możemy uzasadnić ważny rezultat z geometrii trójkąta. Opublikował go w pracy *De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio* (Milano, 1678) włoski inżynier Giovanni Ceva.

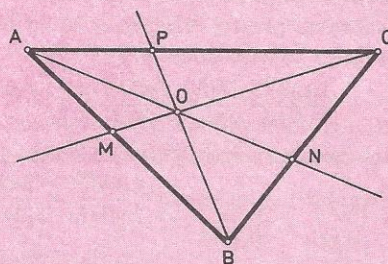
Twierdzenie 2. Jeżeli trzy proste przechodzące przez wierzchołki trójkąta ABC i nie zawierające żadnego boku trójkąta przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe, to odcinki wyznaczone przez punkty M, N, P (punkty przecięcia się tych prostych odpowiednio z bokami AB, BC, CA lub ich przedłużeniami) spełniają warunek (1).

Dowód. Gdy proste przecinają się w jednym punkcie, to przy powyższych oznaczeniach (rys. 3, 4) stosujemy twierdzenie Menelausa do trójkąta ABP i prostej CO :

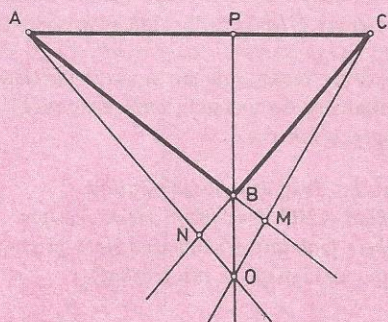
$$\frac{|AM|}{|MB|} \cdot \frac{|BO|}{|OP|} \cdot \frac{|PC|}{|CA|} = 1;$$

oraz do trójkąta BCP i prostej AO :

$$\frac{|PO|}{|OB|} \cdot \frac{|BN|}{|NC|} \cdot \frac{|CA|}{|AP|} = 1.$$



Rys. 3



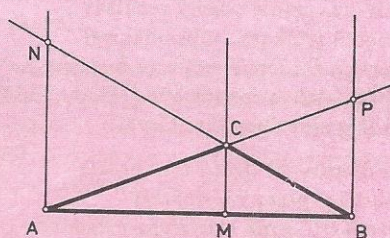
Rys. 4

Mnożąc te równości stronami otrzymujemy (1). Gdy $AN \parallel BP \parallel CM$ (rys. 5), to

$$\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{|AN|}{|NB|}, \quad \frac{|BN|}{|NC|} = \frac{|BM|}{|MC|},$$

$$\frac{|CP|}{|PA|} = \frac{|CM|}{|MA|},$$

skąd po wymnożeniu stronami otrzymujemy (1). ■



Rys. 5

Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne.

Twierdzenie 3. Jeżeli trzy proste przechodzące przez wierzchołki trójkąta ABC i nie zawierające żadnego boku trójkąta wyznaczają na bokach AB, BC, CA lub ich przedłużeniach takie punkty M, N, P , że spełniony jest związek (1) oraz nieparzysta ich liczba leży na bokach trójkąta, to proste te przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe.

Dowód. Załóżmy, że proste AN i BP przecinają się w punkcie O i prosta CM nie zawiera punktu O . Wtedy prosta CO wyznacza na prostej AB punkt $M' \neq M$. Wówczas z twierdzenia Cevy

$$\frac{|AM'|}{|M'B|} \cdot \frac{|BN|}{|NC|} \cdot \frac{|CP|}{|PA|} = 1$$

i jednocześnie spełniony jest warunek (1).

Porównując je, dostajemy $\frac{|AM'|}{|M'B|} = \frac{|AM|}{|MB|}$,

czyli $\frac{|AM'|}{|AM|} = \frac{|M'B|}{|MB|}$. Ostatnia równość

jest fałszywa, gdyż jeden ułamek jest mniejszy od 1, a drugi większy od 1.

Równie łatwo zauważamy: jeżeli $AN \parallel BP$, to również CM jest do nich równoległa. ■

Zobaczmy teraz, jak można wykorzystać te rezultaty do uzasadnienia na pozór odległych faktów.

Fakt 1. Trzy dwusieczne kątów trójkąta ABC przecinają się w jednym punkcie (jak łatwo zauważyć, jest to środek okręgu wpisanego w ten trójkąt).

Dowód. Dwusieczna kąta B (rys. 6) dzieli bok CA punktem P na odcinki

$$\text{spełniające warunek } \frac{|CP|}{|PA|} = \frac{|CB|}{|BA|}.$$

Wynika to z twierdzenia Talesa

zastosowanego do kąta C przeciętego prostymi równoległymi AD i BP oraz z faktu, że $|AB| = |BD|$. Analogicznie

$$\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{|AC|}{|CB|}, \quad \frac{|BN|}{|NC|} = \frac{|AB|}{|AC|},$$

a stąd wynika (1). Korzystamy teraz z twierdzenia 3 (odwrotnego do twierdzenia Cevy) i już! ■

W przypadku atomów możemy wykorzystać jeszcze dodatkowe stopnie swobody związane ze strukturą atomu. Możemy wiązką laserową pobudzić atomy z ich stanu podstawowego do stanu wzbudzonego. Gdy jeden z takich wzbudzonych atomów dostanie się do wnęki rezonansowej mikromasera, to może wystąpić silne sprzężenie z promieniowaniem w jej wnętrzu, w wyniku czego atom wyemituje foton i przejdzie do innego stanu. To przejście z emisją fotonu można obecnie przeprowadzić z prawdopodobieństwem praktycznie równym 1, nawet jeśli wnęka początkowo nie zawierała żadnego fotonu (mówimy, że wnęka była ultrazimna). Zatem po przejściu wzbudzonego atomu przez wnękę zostaje po nim ślad – foton. Wnęka jest więc detektorem przelotu atomu. Warto podkreślić, że proces oddziaływania atomu z polem wnęki i emisja fotonu nie zakłócają w znaczącym stopniu części funkcji falowej atomu związanej z ruchem jego środka masy.

Wróćmy do układu eksperymentalnego z dwiema ultrazimnymi wnękami rezonansowymi. Po przelocie pojedynczego atomu pełna funkcja falowa za przesłoną jest teraz następująca

$$\varphi = \varphi_1 \chi_{10} + \varphi_2 \chi_{01},$$

gdzie nowe czynniki χ_{10} i χ_{01} opisują stany wnęk rezonansowych; indeks 0 lub 1 na pierwszym miejscu oznacza, że w pierwszej wnęcie nie ma (0) lub jest (1) foton, indeks na drugim miejscu opisuje stan drugiej wnęki. Gęstość prawdopodobieństwa znalezienia się atomu w danym punkcie na ekranie jest teraz postaci

$$|\varphi|^2 = |\varphi_1 \chi_{10}|^2 + |\varphi_2 \chi_{01}|^2 + \varphi_1^* \varphi_2 \chi_{10}^* \chi_{01} + \varphi_1 \varphi_2^* \chi_{10} \chi_{01}^*.$$

Ponieważ stany χ_{10} i χ_{01} są ortogonalne, to wielkość $\chi_{10}^* \chi_{01}$ zeruje się, interferencyjne człony krzyżowe znikają, zatem na ekranie nie pojawiają się prążki interferencyjne. Nie ma przy tym znaczenia, czy foton, który pozostał w jednej z wnęk po przelocie każdego atomu, został zarejestrowany przez kogoś czy nie. Może wcale nie być obserwowany lub zaobserwowany długo po tym, jak atom dotarł do ekranu. Istotne jest to, że informacja (w postaci fotonu) o tym, którą drogę wybrał atom, jest dostępna.

Wnęki mikromasera nie wpływają na funkcje φ_1 i φ_2 określające ruch środka masy. W ten sposób osiągnięty został cel Einsteina: możliwe jest uzyskanie informacji o drodze obiektu bez niekontrolowanego oddziaływania aparatury pomiarowej na jego pęd. Bohr nie miałby jednak nic przeciwko temu rezultatowi, gdyż po pozostawieniu informacji o drodze atomu (to jest po emisji fotonu we wnęcie) atom traci zdolność do interferencji. Komplementarność jest więc znowu obecna; nie jest ona w tym przypadku wymuszona przez relację nieokreśloności Heisenberga, lecz przez korelację między stanem aparatury pomiarowej a obserwowanym obiektem. Relacja nieokreśloności Heisenberga (*) nie stosuje się tutaj; nasza argumentacja nie odwołuje się do niej. Fizycznie oznacza to, że relacji tej nie podlega użyty sposób detekcji, gdyż ze zlokalizowanym fotonem we wnęcie nie można związać określonego pędu.

I jeszcze uwaga o mikromaserach. Mogą one służyć jako detektory drogi atomów, jeśli jeden foton pozostawiony we wnęcie zmieni pole elektromagnetyczne na tyle, że zmiana ta jest obserwowalna. Z taką sytuacją mamy do czynienia w rozważanym wyżej przypadku ultrazimnych wnęk nie zawierających początkowo fotonów. Gdy wnęki zawierają początkowo klasyczne pole mikrofalowe, a więc mnóstwo fotonów, zmiana pola o jeden foton nie jest zauważalna. Eksperymenty z ultrazimnymi wnękami rezonansowymi są prowadzone już od kilku lat, ale idea doświadczenia przedstawiona w tym artykule ciągle czeka na realizację.

Łezki batawskie

I. Rozważmy kulę stopionego szkła o jednakowej temperaturze wystawioną na działanie zimnego powietrza. Jej warstwa zewnętrzna znacznie szybko krzepnąć, a warstwy wewnętrzne zachowują jeszcze poprzednią temperaturę. Warstwa zewnętrzna musi zatem objąć objętość odpowiadającą początkowej (wyższej) temperaturze. W miarę dalszego stygnięcia warstwy wewnętrzne „starają się” kurczyć i krzepnąć. Lecz „przeszkadza im” w tym sztywna już warstwa zewnętrzna. Z powodu „ściągnięcia” do środka podlega ona zatem ścisnaniu; powstają w niej naprężenia ściskające. A w warstwach wewnętrznych, „ciągniętych” przez nią, wytwarzają się naprężenia rozciągające.

Wytrzymałość szkła na ścisnienie jest o wiele większa niż na rozciąganie: wynosi ona zwykle 60–125 kg/mm² – wobec, typowo, 3,5–8 kg/mm² dla rozciągania.

Dlatego taka kula szklana może wytrzymać duże obciążenia, zwłaszcza że dzięki kulistemu kształtowi zakłócenie równowagi naprężeń jest trudniejsze. Jeżeli jednak uszkodzi się powierzchnię kuli, to cały układ rozpada się na liczne kliniaste odpryski z powodu naprężeń rozciągających we wnętrzu szkła.

