

deja

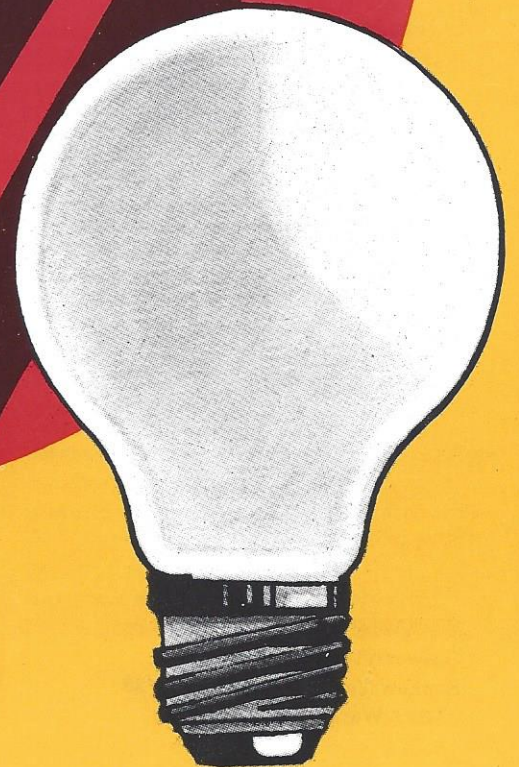
h=6.63·10⁻³⁴ J·s $\pi=3.141593$

CENA ZŁ 8000,-

NR 5 (228) 1993

PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X

POPULARNY MIESIĘCZNIK MATEMATYCZNO-FIZYCZNO-ASTRONOMICZNY



UWAGA !!!

Nową formę prenumeraty „Delty”
proponuje firma AMOS,
warunki poniżej.

SPIS TREŚCI

NUMERU 5(228)

Anegdota matematyczne <i>Steven Krantz</i>	str. 1
Światło – piąty żywioł <i>Aleksandra Kopystyńska</i>	str. 1
Powierzchnie rozwijalne <i>Jerzy Konarski</i>	str. 6
Mała Delta	str. 8
Jak jest w środku Słońca? <i>Tomasz Kwast</i>	str.10
Zadania	str.11
Patrz w niebo	str.12
Pokryć paskami	str.13
Klub 44	str.14
Indywidualne studia matematyczno-przyrodnicze	str.16
Epsilon	str.17

W następnym numerze:

Tęcza

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego
i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichocki
Roman Duda
Jan A. Gaj
Tomasz Hofmokl – wiceprzewodniczący
Tadeusz Jarzębowski
Marcin Kubiak
Andrzej Małowski
Andrzej Pelczar
Zbigniew Płochocki
Zdzisław Pogoda
Konrad Rudnicki
Zbigniew Semadeni
Grzegorz Sitariski
Józef I. Smak
Kazimierz Stępień
Mieczysław Subotowicz
Andrzej Szymacha
Andrzej Woszczyk
Wojciech Żakowski – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

Krzysztof Biesaga
Piotr Hajłasz
Jan Kalinowski – z-ca red. nac.
Krystyna Kordos – sekr. red.
Marek Kordos – red. nac.
Tomasz Kwast
Stanisław Mrówczyński
Anna Rudnik
Joanna Udalska

Adres Redakcji:

ul. Smyczkowa 5/7
02-678 Warszawa
tel. 43-02-43 wewn. 21
DELTA@PLEARN.BITNET

Wydrukowano w Zakładach Graficznych
w Warszawie, ul. Srebrna 16
Skład systemem \TeX wykonała redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY w AMOS-ie

Od stycznia br. prenumeratę „Delty” prowadzi również firma AMOS,
01-506 Warszawa, ul. Szenwalda 1 (tel. 39-17-52). Wpłaty przyjmowane są
non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. Koszt trzech
numerów wynosi 24 000,-zł (rocznika'93 – 96 000,-zł). Przy wpłacie prosimy
zaznaczyć okres prenumeraty (co najmniej 3 miesiące).

Prenumerata zagraniczna trzech numerów wynosi 60 000,-zł. W przypadku życzenia
dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! AMOS dostarcza „Deltę” pod wskazany adres nie pobierając dodatkowej
opłaty. Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS
funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Blankiet pocztowy na prenumeratę „Delty” w AMOS-ie zamieszczamy na str.11/12.
Konto AMOS-u: PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-186

WARUNKI PRENUMERATY w RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na III kwartał 1993 r. wynosi 24 000,- zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
 - na teren kraju
 - jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób,
 - na zagranicę
 - „Ruch” S.A. Oddział Warszawa, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia dostawy pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni pokrywa prenumerator.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
 - na kraj i zagranicę – do 20 XI na I kwartał roku następnego
do 20 II na II kwartał
do 20 V na III kwartał
do 20 VIII na IV kwartał.

Cena 1 egzemplarza 8 000,- zł

Światło – piąty żywioł

Aleksandra KOPYSTYŃSKA

Ciśnienie światła

Można zaryzykować stwierdzenie, że zjawisko ciśnienia światła było już obserwowane w starożytności, gdy tylko uczeni zauważyli na niebie komety.

Komety wyglądają różnie, ale zawsze mają jądro (o średnicy od 800 do 3000 km), głowę (o średnicy od 50 do 240 tysięcy km) i wypływający z niej warkocz, nazywany też ogonem. Warkocz, który jest zbiorem jonów cząsteczkowych, ciągnie się na długości dochodzącej do 80 milionów km i jest skierowany od Słońca, chociaż czasami może być odchylony od kierunku radialnego. Na cząsteczki w ogonie komety działają dwie antyrównoległe siły. Jedną jest siłą grawitacji Słońca, a druga jest wywołana ciśnieniem światła, co zrozumiano dosyć późno, bo dopiero na początku naszego stulecia. Widząc więc na niebie komety obserwujemy „doświadczenie kosmiczne”, które demonstruje m.in. istnienie ciśnienia światła.

Aby bliżej zrozumieć, dlaczego światło wywiera ciśnienie, warto przypomnieć trochę podstawowych wiadomości z fizyki. I tak, drugą zasadę dynamiki Newtona można zapisać w postaci

$$(1) \quad \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

gdzie $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ oznacza pęd ciała o masie m , które porusza się z prędkością \mathbf{v} . Zmiana pędu w czasie jest równa sile, która działa na ciało o masie m i nadaje mu przyspieszenie \mathbf{a} . Zatem w układzie, w którym nie działają siły zewnętrzne, suma pędów ciał jest stała

$$(2) \quad m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \dots = \text{const.}$$

Ale czy pęd można przypisać tylko cząstkom materialnym, czyli takim, które mają masę spoczynkową większą od zera? Otóż, nie tylko. To, że pole elektromagnetyczne powinno nieść zarówno energię, jak i pęd, wynikało już z opublikowanych w 1862 r. równań Maxwella.

Światło możemy traktować bądź jako falę elektromagnetyczną, bądź jako strumień fotonów o energii $E = \hbar\omega$ i pędzie $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$, $|\mathbf{p}| = E/c$, gdzie \hbar jest stałą Plancka h dzieloną przez 2π , c prędkością światła w próżni, a \mathbf{k} wektorem falowym (zawsze równoległym do kierunku rozchodzenia się fali) o wartości $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$. Zgodnie z zasadą zachowania pędu

$$(3) \quad \hbar\mathbf{k} + m\mathbf{v}_1 = m\mathbf{v}_2$$

atom po absorpcji lub emisji fotonu musi doznać odrzutu $\mathbf{p} = m\Delta\mathbf{v}$, gdzie m jest jego masą, a $\Delta\mathbf{v}$ zmianą prędkości o wartości równej $\hbar\omega/mc$. Jak mała jest ta zmiana, niech świadczy przykład atomu sodu, który absorbując lub emitując foton promieniowania rezonansowego o długości fali $\lambda = 589$ nm, wskutek doznanego odrzutu zmienia prędkość o $\Delta v = 0,03$ m/s. Dla porównania, w temperaturze pokojowej w opróżnionej z powietrza komórce z metalicznym sodem prędkość atomów pary sodu wynosi około 460 m/s (≈ 1700 km/h).

