

h=6.63·10⁻³⁴ J·s II=3.141593

CENA ZŁ 8000,-
NR 9 (232) 1993

PL ISSN 0137-3005 | NR INB 35 550 X

POPULARNY MIESIĘCZNIK MATEMATYCZNO-FIZYCZNO-ASTRONOMICZNY

Zadanie:

(*)

czyli: $\frac{r}{p-c} =$

Mnożąc stronami

(*) i (***) dostajemy



$r = \frac{2P}{a+b+c}$ Po
promnie b, c ktu 4

dzięki czemu
r Herona:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

UWAGA !!!

Nową formę prenumeraty „Deltę”
proponuje firma AMOS,
warunki poniżej.

SPIS TREŚCI

NUMERU 9(232)

Arytmetyka interwałowa, czyli kiedy $x \cdot x \neq x^2$ <i>Marek Gutowski</i>	str. 1
COMPTEL – teleskop promieniowania gamma <i>Jerzy Madej</i>	str. 4
Niestabilności plazmowe <i>Stanisław Mrówczyński</i>	str. 6
Mała Delta	str. 8
Twierdzenie o wiriale <i>Tomasz Kwast</i>	str.10
Jak udowodnić wzór Herona?	str.12
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Zadania	str.16
Epsilon	str.17

W następnym numerze:

Węglowodory i grafy

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego
i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichoński
Roman Duda
Jan A. Gaj
Tomasz Hofmokl – wiceprzewodniczący
Tadeusz Jarzębowski
Marcin Kubiak
Andrzej Mąkowski
Andrzej Pelczar
Zbigniew Płochocki
Zdzisław Pogoda
Konrad Rudnicki
Zbigniew Semadeni
Grzegorz Sitarski
Józef I. Smak
Kazimierz Stępień
Mieczysław Subotowicz
Andrzej Szymacha
Andrzej Woszczyk
Wojciech Żakowski – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

Krzysztof Biesaga
Piotr Hajlasz
Jan Kalinowski – z-ca red. naczk.
Krystyna Kordos – sekr. red.
Marek Kordos – red. naczk.
Tomasz Kwast
Stanisław Mrówczyński
Anna Rudnik
Joanna Udalska

Adres Redakcji:

ul. Smyczkowa 5/7
02-678 Warszawa
tel. 43-02-43 wewn. 21
DELTA@PLEARN.BITNET

Wydrukowano w Zakładach Graficznych
w Warszawie, ul. Srebrna 16
Skład systemem TeX wykonała redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY w AMOS-ie

Od stycznia br. prenumeratę „Deltę” prowadzi również firma AMOS,
01-506 Warszawa, ul. Szenwalda 1 (tel. 39-17-52). Wpłaty przyjmowane są
non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. Koszt trzech
numerów wynosi 24 000,-zł (rocznika'94 – 96 000,-zł). Przy wpłacie prosimy
zaznaczyć okres prenumeraty (co najmniej 3 miesiące).

Prenumerata zagraniczna trzech numerów wynosi 60 000,-zł. W przypadku życzenia
dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! AMOS dostarcza „Deltę” pod wskazany adres nie pobierając dodatkowej
opłaty. Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS
funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Blankiet pocztowy na prenumeratę „Deltę” w AMOS-ie zamieszczamy na str.11/12.

Konto AMOS-u: PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-186

WARUNKI PRENUMERATY w RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.

2. Cena prenumeraty na I kwartał 1994 r. wynosi 24 000,- zł.

3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku
zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa
prenumerator.

4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:

- na teren kraju

- jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania
lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony
sposób,

- na zagranicę

- „Ruch” S.A. Oddział Warszawa, 00-958 Warszawa, konto
PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – dostawa odbywa się
pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia
dostawy pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni
pokrywa prenumerator.

5. Terminy przyjmowania prenumeraty:

- na kraj i zagranicę – do 20 XI na I kwartał roku następnego
do 20 II na II kwartał
do 20 V na III kwartał
do 20 VIII na IV kwartał.

Cena 1 egzemplarza 8 000,- zł

Arytmetyka interwałowa, czyli kiedy $x \cdot x \neq x^2$

Marek GUTOWSKI

Hasło „arytmetyka interwałowa” zapewne niewiele mówi większości Czytelników. I nic w tym dziwnego, gdyż ten sposób rachowania istnieje od niedawna; dość powiedzieć, że poświęcony mu kwartalnik *Interval Computations* kończy właśnie trzeci rok istnienia. Ale do rzeczy.

Interwałem nazywamy uporządkowaną parę liczb rzeczywistych (x_1, x_2) , takich że $-\infty < x_1 \leq x_2 < +\infty$. Nie należy jednak mylić obiektów zwanych interwałami z liczbami zespolonymi czy współrzędnymi punktów płaszczyzny, które też są uporządkowanymi parami liczb rzeczywistych, ale o zupełnie innych własnościach.

W dalszym ciągu będziemy oznaczać interwały dużymi literami alfabetu lub zapisywać w takiej samej formie, jak przywykliśmy przedstawiać przedziały (czyli właśnie interwały) liczbowe, np. $X = [x_1, x_2] = \{x: x_1 \leq x \leq x_2\}$, gdyż narzucającą się interpretacją geometryczną takiego tworu jest, oczywiście, odcinek położony na osi liczbowej. Szczególny, zdegenerowany, interwał, to $[x, x]$ odpowiadający zwyczajnej liczbie rzeczywistej. Cztery podstawowe działania arytmetyki interwałowej zdefiniowane są następująco (w miejsce \circ możemy wstawić dowolny z symboli: $+$, $-$, \cdot , $/$):

$$(*) \quad X \circ Y = [\min(x \circ y), \max(x \circ y)], \quad \text{gdzie } x \in X, y \in Y.$$

Tak więc wynikami operacji arytmetycznych na interwałach są również interwały. Konkretnie wygląda to tak:

$$X + Y = [x_1, x_2] + [y_1, y_2] = [x_1 + y_1, x_2 + y_2],$$

$$X - Y = [x_1, x_2] - [y_1, y_2] = [x_1 - y_2, x_2 - y_1] (!),$$

$$\begin{aligned} X \cdot Y &= [x_1, x_2] \cdot [y_1, y_2] = \\ &= [\min(x_1 y_1, x_1 y_2, x_2 y_1, x_2 y_2), \max(x_1 y_1, x_1 y_2, x_2 y_1, x_2 y_2)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X/Y &= [x_1, x_2]/[y_1, y_2] = \\ &= [\min(x_1/y_1, x_1/y_2, x_2/y_1, x_2/y_2), \max(x_1/y_1, x_1/y_2, x_2/y_1, x_2/y_2)]. \end{aligned}$$

Ostatni wynik jest dobrze określony (tzn. wynik jest też interwałem) tylko w przypadku, gdy mianownik nie zawiera zera, tzn. albo $y_1 > 0$, albo $y_2 < 0$, w pełnej analogii do zwyczajnego dzielenia. Proszę też zwrócić uwagę na różnice między dodawaniem a odejmowaniem. Mnożenie wydaje się nieco skomplikowane, ale nietrudno się przekonać, że podany wzór jest zgodny z definicją (*). Nietrudno sprawdzić, że mnożenie i dodawanie są przemienne, tzn. $X + Y = Y + X$ oraz $X \cdot Y = Y \cdot X$ dla dowolnych X i Y , tak, jak by się chciało.

Spotykają nas jednak pewne niespodzianki. Niech np.

$$A = [1, 2], \quad B = [-1, 2] \quad \text{oraz} \quad C = [2, 3].$$

Wtedy

$$A \cdot B + A \cdot C = [1, 2] \cdot [-1, 2] + [1, 2] \cdot [2, 3] = [-2, 4] + [2, 6] = [0, 10],$$

gdymczasem

$$A \cdot (B + C) = [1, 2] \cdot ([-1, 2] + [2, 3]) = [1, 2] \cdot [1, 5] = [1, 10].$$

Tak więc prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania nie działa w arytmetyce interwałowej, bo $A \cdot B + A \cdot C \neq A \cdot (B + C)$. Można jednak dowieść, że zawsze, jeśli tym razem interwał rozumieć jako przedział, czyli zbiór liczb, $A \cdot (B + C) \subseteq A \cdot B + A \cdot C$.

Wiedząc, jak operować na interwałach w zakresie czterech działań arytmetycznych, można by się pokusić o badanie funkcji, których argumentami są interwały. Najprostsze z nich to takie, które w wyniku dają liczby rzeczywiste, np.

$$- \text{centrum (środek) interwału: } m([x_1, x_2]) = (x_1 + x_2)/2,$$

$$- \text{szerokość interwału: } w([x_1, x_2]) = x_2 - x_1,$$

$$- \text{średnica interwału: } d([x_1, x_2]), \text{ oznaczana też symbolicznie jako } |[x_1, x_2]| = \max(|x_1|, |x_2|).$$

**Rozwiązanie zadania F 865.**

Z twierdzenia o wirale wynika, że średnia wartość czasowa wyrażenia $\frac{1}{2}r \frac{d\Phi}{dr}$ jest równa energii kinetycznej E_k cząstki. Podstawiając $V = ar^4$ otrzymujemy zależność między potencjałem a energią kinetyczną

$$V = \frac{1}{2}E_k.$$

Całkowita energia jest więc równa:

$$E_1 = V + E_k = \frac{3}{2}E_k.$$

Energia kinetyczna jest związana z temperaturą ciała zależnością

$$E_k = \frac{3}{2}kT, \text{ gdzie } k \text{ jest stała}$$

Boltzmana. Stąd energia

$$\text{pojedynczego atomu wynosi } E_1 = \frac{9}{4}kT.$$

Mnożąc energię E_1 przez liczbę Avogadro N_A oraz uwzględniając, że $R = N_A k$ (R to stała gazowa), otrzymujemy energię jednego mola

$$E = \frac{9}{4}RT,$$

skąd ciepło molowe wynosi

$$C = \frac{9}{4}R.$$

Analogiczny rachunek dla potencjału postaci $\frac{1}{r}$ prowadzi do ciepła molowego ciał stałych

$$C_0 = 3R.$$

Porównując otrzymujemy

$$\frac{C}{C_0} = \frac{3}{4}.$$

**Rozwiązanie zadania F 866.**

Twierdzenie o wirale łączy pochodną potencjału z energią kinetyczną cząstki poruszającej się w tym potencjale

$$r \frac{dV}{dr} = 2E_k.$$

Podstawiając wyrażenie na potencjał otrzymujemy

$$E_k = -V.$$

Stąd całkowita energia cząstki jest równa

$$E = V + E_k = 0.$$

Oznacza to, że cząstka w takim potencjale nie może wytwarzać trwałych stanów.

W naturalny sposób można też tak rozszerzyć określenia wielu znanych funkcji, aby mogły one operować na interwałach i w wyniku również dawać interwały. Robimy to formalnie tak: Niech dana będzie funkcja f określona na liczbach. Wówczas definiujemy funkcję F określoną na interwałach w sposób następujący:

$$(**) \quad F(X) = F([x_1, x_2]) = \left[\inf_{x \in X} (f(x)), \sup_{x \in X} (f(x)) \right].$$

Słownie można to wyrazić tak: wynikiem działania świeżo zdefiniowanej funkcji F na danym odcinku (interwale) jako argumentem jest interwał rozciągający się od kresu dolnego do kresu górnego wartości funkcji f na tymże odcinku. A oto przykłady.

Logarytm:

$$\text{LOG}([x_1, x_2]) = [\log(x_1), \log(x_2)] \quad (x_1 > 0).$$

Funkcja *signum* (znak) może dać w wyniku tylko jeden z pięciu interwałów, z których trzy są zdegenerowane: $[-1, -1]$, $[-1, 0]$, $[0, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 1]$.

Podnoszenie do kwadratu:

$$([x_1, x_2])^2 = \begin{cases} [\min(x_1^2, x_2^2), \max(x_1^2, x_2^2)], & \text{jeśli interwał } [x_1, x_2] \text{ nie zawiera zera,} \\ [0, \max(x_1^2, x_2^2)] & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Zauważmy interesujący paradoks: $X \cdot X$ nie musi być równe X^2 !, tj. wynik podnoszenia interwału do kwadratu jest na ogół inny niż wynik mnożenia dwóch identycznych interwałów. Podnoszenie do kwadratu daje interwał o takiej samej lub mniejszej szerokości niż mnożenie dwóch jednakowych czynników. Różnica pojawia się wtedy, gdy interwał $[x_1, x_2]$ zawiera zero (i tylko wtedy). Paradoks jest, oczywiście, pozorny (mnożenie jest funkcją dwóch zmiennych, a operacja podnoszenia do kwadratu ma tylko jeden argument — są to więc dwie różne funkcje), ilustruje jednak, że w rachunkach interwałowych wskazana jest ostrożność.