II. Inaczej zachowują się ciała o kształcie asymetrycznym – takie jak łezki batawskie (niem. „Glastränen”). Wytwarzają się one wtedy, gdy do wody wlewa się kroplami rzadko-płynne stopione szkło. I znowu: warstwy zewnętrzne tych kropli krzepną bardzo szybko i powstają w nich silne naprężenia ściskające. Taka łezka okazuje się bardzo odporna na uderzenie!

Jeśli jednak zakłóci się w niej równowagę naprężeń – np. przez odłamanie „ogonka” – to cała łezka momentalnie rozsypuje się na proszek. Jeśli zaś ogonek zmniejszać stopniowo – np. przez powolne, ostrożne trawienie w kwasie fluoro-wodorowym, to rozpad łezki nastąpi dopiero wtedy, gdy trawienie dojdzie do miejsca, w którym (grubszy u nasady) ogonek szybciej zmniejsza swą średnicę.

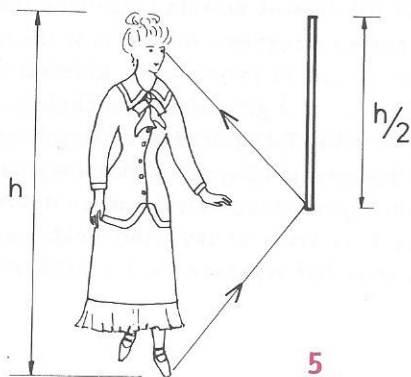
Dralle-Keppeler *Die Glasfabrikation*, I Band, II Aufl., 1930, s. 241.
tłum. J. JABLKOWSKI

– Jakiej wysokości musi być lustro w moim przedpokoju, abym mógł się w nim cały obejrzeć? – zapytał znajomego matematyka (P.H.) i fizyka (St.M.).

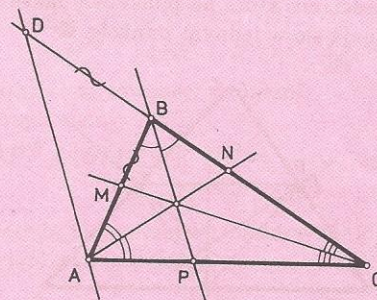
– To zależy od twojego wzrostu i odległości, w jakiej staniesz – odparli i zabrali się do wyprowadzania wzorów.

Przerwałem im, nim doszli do całek eliptycznych.

– Musi być co najmniej połowy mojego wzrostu! Spójrzcie na rysunek.



5



Rys. 6

Fakt 2. Trzy środkowe boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie (jest to środek ciężkości trójkąta).

Dowód. Wynika bezpośrednio z twierdzenia 3. ■

Przy okazji sugerujemy 2 zadania:

I. Wykazać, że środkowe trójkąta dzielą ten trójkąt na 6 mniejszych trójkątów o równych polach.

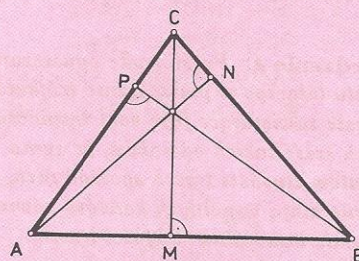
II. Uzasadnić, że środkowe w trójkącie dzielą się w stosunku 2:1.

Fakt 3. Trzy proste zawierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie (zwanym ortocentrum trójkąta).

Dowód. W trójkącie prostokątnym jest to oczywiste. W pozostałych przypadkach korzystamy z podobieństwa odpowiednich trójkątów (rys. 7):

$$\begin{aligned} \text{a) } \triangle ABP &\sim \triangle ACM \text{ i } \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AP|}{|AM|}, \\ \text{b) } \triangle ABN &\sim \triangle MBC \text{ i } \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|BN|}{|MB|}, \\ \text{c) } \triangle BPC &\sim \triangle ANC \text{ i } \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|PC|}{|NC|}. \end{aligned}$$

Mnożąc b) przez c), a następnie dzieląc przez a) i porządkując otrzymujemy (1). Korzystając teraz z twierdzenia 3 dostajemy tezę. ■



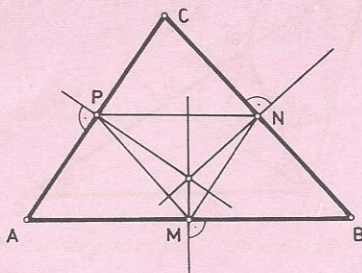
Rys. 7

Fakt 4. Symetralne trzech boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie (jak łatwo zauważyć, jest to środek okręgu opisanego na tym trójkącie).

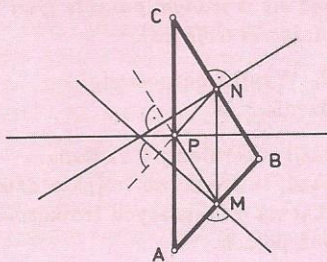
Dowód. W obu przypadkach (rys. 8, 9) punkty, w których wystawiono symetralne, wyznaczają nowy trójkąt MNP.

K.B.

Symetralne te są dla tego trójkąta wysokościami, które na podstawie faktu 3 przecinają się w jednym punkcie. ■



Rys. 8



Rys. 9

W podobny sposób można uzasadnić i inne fakty, np.

Fakt 5. Proste łączące wierzchołki trójkąta z punktami styczności okręgu wpisanego przecinają się w jednym punkcie (zwanym punktem Gergonne'a).

Fakt 6. Proste łączące wierzchołki trójkąta z punktami styczności okręgów dopisanych przecinają się w jednym punkcie (zwanym punktem Nagela).

Wiele z zaprezentowanych tu twierdzeń doczekało się różnorodnych przeformułowań i uogólnień. Ich poznanie może być interesujące. Ponadto fakty 3 i 4 można uzasadnić w oparciu o inne twierdzenie, „podobne” do twierdzenia Cevy:

Twierdzenie 4. Prostopadłe opuszczone z punktu leżącego w płaszczyźnie trójkąta na proste zawierające jego boki wyznaczają na nich sześć takich odcinków, że suma kwadratów długości trzech spośród nich, które nie mają wspólnych końców, równa jest sumie kwadratów długości trzech pozostałych.

Dowód. Niech OP , OM , ON będą prostopadłymi opuszczonymi z dowolnego punktu O odpowiednio na proste zawierające boki AB , BC , CA (rys. 10). Wówczas

$$|AO|^2 - |AP|^2 = |BO|^2 - |BP|^2,$$

czyli

$$|AP|^2 - |BP|^2 = |AO|^2 - |BO|^2.$$

Nowe zastosowania kryształów w fizyce wysokich energii

W fizyce wysokich energii powszechnie wykorzystuje się wiązkę rozprędzonych cząstek elementarnych, np. protonów, antyprotonów, elektronów do badania struktury materii i praw rządzących w mikroświecie. Często po przyspieszeniu cząstek należy je wyprowadzić z akceleratora i doprowadzić wiązkę do miejsca, gdzie wykonuje się doświadczenia z ich udziałem. W tym celu używa się zwykle magnesów, które mogą zakrzywić tor lotu cząstek naładowanych na skutek działania siły Lorentza $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, gdzie q jest ładunkiem elektrycznym cząstki, \mathbf{v} – jej prędkością, a \mathbf{B} natężeniem pola magnetycznego. Odchylenia toru szybkiej cząstki nawet o niewielki kąt wymaga bardzo silnych i długich magnesów. Na przykład, aby odchylić protony o energii $E = 450$ GeV (dla porównania energia spoczynkowa protonu wynosi $mc^2 = 0,938$ GeV, gdzie $1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$) o kąt $7,4$ miliradiana, używa się magnesu wytwarzającego pole magnetyczne o natężeniu dwóch tesli (T) i długości około 6 m.

Od pewnego czasu prowadzone są doświadczenia nad wykorzystaniem kryształów do odchylenia toru wysokoenergetycznych cząstek. Zjawisko leżące u podstaw tych zastosowań nosi nazwę kanałowania cząstek (*channeling*). Jak wiadomo, w kryształach istnieją dobrze określone płaszczyzny i osie atomowe. Okazuje się, że jony (lub inne cząstki elementarne) padające na kryształ pod małym kątem do tych płaszczyzn lub osi są kanałowane, to znaczy ich tory są wymuszane przez układ płaszczyzn lub osi atomów, a głębokość penetracji jonów w kryształach jest znacznie większa niż w ośrodkach amorficznych. Na tego typu możliwość zwracał uwagę J. Stark już w 1912 r.! (co, jak widać, zostało stwierdzone doświadczalnie dopiero po ponad 50. latach).

Kanałowanie odegrało istotną rolę w początkowej fazie badań nad implantacją jonów w kryształach i przyczyniło się do rozwoju technologii półprzewodników. Obecnie kanałowanie wykorzystywane jest w wielu dziedzinach nauki i techniki. W artykule tym omawiamy jedynie nowe możliwości zastosowań kryształów w oparciu o zjawisko kanałowania w fizyce wysokich energii.

Jeśli ruch cząstek w kryształach jest wymuszany przez układ płaszczyzn i osi atomów, to wyginając kryształ w odpowiedni sposób można regulować tor cząstek. Ten pomysł został po raz pierwszy zrealizowany w 1984 r. W Instytucie Fizyki Wysokich Energii (IHEP) w Sierpuchowie koło Moskwy i w Laboratorium Fermiego (FERMILAB) koło Chicago udało się odchylić wiązki naładowanych cząstek za pomocą kryształu krzemu o kąty $60\text{--}80$ miliradianów. Niestety, efektywność pierwszych prób była niewielka, rzędu 10^{-4} , to znaczy średnio jedna na 10^4 cząstek została odchylna pod żądanym kątem. Istotny postęp osiągnięto w 1989 r. w laboratorium CERN w Genewie. W doświadczeniu zastosowano kryształ krzemu o wymiarach 4 cm długości i $0,9$ mm grubości do odchylenia wiązki protonów o energii 450 GeV o kąt $7,4$ miliradiana. Uzyskano więc ten sam efekt, który przy konwencjonalnych wiązkach wymaga sześciometrowego magnesu! Tym razem, dzięki bardzo dobrej kolimacji cząstek padających na kryształ uzyskano efektywność 15% , co oznacza, że metoda ta może być wykorzystana w praktyce.