Przeprowadzenie przekonującego doświadczenia, które wykazałoby istnienie ciśnienia światła, okazało się bardzo trudne. Pierwszą, niezbyt udaną próbę podjął w 1910 r. Piotr Lebediew w Rosji. Gdy światło pada na dowolne ciało, to w każdej sekundzie przekazuje

Anegdoty matematyczne

Steven KRANTZ

© The Mathematical Intelligencer
przedruk za zgodą redakcji

Tłumaczenie i skróty w tekście angielskim:
Paweł STRZELECKI

Bergman

Stefan Bergman (1898–1977) był rodowitym Polakiem. Swoją karierę w Stanach Zjednoczonych rozpoczął w Brown University. Mówi się, że Bergman przybył do Stanów razem ze swą kochanką. Wkrótce po przyjeździe wziął ją na stronę i powiedział „Jesteśmy teraz w Stanach Zjednoczonych, gdzie panują inne obyczaje. Kiedy jesteśmy z innymi ludźmi, zwracaj się do mnie Stefan. Ale w domu nadal tytułuj mnie: Profesorze Doktorze Bergman.” (...)

Bergman jąkał się i niekiedy trudno było go zrozumieć, niezależnie od tego, jakim językiem mówił. Pewnego razu rozmawiał z Antonim Zygmundem, innym sławnym polskim analitykiem, w ojczystym języku. Po chwili Zygmund powiedział „Proszę, rozmawiajmy po angielsku: tak mi będzie wygodniej.” (...)

Bergman był niezwykle miłym i uprzejmym człowiekiem. Nie zważając na kłopoty, pomagał wielu młodym ludziom rozpocząć kariery, czynił też wielkie wysiłki na rzecz polskich Żydów w okresie drugiej wojny światowej. Ale gdy przychodziło do *jego* własnej matematyki, objawiała się w nim dusza spryciarza. Gdy podobało mu się twierdzenie, będące przedmiotem czyjegós wykładu, często podchodził do wykładowcy i mówił „Naprawdę podoba mi się Pańskie twierdzenie. Przypomina mi to moje własne badania nad jądrem (Bergmana – przyp. tłum.). Rozważmy dwuwymiarową przestrzeń zespoloną...” I Bergman wyłączał się, i wpadał na swój ulubiony temat. Zdarzyło się, że pewien młody matematyk dał Bergmanowi rękopis swej nowej pracy. Bergman rzecz przeczytał i stwierdził: „Podoba mi się Pana wynik. Zróbmy z niego wspólną pracę, a ja napiszę następną.” (...)

Bergman intensywnie myślał o matematyce i żarliwie troszczył się o swą pracę. Pewnego dnia, podczas Międzynarodowego Kongresu Matematycznego w 1950 roku w Cambridge (Mass.), umówił się na lunch z dwoma włoskimi przyjaciółmi. Obaj

pojawił się bardzo punktualnie w pokoju Bergmana: szacowny, starszy włoski matematyk Picone (niosący bukiet kwiatów dla Bergmana!) i jego młodszy kolega Sichera. Picone był w Stanach Zjednoczonych po raz pierwszy i nie mówił po angielsku; Sichera występował w roli tłumacza. Po przywitaniu Bergman zapytał Sichere, czy ten czytał jego najnowszą pracę. Sichera przyznał, że tak, i że uważa ją za bardzo interesującą; jednakże ma uczucie, że potrzebne są pewne dodatkowe założenia o różniczkowalności. Bergman stwierdził „Nie, nie, nie rozumie Pan” i zaczął wyjaśniać kwestię przy tablicy. Picone czekał cierpliwie nic nie rozumiejąc. Po wyjaśnieniach Bergman spytał Sichere, czy teraz już zrozumiał. Sichera odparł, że tak, ale nadal sądzi, że pewien krok dowodu wymaga założeń o różniczkowalności. Bergman pozostał nieugięty i wywiązał się gorący spór, z którego Picone nic nie rozumiał. Po pewnym czasie Sichera stwierdził „Dobrze, zapomnijmy o tym i chodźmy na lunch.” Bergman wykrzyknął „Nie ma różniczkowalności, nie będzie lunchu!” i został w swoim pokoju, a Włosi sami poszli na lunch. Picone wręczył bukiet kwiatów kelnerce.

Istnieje wiele dowodów na to, że Bergman myślał o matematyce bez przerwy. Pewnego razu zadzwonił do jednego ze swych studentów, pod jego domowy numer, o drugiej nad ranem i powiedział „Czy jest Pan teraz w bibliotece? Chciałbym, żeby Pan czegoś dla mnie poszukał!”. (...)

Niekiedy Bergman wydawał się tracić kontakt z rzeczywistością, najprawdopodobniej ze względu na swoje zaprzeczenie matematyce. Na przykład, pewnego dnia wybrał się z grupą znajomych (w tym z moim przyjacielem, który opowiedział mi później tę historię) na plażę w północnej Kalifornii. Plaże są tam chłodne, tak więc po wyjściu z wody Bergman uznał, że lepiej będzie przebrać się w suche rzeczy. Gdy wędrował w stronę parkingu, przyjaciele zauważyli, że zmierza w złym kierunku; byli jednak przyzwyczajeni do tego rodzaju zachowania i nie przejęli się zbytnio. Po chwili Bergman wrócił – ubrany – i wykrzyknął „Wicie, w naszym samochodzie jest szaleni nieprzyjazna kobieta!”.

Besicovitch

Abram S. Besicovitch (1891–1970) był świetnym specjalistą w zakresie geometrycznych metod w analizie

mu pewną ilość pędu. Zmiana pędu ciała w czasie to siła, która na to ciało działa, a siła wywierana na powierzchnię jest właśnie ciśnieniem. Lebediew chciał zmierzyć kąt obrotu swobodnie zawieszonyj płytki, na którą padało światło.

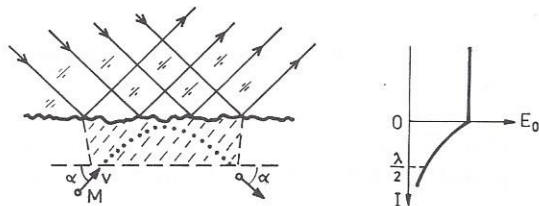
Pierwsze przekonujące doświadczenie zostało wykonane w 1933 r. przez Ottona Frischa w Hamburgu. W specjalnym piecu metaliczny sól został podgrzany znacznie powyżej temperatury topnienia. Przez małeńki otwór w piecu atomy sodu wypływały do zbiornika opróżnionego z powietrza, mniej więcej tak, jak wypływa strumień pary z dziubka czajnika z gotującą się wodą. Odpowiedni układ szczelin formował je w wiązkę, którą w określonym miejscu oświetlano światłem z lampy sodowej. Otto Frisch zarejestrował wyraźne odchylenie kierunku rozchodzenia się wiązki, co świadczyło o istnieniu pędu fotonów, a zatem również o ciśnieniu światła.

Optyka atomowa

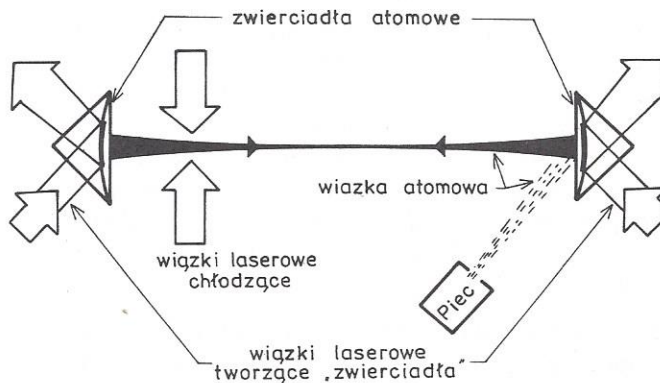
W ten sposób pojawiła się możliwość wykorzystania światła do manipulowania atomami. Jednak siła, działająca na atomy w doświadczeniu Frischa, była za mała do zastosowań praktycznych. Do idei wykorzystania tej siły powrócono dopiero w 1975 r. Początkowo użyto jej do spowalniania atomów, nieco później także do ich pułapkowania (izolowania pojedynczych atomów), aż wreszcie ostatnio stosuje się ją do takiego manipulowania atomami, że zachowują się one po prostu jak światło. Tak oto narodziła się optyka atomowa, to znaczy coś w rodzaju optyki geometrycznej w odniesieniu do atomów.