W przypadku funkcji bardziej skomplikowanych, zwłaszcza funkcji wielu zmiennych, byłoby wielce niewygodne posługiwanie się bezpośrednio definicją (**). Mając wzór określający „zwykłą” funkcję liczbowo-liczbową konstruujemy jej rozszerzenie interwałowe posługując się regułami (*). Otrzymany w taki sposób wynik jest na ogół inny niż ten, który można by otrzymać z definicji (**). To, co otrzymamy, nazywa się funkcją inkluzywną (obejmującą, zawierającą), gdyż produkuje ona jako wyniki interwały zawierające (obejmujące) prawdziwy wynik. Sztuka polega na tym, aby znajdować możliwie dobre funkcje inkluzywne, czyli takie, które nie „zawyżają” znanego wyniku obliczeń, tj. dają interwały o możliwie małej szerokości. Na przykład, zapis funkcji dwóch zmiennych $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2$ lepiej będzie wstępnie przekształcić do postaci $x_1 \cdot (x_1 + x_2)$.

Do czego może być przydatny taki sposób rachowania?

Jedno z zastosowań to obliczanie rozmaitych wielkości na podstawie niepewnych lub niedokładnych danych (np. projektując jakieś urządzenie jesteśmy zmuszeni do operowania takimi właśnie wielkościami — patrz tolerancje parametrów wykonania elementów mechanicznych lub elektrycznych).

Przykład. Obliczyć przyspieszenie grawitacyjne z okresu wahań wahadła matematycznego. Odpowiedni wzór ma postać: $g = 4\pi^2 l / T^2$. Długość l wahadła wynosi 1 m, a błąd pomiaru jest nie większy od 1 mm, natomiast zmierzony czas 300 wahań wyniósł 602 s z błędem nie przekraczającym 0,5 s. Możemy więc powiedzieć, że $l \in [0,999, 1,001]$ m, a $T \in [2,005, 2,0083333]$ s. Posługując się definicjami (*) i (**), oraz traktując czynnik $4\pi^2$ jako interwał zdegenerowany, otrzymamy ostatecznie:

$$g \in [9,7780815, 9,8302602] \text{ m/s}^2,$$

co można też zapisać jako

$$g = (9,8041376 \pm 0,0260561) \text{ m/s}^2.$$



Rozwiązanie zadania M 679.

Przypuśćmy, że teza zadania jest fałszywa; wtedy $2A_n$ dzieli się przez $n + 2$. Mamy jednak

$$2A_n = 2 + (2^{1993} + n^{1993}) + \\ + (3^{1993} + (n-1)^{1993}) + \dots + \\ + ((n-1)^{1993} + 3^{1993}) + \\ + (n^{1993} + 2^{1993}),$$

a każda z liczb postaci $j^{1993} + (n+2-j)^{1993}$, gdzie $j = 2, 3, \dots, n$, dzieli się bez reszty przez $n+2$ - to wynika ze wzoru

$$x^{2m+1} + y^{2m+1} = \\ = (x+y)(x^{2m} - x^{2m-1}y + \dots + y^{2m}).$$

Stąd wynika, że $2A_n$ daje z dzielenia przez $n+2$ resztę 2, a to jest sprzeczność.



Rozwiązanie zadania M 680.

Łatwo zauważyć, że po każdym kroku nie zmienia się parzystość liczby białych kul w urnie. Zatem, jeśli początkowa liczba kul białych n jest parzysta, to ostatnia kula w urnie będzie na pewno czarna, czyli szukane prawdopodobieństwo jest równe zeru. Jeśli zaś n jest nieparzyste, to ostatnia kula w urnie na pewno będzie biała - szukane prawdopodobieństwo jest równe jedności. Ostatecznie, prawdopodobieństwo jest równe $\frac{1 + (-1)^{n-1}}{2}$.



Rozwiązanie zadania M 681.

Załóżmy, że d jest wspólnym dzielnikiem rozpatrywanych liczb; wtedy każda z liczb

$$\binom{n+j}{k-1} = \binom{n+j+1}{k} - \binom{n+j}{k}, \\ j = 0, 1, \dots, k-1$$

także dzieli się przez d . Postępując dalej podobnie, stwierdzimy w końcu, że liczba

$$\binom{n}{0} = 1$$

dzieli się przez d , czyli $d = 1$. zatem największy wspólny dzielnik rozpatrywanych liczb także jest równy 1.

Nawiasem mówiąc, przytoczyliśmy wyniki w postaci „surowej”, tj. w takiej, w jakiej ukazały się na ekranie kalkulatora, choć, oczywiście, nie ma to większego sensu, przynajmniej dla fizyka, który z pewnością ograniczyłby się do podania mniejszej liczby cyfr znaczących, np. $9,804 \pm 0,026 \text{ m/s}^2$. Uzasadnieniem jest wyraźnie przesadzona dokładność w określeniu T .

Drugą dobrze opracowaną dziedziną jest rozwiązywanie układów równań nieliniowych. Znany jest algorytm pozwalający na znalezienie wszystkich rozwiązań rzeczywistych danego układu równań we wskazanym obszarze. Chodzi, oczywiście, o algorytm numeryczny. Idea jego jest prosta: założmy, że układ równań potrafimy zapisać w postaci $f_i(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$, gdzie i numeruje równania, a x_1, x_2, \dots, x_k to niewiadome. Wskazany obszar jest wielowymiarową kostką o bokach odpowiadających minimalnym i maksymalnym wartościom poszukiwanych niewiadomych, innymi słowy - iloczynem kartezyjańskim odcinków, w których poszukujemy rozwiązań w każdej ze zmiennych. Jeśli teraz skonstruujemy dobrą funkcję inkluzywną dla każdego równania, to możemy dla danej kostki rozstrzygnąć, czy może ona zawierać jakieś rozwiązanie badanego układu. (Dobra funkcja inkluzywna to taka, która w wyniku daje interwał zdegenerowany, jeżeli jej argument też jest interwałem zdegenerowanym - krótko mówiąc, daje w wyniku możliwie „małe” interwały.) Warunek jest prosty: każde równanie musi „przebrać przez zero” wewnątrz danej kostki. Jeśli choć jedno z równań nie spełnia tego warunku, to w danej kostce na pewno nie ma rozwiązania. Najczęściej jednak wynikiem takiego testu będzie odpowiedź „nie wiadomo”. W takim przypadku dzielimy kostkę na dwie części, tnąc prostopadle do najdłuższego boku. W kostkach „potomnych” znów przeprowadzamy prosty test przejścia przez zero, i tak dalej, aż pozostaną tylko bardzo małe kostki o rozmiarach porównywalnych z dokładnością maszynową. Jeśli funkcje, które opisują nasze równania, są ponadto różniczkowalne, to możliwe jest stwierdzenie pozytywne, że dana kostka z pewnością zawiera przynajmniej jedno rozwiązanie. Widać, że sposób podziału kostek na mniejsze zapewnia, że każda z nich w końcu stanie się „mała”, oraz że za pomocą metody nie jesteśmy w stanie znaleźć rozwiązań zespolonych, a jedynie rzeczywiste. Ponadto, nie jest określona krotność rozwiązań, ale to zwykle jest mniej interesujące dla osób, które po prostu poszukują jakichkolwiek rozwiązań trudnych problemów.

Skoro mowa o algorytmach, które kojarzą się zwykle z komputerami, to należy dodać, że istnieją już kompilatory FORTRANu oraz PASCALA (PASCAL XSC) „znające się” na danych typu INTERVAL i mające wbudowanych kilka funkcji interwałowych. Niestety, kompilatory takie są zainstalowane, jak dotąd, wyłącznie w dużych komputerach. Użytkownicy komputerów osobistych mogą sobie zdefiniować w PASCALu swój własny typ interwałowy, na przykład tak:

```
Type interval=record
  x1, x2: real
end;
```

oraz napisać odpowiednie procedury wykonujące cztery działania arytmetyczne na interwałach. Kto nie ma dostępu do komputera, może się zastanowić, traktując to, jako rozrywkę umysłową, jak skonstruować interwałowe rozszerzenie funkcji dwóch zmiennych $f(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2)$.

Literatura:

1. G. Alefeld, J. Herzberger, *Introduction to Interval Computations*, Academic Press, New York, 1983.
2. R.B. Kearfott, *Some Tests of Generalized Bisection*, ACM Transactions on Mathematical Software, vol. 13(1987), str. 197.

COMPTEL – teleskop promieniowania gamma

Jerzy MADEJ

Teleskop COMPTEL jest urządzeniem pozwalającym na otrzymywanie obrazu nieba świecącego w zakresie promieniowania γ . Urządzenie to rejestruje pojedyncze fotony o energiach między 0,8 MeV a 30 MeV i pozwala lokalizować ich kierunki z dokładnością rzędu 1–3 stopni (w zależności od jasności źródła). Jednocześnie wyznaczana jest energia poszczególnych fotonów z dokładnością około 10%.

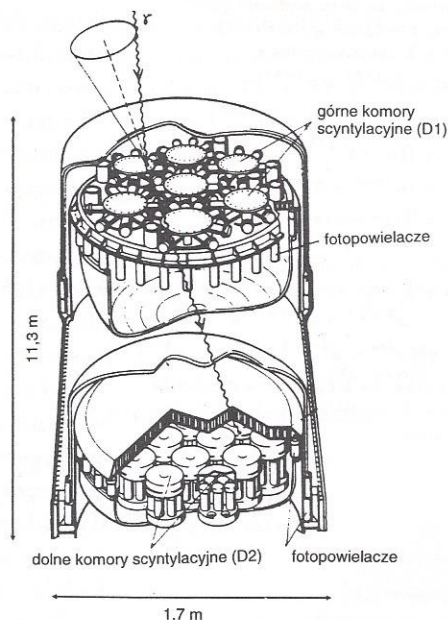
Problem obserwacji kosmicznego promieniowania γ jest bardzo trudny przede wszystkim z tego powodu, że promieniowanie to jest niezwykle przenikliwe, tzn. w słabym tylko stopniu oddziałuje z materią. COMPTEL rozwiązuje go w całkowicie nowatorski sposób, wykorzystując w tym celu urządzenia znane z laboratoriów fizyki jądrowej i fizyki cząstek elementarnych.

Teleskop ten jest jednym z czterech instrumentów pracujących na pokładzie satelity *Gamma-Ray Observatory*. Satelita GRO został wyniesiony na orbitę okołozemską (5 kwietnia 1991 r.) na wysokość 450 km, za pomocą wahadłowca *Atlantis*. Zadaniem tego satelity jest wszechstronna eksploracja nieba widzianego w promieniach γ . Aczkolwiek tego typu obserwacje wykonywane są od kilkunastu już lat, czułość instrumentów stanowiących wyposażenie GRO jest przynajmniej o rząd wielkości większa od tych, które wykorzystywano poprzednio. Czas efektywnej pracy GRO szacowany jest na przynajmniej 3 lata, a społeczność astronomów, zarówno obserwatorów, jak i teoretyków, oczekuje uzyskania obserwacji o przełomowym znaczeniu m.in. dla poznania fizyki gwiazd neutronowych naszej Galaktyki, jak też obiektów położonych na krańcach obserwowanego Wszechświata (źródła wybuchów promieniowania γ).

Nazwa teleskopu została wybrana dla uczczenia sławnego fizyka amerykańskiego, Arthura H. Comptona (1892–1962), który badał mechanizmy oddziaływania promieniowania γ z materią. Zasada działania COMPTELa wykorzystuje zjawisko rozpraszania fotonów γ na swobodnych elektronach, które jest nazywane rozpraszaniem Comptona.

Schematyczny wygląd i przekrój tego urządzenia przedstawiony jest na rysunku 1. Łatwo zauważymy, że teleskop ten w niczym nie przypomina jakichkolwiek znanych nam teleskopów optycznych, radiowych, a nawet teleskopów rentgenowskich, w których obraz jakiegoś fragmentu nieba jest formowany na powierzchni ogniskowej w wyniku wielokrotnego odbicia lub załamania światła w układach zwierciadeł i soczewek. Znaczna przenikliwość fotonów γ uniemożliwia ich ogniskowanie i badanie w podobnych urządzeniach.

Zjawiska odbicia promieni widzialnych czy ultrafioletowych od wygładzonych i wypolerowanych powierzchni związane są z tym, że długość fali promieniowania znacznie przewyższa odległości między atomami w siatce krystalicznej materiału pokrywającego zwierciadło.