Oprócz tych zastosowań kryształy mogą być również używane do ogniskowania wiązek cząstek elementarnych o wysokich energiach. Zademonstrował to w 1991 r. zespół fizyków z Sierpuchowa, a pomysł polegał na uformowaniu tylnej ścianki kryształu w kształcie łuku. Cząstki kanałowane w różnych częściach (płaszczyznach) kryształu są zginane pod różnym kątem, co prowadzi w efekcie do ogniskowania wiązki. W doświadczeniu użyto kryształu w postaci płytki płytki krzemowej o wymiarach $2 \times 15 \times 70$ mm, wygiętej o 24 miliradiany, z tylną ścianką. Jak na razie efekt ogniskowania uzyskano w jednym wymiarze, ogniskując wiązkę 10^7 protonów o szerokości 2 mm, z rozrzutem kątowym $\pm 0,1$ miliradiana, do wiązki o szerokości 0,2 mm w odległości 3,5 metra od kryształu. Końcowa intensywność wiązki wynosiła $3 \cdot 10^5$ protonów.

Najnowsze doświadczenia przeprowadzone w ośrodku FERMILAB pod koniec ubiegłego roku wykazały, że w zakrzywionych kryształach możliwa jest również precesja magnetyczna cząstek elementarnych. Wiele cząstek elementarnych ma momenty magnetyczne związane z wewnętrznym momentem pędu – spinem. Cząstka poruszająca się z dużą prędkością w wewnętrznym polu elektrycznym kryształu „odczuwa” silne pole magnetyczne. Pole magnetyczne „stara się” ustawić momenty magnetyczne cząstek, a tym samym i spiny, równoległe do pola. Wywołuje to precesję, to znaczy obrót spinu wokół kierunku pola magnetycznego (tak samo, jak pole grawitacyjne powoduje obrót osi wirującego bąka wokół pionu). W doświadczeniu wykorzystano dwa kryształy krzemu o długości 45 mm zagięte o $0,1^\circ$ i zaobserwowano obrót o około 60° momentów magnetycznych cząstek pochwyconych w kanał. Efektywne pole magnetyczne w kryształach wynosiło 45 T.

Standardowo momenty magnetyczne cząstek stabilnych, takich jak proton, są mierzone w laboratoriach techniką rezonansową: momenty magnetyczne protonów ustawione w zewnętrznym polu magnetycznym można odwrócić dobierając dodatkowe pole. Niestety, te tradycyjne techniki rezonansowe nie dają się zastosować do wysoce niestabilnych cząstek, takich jak hiperony Σ . Jeżeli hiperon jest produkowany w reakcji jądrowej ze spinem skierowanym wzdłuż określonego kierunku, przyłożone pole magnetyczne działające wzdłuż innego kierunku spowoduje precesję spinu. Ten efekt wykorzystuje się do pomiaru momentu magnetycznego hiperonu Σ , który, choć krótkożyciowy, żyje jednak dostatecznie długo, aby precesja spinu uwidoczniła się w rozkładach kątowych produktów rozpadu.

Doświadczenie w FERMILAB-ie jest mało precyzyjnym pomiarem momentu magnetycznego, otwiera nowe możliwości pomiaru momentu magnetycznego cząstek rozpadających się 1000 razy szybciej niż hiperon Σ : barionów powabnych (*charm*) i pięknych (*beauty*). Znajomość tych momentów pozwoli uzyskać ważne informacje o kwarkach powabnych i pięknych, będących składnikami tych barionów.

Na podstawie artykułów zamieszczonych w *CERN Courier* z maja 1990 r., listopada 1991 r. i stycznia/lutego 1993 r. opracowała

Maria KRAWCZYK

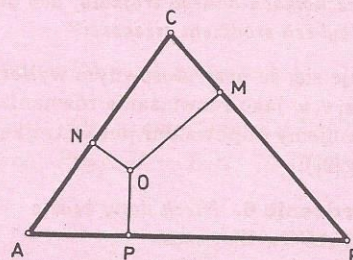
Analogicznie

$$\begin{aligned} |BM|^2 - |CM|^2 &= |BO|^2 - |CO|^2, \\ |CN|^2 - |AN|^2 &= |CO|^2 - |AO|^2. \end{aligned}$$

Dodając te równości stronami otrzymujemy

$$\begin{aligned} |AP|^2 + |BM|^2 + |CN|^2 &= \\ &= |BP|^2 + |CM|^2 + |AN|^2. \blacksquare \end{aligned}$$

Metodą nie wprost łatwo udowodnić twierdzenie odwrotne.



Rys. 10

Twierdzenie 5. Jeżeli trzy punkty leżące na prostych zawierających boki trójkąta tak wyznaczają sześć odcinków, że suma kwadratów trzech spośród nich, nie mających wspólnych końców, równa jest sumie kwadratów trzech pozostałych odcinków, to te trzy punkty są rzutami pewnego punktu na proste zawierające boki trójkąta.

Stąd jako wnioski otrzymujemy trzy znane już fakty:

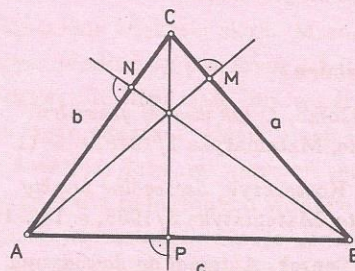
Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Proste zawierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Dowód. Przypadek symetralnych jest oczywistym wnioskiem z twierdzenia 5. Zajmijmy się teraz wysokościami. Mamy (rys. 11)

$$\begin{aligned} |BP|^2 - |AP|^2 &= a^2 - b^2, \\ |CM|^2 - |BM|^2 &= b^2 - c^2, \\ |AN|^2 - |CN|^2 &= c^2 - a^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Stąd } |AP|^2 + |BM|^2 + |CN|^2 &= \\ &= |BP|^2 + |CM|^2 + |AN|^2. \blacksquare \end{aligned}$$



Rys. 11

Zwróćmy jeszcze uwagę na „mechaniczną” interpretację kilku punktów szczególnych trójkąta jako środków mas punktów

NOWINKI FIZYCZNE

Doświadczenie Younga na dwóch atomach

materiałnych umieszczonych w wierzchołkach trójkąta. Możemy bowiem dla niewspółliniowych punktów A, B, C i liczb rzeczywistych u, v, w poszukiwać takiego punktu P płaszczyzny, aby spełnione było równanie

$$(2) \quad u \cdot \vec{PA} + v \cdot \vec{PB} + w \cdot \vec{PC} = \vec{0}.$$

Jest to problem w pewnym sensie odwrotny do zagadnienia A. Möbiusa z 1827 roku: *Jakie masy należy umieścić w wierzchołkach danego trójkąta, aby dany punkt był ich środkiem ciężkości?*

Okazuje się, że przy stosownym wyborze liczb u, v, w jako rozwiązaniem równania (2) otrzymujemy odpowiedni punkt trójkąta (patrz [2]):

Twierdzenie 6. *Niech dany będzie trójkąt ABC . Wówczas:*

- i) jeżeli $u = v = w = 1$, to rozwiązaniem równania (2) jest punkt przecięcia się środkowych trójkąta;
- ii) jeżeli $u = a, v = b, w = c$, gdzie a, b, c są długościami boków trójkąta, to rozwiązaniem równania (2) jest punkt przecięcia się dwusiecznych kątów trójkąta;
- iii) jeżeli $u = \sin 2\alpha, v = \sin 2\beta, w = \sin 2\gamma$, gdzie α, β, γ są kątami wewnętrznymi trójkąta, to rozwiązaniem równania (2) jest punkt przecięcia się symetralnych boków trójkąta;
- iv) jeżeli $u = \operatorname{ctg}\beta \cdot \operatorname{ctg}\gamma, v = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\gamma, w = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta$, to rozwiązaniem równania (2) jest punkt przecięcia się prostych zawierających wysokości trójkąta.

O wielu innych faktach związanych z trójkątami, o szczególnych prostych trójkąta, o szczególnych okręgach trójkąta można dowiedzieć się z książki [4].

Na zakończenie proponuję

Zadanie Hugona Steinhausa.

Czy w dowolnym trójkącie ostrokątnym leży zawsze taki punkt S , że poprowadzone z niego prostopadłe do boków dzieli pole trójkąta na trzy równe części?

O ile mi wiadomo, rozwiązanie tego zadania nie jest znane.

Literatura

1. S. Gołąb, *O tak zwanej geometrii trójkąta*, *Matematyka* 1/1948, s. 5–11.
2. W. Kostarczyk, *Szczególne punkty trójkąta*, *Matematyka* 3/1985, s. 142–157.
3. M. Szurek, *Automat do dowodzenia twierdzeń*, *Delta* 5/1983, s. 1–3.
4. S.I. Zetel, *Geometria trójkąta*, PZWS, Warszawa 1964.

W ostatnich latach olbrzymie postępy w manipulowaniu pojedynczymi atomami pozwoliły na przeprowadzanie spektakularnych doświadczeń, które do niedawna uważane były jedynie za doświadczenia myślowe. Jednym z takich eksperymentów jest doświadczenie Younga rozpraszania fotonów lub cząstek na dwóch szczelinach w kontekście dualizmu korpuskularno-falowego i pytania „którą drogą” w mechanice falowej. Często w dyskusji tego typu doświadczeń relacja nieoznaczoności Heisenberga dla położenia i pędu jest wykorzystywana na dowód, że nie można określić, którą drogą przeleciał foton lub cząstka, bez zaburzenia charakterystycznego obrazu interferencyjnego.

W artykule Cinala i Englerta na str. 1–4 tego numeru *Delta* problem ten jest dyskutowany bardziej szczegółowo oraz omówione są tam nowe doświadczenia z wykorzystaniem wnęk mikromaserowych, w których znikanie interferencji jest wynikiem korelacji między obserwowanym systemem i aparaturą pomiarową, a nie bezpośrednią konsekwencją zasady nieoznaczoności. W tomie 70 czasopisma *Physical Review Letters* przedstawiona została inna realizacja tego samego pomysłu. W artykule autorstwa U. Eichmanna i współpracowników przedstawione są wyniki doświadczeń z rozpraszania światła na dwóch jonach rtęci $^{198}\text{Hg}^+$ uwięzionych w tzw. liniowej pułapce Paula. Rozproszone światło daje typowy obraz złożony z prążków interferencyjnych, gdyż światło może się rozproszyć albo na jednym, albo na drugim jonie. Mamy więc inną realizację klasycznego rozpraszania Younga.