Wiązka atomów pod działaniem światła może ulec kolimacji, ogniskowaniu lub rozogniskowaniu, dokładnie tak, jak światło przechodzące przez układ soczewek. Może odbić się od cienkiej „warstwy” światła jak od zwierciadła (rys. 1), przechodzić przez siatkę dyfrakcyjną, którą jest stojąca fala świetlna, wreszcie może być wprowadzona do interferometru Younga, gdzie ulega dyfrakcji i następnie interferencji, której świadectwem jest układ prążków (rys. 2).

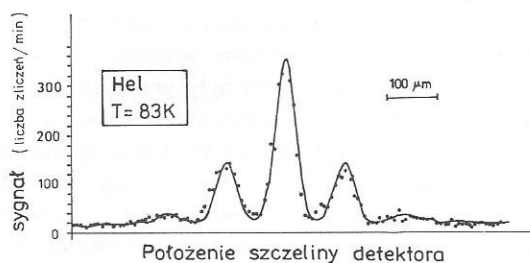
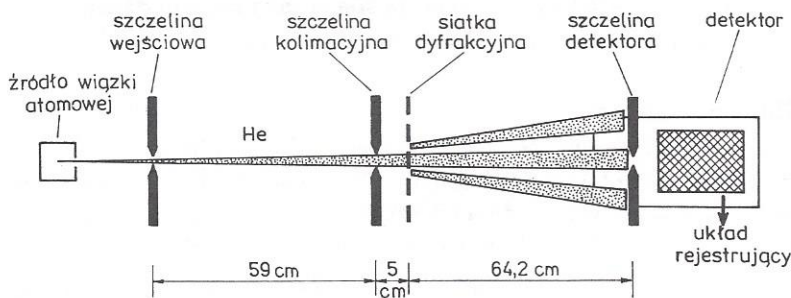
Rys. 1. Odbicie zwierciadlane wiązki atomowej.



a) Zasada działania „zwierciadła atomowego”.



b) „Zwierciadła” ogniskujące wiązkę atomową.



Rys. 2. Interferometr Younga do wiązki atomowej.

Ponadto światło można wykorzystać do zrobienia fontanny ultrazimnych atomów, co nie ma odpowiednika w optyce geometrycznej. Fontanna jest umieszczona w próżni, gdzie tryskające w górę atomy, jak w prawdziwej fontannie, opadają jedynie pod działaniem siły grawitacji. Gdy znajdują się u szczytu swego toru, stwarzają warunki do skrajnie długiego czasu „pomiaru” (rzędu 1 s) co, zgodnie z zasadą Heisenberga, pozwala zmierzyć różnicę energii poziomów z dokładnością 1000 razy lepszą od tej, z jaką dziś „działają” najlepsze zegary atomowe, w których taki pomiar jest podstawą wzorca czasu. Fontanna atomowa może być też wykorzystana do bardzo dokładnego pomiaru stałej grawitacji.

Bez trudu można zgadnąć, że wszystkie te możliwości zawdzięczamy laserom. Otóż w celu znacznego zwiększenia siły (1) należy zwiększyć prędkość procesu „rozpraszania”, czyli absorpcji i emisji fotonów przez atom. Zastosowanie światła laserowego prowadzi do rozpraszania 10 milionów fotonów na sekundę. Oświetlając zbiór N atomów światłem laserowym o częstotliwości rezonansowej bardzo szybko uzyskujemy stan nasycenia. Oznacza to, że połowa atomów jest w stanie wzbudzonym. O jednym atomie zbioru można wówczas powiedzieć, że średnio tyle samo czasu spędza w stanie podstawowym, co w stanie wzbudzonym. Zatem kolejny akt absorpcji fotonu przez atom następuje po czasie równym podwojonemu czasowi życia atomu w stanie wzbudzonym τ .

Światową sławę zyskał sobie dzięki rozwiązaniu tzw. problemu igły Kakey. Problem polegał na tym, by znaleźć obszar płaski o najmniejszym polu i tej własności, że odcinek długości 1 można w nim przemieścić tak, by w efekcie wykonał pełny obrót, o kąt 2π . Zdziwiająca odpowiedź Besicovitcha stwierdza, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje taki obszar o polu mniejszym niż ε .

Besicovitch, z urodzenia Rosjanin, był istotą z dawnych czasów. Po opuszczeniu Rosji (zręczne posunięcie, gdy się weźmie pod uwagę plotki o jego czarnorynkowych poczynaniach w czasie pierwszej wojny światowej) ostatecznie trafił na uniwersytet w Cambridge, w Anglii. (...) Besicovitch był zdolnym człowiekiem, tak więc szybko nauczył się sprawnie mówić po angielsku. Ale doskonałości nigdy nie osiągnął. Zgodnie z rosyjskim paradygmatem nigdy nie używał rodzajników przed rzeczownikami. Pewnego dnia, podczas wykładu, studenci pokpiwali z jego lamanej angielszczyzny. Besicovitch odwrócił się do publiczności i rzekł „Panowie, pięćdziesiąt milionów Anglików mówi po angielsku tak, jak wy, zaś dwieście milionów Rosjan mówi po angielsku tak, jak ja.” Kpiny ustały. (...)

Besicovitch, mimo swej wyraźnej mocy twórczej, był skromny. W dniu swoich trzydziestych szóstych urodzin przekonywał sam siebie, że jego najlepsze, najbardziej intensywne lata pracy naukowej już minęły. Powiedział „Mam już za sobą cztery piąte mego życia.” Po dwudziestu trzech latach, gdy w roku 1950 przyznano mu Katedrę Matematyki Rouse Balla w Cambridge, ktoś przypomniał mu o owej lekkomyślnie rzuconej uwadze. Besicovitch odparł „Licznik był poprawny.” (...)

Lefschetz

Solomon Lefschetz (1884–1972) był inżynierem. Było to w czasach, gdy inżynieria była mieszaniną rzemiosła, alchemii i odrobiny szczęścia (era przed von Kármánem). W każdym razie, Lefschetz miał nieszczęście stracić obie dłonie w wypadku laboratoryjnym. Ten pechowy wypadek był dla nas szczęśliwy, bowiem wskutek niego Lefschetz, w wieku 36 lat, został matematykiem. (...)

Lefschetz grał w jednym z filmów nakręconych przez MAA (Mathematical Association of America – przyp. tłum.). Dał cudowny, przerywany kakofonią piszczącej kredy, wykład o swym słynnym twierdzeniu o punkcie stałym

Jego uczucia do owego filmu były mieszane: w pewnym momencie na filmie Lefschetz mówi „Mam nadzieję, że to jest jasne; prawdopodobnie jest to mniej więcej tak jasne, jak błoto.” Po jego wykładzie następuje w filmie rozmowa przy okrągłym stole z udziałem Johna Moore’a, Lefschetza i kilku innych. Przez dziesięć czy piętnaście minut wspominają stare czasy w Princeton. Jedna z osób przypomina Lefschetzowi, jak to pod koniec lat czterdziestych, w czasie, gdy błyskawicznie rozwijała się i zdobywała sobie pozycję topologia algebraiczna, jechali razem pociągiem. Lefschetza zapytano, jaka jest różnica między algebra i topologią. Podobno odpowiedział „Jeśli to tylko kręcenie korbą, to jest to algebra, ale jeśli obecna jest przy tym jakaś idea, to wtedy to jest topologia.” Kiedy na filmie Lefschetzowi przypomniano ową historyjkę, szalenie się zawstydził i powiedział „Ja nie mogłem powiedzieć nic podobnego.” (...)

Lefschetz należał do tych matematyków – każdy z nas zna przynajmniej jednego z nich – którzy sypiają w czasie wykładów i budzą się pod koniec, by zadać jakieś błyskotliwe pytanie. Podczas jednego seminarium mówca zaciął się w pewnym punkcie, po około dwudziestu minutach swego wykładu. Nastąpiła kilkuminutowa cisza. Zaburzyło to rytm Lefschetza: obudził się, powiedział „Czy są jakieś pytania? Dziękuję Panu bardzo,” a seminarium zakończyło się zwyczajowymi brawami.

Wiener

Osoba znakomitego analityka Norberta Wienera (1894–1964) jest ulubionym tematem anegdot. Wiener jest wystarczająco współczesny, by znało go wielu żyjących matematyków, i był wystarczająco ekscentryczny, by być nieustającym obiektem opowieści i figli.