Rys. 1

Natomiast długość fali fotonów γ rzędu 0,01 angstroma ($1\text{\AA} = 10^{-10}\text{ m}$ dla energii około 1 MeV) jest znacznie mniejsza od odległości międzyatomowych w ciałach stałych (rzędu kilku angstromów). Skutkiem tego fotony γ przechodząc przez jakąkolwiek substancję stałą „widzą” pojedyncze elektrony lub jądra atomowe i mogą oddziaływać z nimi wyłącznie pojedynczo, a efekty kolektywne odpowiedzialne za odbicia fal o większej długości nie zachodzą.

COMPTEL składa się z 21 komór scyntylicyjnych ułożonych w dwie warstwy (rys. 1), które są w stanie wykrywać i analizować pojedyncze fotony γ . Zasada działania urządzenia jest następująca. Foton padając na jedną spośród siedmiu górnych komór (D1) wypełnionych ciekłą substancją scyntylicyjną o niskiej liczbie atomowej Z ulega rozproszeniu Comptona na elektronie z jakiejś cząsteczki cieczy. Podczas rozproszenia część energii (E_1) i pędu fotonu jest przekazana do elektronu, który zostaje uwolniony z tej cząsteczki ze znaczną energią kinetyczną. Jednocześnie początkowy kierunek fotonu ulega zmianie o kąt rozproszenia θ . Przelatując przez ciekłą substancję scyntylicyjną uwolniony elektron wywołuje błysk, rejestrowany przez zespół ośmiu fotopowielaczy otaczających każdą z komór.

Po rozproszeniu w komorze z górnej warstwy foton γ z pewnym prawdopodobieństwem może ulec całkowitej absorpcji w jednej spośród czternastu komór z dolnej warstwy (D2), wypełnionych stałą substancją roboczą o wyższej liczbie Z (jest to jodek sodu NaI). Traci on wtedy całą energię E_2 , która pozostała po rozproszeniu w górnej warstwie D1.

Cały pomiar dostarcza zatem dla każdego fotonu następujących danych: określona jest lokalizacja zjawisk rozproszenia i absorpcji w obydwóch komorach z dokładnością do 0,5 cm oraz energia stracona przez foton w tych procesach, E_1 oraz E_2 . Obydwe energie są bowiem proporcjonalne do amplitudy impulsu napięcia generowanego przez fotopowielacze wykrywające scyntylacje. Tak więc określona jest w przestrzeni droga przelotu fotonu między obydwoma oddziaływaniami (linia przerywana na rys. 1). Dodatkowo rejestruje się absolutny czas zajścia tego zdarzenia z dokładnością 125 μ s oraz czas przelotu fotonu pomiędzy górną i dolną warstwą detektorów (jest on mniejszy od 10^{-8} sekundy!).

Wzór Comptona wiąże początkową (E_p) i końcową (E_k) energię fotonu rozproszonego pod kątem θ na elektronie znajdującym się w spoczynku

$$E_k = \frac{E_p}{1 + \frac{E_p}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)},$$

gdzie $m_e = 511 \text{ keV}/c^2$ oznacza masę spoczynkową elektronu (zawsze zachodzi nierówność $E_k < E_p$). Z omawianych powyżej warunków eksperymentu wynika, że początkowa energia fotonu jest równa $E_p = E_1 + E_2$, a zatem dane obserwacyjne pozwalają na wyznaczenie zarówno energii początkowej E_p , jak i kąta rozproszenia

$$\cos \theta = 1 - \frac{m_e c^2}{E_2} + \frac{m_e c^2}{E_1 + E_2}.$$

Tak więc ostatecznie wiemy, że foton przyszedł z kierunku znajdującego się na tworzącej stożka o osi symetrii skierowanej w znanym kierunku i o kącie rozwarcia równym θ . Innymi słowy, wyznaczone jest położenie środka i promień (w jednostkach kątowych) małego koła na sferze niebieskiej, gdzie znajduje się źródło, które wpromieniowało zaobserwowany foton.

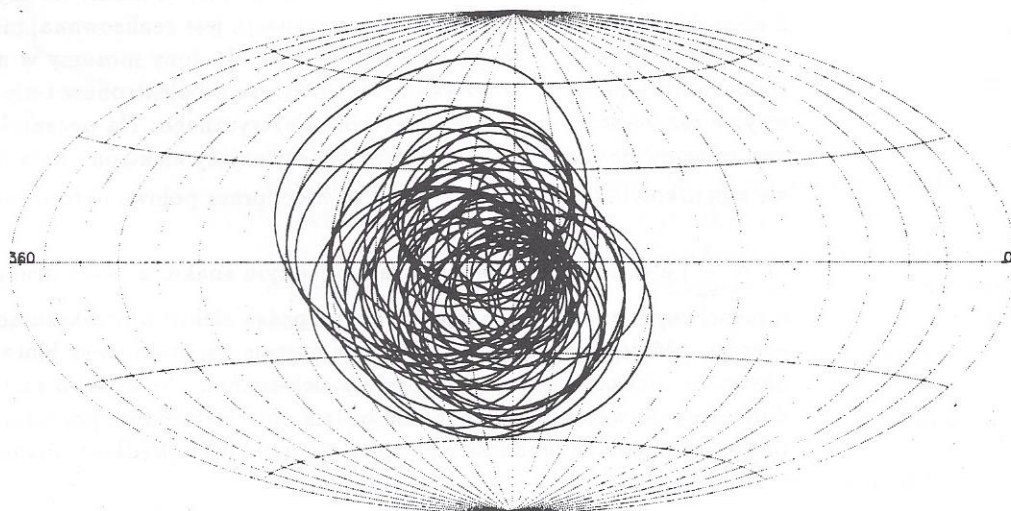
W przypadku gdy źródłem wielu zaobserwowanych fotonów γ jest źródło punktowe (np. gwiazda neutronowa), jego położenie jest po prostu punktem przecięcia wielu małych kół na sferze niebieskiej, wyznaczonych dla każdego fotonu z osobna (rys. 2).

W ten sposób można też wyznaczyć położenie kilku źródeł punktowych obserwowanych jednocześnie, oczywiście po odnotowaniu dostatecznie wielkiej liczby fotonów.

Podczas obserwacji nieba przez COMPTEL wiele spośród zarejestrowanych fotonów γ nie musi zachowywać się zgodnie ze scenariuszem zdarzeń opisanym powyżej. Na przykład, część fotonów po rozproszeniu Comptona w górnej komorze scyntylacyjnej nie trafi do komory w dolnej warstwie. Może też się zdarzyć, że foton trafiając tam nie straci całkowicie swojej energii i nie ulegnie zniszczeniu. Takie zdarzenia łatwo jest wykryć i wyeliminować w procesie redukcji obserwacji. Wybierane są tylko takie zarejestrowane zdarzenia, które zachodzą najpierw w warstwie D1, a następnie w D2 (koniecznie po upływie czasu odpowiadającego przelotowi fotonu z szybkością c na tym dystansie). Jeżeli następnie badany foton nie zostanie całkowicie zaabsorbowany w dolnej warstwie D2, to wtedy $E_i \neq E_1 + E_2$ i cały algorytm wyznaczania kąta θ straci sens. Skutkiem tego małe koło na sferze niebieskiej odpowiadające temu fotonowi γ nie będzie pasować do żadnego z identyfikowanych źródeł, co spowoduje odrzucenie tej obserwacji.

Sposób działania teleskopu COMPTEL powoduje, że urządzenie to umożliwi wyznaczenie pozycji obserwowanych obiektów, a jednocześnie pełni rolę spektrografu określając widmo promieniowania γ wielu obiektów znajdujących się w stosunkowo rozległym polu widzenia (około 1 steradiana).

W ciągu pierwszych kilkunastu miesięcy pracy na orbicie praktycznie jedynym zadaniem teleskopu COMPTEL było przejrzanie całej sfery niebieskiej w zakresie promieniowania 0,7 – 30 MeV. Teleskop zarejestrował fotony pochodzące m.in. od kilku źródeł promieniowania gamma, zarówno punktowych, jak i rozciągłych. Analiza obserwacji jest bardzo żmudnym oraz długotrwałym procesem i – jak dotąd – jest daleka od zakończenia.

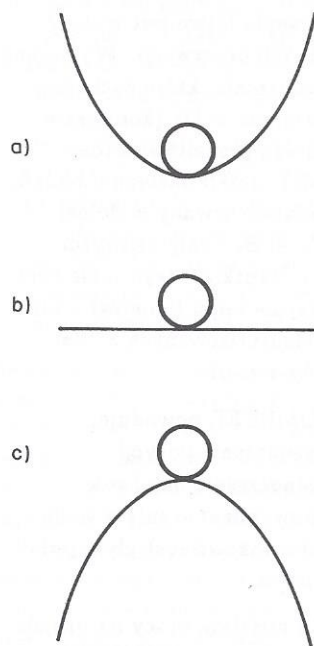


Rys.2

Niestabilności plazmowe

Stanisław MRÓWCZYŃSKI

Stan stacjonarny to taki stan, który nie zmienia się z upływem czasu; quasistacjonarny zaś zmienia się na tyle wolno, że w rozważanym czasie uważamy go za niezmienny.



Rys. 1

Zacznijmy od wyjaśnienia pojęcia niestabilności. Wyobraźmy sobie w tym celu układ w stanie stacjonarnym bądź quasistacjonarnym, który poddajemy niewielkiemu zaburzeniu. Gdy po pewnym niewielkim czasie układ wróci do pierwotnego stanu, mówimy, że układ jest stabilny ze względu na zaburzenie. Stan układu może ulec nieznacznej zmianie. Może również stać się i tak, że na skutek małego zaburzenia stan układu ulega całkowitej zmianie. Mamy wtedy do czynienia z układem niestabilnym, zjawisko zaś określamy jako niestabilność. Te trzy możliwe sytuacje ilustruje zachowanie się kulki z rysunku 1a, 1b oraz 1c, którą lekko wychylimy z położenia równowagi.

Plazma, czyli układ obdarzonych ładunkami ujemnymi elektronów i dodatnich jonów, jest układem szczególnie niestabilnym. Można powiedzieć, że historia fizyki plazmy to historia odkryć coraz to nowych niestabilności. Niestabilności są również główną przeszkodą na drodze do przeprowadzenia kontrolowanej syntezy termojądrowej, gdyż nawet niewielkie zaburzenia stanu plazmy, w którym reakcje syntezy jądrowej mogą zachodzić, rozbijają ten stan, sprawiając, że jego średni czas życia jest niezmiernie krótki.

W *Delcie 2/1993* pisałem o oscylacjach plazmowych, które mają miejsce wtedy, gdy w jakimś fragmencie obszaru zajmowanego przez plazmę powstaje nadwyżka ładunków dodatnich bądź ujemnych. Jak pamiętamy, plazma jako całość jest elektrycznie obojętna. Pojawienie się nie zneutralizowanego ładunku prowadzi do powstania pola elektrycznego, które z kolei oddziałuje na elektrony i jony. Z oscylacjami plazmowymi wiąże się pewien szczególny typ niestabilności, zwany mikroskopowym lub kinetycznym, który poniżej opiszę.

Wyobraźmy sobie, że w plazmie powstało zaburzenie rozkładu ładunków i, zgodnie z tym co pisałem w *Delcie 2/1993*, zostało wytworzone zależne od czasu i położenia (t, \vec{x}) pole elektryczne

$$(1) \quad \vec{E}(t, \vec{x}) = \vec{A} \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}),$$

gdzie \vec{A} jest amplitudą pola, ω częstością drgań, \vec{k} zaś wektorem falowym (odwrotność modułu \vec{k} jest długością fali λ). Jeśli amplituda fali maleje z czasem, to układ jest stabilny ze względu na zaburzenie, które wywołało drganie. Jeśli natomiast amplituda rośnie, to mamy do czynienia z niestabilnością. Aby stwierdzić, która sytuacja jest realizowana, musimy ustalić, co dzieje się z elektronami w polu fali (1). Jony możemy w naszych rozważaniach pominąć, gdyż są one dużo cięższe od elektronów i nie nadążają zwykle reagować na szybkie zmiany pola elektrycznego. Na początek zastanówmy się, jak fala (1) działa na spoczywający elektron. Fala przemieszcza się z prędkością fazową $v_\phi = \frac{\omega}{|\vec{k}|}$. Tak więc, przez połowę okresu fali

$(T = \frac{\lambda}{v_\phi})$ elektron oddziałuje z polem o jednym znaku, a przez drugą połowę o przeciwnym znaku. Początkowo fala rozpędza elektron przekazując mu energię, później spowalnia go odbierając energię. Średnio rzecz biorąc nie następuje przekaz energii między falą a elektronem. Po krótkim zastanowieniu dojdziemy do wniosku, że podobnie będzie i dla elektronów poruszających się, pod warunkiem, że prędkość elektronu nie jest bliska prędkości fazowej fali.