W doświadczeniu tym można również uzyskać informację o drodze fotonu wykorzystując wewnętrzną strukturę jonów. Jony były oświetlane światłem laserowym liniowo spolaryzowanym o długości fali $\lambda = 194$ nm tak dobranej, aby odpowiadało to przejściu jonów rtęci między stanami podstawowymi ($6s^2S_{1/2}$) i jednym ze stanów wzbudzonych ($6p^2P_{1/2}$). Każdy z tych stanów jest podwójnie zdegenerowany ze względu na magnetyczną liczbę kwantową m_J . Dzięki temu możliwe są różne stany końcowe fotonu i jonów po rozproszeniu. Pochłonięcie fotonu liniowo spolaryzowanego powoduje przejście jonu ze stanu s do stanu p bez zmiany m_J , natomiast powrót jonu do stanu s może być dwojakiego rodzaju. Jon rtęci może nie zmienić liczby m_J , czemu towarzyszy emisja fotonu liniowo spolaryzowanego (tzw. polaryzacja π). W tym przypadku stan końcowy jonów jest taki sam, jak przed rozpraszaniem. Nie można więc określić, na którym jonie foton się rozproszył i powinniśmy obserwować typowy obraz interferencyjny. W drugim przypadku jon może zmienić magnetyczną liczbę kwantową o jeden, czemu towarzyszy emisja fotonu spolaryzowanego (tzw. polaryzacja σ). Tym razem stan jonu, na którym nastąpiło rozpraszanie ulega zmianie i w zasadzie można określić, którą drogą leciał foton. Interferencja powinna w takim razie zniknąć i to niezależnie od tego, czy faktycznie sprawdzamy, na którym jonie nastąpiło rozpraszanie. Licznik rejestrujący fotony i czuły na polaryzację światła może więc służyć jako urządzenie obserwujące raz falową, a raz korpuskularną naturę światła rozproszonego.



Rozwiązanie zadania M 686. Tak. Wystarczy np. wprowadzić kartezjański układ współrzędnych (x, y, z) i zdefiniować dla $i = 0, 1, \dots, 1992$ następujące zbiory A_i : punkt o współrzędnych (x, y, z) należy do A_i wtedy i tylko wtedy, gdy $[x]$ daje resztę i przy dzieleniu przez 1993. Wtedy, dla dowolnych i oraz j , A_j jest obrazem A_i w przesunięciu o wektor długości $|j - i|$, równoległy do osi x .



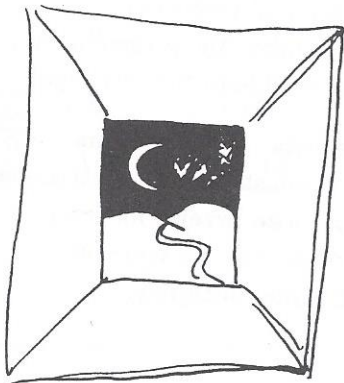
Rozwiązanie zadania M 687. Wystarczy usunąć 43 liczby: 2, 3, ..., 44. Jeśli pewna liczba naturalna nie przekraczająca 1993 ma dwa dzielniki różne od 1 i od niej samej, to przynajmniej jeden z nich musi być mniejszy lub równy $\sqrt{1993} = 44$, czyli żadna pozostawiona liczba nie jest iloczynem dwóch innych pozostawionych liczb.

Jeśli usuwamy mniej niż 43 liczby, to wśród pozostawionych liczb będzie przynajmniej jedna spośród 43 trójek postaci $(l, 89 - l, l \cdot (89 - l))$, $l \in \{2, 3, \dots, 44\}$ (zasada szufladkowa Dirichleta!). Warunek postawiony w treści zadania nie będzie więc spełniony.

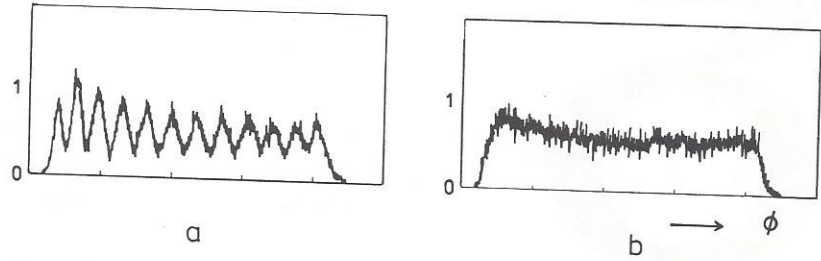


Rozwiązanie zadania F 369. Kąt skręcenia płaszczyzny polaryzacji po przejściu drogi x wynosi $\alpha = cqx$, gdzie q oznacza gęstość cukru w roztworze. Niech k oznacza liczbę łyżeczek cukru wsypanych do herbaty, $\alpha = c \frac{km}{V} \cdot x$. Stąd otrzymujemy

$$k = \frac{\alpha V}{cmx} \approx 2 \text{ łyżeczki.}$$



Wyniki pomiaru intensywności światła w zależności od wybranej polaryzacji przedstawia rysunek: interferencja jest obserwowana jedynie dla polaryzacji π w pełnej zgodności z przewidywaniami mechaniki kwantowej.



Intensywność światła rozproszonego o polaryzacji π (a) i σ (b) w zależności od kąta rozpraszania.

Opracował Jan KALINOWSKI

na podstawie artykułu U. Eichmanna i innych, *Phys. Rev. Lett.* 70 (1993) 2359.

Patrz w niebo

O zagadnieniu „brakującej masy” wielokrotnie już pisaliśmy i zapewne jeszcze nieraz pisać będziemy. Ma ono bowiem wielkie znaczenie zarówno dla dynamiki galaktyk, jak i dla całej kosmologii. W pierwszym przypadku chodzi o to, że gdyby główna masa galaktyki była skupiona w jej jądrze, to gwiazdy należące do ramion spiralnych poruszałyby się w przybliżeniu jak planety wokół Słońca, tzn. zgodnie z prawami Keplera. Z dopplerowskich przesunięć linii widmowych tych gwiazd można odtworzyć ich prędkości w różnych odległościach od centrum galaktyki, a przez to sprawdzić słuszność wstępnego założenia. Okazuje się, że często jest ono fałszywe. W galaktykach jest rozproszona, i to w okazałych ilościach, nieświecąca materia. Powstają dwa problemy: czym ona jest i jak ją zaobserwować.

Hipotez jest kilka, ale niewykluczone, że najbardziej prawdopodobna jest najprostsza: brakująca masa, a w każdym razie jej spora część to wszechobecny wodór. Dowodzą tego pewne, nie całkiem standardowe obserwacje. Na przykład, dopiero silnie przeeksponowane zdjęcie mgławicy planetarnej NGC 6543 w Smoku ukazało jej rozległą otoczkę o skomplikowanej włóknistej strukturze, zawierającą kilkakrotnie więcej masy niż sama mgławica. Otoczka ta najwyraźniej powstała wskutek silnego wiatru gwiazdowego jeszcze przed odrzuceniem przez gwiazdę samej mgławicy. A takich obiektów może być wiele.

Mogą one, jak się okazuje, istnieć również w znacznie większej skali. Mianowicie, wokół pary galaktyk M 105 i NGC 3384 odkryto wodorowy pierścień o kątowej średnicy około 1° , co przy uwzględnieniu odległości 10 Mpc daje liniową średnicę rzędu 200 kpc. Mając takie rozmiary otoczka może zawierać więcej masy niż same galaktyki. O tym, że jest to wodór, świadczy fakt, iż pierścień ten „widac” na radiowej fali 21 cm charakterystycznej dla neutralnego wodoru. Pierścień wykazuje zupełny brak promieniowania widzialnego, a więc gwiazd, jak i podczerwonego, a więc pyłu. Nie wykazuje też w zakresie radiowym żadnych linii pochodzących od prostych molekuł, takich jak CO lub OH. W rezultacie przypuszcza się, że jest to pierwotny wodór, który od Wielkiego Wybuchu nie zdążył utworzyć żadnych struktur.

Tomasz KWAST

Mała Apokalipsa

Oto średnie prędkości kątowe planet w ich ruchu okołosłonecznym (w sekundach łuku na dobę):

| | |
|---------|-----------|
| Merkury | 14 732.42 |
| Wenus | 5 767.67 |
| Ziemia | 3 548.19 |
| Mars | 1 886.52 |
| Jowisz | 299.13 |
| Saturn | 120.45 |
| Uran | 42.23 |
| Neptun | 21.53 |
| Pluton | 14.21 |

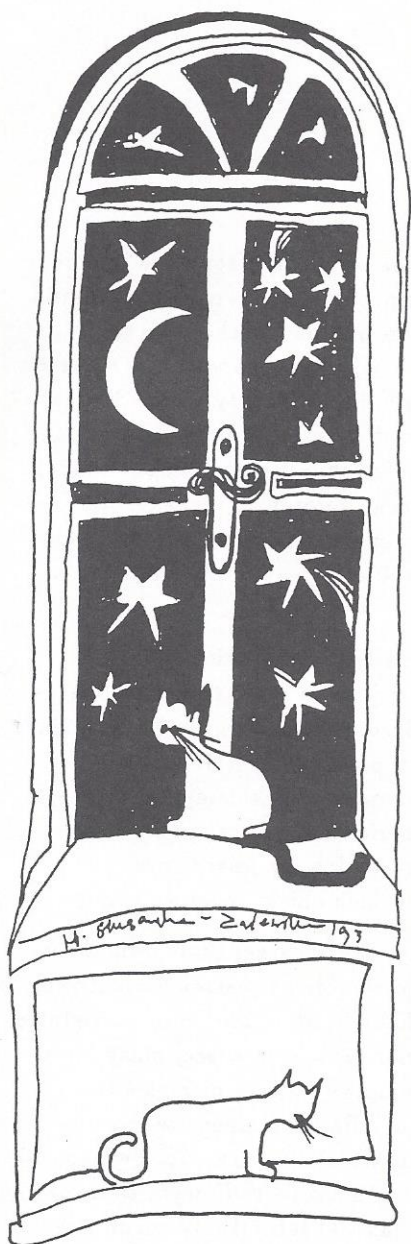
Spróbujmy tak dobierać niewielkie liczby całkowite, by ich stosunek był równy (oczywiście, w przybliżeniu) stosunkowi różnych podanych tu prędkości kątowych. Nie jest to trudne, tylko co w tym ciekawego?

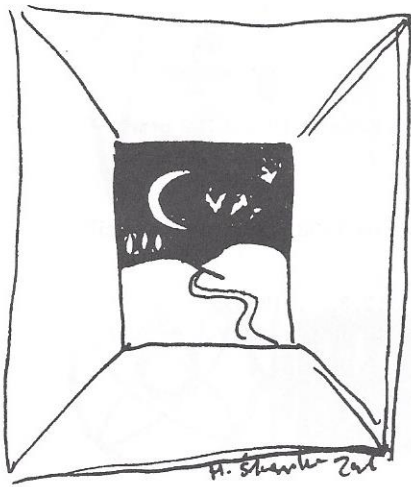
Otóż, każdy doskonale pamięta z dzieciństwa, w jaki sposób najłatwiej jest rozbijać kogoś na huśtawce. Wystarczy mianowicie huśtawkę popychać nawet lekko, byle w odpowiednich chwilach, np. gdy huśtawka jest akurat w skrajnym położeniu. Nawet niekoniecznie za każdym razem, można przy co drugim wahnięciu, albo i rzadziej. Mówimy, że siła popychająca musi działać w rezonansie z huśtawką.