Urodził się jako syn sławnego profesora lingwistyki i został jednym z pierwszych znanych w świecie matematyków amerykańskich. Ze względu na antysemityzm panujący wśród rządzących amerykańską matematyką Wiener spędził wczesne lata swej kariery naukowej w Anglii. Historia głosi, że gdy spotkał Littlewooda, powiedział „O, więc Pan naprawdę istnieje. A ja myślałem, że Littlewood to tylko pseudonim, który Hardy umieszcza na swych słabszych pracach.” Biedny Wiener był tak rozczłuszczony powtarzaniem owej historyjki, że gwałtownie zaprzeczał jej w swej autobiografii, tym samym

Wróćmy do przykładu z atomami sodu. Dla pierwszego stanu wzbudzonego w atomie sodu $\tau = 16$ ns. Skoro w jednym akcie absorpcji lub emisji prędkość atomu sodu zmienia się o Δv , to przyspieszenie, które jest równe zmianie prędkości w czasie, wynosi

$$(4) \quad a = \frac{\Delta v}{2\tau} = \frac{3 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}}{2 \cdot 16 \cdot 10^{-9} \text{ s}} \approx 10^6 \text{ m/s}^2.$$

Jest ono 100 000 razy większe od przyspieszenia ziemskiego $g \approx 10 \text{ m/s}^2$. Świadczy to o tym, że siła, z jaką światło działa na atomy, jest ogromna.

Chłodzenie atomów

Aby można było skutecznie manipulować atomami, należy je uprzednio spowolnić czy też oziębic. Tych dwóch określeń używamy wymiennie, ponieważ średnia energia ruchu cząstek przypadająca na jeden stopień swobody jest równa ich energii kinetycznej

$$(5) \quad k_B T / 2 = m v^2 / 2,$$

gdzie k_B jest stałą Boltzmanna, T temperatura w kelwinach, m masa atomu, a v jego prędkością.

W przypadku chłodzenia jednowymiarowego wiązkę światła laserowego kierujemy „pod prąd” wiązki atomowej. Częstotść światła dobieramy tak, aby przy uwzględnieniu zjawiska Dopplera fotony „zderzające się” z atomami były przez nie pochłaniane. Oczywiście, każdemu aktowi absorpcji towarzyszy akt emisji fotonu. Pęd fotonów absorbowanych jest antyrównoległy do pędu atomu, więc skutek odrzutu po każdym akcie absorpcji prędkość atomu zmniejsza się o wartość Δv . Kierunek emitowanego fotonu jest zupełnie przypadkowy, więc po wielu aktach emisji zmiana pędu atomu wskutek odrzutu uśrednia się do zera. W rezultacie atom jest hamowany z ujemnym przyspieszeniem a , określonym wzorem (4). Jeżeli jest to atom sodu o prędkości początkowej $v_0 = 600 \text{ m/s}$, to po

$$(6) \quad n = \frac{v_0}{\Delta v} = \frac{600}{3 \cdot 10^{-2}} = 2 \cdot 10^4$$

aktach absorpcji zostanie on zatrzymany. W stanie nasycenia kolejne fotony są absorbowane po czasie 2τ , więc na całkowite zatrzymanie atomu potrzeba $2 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 16 \cdot 10^{-9} \text{ s} = 0,64 \text{ ms}$, a zachodzi ono na drodze $s = at^2/2$, czyli na odcinku 20 cm.

W opisany tu sposób atomy można oziębic jedynie do $240 \mu\text{K}$ w przypadku sodu lub do $125 \mu\text{K}$ w przypadku cezu. Zgodnie z równaniem (5) odpowiada to prędkościom równym odpowiednio 0,3 m/s i 0,1 m/s. Najnowsze techniki chłodzenia atomów pozwalają zejść do znacznie niższych temperatur.

Jaki jest skutek fizyczny tak niskiej temperatury lub raczej tak małej prędkości atomów? Otóż stają się one coraz bardziej „falowe”. Długość fali de Broglie’a wynosi

$$(7) \quad \lambda_{dB} = \frac{h}{mv},$$

zatem dla atomu sodu o prędkości $v = 600 \text{ m/s}$ mamy $\lambda_{dB} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ nm}$, a o prędkości 0,3 m/s długość fali de Broglie’a rośnie do około 60 nm. Jak wynika z równania (7), stosując lekkie atomy, na przykład hel, można również uzyskać dłuższą falę i wówczas nie ma potrzeby schładzania ich do tak skrajnie niskich temperatur. Dla atomów helu już przy $T = 83 \text{ K}$ długość fali de Broglie’a wynosi $\lambda_{dB} \approx 0,1 \text{ nm}$. Dzięki temu w interferometryce Younga zastosowanym do wiązki atomowej obserwuje się wyraźne prążki interferencyjne (rys. 2).

W optyce atomowej wykorzystuje się dwa zjawiska wywołane przez światło laserowe. Są to: ciśnienie światła i gradient natężenia pola elektrycznego fali elektromagnetycznej. Kolimacja, ogniskowanie i rozogniskowanie wiązki atomowej to po prostu wpływanie na wartość składowej poprzecznej prędkości atomów w wiązce i w tym celu można wykorzystać każdy z tych efektów.

Zjawisku całkowitego wewnętrznego odbicia towarzyszy częściowe przejście fali do ośrodka granicznego, przy czym fala ta zanika na odcinku bliskim połowie długości tej fali. Gdy silne światło laserowe ulega całkowitemu wewnętrznemu odbiciu w płycie kwarcowej graniczącej z próżnią, mamy do czynienia z bardzo dużym gradientem natężenia pola elektrycznego w próżni. Powstała dzięki temu siła działa na atomy i pozwala uzyskać efekt „zwierciadła” (rys. 1).

Czy światło jest żywiołem?

Jak widać, ujarzmienie światła doprowadziło do realizacji najbardziej fantastycznych zadań. W starożytnej filozofii wyróżniono cztery żywioły: ogień, wodę, powietrze i ziemię. Światła, oczywiście, nie brano w ogóle pod uwagę. Rodzi się pytanie, czy jest to żywioł i czy już jest groźny? Nie chcę tu mówić o broni laserowej, lecz o manipulowaniu za pomocą światła atomami, po których przyszła już kolej na większe cząsteczki, a nawet mikroorganizmy. Okazało się, że odpowiednio dobrana i wprowadzona do mikroskopu wiązka światła laserowego stanowi „pincetę optyczną”, za pomocą której biologzy manipulują obiektami, które znajdują się wewnątrz żywej komórki, bez uszkodzenia jej ścian. Gdy światło jest wykorzystywane, na przykład, do badania na poziomie molekularnym siły wytwarzanej przy skurczu mięśnia czy sprężystości cząsteczki DNA, możemy się tylko cieszyć. Jednak, gdy uczeni zaczynają nie tylko badać, ale także manipulować genami, pojawia się poważne zagrożenie, które usprawiedliwia nazwanie światła żywiołem, i to takim, który powinien być kontrolowany.



Rozwiązanie zadania M 667.

Z definicji ciągu x_n mamy

$$x_{n+1} + 9k = x_n + x_{n-1} + \dots + x_0 = \\ = x_n + x_n + 9m,$$

więc

$$x_{n+1} \equiv 2x_n \pmod{9},$$

$$x_{n+6} \equiv 2^6 x_n \equiv x_n \pmod{9},$$

$$\text{i } x_{n+6} = x_n.$$

Ciąg x_1, x_2, x_3, \dots jest więc okresowy.

Stąd $x_0, x_1, x_2, \dots = 1, 124875124, \dots =$

$= 1 \frac{125}{1001}$, co istotnie jest liczbą wymierną.



Rozwiązanie zadania M 668.

Przypuśćmy przeciwnie, że dany jest trójkąt prostokątny o bokach długości odpowiednio $p, p+2$ i $k \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$p^2 + (p+2)^2 = k^2,$$

czyli

$$2(p^2 + 2p + 2) = k^2.$$

Liczba w nawiasie jest nieparzysta, a więc kwadrat liczby k byłby podzielny przez 2, ale nie przez 4, co jest niemożliwe.

Sprostowanie

Komentarz do rysunku 4 naszego artykułu „Wędrowki” (*Delta* 11/1992) jest błędny. Mianowicie czworościan, którego wszystkie ściany mają jednakowe pola, ma jednakowe ściany, tzn. są one trójkątami przystającymi. Dziękujemy Panu Leszkowi Janowi Ciachowi za wskazanie tego błędu.