Rozważmy teraz przypadek elektronu o prędkości \vec{v} równej $\vec{v}_\phi = \frac{\omega}{|\vec{k}|} \cdot \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$.

Elektron porusza się razem z falą, odczuwa więc przez cały czas pole elektryczne o stałym znaku. A zatem zależnie od znaku pola albo jest przyspieszany, albo spowalniany. Tak więc w przypadku $\vec{v} = \vec{v}_\phi$ elektron albo zyskuje energię, albo ją traci w zależności od tego, na jaką fazę fali elektron trafia. Ponieważ w plazmie mamy zwykle wiele elektronów o prędkości $\vec{v} = \vec{v}_\phi$ i jedne są rozpędzane, a drugie spowalniane, wymiana energii między elektronami i falą nie występuje.

Przypatrzmy się teraz elektronom, których prędkość jest bliska prędkości fazowej. Jeśli $|\vec{v}| > |\vec{v}_\phi|$ i elektron jest rozpędzony, to fala szybko przestaje mu przekazywać energię, gdyż dla większej różnicy prędkości $|\vec{v} - \vec{v}_\phi|$ coraz szybciej następują zmiany znaku pola fali odczuwanego przez elektron. Tak więc efektywny przekaz energii następuje wtedy, gdy $|\vec{v}| < |\vec{v}_\phi|$ i pole rozpędza elektron oraz wtedy, kiedy $|\vec{v}| > |\vec{v}_\phi|$ i pole spowalnia elektron. W pierwszym przypadku fala energię traci, w drugim – zyskuje. Który z efektów dominuje, zależy od tego, czy mamy więcej elektronów z prędkością większą od \vec{v}_ϕ czy mniejszą od \vec{v}_ϕ . Niech $f(\vec{v})$ oznacza liczbę elektronów z prędkością \vec{v} . Jeśli $f(\vec{v}_\phi - \delta\vec{v}_\phi) > f(\vec{v}_\phi + \delta\vec{v}_\phi)$, gdzie $\delta\vec{v}_\phi$ jest niewielką częścią prędkości \vec{v}_ϕ , to następuje przekaz energii od fali do elektronów, jeśli zaś $f(\vec{v}_\phi - \delta\vec{v}_\phi) < f(\vec{v}_\phi + \delta\vec{v}_\phi)$, to elektrony tracą energię na rzecz fali. W pierwszym przypadku fala zanika, w drugim amplituda fali rośnie.

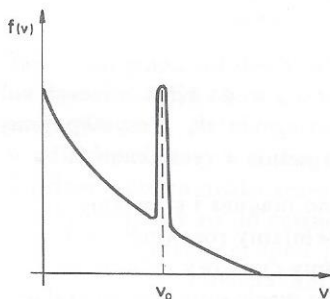
W ten sposób doszliśmy do bardzo ważnego kryterium. Jeśli $f(\vec{v}) > f(\vec{v} + \delta\vec{v})$ dla wszelkich prędkości, to oscylacje plazmowe będą tłumione. Jeśli natomiast istnieje taka prędkość \vec{v}_0 , że $f(\vec{v}_0) < f(\vec{v}_0 + \delta\vec{v}_0)$, to amplituda drgań z prędkością fazową $\vec{v}_\phi = \vec{v}_0$ będzie wzrastać z czasem. Z przedstawionego kryterium wynika, że jeśli rozkład prędkości elektronów jest malejącą funkcją prędkości, to układ jest stabilny ze względu na drgania plazmowe. W szczególności dotyczy to układu znajdującego się w stanie równowagi termodynamicznej, gdyż rozkład prędkości elektronów jest, jak pamiętamy, proporcjonalny do $e^{-m\vec{v}^2/2kT}$, gdzie m jest masą elektronu, a T temperaturą układu.

Istnienie niestabilności ma ogromne znaczenie dla badań nad kontrolowaną syntezą termojądrową. Plazma wytworzona w urządzeniach do przeprowadzania takiej syntezy, np. w tokamakach, nie jest zwykle w stanie równowagi termodynamicznej, a rozkład prędkości elektronów nie jest malejący. A zatem będą powstawać niestabilne drgania, które prowadzą do gwałtownych zmian stanu uniemożliwiających panowanie nad plazmą.

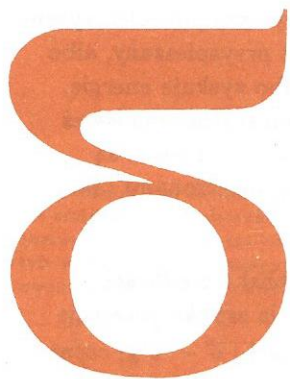
Niestabilności mogą również odgrywać pozytywną rolę. Jednym z problemów przy syntezie termojądrowej jest podgrzewanie plazmy. Można to osiągnąć kierując na plazmę wiązkę szybkich elektronów. Wówczas, nawet wtedy gdy plazma znajduje się w stanie równowagi, rozkład prędkości elektronów w układzie plazma plus wiązka (z prędkością \vec{v}_0) jest niemonotoniczny i wygląda jak na rysunku 2. A zatem będą powstawać silnie niestabilne drgania o prędkości fazowej $\vec{v}_\phi = \vec{v}_0$. Ponieważ energia fali rośnie kosztem energii kinetycznej wiązki, następuje efektywny przekaz energii do plazmy, czyli jej podgrzewanie. Przekaz energii następuje również wskutek zderzeń elektronów wiązki z elektronami i jonami plazmy. Mechanizm taki jest jednak znacznie mniej efektywny niż mechanizm, związany z niestabilnymi drganiami.

Opisałem tutaj pewien szczególny typ niestabilności plazmowych. Gdyby chcieć przedstawić problem niestabilności wyczerpująco, powstałaby nader opasła książka, bo szybko rozwijająca się od lat dwudziestych fizyka plazmy to w znacznej mierze fizyka niestabilności.

Stabilność stanu równowagi termodynamicznej wynika w rzeczywistości z przyczyn bardziej ogólnych niż, przedstawione obok. Równowaga termodynamiczna jest stanem układu o maksymalnej entropii. Jeśli więc w jakikolwiek sposób zaburzymy ten stan, to entropia zmaleje, lecz później, zgodnie z drugą zasadą termodynamiki, entropia wzrośnie, a układ wróci do stanu równowagi.



Rys. 2



mała delta

Tajemniczy silnik

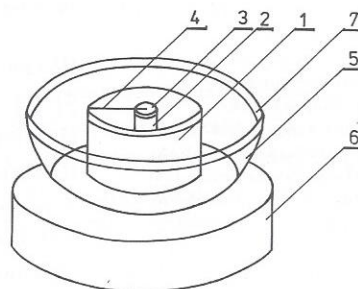
Od najdawniejszych czasów ludzie próbowali zbudować urządzenie, które mogłoby stale wykonywać pracę bez dostarczania energii z zewnątrz. Urządzenie takie otrzymało nawet specjalną nazwę *perpetuum mobile*, co w języku łacińskim oznacza „wieczny ruch”. Późniejsze badania fizyków doprowadziły do sformułowania zasady zachowania energii i wykazania, że *perpetuum mobile* nie może działać. Mimo tego w wielu laboratoriach trwają prace nad budową silników nie będących, oczywiście, *perpetuum mobile*, ale odznaczających się niezwykłymi rozwiązaniami konstrukcyjnymi i zastosowaniami. Dla przykładu, w Stanach Zjednoczonych wykonuje się próby z silnikami elektrostatycznymi o rozmiarach dziesiątych części milimetra, które zamierza się, między innymi, wprowadzać do naczyń krwionośnych w celu usuwania osadów miażdżycowych.

Silnik, którego sposób wykonania zostanie tu przedstawiony, również nie jest *perpetuum mobile*, choć nie ma zewnętrznego źródła zasilania. Dlatego właśnie praca tego silnika ustaje po pewnym czasie. Konstrukcja jest bardzo prosta i może być zrealizowana nawet przez mało doświadczonych budowniczych. Oryginalna i interesująca zasada jego działania pozwala poznać w praktyce szereg ważnych praw fizyki.

Ogólny widok silnika przedstawiony jest na rysunku 1. Do jego budowy potrzebne będą: zużyta bateria R20, pierścieniowy magnes o zewnętrznej średnicy 50–60 mm (magnes taki można uzyskać np. z uszkodzonego głośnika), szklany spodek, miedziany drut o średnicy około 2 mm i długości 20 mm, kilka łyżeczek soli kuchennej i szklanka z wodą.

Pilką do metalu przecinamy ogniwo R20 w poprzek w połowie wysokości. Wykorzystujemy górną część ogniwa, z której wyjmujemy węglowy pręcik z mosiężnym kapselkiem i zewnętrzny cylinderek cynkowy. Elementy te należy starannie oczyścić z resztek proszku węglowego, białawej pasty stanowiącej elektrolit i czarnej substancji – paku, którym zalane było ogniwo. Wewnętrzną powierzchnię

cylinderka przecieramy drobnoziarnistym papierem ściernym, cylinderkowi oplukujemy wodą i suszymy. Do kapselka na pręciku węglowym i krawędzi cylinderka przylutowujemy końce miedzianego drutu tak, aby pręcik utrzymywany był w środku cylinderka wzdłuż jego osi.

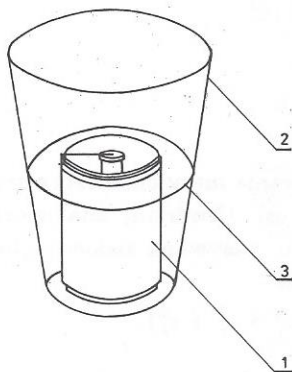


Rys. 1. Silnik z magnesem pierścieniowym; 1 – cylinderek cynkowy, 2 – pręcik węglowy, 3 – kapsledek mosiężny, 4 – drut łączący cylinderka z kapselkiem, 5 – spodek, 6 – magnes pierścieniowy, 7 – górny poziom roztworu.

Sporządzamy stężony roztwór soli kuchennej, wsypując do szklanki z gorącą wodą kilka łyżeczek soli i mieszając aż do jej rozpuszczenia się. Przystępujemy teraz do montażu silnika zgodnie z rysunkiem 1.

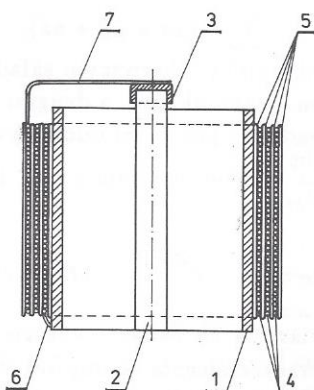
Na stole układamy poziomo magnes i stawiamy na nim spodek, który napełniamy roztworem soli. W środku spodka ustawiamy cynkowy cylinderka z przylutowanym pręcikiem węglowym. Spoglądając uważnie na roztwór znajdujący się wewnątrz cylinderka zauważamy, że wykonuje on powolny ruch obrotowy. W celu lepszego uwidocznienia tego ruchu można na powierzchni roztworu umieścić okruszek korka albo maleńki skrawek papieru.

Jeżeli nie mamy magnesu pierścieniowego, ale mamy około 40 m drutu miedzianego o średnicy 0,5–0,8 mm w izolacji z emalii (pochodzącego np. z uszkodzonego transformatora), to nasz silnik może mieć postać jeszcze bardziej tajemniczą. Tę wersję silnika przedstawia rysunek 2. W celu jej wykonania z ogniwa R20 odcinamy denko, jak poprzednio wyjmujemy i oczyszczamy pręcik węglowy i cylinderka cynkowy.



Rys. 2. Silnik z uzwojeniem; 1 – cylinderek z uzwojeniem szczególnie pokazany na rysunku 3, 2 – szklanka, 3 – górny poziom roztworu.

Na zewnętrzną powierzchnię cylinderka nawijamy pasek papieru posmarowany z jednej strony klejem uniwersalnym, np. „Supercementem” (rys. 3).



Rys. 3. Gotowy cylinderek z uzwojeniem widziany w przekroju; 1 – cylinderek cynkowy, 2 – pręcik węglowy, 3 – kapsledek mosiężny, 4 – uzwojenie z drutu miedzianego, 5 – przekładki papierowe, 6 – początek uzwojenia przylutowany do cylinderka, 7 – koniec uzwojenia przylutowany do kapselka.