Nasza zabawa z liczbami doprowadziła więc do znalezienia rezonansów między ruchami planet i w tym miejscu przestała być zabawą.

No bo skoro małym wysiłkiem można silnie rozbijać huśtawkę, to i planety wzajemnie oddziałując, wprawdzie słabo, ale w rezonansie, mogą się nawzajem tak „rozbijać”, że uciekną z Układu Słonecznego!

Tak źle nie jest, ale też sprawa jest bardziej zawiła. Huśtawka ma ustaloną długość, a więc i częstość wahań, natomiast planeta wytracona ze swojej orbity przez rezonans z inną planetą może przejść na inną orbitę, na której rezonans będzie „gorszy”, tzn. będzie się wyrażał większymi liczbami całkowitymi. Będzie więc mniej dotkliwy.





I rzeczywiście – szperając w tablicach można dopatrzeć się, że jest stosunkowo mało planetoid będących w rezonansie z Jowiszem, że przerwy w pierścieniach Saturna odpowiadają orbitom będącym w rezonansie z jego satelitami itd. Zarazem jednak są dwie grupy planetoid, tzw. trojańskich, poruszających się akurat po orbicie Jowisza (rezonans 1:1). Tak więc jedne rezonanse „odpychają”, a inne „przyciągają”. Nie do końca wiadomo, dlaczego tak jest. Nie wiadomo w rezultacie, czy Układ Słoneczny dąży generalnie do struktury rezonansowej, czy właśnie od niej odchodzi. Na pewno jednak istnieje kilka miliardów lat, więc chyba nie musi rozlecieć się na naszych oczach?!

I pomyśleć, że niepokój o trwałość naszego układu planetarnego może rozbudzić nawet problem w rodzaju „jak rozbijać huśtawkę”.

Małą Deltę przygotował Tomasz KWAST



Rozwiązanie zadania M 685. Ustalmy $l, k \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Wśród rozpatrywanych liczb dokładnie $8!$ ma na l -tym miejscu cyfrę k . Zatem szukana suma jest równa

$$\begin{aligned} & (8! \cdot 1 + 8! \cdot 2 + \dots + 8! \cdot 9) + (8! \cdot 1 + 8! \cdot 2 + \dots + 8! \cdot 9)10 + \\ & + (8! \cdot 1 + 8! \cdot 2 + \dots + 8! \cdot 9)10^2 + \dots + (8! \cdot 1 + 8! \cdot 2 + \dots + 8! \cdot 9)10^8 = \\ & = 8!(1 + 2 + \dots + 9)(1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^8) = 8! \cdot 45 \cdot 111\,111\,111 = 201\,599\,999\,798\,400. \end{aligned}$$

| Odcinek dla poczty | Odcinek dla posiadacza rachunku | Potwierdzenie dla wpłacającego |
|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| Zł | Zł | Zł |
| słownie złotych | słownie złotych | słownie złotych |
| Dokładny adres wpłacający | Dokładny adres wpłacający | Dokładny adres wpłacający |
| na r-k AMOS | na r-k AMOS | na r-k AMOS |
| Dokładna nazwa 01-506 Warszawa | Dokładna nazwa 01-506 Warszawa | Dokładna nazwa 01-506 Warszawa |
| ul. Szenwalda 1 | ul. Szenwalda 1 | ul. Szenwalda 1 |
| nazwa banku PKO VIII O/W-wa | nazwa banku PKO VIII O/W-wa | nazwa banku PKO VIII O/W-wa |
| Nr r-ku 1586-77578-136 | Nr r-ku 1586-77578-136 | Nr r-ku 1586-77578-136 |
| stempel | stempel | stempel |
| podpis przyjmującego | podpis przyjmującego | podpis przyjmującego |
| Pobrano opłatę | Pobrano opłatę | Pobrano opłatę |
| zł | zł | zł |



Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

M 685. Znaleźć sumę wszystkich $9!$ liczb, otrzymanych z liczby 123456789 przez dokonanie wszystkich możliwych przestawień cyfr.

Rozwiązanie na str. 11

M 686. Czy przestrzeń trójwymiarową można podzielić na 1993 przystające części?

Rozwiązanie na str. 9

M 687. Ile co najmniej liczb należy usunąć ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 1993\}$, by żadna z pozostawionych liczb nie była iloczynem dwóch innych różnych od niej pozostawionych liczb? Jak można to zrobić?

Rozwiązanie na str. 9

Redaguje Jarosław KULPA

F 369. Po przejściu przez herbatę (wzdłuż średnicy szklanki) światło skrzyło płaszczyzną polaryzacji o kąt 3° . Oszacować, ile łyżeczek cukru wsypano do herbaty. Założyć, że standardowa łyżeczka zawiera $m = 5$ g cukru, szklanka ma pojemność $V = 250$ ml i średnicę wewnętrzną $x = 6,3$ cm. Stała skręcenia płaszczyzny polaryzacji dla cukru wynosi $c = 1,2^\circ \text{m}^2/\text{kg}$.

Rozwiązanie na str. 9

F 370. Jaki ułamek energii promieniowania słonecznego działa na zmysł wzroku? Czulość oka ludzkiego jest opisana wzorem

$$\eta(\lambda) = e^{-\alpha(\lambda-\lambda_0)^2},$$

gdzie $\lambda_0 = 555$ nm. Widmo promieniowania Słońca w zależności od długości fali opisuje równanie Plancka

$$I(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1},$$

gdzie h oznacza stałą Plancka, k jest stałą Boltzmanna, $T = 6000$ K temperatura powierzchni Słońca. Obliczenia przeprowadzić w stosunku do idealnego źródła światła o ustalonej długości fali λ_0 i takiej samej mocy co Słońce.

Rozwiązanie na str. 16

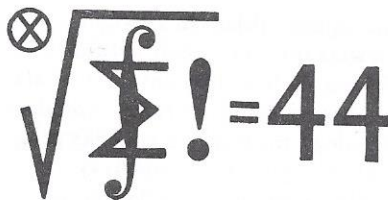
Cukier należy do węglowodanów i skręca płaszczyznę polaryzacji. Kto by się temu opierał, podlega karze bezwzględnej aresztu, bez zamiany na grzywnę.

Antoni Słonimski i Julian Tuwim
W oparach absurdu

Prenumerata „Delfy”
za okres:

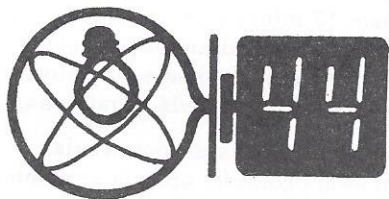
Prenumerata „Delfy”
za okres:

Prenumerata „Delfy”
za okres:



Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki,
Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*



Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1993.

Termin nadsyłania rozwiązań: 28 II 1994

Zadania z fizyki nr 167, 168

Redaguje Jerzy B. BROJAN

167. W prostoliniowym przewodniku, którego 1 metr waży 2 gramy, płynie prąd stały o natężeniu 50 A. Na jakiej wysokości zawiesznie ten przewodnik nad poziomą płaszczyzną nadprzewodzącą? Wskazówka: Pole magnetyczne we wnętrzu nadprzewodnika jest równe zero.

168. Przezroczysta kula wykonana jest z materiału o współczynniku załamania zależnym od odległości r od środka kuli. Jaka powinna być ta zależność, aby dowolny promień światła krążył po okręgu?

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 153 ($WT=4,00$) i 154 ($WT=2,70$)
z numeru 2/1993

| | |
|---------------------------------|-------|
| Przemysław Gworys - Częstochowa | 32,92 |
| Tomasz Wietecha - Tarnów | 32,90 |
| Andrzej Nowogrodzki - Chocianów | 27,77 |

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 255 ($WT=3,00$) i 256 ($WT=1,55$)
z numeru 2/1993

| | |
|--------------------------------|-------|
| Adam Czornik - Bytom | 46,68 |
| Leszek Gasifski - Stalowa Wola | 41,46 |
| Jerzy Janowicz - Bolesławiec | 41,19 |
| Janusz Olszewski - Suwałki | 36,09 |

Pan Czornik - po raz drugi!

Zadania z matematyki nr 269, 270

Redaguje Marcin E. KUCZMA

269. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną $n \geq 3$ o następującej własności: Jeżeli T_1, T_2, \dots, T_n są zbiorami trójelementowymi, z których każde dwa mają dokładnie jeden element wspólny, to istnieje wspólny element wszystkich zbiorów T_i .

270. Niech $f(x) = x^{x^x} \left[= x^{(x^x)} \right]$. Obliczyć $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(\sin x)}{f(x)}$.

Zadanie 270 zaproponował pan Krzysztof Zapisek z Warszawy.

Wspominaliśmy już w *Delcie* o rosnącym zainteresowaniu komputerami typu *fuzzy*. Zasada ich działania opiera się na teorii zbiorów rozmytych (*fuzzy*). W odróżnieniu od dotychczas istniejących komputerów, które działają w logice dwójkowej (wartości 1 lub 0, tak lub nie), komputery typu *fuzzy* operują na nieprecyzyjnych danych, takich jak na przykład: szybciej, niezbyt gorące, całkiem brudny itp. Takie dane są reprezentowane przez liczby z zakresu 0 - 1. Matsushita Electric Industrial Co. zakomunikowała o wyprodukowaniu dwóch produktów przeznaczonych dla domu, w których po raz pierwszy zastosowano te komputery. Są to pralka i odkurzacz, które mają ułatwić prace domowe. Pralka, nazwana „Aisaigo (kochana żona) Day Fuzzy”, wyposażona jest w dwa czujniki optyczne. Służą one do zbadania ilości rzeczy do prania oraz stopnia i rodzaju zabrudzenia. Na podstawie tych danych mikrokomputer wybiera jeden z 600 możliwych cykli prania. Natomiast odkurzacz *fuzzy* stwierdza rodzaj podłogi oraz stopień jej zabrudzenia i na tej podstawie steruje mocą silnika.