Przepraszamy

Małgorzata MIKOŁAJCZYK, Krzysztof OMILJANOWSKI

niezamierzenie wzbudzając wiarę w jej prawdziwość. (By oddać sprawiedliwość Wienerowi, powinienem wspomnieć, że inna popularna wersja tej historii dotyczy Edmunda Landaua: Landau tak dalece wątpił w istnienie Littlewooda, że wybrał się na specjalną wycieczkę do Wielkiej Brytanii, by zobaczyć go na własne oczy.) (...)

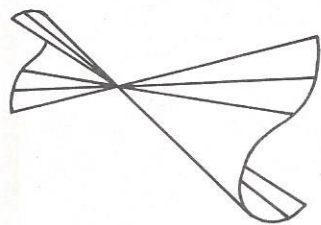
Studenci lubili płać Wienerowi figle. Codziennie o tej samej porze Wiener czytał gazetę w pewnym holu w M.I.T. (Massachusetts Institute of Technology – przyp. tłum.). Gdy siedział z rozpostartą przed sobą płachtą gazety, podkraadał się student i podpalał papier od dołu. Efekty były bardzo widowiskowe, a dowcip powtarzano wielokrotnie.

Czasami znów Wiener żartował sobie ze studentów, choć nie zawsze zdawał sobie sprawę, że to robi. Jeden ze studentów poprosił go kiedyś o rozwiązanie pewnego problemu. Wiener chwilę pomyślał i napisał odpowiedź. Student, któremu chodziło nie tyle o odpowiedź, co o wytłumaczenie metody jej uzyskania (było to rzeczywiście dawno temu!), powiedział „Ale czy nie ma jakiegoś innego sposobu?” Wiener pomyślał przez kolejną chwilę, uśmiechnął się, i rzekł „Tak, jest” – i napisał odpowiedź po raz drugi.

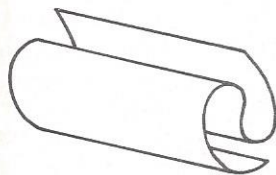
Moja ostatnia historia o Wienerze, w istocie ostatnia z moich historyjek, nie wydaje się być dobrze znana. Nawet zaprzędani wienerologowie twierdzą, że jest zbyt dobra, żeby mogła być prawdziwa. Sądzę, że poznałem ją jako doktorant w Princeton. Jak wspominałem, Wiener był bardzo sławną postacią na kampusie w M.I.T. Zatem, kiedy jeden z jego studentów spostrzegł go na pocztce, zaprzęgnął przedstawić się sławnemu profesorowi. Poza wszystkim – jak wielu studentów M.I.T. może się pochwalić, że ściskali dłoń Norberta Wienera? Jednakże student nie był pewny, w jaki sposób ma się do niego zbliżyć. Problem był tym poważniejszy, że Wiener przechadzał się w tę i z powrotem, głęboko zamyślony. Jeśliby student mu przerał, kto wie, jaki ważny pomysł mógłby zaginać? Mimo to student zdobył się na odwagę i zbliżył się do wielkiego człowieka. Powiedział „Dzień dobry, Profesorze Wiener.” Profesor podniósł wzrok, uderzył się w czoło i rzekł „To jest to: Wiener!”

Powierzchnie rozwijalne

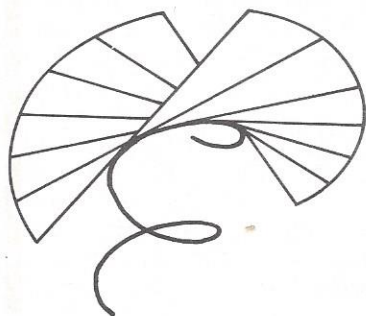
Jerzy KONARSKI



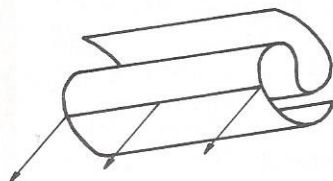
stożek



walec



powierzchnia stycznych do linii śrubowej



Wektory normalne wzdłuż tworzącej na walcu są równoległe.



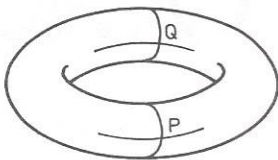
Paraboloida hiperboliczna; wektory normalne wzdłuż tworzącej nie są równoległe.

Każdy wie, jak z papieru zwinąć stożek lub walec. A jakie inne powierzchnie można w ten sposób otrzymać? Uściślijmy jeszcze, że będą nas interesować tylko powierzchnie gładkie, tzn. bez ostrych zagięć, dziobów, punktów, w których przecinają się same ze sobą itp. W szczególności rozpatrując stożki będziemy pomijać ich wierzchołki.

Matematyk stożkiem nazywa powierzchnię utworzoną przez wszystkie proste wychodzące z danego punktu i przecinające daną krzywą. Analogicznie, walec to powierzchnia utworzona przez proste o danym kierunku i przechodzące przez daną krzywą. Jest chyba dość oczywiste, że można z papieru otrzymać dowolny gładki stożek lub walec (pomijając oczywiście kłopoty związane z tym, że kartka papieru zawsze jest ograniczona, a stożek i walec nie), lub najpierw zwinąć papier w stożek, a od pewnego miejsca w walec. Ale czy da się uzyskać coś istotnie różnego od walca i stożka, no i od płaszczyzny, oczywiście? Otóż tak. Można otrzymać jeszcze jeden typ powierzchni, mianowicie tzw. powierzchnię stycznych. Jak sama nazwa wskazuje, jest to powierzchnia utworzona ze wszystkich prostych stycznych do danej gładkiej krzywej przestrzennej. Wyjściową krzywą należy jednak z powierzchni usunąć, ponieważ jej punkty tworzą na powierzchni ostrze, a nas interesują powierzchnie gładkie.

Powierzchnie, o których była mowa, nazywamy rozwijalnymi. Łatwo spostrzec, że wszystkie one są utworzone przez rodziny prostych, tzw. tworzących: stożek przez rodzinę prostych wychodzących z wierzchołka, walec przez proste o pewnym kierunku, a powierzchnia stycznych przez rodzinę prostych stycznych do danej krzywej. Matematyk powiedziałaby, że są prostokreślne. Rozpatrzmy kilka przykładów powierzchni prostokreślnych. Spośród powierzchni opisanych równaniami kwadratowymi prostokreślnymi są hiperboloida jednopowłokowa ($x^2 + y^2 - z^2 = 1$) powstała przez obrót hiperboli wokół jednej (której?) z jej osi symetrii oraz paraboloida hiperboliczna ($z = x^2 - y^2$), którą możemy sobie wyobrazić tak: na paraboli „z wąsami do góry” w każdym jej punkcie umieszczamy parabolę „z wąsami w dół”. Spróbujcie znaleźć tworzące. Kto ma kłopoty z wyobrażeniem sobie zbiorów opisanych powyższymi równaniami, niech pamięta, że podstawiając zamiast jednej zmiennej liczbę otrzymujemy równanie odpowiedniego przekroju danego zbioru płaszczyzną. Jeszcze innym przykładem jest powierzchnia śrubowa powstająca w wyniku obracania prostej wokół osi prostopadłej do tej prostej, połączonego z przesuwaniem wzdłuż tej osi.

Wiemy już, że wszystkie powierzchnie rozwijalne są prostokreślne. Okazuje się, że powierzchnie z powyższych przykładów nie są rozwijalne – nie uda się ich uzyskać z kartki papieru. Rodzi się pytanie, czy można jakoś (bez papieru) rozpoznać powierzchnie rozwijalne wśród wszystkich powierzchni prostokreślnych. Podamy nawet dwa sposoby. Pierwszy z nich będzie sformułowany w terminach wektorów normalnych. Otóż, wybierzmy sobie jedną z tworzących na powierzchni. W każdym z jej punktów zaczepiamy jednostkowy wektor normalny (tzn. prostopadły do powierzchni). Jeśli wszystkie te wektory są równoległe (różnią się tylko punktem zaczepienia) i jeśli tak jest dla każdej tworzącej z osobna, to powierzchnia jest rozwijalna (i na odwrót). Dla stożków i walców warunek ten jest, oczywiście, spełniony. Aby go sprawdzić dla powierzchni stycznych, trzeba wykonać nietrudne rachunki, które pominiemy. W każdym z trzech podanych wyżej przykładów łatwo jest zauważyć, że wektory normalne, zaczepione wzdłuż dowolnej tworzącej, nie są równoległe. Rozpatrzmy, na przykład, paraboloidę hiperboliczną o równaniu $z = x^2 - y^2$. Powierzchnia ta przypomina przełęcz w górach. Jedną z tworzących jest prosta o równaniach $z = 0, x = y$, czyli „ścieżka” prowadząca poziomo przez przełęcz z jednej doliny do drugiej. Jeżeli wzdłuż tej ścieżki wbijemy paliki prostopadłe do ziemi, to tylko palik wbity na przełęczy będzie pionowy, pozostałe będą odchylone od pionu o pewien kąt, zależny od odległości danego palika od przełęczy. Przy okazji warto zacytować następujące twierdzenie Michela Chasles'a: Jeśli powierzchnia jest prostokreślna, ale nie rozwijalna,

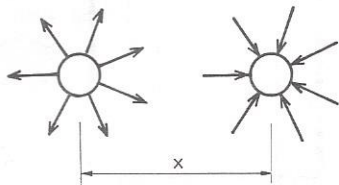


Torus – powierzchnia przypominająca dętkę. Zaznaczone przekroje mają największą i najmniejszą krzywiznę w punktach P i Q. Krzywizna Gaussa w punkcie P jest dodatnia, a w punkcie Q – ujemna.