Szerokość paska powinna być o około 6–8 mm mniejsza od wysokości cylinderka, a długość powinna wynosić około 300 mm. Należy go ułożyć na cylinderku w odległości około 3–4 mm od brzegu cylinderka.

Z jednego końca drutu zeszkrobujemy emalię i przylutowujemy go do zewnętrznej powierzchni cylinderka wystającej spod papierowego paska. Na zewnętrznej powierzchni cylinderka, pokrytej papierem, nawijamy drut układając go równo zwój przy zwoju aż do pokrycia całej szerokości paska. Na tę warstwę zwojów nawijamy, jak poprzednio, posmarowany klejem pasek papieru. W ten sposób nawijamy kilka warstw aż do uzyskania uzwojenia liczącego około 300–400 zwojów. Do końca uzwojenia przylutowujemy kawałeczek grubszego drutu, podobny jak w poprzednim modelu – o średnicy około 2 mm i długości 25 mm. Drut ten zginamy pod kątem prostym tak, aby przebiegał w kierunku promienia cylinderka i przylutowujemy jego drugi koniec do mosiężnego kapselka na pręciku węglowym. Na zewnętrzną powierzchnię uzwojenia również nawijamy posmarowany klejem pasek papieru. Z pozostałego końca drutu zeszkrobujemy emalię, zginamy go w kierunku środka cylinderka i również przylutowujemy do kapselka na pręciku węglowym.

W celu zabezpieczenia uzwojenia przed działaniem roztworu soli zewnętrzny pasek papieru pokrywający uzwojenie oraz jego brzegi starannie smarujemy klejem uniwersalnym. Po wyschnięciu kleju czynność powtarzamy kilkakrotnie, uważając, by nie pobrudzić wewnętrznej powierzchni cylinderka i pręcika węglowego.

Pora na uruchomienie silnika. Roztworem soli kuchennej napełniamy szklankę do wysokości około 35 mm. Do roztworu wkładamy cylinderka z uzwojeniem i pręcikiem tak, aby drut łączący cylinderka z pręcikiem znalazł się nad powierzchnią roztworu. Spoglądając na ciecz wewnątrz cylinderka zauważamy jej ruch obrotowy.

Pozostaje jeszcze wyjaśnić zasadę działania silnika. Skąd czerpana jest energia potrzebna do zapoczątkowania i kontynuacji ruchu obrotowego cieczy? Aby to wyjaśnić, trzeba przypomnieć sobie nieco wiadomości z lekcji fizyki i odpowiednio skojarzyć je ze sobą.

Układ złożony z cylinderka cynkowego, roztworu soli i pręcika węglowego stanowi ogniwo galwaniczne. Między jego elektrodami – pręcikiem i cylinderkiem panuje napięcie elektryczne. Żeby się o tym przekonać, wystarczy dołączyć do tych elementów woltomierz. Napięcie to jest przyczyną przepływu prądu elektrycznego przez drucik łączący elektrody i przez elektrolit. Prąd płynący w elektrolicie ma kierunek promieniowy i polega na ruchu w przeciwnych stronach jonów dodatnich oraz elektronów. Elektrolit znajduje się w polu magnetycznym wytwarzanym przez magnes lub uzwojenie nawinięte na cylinderka. Linie tego pola mają kierunek pionowy, a więc prostopadły do kierunku przepływu prądu. Na elektrolit (jak na przewodnik z prądem umieszczony w polu magnetycznym) działają siły elektrodynamiczne. Mają one kierunek styczny do cylinderka. Ich zwrot można wyznaczyć stosując regułę prawej dłoni. Te właśnie siły powodują ruch obrotowy elektrolitu. Energia potrzebna do tego celu to energia elektryczna, której źródłem są reakcje chemiczne w układzie elektrod i roztworu. Układ, podobnie jak silniki elektryczne, przetwarza energię elektryczną na kinetyczną. Możemy więc nadać mu nazwę silnika. Po pewnym czasie reakcje chemiczne ustaną i silnik zakończy pracę. Żeby uruchomić go ponownie, należy wylać elektrolit, opłukać wodą elektrody i nalać świeżego roztworu.

Czy opisany układ to tylko ciekawostka? Okazuje się, że nie. Może on znaleźć praktyczne zastosowanie. Japończycy zbudowali model jachtu napędzanego siłą odrzutu umieszczonej w polu magnetycznym wody morskiej, przez którą przepływa prąd elektryczny, tyle że w tym przypadku pole magnetyczne wytwarzają elektromagnesy nadprzewodnikowe.

Na zakończenie problem do samodzielnego rozwiązania. Co należy zmienić w układzie, aby spowodować ruch cieczy w przeciwną stronę?

Małą Deltę przygotował Stanisław BEDNAREK

Twierdzenie o wiriale

Tomasz KWAST

Pomnóżmy równanie Newtona dla cząstki o masie m

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

przez wektor \vec{v} opisujący jej położenie w układzie inercyjnym

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \vec{F} &= r \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{r} = \\ &= m \frac{d}{dt} (\vec{r} \cdot \vec{v}) - m \vec{v}^2. \end{aligned}$$

Uśredniając w długim okresie czasu τ obie strony otrzymujemy

$$m \left\langle \frac{d}{dt} (\vec{r} \cdot \vec{v}) \right\rangle = \langle \vec{F} \cdot \vec{r} \rangle + \langle m \vec{v}^2 \rangle.$$

Jeśli cząstka porusza się w ograniczonym obszarze przestrzennym ze skończoną prędkością, to $\vec{r} \cdot \vec{v}$ ma również skończoną wartość i

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt} (\vec{r} \cdot \vec{v}) \right\rangle &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{d}{dt} (\vec{r} \cdot \vec{v}) dr = \\ &= \frac{1}{\tau} (\vec{r} \cdot \vec{v}) \Big|_0^\tau \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy

$$\frac{1}{2} m \langle \vec{v}^2 \rangle = \langle E_k \rangle = -\frac{1}{2} \langle \vec{F} \cdot \vec{r} \rangle.$$

Funkcję $f(x, y, z)$ przykładowo trzech zmiennych x, y i z nazywamy jednorodną rzędu m , jeżeli $f(tx, ty, tz) = t^m f(x, y, z)$. Twierdzenie Eulera o funkcjach jednorodnych głosi, że dla takich funkcji zachodzi równość

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = m f.$$

Potencjał grawitacyjny Φ , jak łatwo widać, jest funkcją jednorodną rzędu -1 .

Moment bezwładności jest miarą upakowania masy ciała sztywnego lub układu punktów materialnych względem jakiejś osi. Utwórzmy analogiczną wielkość opisującą rozkład masy względem punktu, nazywaną niekiedy „biegunowym” momentem bezwładności. Niech będzie to

$$J = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2),$$

gdzie x_i, y_i, z_i są współrzędnymi punktu o masie m_i względem środka masy układu, a sumowanie wykonuje się po wszystkich masach tworzących układ mechaniczny – mogą to być np. gwiazdy lub galaktyki w gromadzie.

Zmianę J w czasie można w naturalny sposób interpretować jako ogólne zapadanie się lub pęcznienie gromady. Obliczmy drugą pochodną względem czasu tej wielkości:

$$\dot{J} = 2 \sum m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + 2 \sum m (x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z}),$$

gdzie dla prostoty zapisu pomineliśmy wskaźniki i . Pierwszym składnikiem jest jak widać, pomnożona przez 4 energia kinetyczna układu, a drugim pomnożony też przez 4 tytułowy wiriał. Jeżeli wprowadzimy potencjał oddziaływań Φ ,

określony tak, aby zachodziło $m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$ (i podobnie dla y i z), to dalej otrzymamy:

$$\dot{J} = 2 \sum m v^2 - 2 \sum \left(x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = 4E_k + 2\Phi,$$

gdzie $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ to prędkości gwiazd, a E_k oznacza energię kinetyczną gromady. W celu dokonania ostatniego przekształcenia skorzystaliśmy jeszcze z twierdzenia Eulera (margines) dla potencjału grawitacyjnego. Dla układu punktów materialnych jest on bowiem określony jako

$$\Phi = -\frac{1}{2} G \sum_{i,j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}},$$

gdzie r_{ij} oznacza odległość masy m_i od masy m_j , G stałą grawitacji, a sumowanie wykonuje się po wszystkich parach wskaźników (oczywiście, z wyjątkiem $i = j$). Łatwo zauważyć zarówno jednorodność potencjału, jak i rząd jednorodności.

Wyprowadzony tu wzór na \dot{J} dowodzi, że jeżeli biegunowy moment bezwładności układu punktów materialnych jest stały lub zmienia się w czasie liniowo, to suma energii potencjalnej i podwojonej kinetycznej tego układu równa się zeru. To właśnie jest treścią twierdzenia o wiriale:

$$2E_k + \Phi = 0.$$

Twierdzenie to bywa często stosowane np. w dynamice układów gwiazdowych, przy czym, spójrzmy prawdzie w oczy, nie zawsze jest to do końca uzasadnione. Na usprawiedliwienie trzeba przyznać, że właściwie niemożliwe jest sprawdzenie, czy biegunowy moment bezwładności gromady gwiazd lub galaktyk zmienia się w czasie dokładnie tak, jak wymaga tego założenie twierdzenia. Przyjmujemy więc, że jest ono spełnione przynajmniej w przybliżeniu, np. że w małym przedziale czasu gromada jest w ogóle stabilna itp., bo w gruncie rzeczy jest to jedyne, co można zrobić chcąc twierdzenie zastosować.

A pożytek z niego może być niemały. Zakładając np., że jest ono spełnione dla gromady galaktyk, można oszacować przeciętną masę galaktyki. Pomierzyc wprawdzie możemy tylko rzuty wzajemnych odległości galaktyk na sferę niebieską oraz ich prędkości radialne. Jeżeli jednak gromada ma budowę

regularna, to można z tych obserwacji odtworzyć średnie odległości i prędkości przestrzenne galaktyk (patrz *Delta* 7/1989), tj. wielkości wchodzące do twierdzenia o wirale, a stąd znaleźć średnią masę galaktyki. Niezgodność tak wyznaczonych średnich mas galaktyk z ocenianymi na podstawie ich jasności (oceny dynamiczne dają z reguły masy większe) można interpretować dwójako: albo wyraźnie nie są spełnione założenia twierdzenia (gromada silnie ekspanduje), albo oprócz galaktyk w gromadach znajduje się inna niewidoczna materia. Obecnie wszystko wskazuje na to, że zachodzi ta druga ewentualność.

Weźmy inny przykład. Zapadający się obłok wodorowy to też układ wielu punktów materialnych, a jego energia kinetyczna jest w istocie termiczną energią obłoku i wynosi

$$E_k = \frac{1}{2} N m v^2 = \frac{3}{2} N k T,$$

gdzie N jest liczbą cząstek o masie m w obłoku, T jego średnią temperaturą, a k oznacza stałą Boltzmanna. Ostatnia równość została tu napisana na mocy znanego z termodynamiki faktu, że w stanie zbliżonym do równowagi średnia energia kinetyczna cząstki gazu wynosi $\frac{3}{2} k T$. Jeżeli przyjąć, że dla tego obłoku również spełnione jest twierdzenie o wirale, to całkowita jego energia jest równa

$$E = E_k + \Phi = -E_k = -\frac{3}{2} N k T.$$

Energia ta, jak widać, jest ujemna – nic w tym dziwnego, bowiem obłok jest układem „związanym”. Ma to dalsze konsekwencje. Mianowicie, gdy taki obiekt traci swoją energię, a jest nią tylko energia mechaniczna (to ważne!), to musi się ogrzewać! Inaczej mówiąc, ma on ujemne ciepło właściwe. Ten niezwykle prosty model opisuje więc zasadniczy proces zachodzący w trakcie ewolucji protogwiazdy, czyli obiektu, który już świeci, ale jeszcze nie uruchomił w sobie reaktora jądrowego.

Tak więc twierdzenie o wirale bywa dość skutecznym narzędziem badawczym, nawet jeżeli warunki jego stosowalności traktuje się z lekkim przybliżeniem oka.

Prenumerata „Delta”
za okres:

Prenumerata „Delta”
za okres:

Prenumerata „Delta”
za okres:

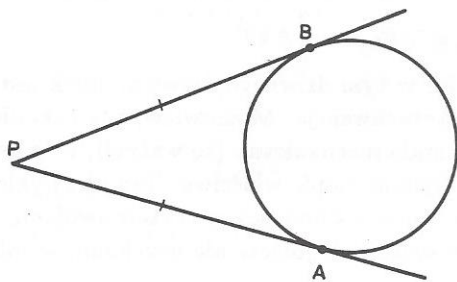


Jak udowodnić wzór Herona?