Przemysłowcy japońscy zdecydowali się zainwestować „grube pieniądze” w badania nad obliczeniami przybliżonymi (ang. *fuzzy computing*). Obliczenia te opierają się na teorii zbiorów przybliżonych (ang. *fuzzy set theory*) zapoczątkowanej przez prof. L.A. Zadeha z Uniwersytetu Kalifornijskiego w Berkeley. Zwolennicy takich obliczeń twierdzą, że komputery typu *fuzzy* pozwolą przetwarzać informacje w sposób podobny do sposobu działania naszego mózgu. Obecnie w Japonii program typu *fuzzy* na konwencjonalnym komputerze kontroluje pracę metra w mieście Sendai.

Antybilard

Rafał KOŁODZIEJ

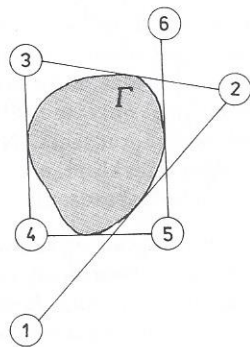
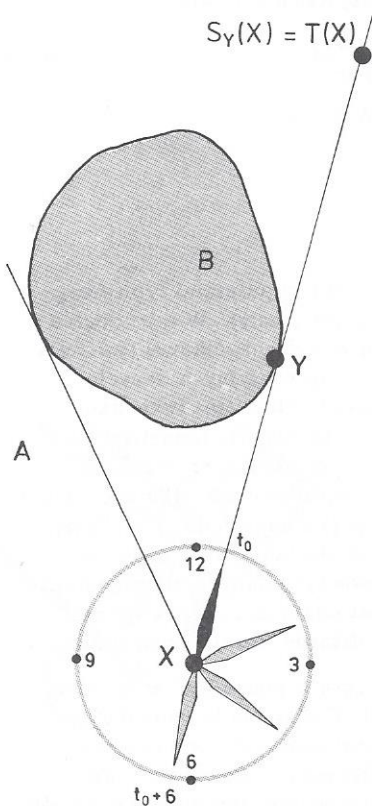
Ruch wszystkich ciał Układu Słonecznego można opisać układem równań różniczkowych. Układ taki ma jednoznaczne rozwiązanie, tzn. jeśli ustalimy precyzyjnie położenia i prędkości planet oraz Słońca w dowolnej chwili, to cała jego przeszłość i przyszłość są zdeterminowane. Więcej, za pomocą doskonałego rachmistrza potrafilibyśmy je obliczyć. Kłopot polega na tym, że rozwiązania, choć istnieją, nie są podane w dobrej dla rachunków postaci dla, niestety, niedoskonałych rachmistrzów, jakimi są na przykład komputery. Dlatego nie potrafimy odpowiedzieć na pytanie, czy pewna konfiguracja planet Układu Słonecznego, nieznacznie odbiegająca od istniejącej u zarania dziejów, tzn., jak myślę, 3 000 000 000 lat 3 miesiące 2 dni 5 godzin 13 minut i 54 sekundy temu, wywołałaby katastrofę kosmiczną (i w konsekwencji na Ziemi nie powstałoby życie). Ten rodzaj pytania nazywamy pytaniem o stabilność układu i byłoby pocieszające uzyskać w przypadku Układu Słonecznego odpowiedź negatywną.

Między innymi próba odpowiedzi na to pytanie doprowadziła do powstania tzw. teorii układów dynamicznych, które z racji swej ogólności opisują znacznie szerszą klasę zjawisk niż tylko ewolucja Układu Słonecznego. Zanim powiemy, co to jest układ dynamiczny, przyjrzyjmy się jeszcze przez chwilę Układowi Słonecznemu. Stan Układu Słonecznego możemy jednoznacznie opisać podając składowe położenia i prędkości wszystkich planet i Słońca (jest to, oczywiście, opis przybliżony, bo np. zaniedbujemy księżyce). Na każdą planetę (Słońce) przypada więc sześć liczb. Wobec tego stan Układu opisany jest przez podanie 60. liczb. A układ 60. liczb to nic innego tylko punkt w 60-wymiarowej przestrzeni. Układ Słoneczny ewoluje w czasie, owe 60 liczb opisujące Układ zmieniają się, co oznacza, że ów punkt w 60-wymiarowej przestrzeni porusza się. Zamiast więc badać ewolucję Układu Słonecznego wystarczy badać ruch jednego punktu. Ewolucję Układu Słonecznego możemy zatem opisać tak: mamy 60-wymiarowy zbiór, każdy punkt tego zbioru odpowiada ustalonej konfiguracji położenia i prędkości, punkty tego zbioru podlegają nieustannemu ruchowi – zgodnie z prawami wynikającymi z równań mechaniki.

Mówiąc bardzo nieściśle: układ dynamiczny to pewien zbiór, którego punkty podlegają ewolucji zgodnie z pewnymi zasadami. Jak zauważyliśmy, Układ Słoneczny może być opisany za pomocą układu dynamicznego. Układy dynamiczne mogą być wykorzystane do opisu znacznie szerszej klasy zjawisk ewolucyjnych (stosują się nawet w biologii, medycynie...).

W przypadku Układu Słonecznego stan układu zmienia się w czasie w sposób ciągły. Można też rozpatrywać układy dynamiczne, które ewoluują w sposób skokowy. W latach 60. B.H. Newman podał ciekawy przykład takiego układu dynamicznego – antybilard. Jest to pewne przekształcenie T podzbioru płaszczyzny (zaraz opiszemy, jakie). Kolejne stany ewolucji punktu X , to wyrazy ciągu $X, T(X), (T \circ T)(X) \dots$ zwanego trajekcją punktu X . Jeżeli trajektoria punktu X zawarta jest w ograniczonym podzbiore płaszczyzny, to punkt X ewoluje tak, że jego współrzędne (opisujące stan układu) są cały czas ograniczone – nie ulegają wielkim zmianom. To zaś oznacza, że układ nie ulega katastrofie. Pytaniem o stabilność antybilardu jest więc pytanie, czy trajektoria dowolnego punktu jest zawarta w zbiorze ograniczonym. Pytanie to w jakimś stopniu jest podobne do pytania o stabilność Układu Słonecznego.

Czas przedstawić bohatera opowieści, czyli antybilard. Rozważmy na płaszczyźnie wypukłą, zamkniętą krzywą Γ , ograniczającą zbiór wypukły B , która nie zawiera żadnego odcinka. Krzywa Γ dzieli płaszczyznę na dwa zbiory: B oraz A . Zdefiniujmy przekształcenie $T: A \rightarrow A$. Z punktu $X \in A$ można poprowadzić dwie półproste, z których każda ma dokładnie jeden punkt wspólny z Γ (rys. 1). Aby wybrać jedną z nich, wyobraźmy sobie zegar o środku w punkcie X z długimi wskazówkami, którymi będą półproste. Dla pewnego czasu t_0 wskazówka jest styczna do Γ w punkcie Y , a przez następne 6 godzin nie ma z Γ punktów wspólnych.

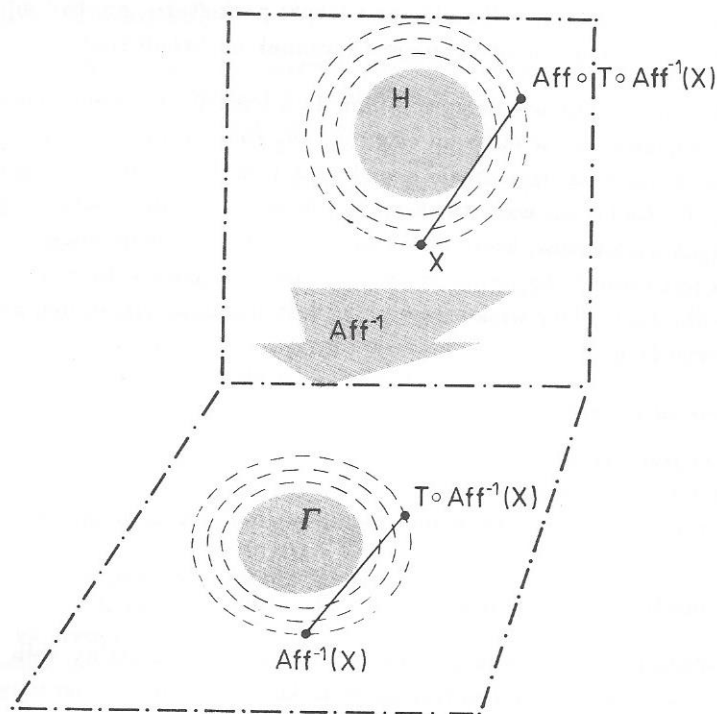


Rys. 1

Zdefiniujemy przekształcenie *antybilard* T , jako symetrię punktu X względem punktu Y , czyli $T(X) = S_Y(X)$, gdzie S_Y oznacza symetrię względem punktu Y .

Przykłady

1) W przypadku, gdy Γ jest okręgiem, przekształcenie T obraca okrąg Γ_1 współśrodkowy z Γ o kąt $\alpha = 2 \arccos(R/R')$, gdzie R i R' oznaczają odpowiednio promienie okręgów Γ i Γ_1 . \diamond (Znaczek \diamond sugeruje uważnemu Czytelnikowi, że może sprawdzić prawdziwość twierdzenia, na przykład z piórem w ręku).



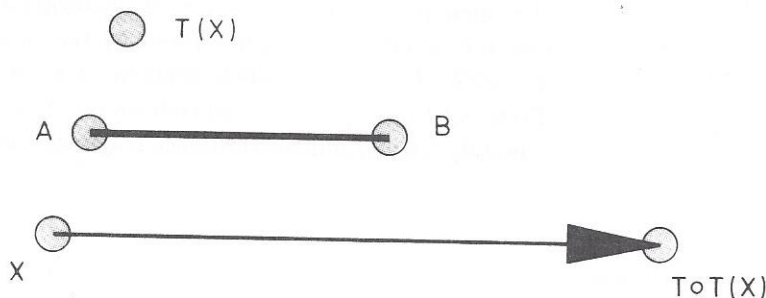
Rys. 2

2) Podobnie prosty opis dostajemy w przypadku, gdy Γ jest elipsą. Wówczas, aby zrozumieć jak działa przekształcenie T , warto rozpatrzyć przekształcenie afiniczne Aff (na przykład rzut równoległy jednej płaszczyzny na drugą), które elipsę Γ przekształca na okrąg H . Ponieważ przekształcenie afiniczne przekształca proste na proste, zachowuje środek odcinka i obrazy figur ograniczonych są ograniczone, możemy analizować przekształcenie $Aff \circ T \circ Aff^{-1}$ zamiast T (rys. 2).