Rozwiązanie zadania F 857.

Niech przez elektrody płynie prąd I , a napięcie między nimi wynosi U . Wtedy opór mierzony na elektrodach jest równy $R = \frac{U}{I}$.



Gęstość prądu j w dowolnym punkcie folii znajdujemy traktując przepływ prądu jako superpozycję prądu rozplywającego się symetrycznie z punktu A do nieskończoności i wpływającego symetrycznie z nieskończoności do punktu B (rys.)

$$j = \frac{I}{2\pi r_A d} + \frac{I}{2\pi r_B d}$$

gdzie r_A i r_B są odległościami dowolnego punktu folii od A i od B. Z prawa Ohma znajdujemy natężenie pola elektrycznego $E = \sigma j$. Całkując wzdłuż AB znajdujemy napięcie U

$$U = \int E dl = \int_{r_0}^{x-r_0} \left(\frac{Iq}{2\pi l d} + \frac{Iq}{2\pi (x-l) d} \right) dl = \frac{qI}{\pi d} \ln \frac{x-r_0}{r_0}$$

Stąd $R = \frac{q}{\pi d} \ln \frac{x-r_0}{r_0}$. Jeżeli zastosowalibyśmy elektrody punktowe, otrzymalibyśmy nieskończony opór folii, co uniemożliwiłoby wyznaczenie d . Przekształcając wzór otrzymujemy $d = \frac{q}{\pi R} \ln \frac{x-r_0}{r_0}$.

to na każdej tworzącej istnieje tzw. punkt centralny i ma on tę własność, że gdy oddalamy się od niego wzdłuż tej tworzącej, to wektor normalny odchyła się o kąt, którego tangens jest proporcjonalny do odległości od punktu centralnego. Reasumując, na powierzchni rozwijalnej wektory normalne nie zmieniają się wzdłuż tworzących, podczas gdy na powierzchni nierozwijalnej wektory normalne „zachowują się” tak, jak na paraboloidzie hiperbolicznej – na całej drodze wzdłuż tworzącej odchylają się o kąt półpełny (między skrajnymi położeniami granicznymi). Widać, że właśnie ta ostatnia sytuacja ma miejsce w pozostałych dwóch przykładach podanych wyżej.

Drugi ze sposobów wyróżnienia powierzchni rozwijalnych wśród prostokreślnych będzie wykorzystywał pojęcie krzywizny Gaussa. Aby ją zdefiniować, wybierzmy pewien punkt P na powierzchni (niekoniecznie nawet prostokreślnej) i rozpatrzmy wszystkie możliwe przekroje tej powierzchni płaszczyznami prostopadłymi (do płaszczyzny stycznej w tym punkcie) i przechodzącymi przez wybrany punkt P. Przekroje te będą krzywymi płaskimi przechodzącymi przez P. Dla każdej z nich wśród okręgów stycznych do niej w P istnieje jeden taki, który ją najlepiej przybliża w okolicy punktu P; nazywamy go okręgiem ściśle stycznym w punkcie P. Odwrotność promienia okręgu ściśle stycznego nazywamy krzywizną danej krzywej w punkcie P. Im mniejszy promień okręgu przybliżającego krzywą, tym większa jej krzywizna – to chyba zgadza się z naszą intuicją. Następnie wybieramy w punkcie P jednostkowy wektor normalny (jeden z dwóch, bo powierzchnia w R^3 – przynajmniej lokalnie – ma dwie strony). Jeśli nasz okrąg leży po przeciwnej stronie powierzchni niż wybrany wektor, to krzywiznę opatrujemy znakiem minus. Dociekliwy Czytelnik zauważył pewnie, że przekrój może być np. linią prostą lub mieć punkt przegięcia w P. W takich przypadkach określamy krzywiznę jako równą 0. Okazuje się, że albo krzywizny wszystkich przekrojów normalnych w P są równe, albo istnieją dwa przekroje mające największą i najmniejszą krzywiznę i że są one do siebie prostopadłe. Kierunki styczne do powierzchni, wyznaczające te przekroje, nazywają się kierunkami głównymi w punkcie P, a odpowiednie krzywizny – krzywiznami głównymi (w przypadku, gdy wszystkie przekroje mają równe krzywizny, wszystkie kierunki są główne). Teraz możemy już podać definicję krzywizny Gaussa naszej powierzchni w punkcie P. Krzywizna ta jest iloczynem krzywizn głównych w tym punkcie. Zauważmy, że jasną interpretację ma jej znak. Mianowicie, dodatnią krzywiznę Gaussa mają powierzchnie wypukłe w jedną stronę (podobne do pagórka lub dołka), ujemną – powierzchnie podobne do siodła (lub przełęcz), wreszcie zerową – powierzchnie mające wszystkie przekroje o zerowej krzywiznie lub jeden o krzywiznie zerowej, a pozostałe o krzywiznie tego samego znaku. Przypomnijmy sobie nasze trzy przykłady. Rzut oka na szkic wystarczy, żeby stwierdzić, iż wszystkie wyglądają jak siodła (lokalnie) i wobec tego mają ujemną krzywiznę Gaussa w każdym punkcie. Można udowodnić, że wszystkie powierzchnie prostokreślne mają ujemną lub zerową krzywiznę Gaussa w każdym swoim punkcie. A co z powierzchniami rozwijalnymi? Okazuje się, że mają one wszystkie zerową krzywiznę. Dla płaszczyzny, stożka i walca Czytelnik chyba bez trudu sprawdzi to sam, ale dla powierzchni stycznych trzeba by trochę porachować. My jednak postąpimy inaczej. Wykorzystamy pewne twierdzenie udowodnione przez Gaussa. Mówi ono, że krzywizna Gaussa dowolnej powierzchni nie zmienia się przy zginaniu (bez rozciągania). Wynika z tego, że skoro krzywizna Gaussa płaszczyzny jest zerowa, to zerowa jest też krzywizna każdej powierzchni rozwijalnej. Gauss był tak dumny ze wspomnianego twierdzenia, że nazwał je *theorema egregium*, czyli twierdzenie chwalebne. Zwróćmy uwagę, że wcale nie jest ono oczywiste – krzywizna Gaussa jest określona za pomocą przekrojów normalnych, które zmieniają się przy zginaniach! Wracając do powierzchni rozwijalnych, można wykazać, że są one jedynymi powierzchniami o zerowej krzywiznie. Otrzymaliśmy więc drugi warunek charakteryzujący powierzchnie rozwijalne wśród prostokreślnych: zerowanie się krzywizny Gaussa.

Na zakończenie warto może wspomnieć o pewnej własności sumy krzywizn głównych, czyli o tzw. krzywiznie średniej. Mianowicie, zerową krzywiznę średnią mają tzw. powierzchnie minimalne, których modelami w przyrodzie są bańki mydlane rozpięte na (niekoniecznie płaskim) konturze z drutu.