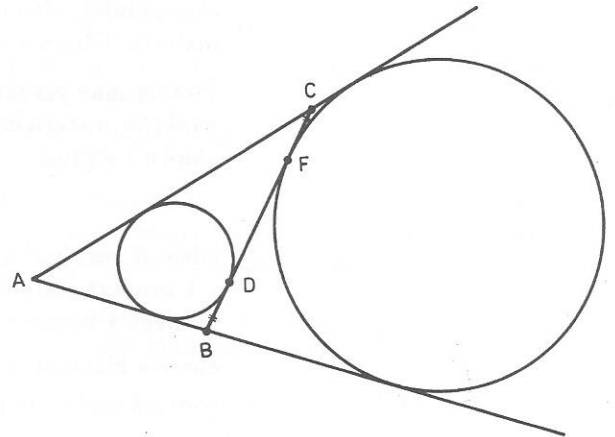
Przypominamy, wzór Herona ma postać $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie S jest polem trójkąta, a, b, c – długościami boków trójkąta, $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Na tytułowe pytanie odpowiadamy zazwyczaj odwołując się do odpowiedniej literatury, w której ów dowód to żmudne przekształcenia algebraiczne bądź trygonometryczne. Czy można więc udowodnić wzór Herona „nie rachując”? Oczywiście, że tak. Zanim jednak przedstawimy taki dowód, przypomnijmy kilka prostych faktów z elementarnej geometrii (Czytelnik, który po raz pierwszy styka się z tymi faktami, bez trudu je udowodni).

Fakt 1. Dwie różne styczne poprowadzone do danego okręgu z punktu P , leżącego na zewnątrz tego okręgu, są równej długości: tj. $PA = PB$. (Fakt ten nazywany jest Najmocniejszym Twierdzeniem Geometrii. Niżej Czytelnik znajdzie wiele przykładów na to, jak trafnie nazwa ta została nadana.)



Fakt 2. Okręgi: wpisany w trójkąt ABC i dopisany do trójkąta ABC (styczny do boku BC i do przedłużeń boków AB i AC) są styczne do boku BC odpowiednio w punktach D i F . Wówczas $CF = BD$.



Fakt 3. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, AC, AB odpowiednio w punktach D, E, F . Niech $BC = a, AC = b, AB = c, p = \frac{a+b+c}{2}$. Wówczas

$$AE = AF = p - a,$$

$$BF = BD = p - b,$$

$$CE = CD = p - c.$$

(Patrz rysunek na następnej stronie.)

Odcinek dla poczty

Zł

słownie złotych

Dokładny adres
wplacający

na AMOS

r-k 01-506 Warszawa

Dokładna nazwa ul. Szenwalda 1

nazwa banku PKO VIII O/W-wa

Nr r-ku 1586-77578-136

stempel
podpis przyjmującego

Pobrano opłatę

zł

Odcinek dla posiadacza rachunku

Zł

słownie złotych

Dokładny adres
wplacający

na AMOS

r-k 01-506 Warszawa

Dokładna nazwa ul. Szenwalda 1

nazwa banku PKO VIII O/W-wa

Nr r-ku 1586-77578-136

stempel
podpis przyjmującego

Pobrano opłatę

zł

Potwierdzenie dla wplacającego

Zł

słownie złotych

Dokładny adres
wplacający

na AMOS

r-k 01-506 Warszawa

Dokładna nazwa ul. Szenwalda 1

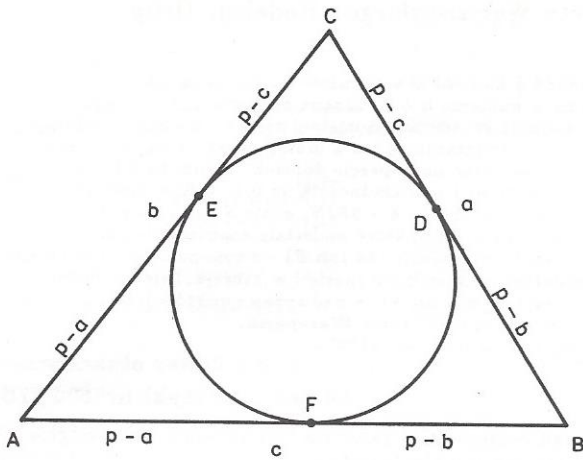
nazwa banku PKO VIII O/W-wa

Nr r-ku 1586-77578-136

stempel
podpis przyjmującego

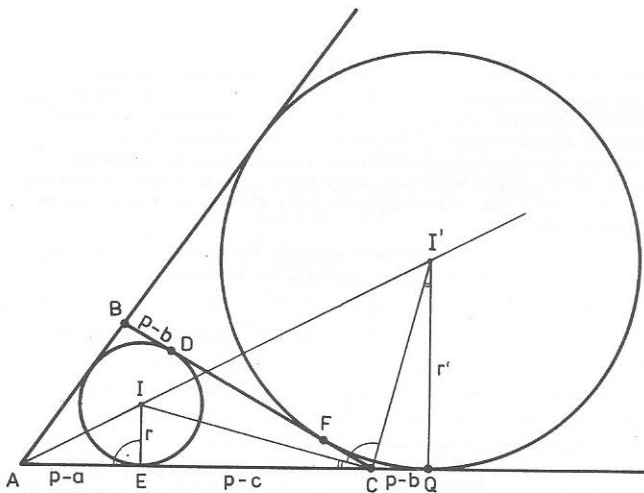
Pobrano opłatę

zł



Fakt 4. Niech S, p, r oznaczają odpowiednio pole, połowę obwodu, promień koła wpisanego w dany trójkąt. Wówczas $S = pr$.

A oto obiecany dowód wzoru Herona (podał go Sidney H. Kung).



Rozpatrzmy trójkąt ABC o bokach $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ i wpisany weń okrąg o środku I i promieniu r . Niech I' będzie środkiem okręgu stycznego do boku BC i do przedłużeń boków AB i AC , r' zaś – jego promieniem. Niech p będzie połową obwodu trójkąta ABC (tj. $p = \frac{a+b+c}{2}$), a S – jego polem. Na mocy faktu 3, $AE = p - a$ i $CE = p - c$. Ponadto $CQ = CF = BD = p - b$ (fakty 1, 2, 3) i $AQ = AE + EC + CQ = p - a + p - c + p - b = p$. Zatem z podobieństwa trójkątów AIE i AQI' mamy:

$$(*) \quad \frac{EI}{AE} = \frac{I'Q}{AQ}, \quad \text{czyli} \quad \frac{r}{p-a} = \frac{r'}{p}.$$

Nietrudno zauważyć, że $\angle ECI = \angle ICD$ oraz $\angle FCI' = \angle I'CQ$. Stąd dostajemy, że $\angle ICI' = 90^\circ$. Tak więc $\angle ECI = 180^\circ - 90^\circ - \angle I'CQ = 90^\circ - (90^\circ - \angle CI'Q) = \angle CI'Q$, co znaczy, że trójkąty IEC i CQI' są podobne.

Zatem

$$(**) \quad \frac{EI}{EC} = \frac{CQ}{QI'}, \quad \text{czyli} \quad \frac{r}{p-c} = \frac{p-b}{r'}.$$

Mnożąc stronami proporcje (*) i (**) dostajemy

$$\frac{r^2}{(p-a)(p-c)} = \frac{p-b}{p},$$

skąd

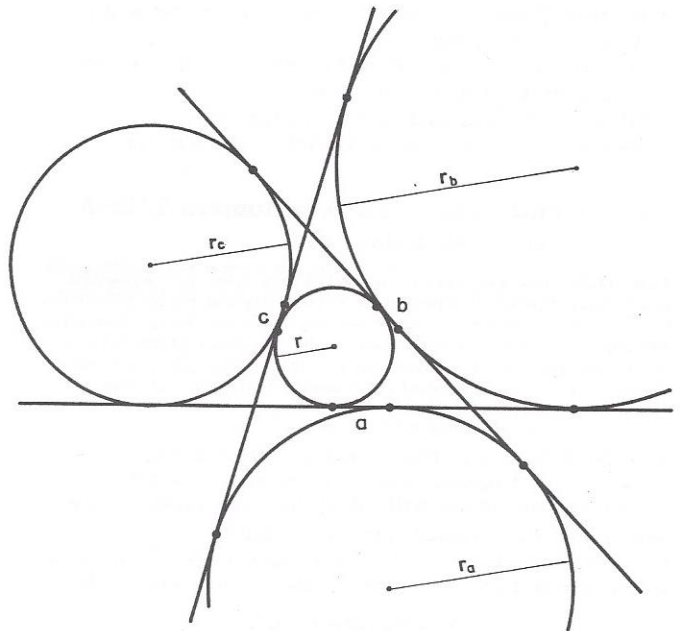
$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Po pomnożeniu stronami powyższej równości przez p i skorzystaniu z faktu 4 otrzymujemy wzór Herona

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Na koniec zadanie dla Czytelnika.

Niech a, b, c będą bokami trójkąta, r_a, r_b, r_c promieniami okręgów dopisanych do tego trójkąta, stycznych odpowiednio do boków a, b, c , natomiast r – promieniem okręgu wpisanego.



Czytelnik zechce się zastanowić, jak „nie rachując”:

- wyprowadzić wzory na r_a, r_b, r_c (w zależności od a, b, c),
- udowodnić, że: (jak zawsze S oznacza pole, a p – połowę obwodu)

a) $S = r_a(p-a) = r_b(p-b) = r_c(p-c)$,

b) $rr_a = (p-b)(p-c)$,

c) $r_b r_c = p(p-a)$,

d) $r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p^2$,

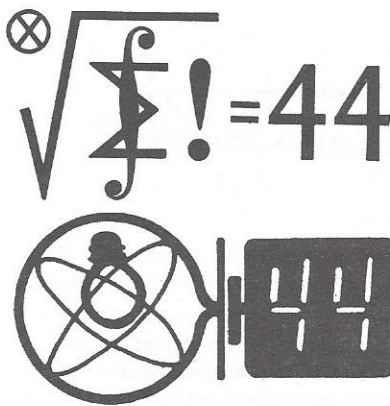
e) $S = \sqrt{r r_a r_b r_c}$,

f) $S = a \frac{r_b r_c}{r_b + r_c} = b \frac{r_a r_c}{r_a + r_c} = c \frac{r_a r_b}{r_a + r_b}$,

g) $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$.

Zauważmy, że zestawiając b), c) i e) otrzymujemy wzór Herona.

Waldemar POMPE



Termin nadsyłania rozwiązań:

31 XII 1993

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1993.

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Zadania z fizyki nr 163, 164

- 163.** Zafasowany Węchosław Szlabańczyk szukał porady u inspektora Wnikliwego (czasowo oddelegowanego do służby celnej).
- Otrzymałmy poufną informację, że na tej ciężarówce w niektórych puszkach zamiast piwa przemycane są narkotyki, ale jak odróżnić te puszki? – zastanawiał się.
 - Nie możemy przecież otwierać wszystkich po kolei, a tu w Zapadłej Dziurze nie mamy nawet przyzwoitej wagi, nie mówiąc już o rentgenie.
 - Czy dźwięk nie może być wskazówką? – inspektor wziął jedną z puszek do ręki i potrząsnął.
 - Niestety, nie. Ten narkotyk ma formę pasty wypełniającej puszkę, ale na wierzchu i spodzie dla

- lepszego maskowania nalewają trochę wody, więc odgłos jest taki, jak zwykłej puszki z piwem.
- Dłuższą chwilę trwała cisza.
- Chyba gdzieś znajdziemy jakąś gładką deskę? – zapytał wreszcie inspektor.
- Jaki pomysł przyszedł do głowy inspektorowi Wnikliwemu?

- 164.** Plastikowy krążek o średnicy 20 cm i masie 10 g jest równomiernie naładowany ładunkiem 100 nC. Z jaką prędkością kątową musiałby wirować ten krążek w płaszczyźnie poziomej, aby mógł zawisnąć podtrzymywany tylko przez pionowe pole magnetyczne o indukcji 2 T? Ile wynosiłaby wtedy w środku krążka indukcja jego własnego pola magnetycznego?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/1993

Przypominamy treść zadań:

159. Małe ciało zawieszono na nici, która może być wciągana przez mały otworek i wprowadzono w ruch drgający o amplitudzie kątowej α_0 ; swobodna długość nici wynosiła wtedy l_0 . Następnie wciągnięto nić bardzo powolnym ruchem jednostajnym tak, że długość swobodna zmalała do l_1 . Jak wyraża się przez dane wielkości końcowa amplituda kątowa α_1 ? Założyć, że obie amplitudy kątowe są małe.