Przekształcenie $Aff \circ T \circ Aff^{-1}$ nazywamy sprzężonym do T . Ponieważ $Aff \circ T \circ Aff^{-1}$ zostało opisane w 1), więc zachowuje ono okręgi współśrodkowe z H . Wobec tego T zachowuje elipsy otrzymane z Γ przez jednokładność o skali $k > 1$ i środku w środku Γ (rys. 2). W obu przypadkach trajektorie T są ograniczone, bo są zawarte w okręgach lub elipsach.

Ciekawsza jest sytuacja, gdy Γ jest wielokątem. Wówczas przekształcenie T jest określone tylko dla punktów, które nie należą do prostych zawierających boki Γ . W tej sytuacji, aby istniała trajektoria punktu X ($\{X, T(X), T \circ T(X), \dots\}$), żaden obraz punktu X nie może należeć do prostej zawierającej bok wielokąta Γ . Okazuje się, że tak jest dla dużego podzbioru C zbioru A , (tzw. podzbioru pełnej miary Lebesgue'a). Czasami można powiedzieć coś więcej o kształcie tego zbioru. W dalszym ciągu będziemy rozważali T dla punktów należących do C .

3) Γ jest odcinkiem AB . W zależności od tego, po której stronie prostej AB leży punkt X , przekształcenie T jest przesunięciem o wektor $2\vec{AB}$ lub $-2\vec{AB}$, gdyż wiadomo, że $S_A \circ S_B = 2\vec{AB}$ i $S_B \circ S_A = -2\vec{AB}$. \diamond Jest to jedyny znany przypadek, w którym trajektorie T nie są ograniczone. W tym przypadku ciąg punktów $X, T(X), T \circ T(X), \dots$ nie jest ograniczony (rys. 3) dla żadnego X . \diamond



Rys. 3

**Rozwiązanie zadania F 370.**

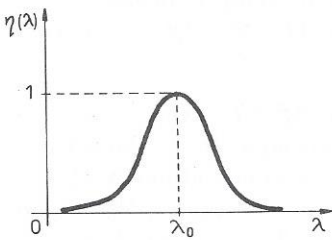
Z założenia zadania moc promieniowania źródła światła o długości 555 nm jest taka sama jak moc promieniowania Słońca i wynosi σT^4 , gdzie $\sigma = 5,7 \times 10^{-5} \text{ erg/s cm}^2/\text{K}^4$ oznacza stałą Stefana-Boltzmana, a T jest temperaturą powierzchni Słońca wyrażoną w kelwinach. Szukany ułamek energii promieniowania będzie równy:

$$q = \frac{\int I(\lambda) \cdot \eta(\lambda) d\lambda}{\sigma T^4 \cdot \eta(\lambda_0)},$$

przy czym $\eta(\lambda_0) = 1$. Całkę w liczniku możemy obliczyć w przybliżeniu

$$\int I(\lambda) \cdot \eta(\lambda) d\lambda = I(\lambda_0) \int_0^{\infty} \eta(\lambda) d\lambda.$$

Ponieważ krzywa czułości ludzkiego oka ma kształt dzwonowy,



nie popełniamy dużego błędu rozciągając granice całkowania

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \eta(\lambda) d\lambda &\approx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\lambda-\lambda_0)\alpha} d\lambda = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Ponieważ $e^{-(\Delta\lambda/2)^2\alpha} = 1/2$, więc $\alpha = \frac{4 \ln 2}{(\Delta\lambda)^2}$. Ostatecznie otrzymujemy

$$q = \frac{\pi^{3/2} h c^2 \Delta\lambda}{\sigma T^4 \lambda_0^5 \left(e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1 \right) \sqrt{\ln 2}}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy $q \approx 14\%$.

Zbiór C jest zbiorem tych punktów płaszczyzny, które nie należą do prostej AB .

4) Γ jest trójkątem. Najpierw stosując „sztukę” podobną do tej z rysunku 2, możemy przyjąć, że Γ jest trójkątem równobocznym. Osiągniemy to po zrzutowaniu trójkąta Γ tak, aby jego obraz był trójkątem równobocznym. \diamond Płaszczyznę pokrywamy trójkątami przystającymi do Γ otrzymując tzw. parkietaż (rysunek na okładce). Klepki parkietażu przekształcane przez T przechodzą na siebie w okresowy sposób. \diamond Zadziwiające! Zbiór C jest zbiorem punktów nie leżących na krawędziach parkietażu. \diamond

5) Γ jest równoległobokiem. I tu, jak poprzednio, można założyć, że równoległobok jest kwadratem. Kwadratowe klepki parkietażu, po, być może, wielu odbiciach, powracają na swoje miejsce (rysunek na okładce). \diamond

6) Pięciokąt foremny i inne wielokąty foremne dają bardziej skomplikowane obrazki, choć trajektorie są w dalszym ciągu ograniczone, a niektóre na pewno okresowe. Powracające na swoje miejsce wielokąty tylko czasami są pięciokątami podobnymi do Γ . Zachęcam wszystkich mających komputer do zbadania sytuacji i zobaczenia tych wielokątów, które okresowo powracają na swoje miejsce. Sytuacja taka jest typowa, co tłumaczy twierdzenie i komentarz do niego. Wiadomo, że dla dużej klasy wielokątów układ jest stabilny, dokładniej, zachodzi następujące twierdzenie:

Jeżeli spełnione są warunki:

- i) Wielokąt G jest wypukły,
- ii) G nie ma boków równoległych i
- iii) wszystkie równoległoboki lokalnie minimalne zawierające G mają pola wymierne,

to wszystkie trajektorie T są ograniczone.

Mówimy, że równoległobok Π zawierający G jest lokalnie minimalny, jeśli istnieje takie $\varepsilon > 0$, że dla każdego równoległoboku Π' również zawierającego G , którego wszystkie wierzchołki są odległe od odpowiednich wierzchołków równoległoboku Π nie więcej niż $\varepsilon > 0$, mamy $\text{pole}(\Pi) \leq \text{pole}(\Pi')$.

Każdy wielokąt G_1 , który spełnia warunki i), ii) i ma wszystkie współrzędne wierzchołków wymierne, spełnia warunek iii). Jest tak, ponieważ każdy bok równoległoboku minimalnego zawiera co najmniej jeden wierzchołek G_1 oraz jest równoległy do pewnego boku wielokąta G_1 . \diamond Zatem współrzędne wierzchołków równoległoboku są wymierne. \diamond Wobec tego pola również. \diamond

Wiadomo, że pięciokąt foremny nie ma wszystkich współrzędnych wierzchołków wymiernych, ponieważ stosunek długości boku do długości przekątnej jest równy złotemu stosunkowi, czyli $(-1 + \sqrt{5})/2$. \diamond

Ciekawy jest, moim zdaniem, dowód twierdzenia. Konstruuje się pierścień niezmienniczy złożony z wielokątów przystających do Γ (rysunek na okładce). Niezmienniczy, to znaczy taki, że trajektorie punktów z tego pierścienia cały czas leżą w tym pierścieniu. Wielokąty tego pierścienia przechodzą okresowo na siebie, więcej, wszystkie trajektorie są w całości po jednej stronie pierścienia. Teraz wystarczy wskazać całą rodzinę coraz to większych pierścieni, aby powstały bariery uniemożliwiające trajektorii uciekanie do nieskończoności.

Liczby doskonałe

Ludzie od dawien dawna przypisywali niektórym liczbom szczególne znaczenie. Wystarczy wymienić np: 3, 7, 13, 44... Matematycy także wyróżnili w zbiorze liczb naturalnych pewne rodziny liczb o szczególnych własnościach. Jedną z najlepiej znanych stanowią liczby pierwsze. Innymi znanymi i budzącymi zainteresowanie są liczby doskonałe.

Na czym polega ich doskonałość? Liczba jest doskonała, gdy daje się przedstawić jako sumą swoich dzielników, różnych od niej samej. Najprostszym i pierwszym historycznie przykładem liczby doskonałej jest $6 = 1 + 2 + 3$. Starożytni Grecy, zarówno pitagorejczycy, jak i późniejsi mędrcy z Platonem na czele, przypisywali liczbie 6 szczególne znaczenie. Ale i znacznie wcześniej można znaleźć wzmianki wyróżniające szóstkę. W Piśmie Świętym napisano, że Bóg stworzył świat w sześć dni, dlatego też wiele wymiarów świątyni Salomona nawiązuje do liczby 6. W Biblii również przyjmowano, że 2π jest równe 6. A jakie są inne liczby doskonałe i ile ich jest? Żyjący na przełomie I i II wieku Nikomachos, autor *Arytmetyki*, uważał, że obiekty doskonałe i piękne zawsze są rzadkie. W związku z tym nie należy się spodziewać, że liczb doskonałych będzie dużo. I rzeczywiście, do czasów Euklidesa znana była jeszcze tylko jedna taka liczba $28 (= 1 + 2 + 4 + 7 + 14)$. Euklides w *Elementach* umieścił nie tylko fakty geometryczne, lecz także zebrał twierdzenia z arytmetyki. Między innymi zauważył, że liczby postaci $2^{p-1}(2^p - 1)$, gdzie $2^p - 1$ jest liczbą pierwszą, są doskonałe. Dzięki temu mógł wskazać dwie nowe liczby tego typu: $496 = 2^{5-1}(2^5 - 1)$ oraz $8128 = 2^{7-1}(2^7 - 1)$. Kolejna, piątą liczbę doskonałą znaleziono dopiero w piętnastym wieku; była to $33550336 = 2^{12}(2^{13} - 1)$. Dwieście lat później Marin Mersenne wysunął przypuszczenie, że liczby $2^{p-1}(2^p - 1)$ powinny być doskonałe dla $p = 17, 19, 31, 67, 127$ i 257 . Dlaczego właśnie takie, trudno dziś powiedzieć. O liczbach odpowiadających $p = 17$ i 19 pisał także Cataldi. Historycy matematyki uważają, że zarówno Cataldi, jak i Mersenne nie wiedzieli, czy $2^{17} - 1$ i $2^{19} - 1$ są pierwsze. Dopiero Leonhard Euler, nie tylko genialny matematyk, lecz także wspaniały rachmistrz, sprawdził, że $2^{17} - 1$, $2^{19} - 1$ i $2^{31} - 1$ są pierwsze wykazując tym samym, że odpowiednie liczby są doskonałe. Euler udowodnił ponadto, że każda liczba doskonała parzysta musi być postaci $2^{p-1}(2^p - 1)$. Oznacza to, że liczby pierwsze Mersenne'a, tj. liczby pierwsze postaci $2^m - 1$, wyznaczają wszystkie liczby doskonałe parzyste.