Zabawka

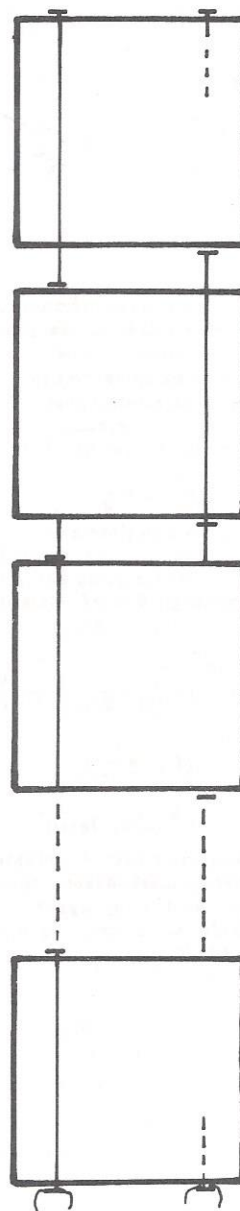
W związku z tym, że czterdziestopięcioletni okres pokoju w Europie raczej definitywnie się zakończył, warto może rozważyć sprawę, co może robić matematyk podczas wojny. Jedną z możliwych odpowiedzi jest – produkować zabawki i handlować nimi. Tak w czasie okupacji hitlerowskiej uczynił wielki topolog i geometra, Karol Borsuk (1905 – 1982).

Zapewne starsi z Czytelników pamiętają, że ołówki, którymi się przed, w czasie i zaraz po wojnie posługiwali, miały nadruk *Majewski*. W latach pięćdziesiątych został on zastąpiony nadrukiem *Pruszków*. Otóż, siostra profesora Borsuka wyszła za mąż za p. Majewskiego. W czasie okupacji Niemcy przejrzerli starannie fabrykę ołówków i stwierdzili, że z tego, czym ona dysponuje, wartościowy dla niemieckiego potencjału wojennego jest jedynie grafit – resztę pozostawili rodzinie Majewskich. Jak się jednak łatwo zorientować, produkowanie ołówków bez grafitu jest (nawet w warunkach wojennych) zajęciem mało lukratywnym. Duże zapasy dobrego drewna mogły się jednak stać dobrym surowcem na zabawki.

Kazimierz Kuratowski (1896 – 1980) – także wielki topolog – pisze w *Notatkach do autobiografii*, że zabawki, które produkował i którymi handlował Karol Borsuk, były jego *własnego pomysłu*. Miałem okazję, jako dziecko, bawić się jedną z zabawek Karola Borsuka. Można ją było kupić w czasie okupacji, jak też i kilka jeszcze lat po wojnie. Później zniknęła z rynku, by pojawić się raz jeszcze pod koniec lat sześćdziesiątych. Była jednak wtedy „ulepszona” przez nowego producenta i, w wyniku tego, bardzo słabo działała.



Rys. 1



Rys. 2

Zrobiłem wtedy tę zabawkę sam – ta działała znakomicie. Proponuję więc Czytelnikom wykonanie tej zabawki dla uciechy własnej, dzieci bądź wnuków (jak komu będzie pasowało).

Podstawowy element tej zabawki to kwadratowe kafelki, a więc (mówiąc uczenie) prostopadłościany o wymiarach (mniej więcej) $60 \times 60 \times 5$ mm. W pierwowzorze były one drewniane, mogą być ze sklejki – warunki, jakie muszą spełniać, są dwa: nie powinny być zbyt lekkie i w ich najwęższą ścianę powinniśmy umieć wbić gwoździki. Potrzebne więc są i gwoździki w liczbie (przynajmniej) 4 razy większej od liczby kafelków – tych powinno być 8 – 12 (w zależności od gustu). Potrzebna jest też mocna, raczej nierozciągliwa nić.

Niść (a raczej nici, bo mają być dwie) powinna być przepleciona przez kafelki, jak na rysunku. To znaczy na rysunku 1 jest narysowane pół jednej nici – nazwijmy tę połowę lewą. Druga połowa jest przepleciona symetrycznie – rysunek 2 (widok z przodu) pokazuje lewą połowę jednej i prawą połowę drugiej. Lewe połowy każdej z nici przybijamy do górnych wąskich ścian każdego z kafelków, prawe – do dolnych wąskich ścian każdego z kafelków. Na dole najniższego z kafelków lewą i prawą część nici wiążemy. Oczywiście, na nici należy w odpowiednim miejscu zawiązać węzłki i przybijać nitkę przez te węzłki. Rysunek 3 pokazuje, jak to powinno ostatecznie wyglądać. Odległości między wiszącymi na nici kafelkami nie powinny przekraczać 3 mm – na rysunku są one przesadnie duże.

Jak się tym bawić? Ujmujemy w dłoń najwyższy kafelek tak, by nić przybita do tego kafełka z obu stron znajdowała się po stronie zwróconej do wnętrza dłoni. Pozostałe kafełki wiszą sobie spokojnie. Jeśli jednak obrócimy dłoń na zewnątrz (nie wypuszczając go z ręki), to z naszej dłoni... wypadnie nowy kafelek, uderzy w ten poniżej, ten też opadnie na następny itd. aż do końca. Gdy obrócimy dłoń z powrotem, to znów wypadnie z niej nowy kafelek. Jeśli jeszcze dolny koniec girlandy kafełków nie będzie widoczny (np. będzie zasłaniał go stół), to każdy z widzów naszego eksperymentu będzie miał nieodparte wrażenie, że rzeczywiście w naszej dłoni powstają coraz to nowe kafełki.

Życzę powodzenia w (niełatwej) budowie zabawki i przyjemnej zabawy. Nie życzę natomiast matematykom, by – tak jak Karol Borsuk – z konieczności zajęli się wymyślaniem, produkcją i sprzedażą zabawek. Mogą to przecież robić i bez zewnętrznego przymusu.



Rys. 3

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS

Jak jest w środku Słońca?

Tomasz KWAST

Energia Słońca (i innych gwiazd zresztą też) produkowana jest w wyniku reakcji termojądrowych toczących się w jego wnętrzu. Spodziewamy się zatem, że jego wnętrze musi być „dość” gorące, ma to być powoli, lecz nieprzerwanie działająca bomba wodorowa. Czy możemy domyśleć się, jakie warunki panują we wnętrzu takiej przeciętnej – jak Słońce – gwiazdy? Spróbujmy. Potrzebne będą przy tym dane: dla Słońca – jego masa $M = 1,989 \times 10^{30}$ kg i promień $R = 6,960 \times 10^8$ m, oraz stałe fizyczne – stała grawitacji $G = 6,672 \times 10^{-11}$ Nm²/kg², stała Boltzmanna $k = 1,381 \times 10^{-23}$ J/K i jednostka masy atomowej $H = 1,661 \times 10^{-27}$ kg.

Na początek spróbujmy oszacować ciśnienie w środku Słońca. Masa słupa słonecznej materii o podstawie s , sięgającego od powierzchni do środka gwiazdy, wynosi $m = \bar{\rho}sR$, gdzie $\bar{\rho} = M / \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$ jest średnią gęstością Słońca. Ciężar słupa będzie w przybliżeniu taki, jak masy m skupionej w jednym punkcie i położonej – powiedzmy – w odległości $\frac{R}{2}$ od środka Słońca, wyniesie więc

$GMm / \left(\frac{R}{2}\right)^2$. W stabilnej gwiazdzie ciężar tego słupa równoważony jest

przez parcie gazu u jego podstawy równe $P_c s = GM\bar{\rho}sR / \left(\frac{R}{2}\right)^2$, gdzie P_c jest szukanym przez nas ciśnieniem centralnym. Stąd

$$P_c \approx \frac{4GM\bar{\rho}}{R} \approx \frac{GM^2}{R^4} \approx 10^{15} \text{ Pa.}$$