159. Zgodnie z założeniem o małej wartości amplitudy i powolnym podciąganiu nitki, ruch wahadła jest w przybliżeniu ruchem harmonicznym, czyli kąt wychylenia ϕ zależy od czasu według wzoru $\phi = \alpha \sin \omega t$, gdzie α – amplituda, $\omega = \sqrt{g/l}$. Podstawiając do II zasady dynamiki odpowiednie wyrażenie na przyspieszenie dośrodkowe otrzymujemy siłę napięcia nici N

$$N = mg \cos \phi + m\Omega^2 l,$$

gdzie $\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \alpha \omega \cos \omega t$ jest prędkością kątową wahadła.

Ponieważ dla małych ϕ zachodzi przybliżona równość $\cos \phi \approx 1 - \phi^2/2$, więc dochodzimy do następującego wyrażenia na N :

$$N = mg + m\alpha^2 \left(\cos^2 \omega t - \frac{1}{2} \sin^2 \omega t \right).$$

Jeśli powoli podciągniemy nić o dl , to wykonamy przy tym pracę $\bar{N}dl$ (kreska oznacza średnią po czasie). Ponieważ średnia wartość $\cos^2 \omega t$ i $\sin^2 \omega t$ jest równa $\frac{1}{2}$, mamy

$\bar{N} = mg + \frac{1}{4}m\alpha^2$. Pracę $\bar{N}dl$ należy teraz przyrównać do zmiany energii wahadła. Iloczyn $mgdl$ odpowiada tu zmianie energii „zerowej” (w punkcie równowagi), przyrównując zaś $\frac{1}{4}m\alpha^2 dl$ do zmiany energii drgań (danej, jak nietrudno

wyprowadzić, wzorem $E = \frac{1}{2}mgl\alpha^2$) otrzymujemy równanie różniczkowe

$$\frac{1}{4}\alpha^2 dl = d \left(\frac{1}{2}l\alpha^2 \right).$$

Całkując uzyskujemy warunek $l\alpha^4 = \text{const}$, zatem rozwiązaniem jest

$$\alpha_1 = \alpha_0 (l_0/l_1)^{1/4}.$$

160. W okolicach nieelektryfikowanych używa się czasem lodówek działających dzięki spalaniu ropy (lub innego paliwa). Ocenic ilość ropy, którą trzeba spalić, aby zamrozić 1 kg wody. Założyć, że lodówka jest idealną maszyną cieplną. Dane: temperatura otoczenia (czyli także temperatura początkowa wody) 25°C, ciepło właściwe wody 4200 J/kg·K, ciepło topnienia lodu $3,3 \cdot 10^5$ J/kg, ciepło spalania ropy 45 MJ/kg, temperatura spalania 1200°C.

160. Zadanie można rozwiązać stosując nierówność Clausiusa, która w tym przypadku sprowadza się do warunku

$$(*) \quad \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} \leq 0,$$

gdzie Q_1 jest ciepłem pobranym przy spalaniu ropy, T_1 – temperaturą płomienia, Q_2 – ciepłem pobranym przy oziębianiu i zamrażaniu wody, T_2 można przyjąć jako równą temperaturze krzepnięcia wody (ewentualnie ściślej: początkowo przy oziębianiu wody T_2 jest nieco wyższe, potem przy zamrażaniu nieco niższe...), Q_3 jest ciepłem oddanym otoczeniu (z ujemnym znakiem), czyli $Q_3 = -(Q_1 + Q_2)$, a T_3 jest temperaturą otoczenia. Dla doskonałej (odwracalnej) maszyny cieplnej nierówność Clausiusa przechodzi w równość.

[Uwaga dla Czytelników nie znających nierówności Clausiusa: Równoważną metodą rozwiązania jest wprowadzenie dwóch odrębnych cykli termodynamicznych – cyklu Carnota, w którym spalaniu paliwa towarzyszy wykonywanie pracy, a ta praca napędza odwrotny cykl Carnota, czyli właściwą lodówkę. Stosując do obu cykli znany wzór na sprawność cyklu Carnota dochodzimy do wzoru (*).]

Przekształcając wzór (*) znajdujemy

$$Q_1 = Q_2 \frac{(T_3 - T_2)T_1}{(T_1 - T_3)T_2},$$

a podstawiając dane i przeliczając temperaturę na skalę Kelvina otrzymujemy dość zaskakujący wynik: wystarczy spalić 1,1 g ropy. Oczywiście, realna lodówka zużyje znacznie więcej paliwa, gdyż jej działanie jest dalekie od odwracalności.

Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 251 ($WT=1,71$) i 252 ($WT=2,88$) z numeru 12/1992

Tomasz Włetecha - Tarnów	44,20
Leszek Gasikowski - Stalowa Wola	41,46
Jerzy Janowicz - Bolesławiec	41,19
Marcin Kasperski - Warszawa	39,97
Adam Czornik - Bytom	38,80
Mirosław Matłaga - Skoczów	38,76

Pan Włetecha kończy drugą rundę.

266. Rozważamy wielomian

$$P(t) = \prod_{k=0}^{n-1} (t+k).$$

Przypuśćmy, że liczby dodatnie x, y, u, v spełniają związki: $P(x) = u^n, P(y) = v^n, x \geq y$. Dowieść, że $x - y \leq u - v$.

Zadanie 266 zaproponował pan Przemysław Gadziński ze Środy Śląskiej.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/1993

Przypominamy treść zadań:

261. Wyznaczyć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych x, n spełniające równanie

$$x^n + (x+1)^n = (x+2)^n.$$

261. Dla $n = 1$ jedynym rozwiązaniem równania jest $x = 1$; dla $n = 2$ jedynym rozwiązaniem równania jest $x = 3$. Wykażemy, że dla $n \geq 3$ równanie nie ma rozwiązań całkowitych $x \geq 1$.

Ustalmy $n \geq 3$; przyjmijmy $y = x + 1$ i przepiszmy równanie w postaci $y^n = (y+1)^n - (y-1)^n$, czyli

$$(1) \quad y^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} y^k - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} y^k.$$

Gdy n jest nieparzyste, prawa strona (1) równa się

$$2 + 2 \sum_{j=1}^{[n/2]} \binom{n}{2j} y^{2j}.$$

Wynikałoby stąd, że 2 dzieli się przez y^2 , a to jest niemożliwe.

Gdy n jest parzyste, prawa strona (1) równa się

$$2 \sum_{j=1}^{n/2} \binom{n}{2j-1} y^{2j-1},$$

czyli równanie przybiera postać

$$(2) \quad y^n = 2ny + 2Sy^3 + 2ny^{n-1},$$

gdzie przez S oznaczyliśmy sumę

$$S = \sum_{j=2}^{n/2-1} \binom{n}{2j-1} y^{2j-4}.$$

Dzielimy (2) stronami przez y i otrzymujemy związek

$$y^{n-1} = 2n + 2Sy^2 + 2ny^{n-2},$$

z którego wynikają dwie rzeczy: że składnik $2n$ dzieli się przez y , oraz że $y^{n-1} > 2ny^{n-2}$ (czyli $y > 2n$). Te dwie konkluzje nie dadzą się jednak pogodzić.

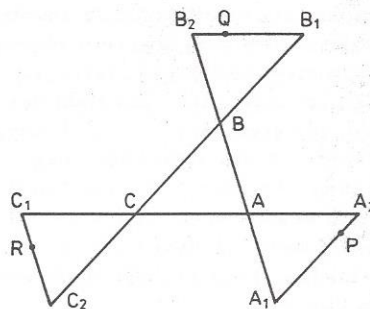
Ostatecznie więc rozwiązaniem zadania są pary $x = 1, n = 1$ oraz $x = 3, n = 2$.

262. Wykażemy, że zbiór o podanych własnościach nie istnieje.

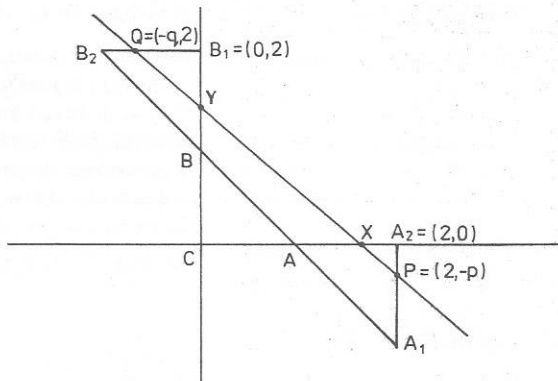
Przypuśćmy, że \mathcal{F} jest takim zbiorem i że trzy rozważane proste przecinają się w punktach A, B, C . Niech $AA_1A_2, B_2BB_1, C_1C_2C$ będą obrazami trójkąta ABC w symetriach środkowych odpowiednio względem punktów A, B, C . Na każdym z odcinków A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 znajdują się punkty zbioru \mathcal{F} (bo część zbioru \mathcal{F} zawarte w odpowiednich sektorach mają miarę pola równą polu trójkąta ABC). Wybierzmy po jednym punkcie: $P \in A_1A_2, Q \in B_1B_2, R \in C_1C_2; P, Q, R \in \mathcal{F}$.

Możemy przyjąć, że spośród trzech stosunków $|PA_2| : |A_1A_2|, |QB_2| : |B_1B_2|, |RC_2| : |C_1C_2|$ najmniejszy jest ten pierwszy. Oznaczmy go przez p oraz przyjmijmy $q = |B_1Q| : |B_1B_2|$. Tak więc $|QB_2| : |B_1B_2| = 1 - q \geq p$, czyli $p + q \leq 1$. Stąd $pq \leq 1/4$.

262. Czy istnieje na płaszczyźnie zbiór ograniczony wypukły, o niepustym wnętrzu, który można podzielić trzema liniami prostymi na siedem części o równych polach?



Wszystkie pojęcia występujące w zadaniu są niezmiennikami przekształceń afinicznych. Stosując odpowiednie przekształcenie afiniczne możemy przyjąć, że ABC jest trójkątem prostokątnym równoramiennym ($\angle C = 90^\circ$) oraz dobrą prostokątny układ współrzędnych tak, by $C = (0,0), A = (1,0), B = (0,1), A_1 = (2,-1), A_2 = (2,0), B_1 = (0,2), B_2 = (-1,2), P = (2,-p), Q = (-q,2)$. Oznaczmy przez $X = (x,0)$ i $Y = (0,y)$ punkty przecięcia prostej PQ z prostymi CA i CB .



$$\text{Standardowo obliczamy } x = (4 - pq)/(2 + p), \\ y = (4 - pq)/(2 + q).$$

Punkty X, Y (jako punkty odcinka PQ) należą do zbioru \mathcal{F} . Zatem trójkąt CXY zawiera się w \mathcal{F} . W myśl warunku zadania, pole części zbioru \mathcal{F} zawartej w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych równa się podwojonemu polu trójkąta ABC . Otrzymujemy więc ciąg zależności

$$1 = 2 \cdot \text{pole}(ABC) \geq \text{pole}(CXY) = \\ = \frac{xy}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(4 - pq)^2}{4 + 2(p+q) + pq} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{(4 - (1/4))^2}{4 + 2 \cdot 1 + (1/4)} = \frac{9}{8}.$$

Sprzeczność kończy dowód.

Patrz w niebo

Niewątpliwie liczba nie rozwiązanych zagadek Wszechświata rośnie wraz z zasięgiem obserwacji, ale można się na nie natknąć nawet w bezpośrednim sąsiedztwie Ziemi. Księżyc, od chwili, gdy stanęli na nim ludzie, przestał być obiektem ściśle „astronomicznym”, no bo skoro można tam polecieć i zbadać na miejscu, co się chce, to nie ma potrzeby ślepcze przy teleskopie, co jest podstawową cechą astronomii. Tymczasem właśnie na tym tak bliskim Księżycu spotykamy zagadkowe zjawiska, których w dodatku na miejscu zbadać niepodobna z racji ich ulotności.

Od około dwustu lat pojawiają się czasem informacje, że na Księżycu zaobserwowane zostało nagłe pojaśnienie, pociemnienie, zmiana koloru lub zamglenie jakiegoś obszaru, przy czym całe zjawisko trwało – powiedzmy – minuty. Informacje takie są na ogół nieudokumentowane, pochodzą bowiem od obserwatorów przypadkowych i nie dysponujących aparaturą umożliwiającą zarejestrowanie zjawiska. Nawet jeżeli ktoś taką aparaturą obecnie dysponuje, to i tak utrwalenie takiego faktu jest zdecydowanie dziełem przypadku. Tak stało się np. 23 maja 1985, gdy grecki astronom G. Kolovos testował mały teleskop robiąc serię zdjęć księżycowego terminatora (granicy oświetlonej i nieoświetlonej części globu). Na jednym ze zdjęć Księżyca będącego 4 dni po nowiu wyraźnie widoczny był jasny punkt na jego ciemnej części tarczy, w miejscu, które niedługo miało zostać oświetlone przez Słońce.