Szp.: - ...czy matematycy też mają jakieś „swoje” liczby? Które mają dla was specjalne właściwości?
J.M.: - Tak. Np. liczby pierwsze. Tzn. te, które nie dzielą się przez inne.
Szp.: - Są szczęśliwe czy pechowe?
J.M.: - Po prostu są ciekawsze. Tak jak liczby zaprzyjaźnione. Tzn. jedna liczba jest sumą dzielników drugiej liczby. I na odwrót. Albo liczba doskonała, która jest sumą swoich dzielników.
Szp.: - Rzeczywiście doskonale się dla takiej liczby składa... Tylko nie rozumiem dlaczego?
J.M.: - Wątpię, czy to zainteresuje czytelników „Szpilek”?
Szp.: - Ja też. A kto się tym naprawdę interesuje?
J.M.: - Najwięcej zajmowano się tym w starożytności. Szczególnie Pitagoras. Z tamtych czasów pochodzi np. przekonanie, że „Pan Bóg kocha liczby nieparzyste”. Bo mają środek.
Szp.: - Aha! Nie rozumiem...
J.M.: - Np. 5 ma dwa i dwa, a w środku 1.
Szp.: - Szkoda!
J.M.: - Dlaczego?
Szp.: - Dlatego, że środek wypadł na koniec wywiadu. To się nie komponuje.
J.M.: - Co w takim razie pani proponuje?

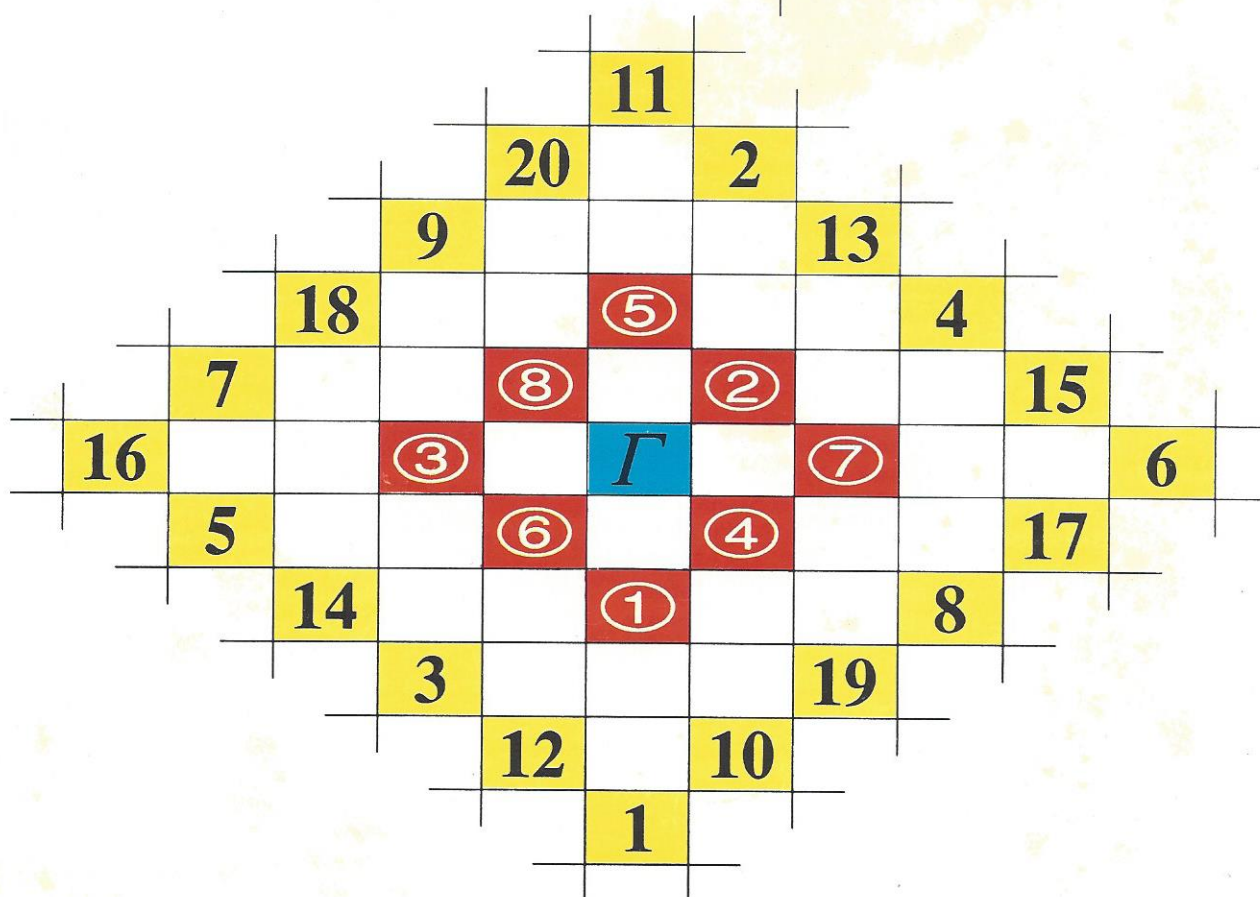
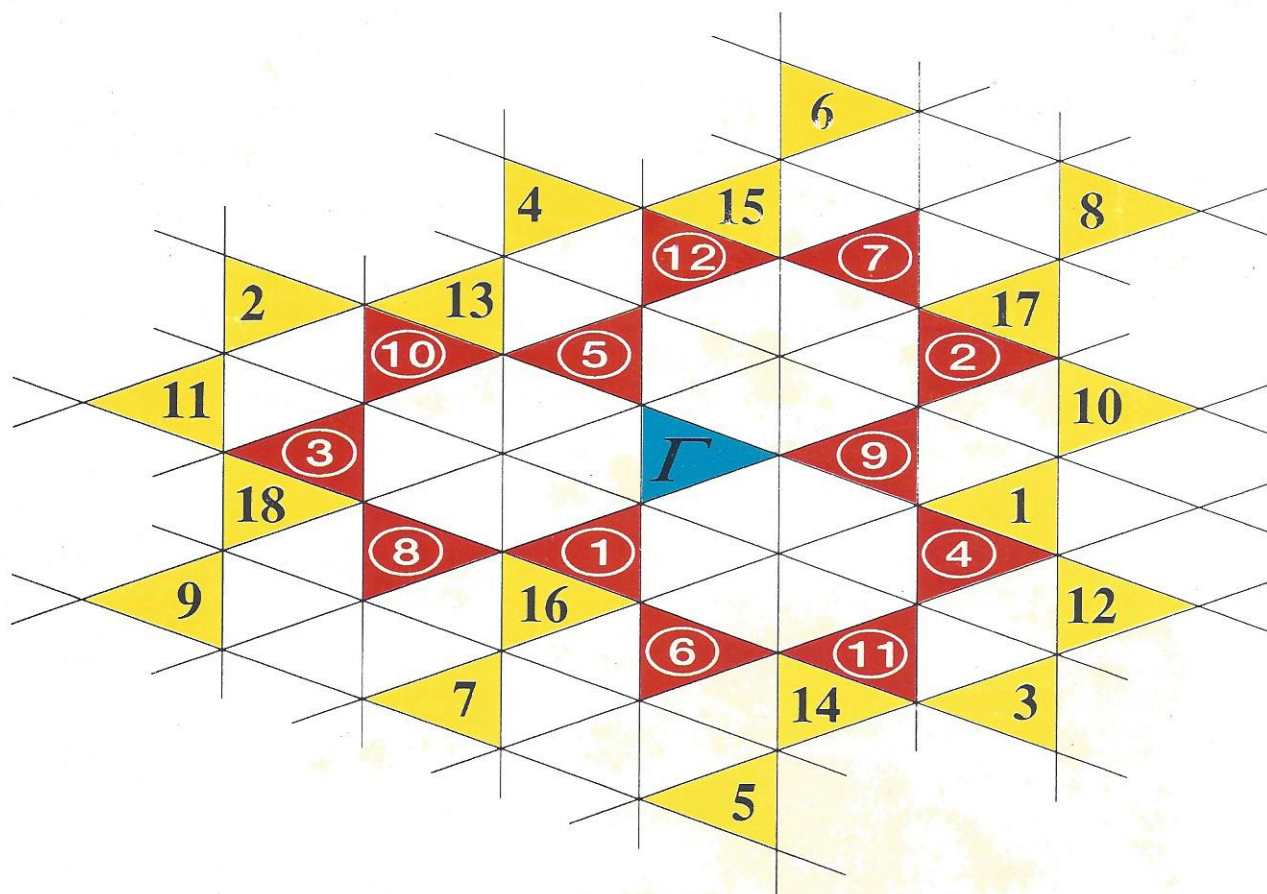
(fragment wywiadu z profesorem Januszem Miką w numerze 1979 *Szpilek* (29.07.1979), zadedykowanym matematyce; rozmawiała C.M.)

Szczęśliwym rokiem dla liczb doskonałych był rok 1952, kiedy to po raz pierwszy zastosowano maszynę elektroniczną do poszukiwania liczb pierwszych Mersenne'a. Do tego czasu znano ich dwanaście; używając „mózgu elektronowego” w ciągu roku znaleziono pięć nowych (a więc również pięć nowych liczb doskonałych). Bez nowej techniki obliczeniowej odkrywanie kolejnych liczb doskonałych byłoby zadaniem beznadziejnym; sprawdzenie, że $2^{257} - 1$ nie jest pierwsza, zajęło Lehmerowi prawie rok, w 1952 roku maszyna potrzebowała na to 18 sekund. Do dziś odkryto 32 liczby pierwsze Mersenne'a, znane są więc 32 liczby doskonałe. W 1992 roku ogłoszono, że $2^{756839} - 1$ jest pierwsza; pobity został rekord z 1990 roku, kiedy to stwierdzono, że $391581 \cdot 2^{216193} - 1$ jest liczbą pierwszą.

A co z nieparzystymi liczbami doskonałymi? Mimo usilnych poszukiwań do dziś żadnej nie znaleziono. Równocześnie nikomu nie udało się udowodnić, że takie liczby nie istnieją. Jeśli są, to stanowią wyjątkowo rzadkie i duże okazy. Stwierdzono, że liczb doskonałych nieparzystych mniejszych od 10^{300} nie ma.

Problemy dotyczące liczb doskonałych budzą duże zainteresowanie, chociaż trudno określić ich znaczenie. Tu wszystko jest jeszcze możliwe. Niewykluczone, że ktoś udowodni, iż liczb doskonałych nieparzystych jest nieskończenie wiele, ale nikt nie będzie potrafił wskazać chociażby jednej.

Zdzisław POGODA



Rysunki na obu okładkach są ilustracjami do artykułu Rafała Kołodzieja „Antybilard”. Na każdym z nich wielokąt z numerem n jest antybilardowym obrazem wielokąta z numerem $n - 1$.