Zdjęcie zostało skrupulatnie zbadane w laboratorium fotograficznym dla stwierdzenia, czy aby obserwator nie zaobserwował po prostu skazy na kliszy. Wykluczono następnie możliwość jakiegoś refleksu światła od powierzchni Księżyca, gdyż jasna plamka najwyraźniej znajdowała się ponad tą powierzchnią. Wykluczono też wybuch wulkanu lub upadek meteorytu, gdyż po takich zjawiskach powinna być widoczna przez jakiś czas chmura gazu lub pyłu. Grupa astronomów zajmująca się serią zdjęć Kolovosa wysunęła na koniec hipotezę, że gdy w trakcie ogrzewania się o wschodzie Słońca grunt księżycowy pęka, mogą z niego uwalniać się porcje uwieczonych tam gazów, a towarzyszące temu wyładowani elektryczne mogą pobudzać gaz do świecenia. Tak się składa, że wiele tego rodzaju osobliwych zjawisk było obserwowanych właśnie w pobliżu terminatora. Hipoteza jest – co przyznają sami zainteresowani – nieco ryzykowna i nie pretenduje do wyjaśnienia wszystkich tego rodzaju zjawisk na Księżycu. Faktem pozostaje, że Księżyc nie jest globem całkiem martwym, ale śledzenie przejawów jego szczątkowego „życia” jest przedsięwzięciem bardzo zależnym od szczęścia, a interpretacja obserwacji niezwykle trudna do sprawdzenia.

Tomasz KWAST



Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

M 679. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że liczba

$$A_n = 1^{1003} + 2^{1003} + \dots + n^{1003}$$

nie dzieli się przez $n + 2$.

Rozwiązanie na str. 3

M 680. W urnie jest n kul białych i m kul czarnych, a obok urny mamy skrzynię zawierającą nieskończenie wiele kul czarnych. Wyciągamy (losowo) z urny dwie kule; jeśli są jednego koloru, to odkładamy je na bok, a do urny wkładamy czarną kulę ze skrzyni; jeśli są różnego koloru, to czarną kulę odkładamy na bok, a białą wkładamy z powrotem do urny. Operację tę powtarzamy tak długo, aż w urnie zostanie tylko jedna kula. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że będzie to kula biała?

Rozwiązanie na str. 3

M 681. Obliczyć największy wspólny dzielnik liczb

$$\binom{n}{k}, \binom{n+1}{k}, \dots, \binom{n+k}{k}.$$

(Zakładamy, że $n, k \in \mathbb{N}$ oraz $n \geq k$.)

Rozwiązanie na str. 3

Redaguje Jarosław KULPA

F 365. Wyobraźmy sobie pewne hipotetyczne ciało stałe, w którym potencjał utrzymujący atomy jest funkcją czwartego stopnia wychylenia z położenia równowagi. Ile wynosiłoby ciepło molowe tego ciała?

Porównać je z ciepłem molowym ciał stałych, w których potencjał jest funkcją kwadratową wychylenia. (Skorzystać z twierdzenia o wirale.)

Rozwiązanie na str. 2

F 366. Czy potencjał typu $V = -\frac{a}{r^2}$, gdzie a jest dodatnim parametrem, może wytwarzać trwale stany związane?

Rozwiązanie na str. 2

Liczby p-adyczne

- ◇ Liczby naturalne możemy zapisywać za pomocą systemu dwójkowego, czyli używając tylko zer i jedynek; np. 5 to 101. Ale w systemie dwójkowym potrafimy zapisać także wszystkie liczby rzeczywiste, używając cyfr po przecinku – może ich być nieskończenie wiele: $\mp a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, b_1 b_2 \dots$, gdzie a_i, b_i są zerami lub jedynekami.
- ◇ Rozważmy twory postaci trochę innej (też w systemie dwójkowym): po przecinku musi być skończenie wiele cyfr (zer i jedynek), natomiast przed przecinkiem może ich być nieskończenie wiele: $\mp \dots a_1 a_0, b_0 b_1 \dots b_n$. Twory te nazywamy liczbami 2-adycznymi.
- ◇ W szczególności każda liczba, która w rozwinięciu dwójkowym ma skończenie wiele cyfr po przecinku, jest liczbą 2-adyczną; np. 53,625 to +110101,101 (i jako liczba zapisana w systemie dwójkowym, i jako liczba 2-adyczna).
- ◇ Oba zapisy nie są jednoznaczne. W przypadku liczb, np. 0,111... i 1,000... oznaczają tę samą liczbę 1. W przypadku liczb 2-adycznych podobnie ...111,0 i ...001,0 oznaczają -1 (bo ...111 + 1 = ...0).
- ◇ W systemie dwójkowym możemy stosować wzór na sumę nieskończonego ciągu geometrycznego. Na przykład $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 1 + 0,1 + 0,01 + \dots = 1,111\dots = 10,000\dots = 10$; korzystając ze wzoru mamy $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$, czyli 10 w systemie dwójkowym.
- ◇ Sumą liczb $1 + 2 + 4\dots$ jest, oczywiście, ∞ . Gdybyśmy jednak traktowali je jako liczby 2-adyczne, byłoby: $1 + 10 + 100 + 1000\dots = \dots 111,0 = -1$, co zgadza się ze wzorem na sumę ciągu geometrycznego (choć dla zwykłych liczb oczywiście nie wolno go tu stosować): $\frac{1}{1 - 2} = -1$.
- ◇ Liczby 2-adyczne tworzą bardzo ważną i „porządną” strukturę algebraiczną; są ciałem.
- ◇ Oczywiście analogicznie można tworzyć liczby p-adyczne dla innych p niż 2. Niestety, nie zawsze jest to interesujące; w szczególności nie warto zajmować się liczbami 10-adycznymi, bo są wśród nich dzielniki zera.
- ◇ Ciało liczb 2-adycznych jest homeomorficzne ze zbiorem Cantora bez jednego punktu.
- ◇ Skonstruowanie ciał liczb p-adycznych miało zasadniczy wpływ na powstanie teorii ciał.

Jerzy GRZYBOWSKI

Nasz Czytelnik, pan Adam Janik opowiedział nam następującą historię.

Gdy był studentem I roku matematyki, zaczęto go uczyć algebry. Po paru miesiącach, podczas rozmowy kulturalowej na temat algebry, stwierdził, że zdecydowanie woli bogatsze struktury, takie jak ciało, natomiast prostsze: grupa, pierścień, niezbyt mu się podobają. Na to z oburzeniem zareagowała jego koleżanka ze studiów (prawdopodobnie mając na myśli jedynie algebrę):

– Coś ty! Przecież żeby było ciało, musi być najpierw pierścień.

W archiwach Instytutu Matematyki Najwspółczesniejszej znajduje się notatka o seminarium z teorii rozbójnika i wygłoszonym tam przez dr. N. referacie „Ideale trywialne w ciałach nietrywialnych”. Kronikarz pisze, że referat „rozbudził duże zainteresowanie słuchaczy z chwilą, kiedy referent zdefiniował ciało nietrywialne jako ciało posiadające co najmniej trzy elementy. Niestety, rozbudzona ciekawość słuchaczy nie została zaspokojona, gdyż dr N. nie powiedział, o jakie elementy właściwie chodzi”.

Słowniczek trudniejszych terminów

Grupa – zbiór, w którym rozważamy działanie \oplus mające pewne przyjemne własności. W szczególności musi istnieć w grupie element neutralny e (tzn. taki, że $e \oplus a = a \oplus e = a$ dla dowolnego a z tego zbioru).

Pierścień – grupa, w której określone jest także i drugie działanie \otimes (rozdzielne względem \oplus), już niekoniecznie mające równie przyjemne własności jak \oplus . Element neutralny działania \oplus nazywamy „zero”; jeśli \otimes też ma element neutralny, mówi się o tym elemencie „jedynek”.

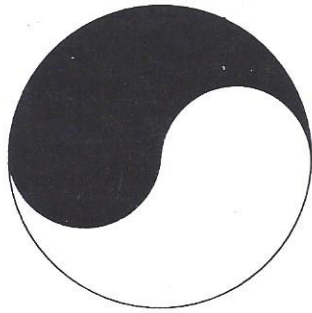
Dzielniki zera – elementy a, b pierścienia, różne od zera, takie, że $a \otimes b = 0$.

Ciało – pierścień taki, że po wyrzuceniu z niego zera jest on grupą ze względu na działanie \otimes . Łatwo zauważyć (jak?), że ciało nie może mieć dzielników zera.

Przykłady: zbiór liczb całkowitych z dodawaniem tworzy grupę, zbiór liczb całkowitych z dodawaniem i mnożeniem jest pierścieniem z jedynką (ale nie ciałem!), zbiór liczb wymiernych oraz zbiór liczb rzeczywistych (z dodawaniem i mnożeniem) są ciałami.

Zbiory homeomorficzne – zbiory, które dla wielu potrzeb matematycznych mogą być uznawane za takie same (por. np. EPSILON nr 8).

Zbiór Cantora – pewien bardzo ciekawy podzbiór prostej. Tworzymy go tak: przedział domknięty dzielimy na trzy równe części, wyrzucamy środkową (zostawiając końce), każdy z dwóch pozostałych odcinków dzielimy na trzy równe części... itd. w nieskończoność. To, co zostanie, to zbiór Cantora.

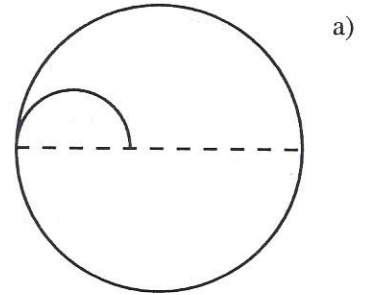


In i Jang to symbol bardzo często spotykany w zdobnictwie Dalekiego Wschodu. Symbol ten ma obrazować walkę przeciwieństw – jest więc odczytywany bardzo różnie. W zależności od okoliczności mówi się o pierwiastku aktywnym i biernym, o elemencie męskim i żeńskim, o tchnieniu dobra i zła itp. Ciekawą i wielce dla Europejczyków pouczającą rzeczą powinno być spostrzeżenie, że In i Jang są identyczne, żaden z nich – przedstawiony oddzielnie – nie da się zidentyfikować, że każdy jest jedynie antytezą pozostałego. A jeszcze bardziej pouczające jest spostrzeżenie, że razem tworzą one najbardziej harmonijną figurę – koło – symbol spokoju.

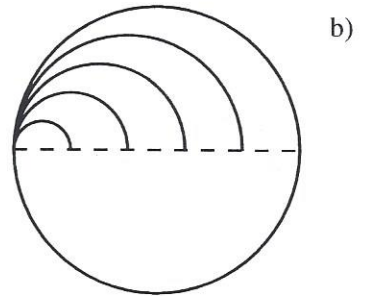
Europejczyk, szczególnie współczesny i (nie daj Bóg) środkowowschodni, może też zwrócić uwagę na azjatycki prymitywizm symbolu In i Jang, który mówi o walce dwóch, jedynie dwóch, a nie np. 24 przeciwstawnych tendencji. To przecież znacznie lepiej oddaje otaczającą go rzeczywistość. Jak wyprodukować bogatszy w możliwości symbol *poliinijang* i czy to się da zrobić?

Oczywiście tak. Robi się to w ten sposób, że dla danego $k \geq 2$ rysuje się po jednej stronie średnicy okręgu $k - 1$ półokręgów

o promieniach równych $\frac{i}{k} \cdot r$, gdzie r jest promieniem wyjściowego okręgu, a $i = 1, \dots, k - 1$. Na rysunku a) jest $k = 2$, a na rysunku b) $k = 5$. Robi się to przy tym w taki sposób, aby wszystkie półokręgi przechodziły przez jeden, wybrany koniec średnicy. Potem powtarza się ten rysunek obracając go o 180° względem środka wyjściowego okręgu. Otrzymuje się w ten sposób *poliinijang* o k sektorach. Na dolnym rysunku jest *poliinijang* o dziewięciu sektorach. Jest to już bardziej europejskie, ale jednej cechy azjatyckiej nie dało się wyeliminować – każdy sektor ma w dalszym ciągu takie samo pole. Czytelnik zechce spróbować to sprawdzić.



a)



b)