Nietrudno zgadnąć, że temperaturę centralną T_c Słońca można teraz znaleźć z równania stanu gazu doskonałego, czyli z prawa Clapeyrona

$$P_c = \frac{k}{\mu H} \rho_c T_c,$$

gdzie μ jest średnią masą atomową cząstki gazu. Nie znamy wprawdzie centralnej gęstości ρ_c Słońca, ale dość rozsądnie wydaje się brzmieć następujące rozumowanie. Wiadomo, że centralna gęstość Ziemi jest ponad trzykrotnie większa od średniej. Gaz jest bardziej ściśliwy od budulca Ziemi i Słońce jest znacznie od niej masywniejsze, przyjmijmy więc, że gęstość centralna Słońca jest – na oko – sto razy większa od średniej, która wynosi $\bar{\rho} = 1,4 \times 10^3$ kg/m³. Pozostaje problem średniej masy atomowej. Jeżeli materia słoneczną jest wodór, to można przypuszczać, że w wysokiej temperaturze wnętrza Słońca jest całkowicie zjonizowany. Jednostkowa masa atomowa H rozkłada się wtedy między dwie cząstki, proton i elektron. Na jedną cząstkę wypada więc średnia masa $H/2$, czyli $\mu = \frac{1}{2}$. Podstawivszy znane i wydedukowane wartości liczbowe do prawa Clapeyrona dostajemy

$$T_c \approx \frac{GHM}{50kR} \approx 0,5 \times 10^6 \text{ K.}$$

Dokładne obliczenia modelowe dają wynik wyższy o co najmniej rząd wielkości. Nie ma się czemu dziwić, nasze rozważania były doprawdy bardzo uproszczone. Mimo wszystko możemy do pewnego stopnia uzasadnić, dlaczego nasz wynik nie jest całkiem poprawny. Po pierwsze, skoro gęstość centralna Słońca tak bardzo przewyższa średnią, to i masę m słupa materii słonecznej powinno się umieścić bliżej środka gwiazdy. Dostalibyśmy wtedy wyższe ciśnienie centralne. Po drugie, średnia masa atomowa gazu w centrum Słońca jest z pewnością większa od $1/2$, gdyż w znacznej ilości występuje tam produkt reakcji termojądrowych, czyli hel. Uwzględnivszy oba te czynniki dostalibyśmy temperaturę centralną bardziej zbliżoną do rzeczywistej. Tak czy inaczej, we wnętrzu Słońca mamy miliony stopni, co wraz z oszacowanym tu ciśnieniem i gęstością stanowi zespół warunków zapewniających wydajność reakcji termojądrowych zgodną z obserwacjami.



Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

M 667. Tworzymy liczbę $x = x_0, x_1 x_2 x_3 \dots$ w zapisie dziesiętnym w następujący sposób: $x_0 = 1$, x_n zaś jest resztą z dzielenia $x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1}$ przez 9. Udowodnić, że x jest liczbą wymierną. Rozwiązanie na str. 5

M 668. Dane są dwie bliźniacze (tj. różniące się o 2) liczby pierwsze. Udowodnić, że nie mogą one być długościami przyprostokątnych trójkąta prostokątnego o wszystkich bokach długości całkowitej. Rozwiązanie na str. 5

M 669. Znaleźć przynajmniej jedną funkcję $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ spełniającą tożsamość $f(f(n)) = n^2$, $n \in \mathbb{N}$.
Rozwiązanie na str. 13

Redaguje Jarosław KULPA

F 357. Do nieskończonej, cienkiej folii przewodzącej przyłożono dwie elektrody o równych promieniach r_0 . Opór zmierzony na elektrodach wynosi R , odległość zaś między elektrodami równa jest x . Obliczyć grubość d folii, jeżeli wiadomo, że jej opór właściwy wynosi ρ . Czy możliwy byłby pomiar grubości folii przy zastosowaniu punktowych elektrod? Rozwiązanie na str. 7

F 358. Cewka została nawinięta na jednolity, metalowy rdzeń. Przez cewkę przepływa prąd $I = I_0 \sin \omega t$ wysokiej częstotliwości. Ile razy wzrosną straty energii na skutek prądów wirowych płynących w rdzeniu, jeżeli częstotliwość prądu zwiększymy czterokrotnie?

Prądy wysokiej częstotliwości płyną na powierzchni metalu do głębokości rzędu $a = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu\omega}}$, gdzie ρ oznacza opór właściwy materiału, μ zaś jest przenikalnością magnetyczną ośrodka. Rozwiązanie na str. 12



Odcinek dla poczty		Odcinek dla posiadacza rachunku		Potwierdzenie dla wpłacającego	
Zł	Zł	Zł	Zł	Zł	Zł
słownie złotych		słownie złotych		słownie złotych	
Dokładny adres	Dokładny adres	Dokładny adres	Dokładny adres	Dokładny adres	Dokładny adres
na r-k	na r-k	na r-k	na r-k	na r-k	na r-k
Dokładna nazwa	Dokładna nazwa	Dokładna nazwa	Dokładna nazwa	Dokładna nazwa	Dokładna nazwa
nazwa banku	nazwa banku	nazwa banku	nazwa banku	nazwa banku	nazwa banku
Nr r-ku	Nr r-ku	Nr r-ku	Nr r-ku	Nr r-ku	Nr r-ku
stempel	stempel	stempel	stempel	stempel	stempel
podpis przyjmującego	podpis przyjmującego	podpis przyjmującego	podpis przyjmującego	podpis przyjmującego	podpis przyjmującego
	Pobrano opłatę		Pobrano opłatę		Pobrano opłatę
	zł		zł		zł



Patrz w niebo

Rozwiązanie zadania F 358. Przez rdzeń przepływa zmienny strumień

$$\text{magnetyczny } \phi = BS = \frac{\mu n I}{l} \pi r^2,$$

gdzie l jest długością cewki, n – liczbą zwojów, a r promieniem cewki. Jak wynika z prawa Faradaya, na rdzeniu pojawia się siła elektromotoryczna

$$\mathcal{E} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\pi r^2 \mu n \omega I_0 \cos \omega t}{l}. \text{ Moc}$$

wydzielana na rdzeniu jest równa

$$P = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \frac{\pi^2 r^4 \mu^2 n^2 I_0^2 \cos^2 \omega t}{l^2 R} \cdot \omega^2,$$

gdzie R jest oporem, jaki stawia cewka prądom wirowym. Średnia wartość

$$\cos^2 \omega t \text{ wynosi } 1/2. \text{ Opór } R \sim \frac{S_1 \cdot 2\pi r}{l a},$$

gdzie S_1 jest powierzchnią, przez którą przepływa prąd wirowy. W przypadku prądów wysokiej częstotliwości

$$S_1 = l \cdot a, \text{ stąd } R \sim \frac{2\pi r}{a} \sim \omega^{1/2},$$

albowiem $a = \sqrt{\frac{2\sigma}{\mu\omega}}$. Zatem średnia

moc, jaka wydzielana się na rdzeniu $P \sim \omega^{3/2}$. Zwiększając czterokrotnie częstotliwość mamy, ze względu na prądy wirowe, ośmiokrotnie większe straty.

Większość meteorów rozbłyskujących na nocnym niebie zostawia za sobą ślad właściwie idealnie prostoliniowy. W zasadzie można by przypuszczać, że skoro taka bryłka leci w polu grawitacyjnym Ziemi, to musi poruszać się po torze zakrzywionym. Jednak jej prędkość względem Ziemi (dziesiątki kilometrów na sekundę) i krótki czas trwania zjawiska (najwyżej sekundy) wykluczają możliwość zauważenia grawitacyjnego zakrzywienia toru. A jednak niekiedy ślad meteoru bywa wyraźnie wygięty i nie jest to złudzeniem, gdyż takie ślady zostały sfotografowane.

Na podstawie dawnych kronik okazało się, że doniesienia o wygiętych śladach meteorowych sięgają zaledwie połowy XVIII w., choć o samych meteorach są zapisy nawet w starożytnych kronikach chińskich i japońskich. Nie wiadomo obecnie, dlaczego tak jest. Z kolei przykładowo między rokiem 1848 a 1881 widziano 133 meteory, z których 60% miało ślady wygięte, a 40% faliste. Ocenia się, że razem stanowią one co najmniej 1/200 wszystkich zjawisk meteorowych.

Co więc może powodować znaczące wygięcie toru ciała meteorowego? Wszystko wskazuje na to, że przyczyną jest efekt Magnusa (Heinrich G. Magnus – XIX-wieczny fizyk niemiecki). Polega on na tym, że wirujące ciało lecąc przez atmosferę zgęszcza przed sobą powietrze i odrzuca je w bok w kierunku rotacji. W rezultacie pojawia się siła odchylająca tor ciała od toru, jaki opisałoby nie wirując. Efekt ten jest doskonale znany artylerzystom oraz piłkarzom i tenisistom i ich kibicom – bardzo często widzimy, że podkrecona piłka wyraźnie skręca w powietrzu.

To by tłumaczyło regularne wygięcie śladów – a co z sinusoidalnymi?

Najprawdopodobniej ślady widoczne jako sinusoidalne są w istocie liniami śrubowymi powstałymi, gdy asymetryczne ciało meteorowe wiruje i zarazem wykonuje precesję. Takie śrubowe tory piłek też podobno widuje się na boiskach. Zjawisko wydaje się tak naturalne, że wręcz można się zastanawiać, dlaczego tak mało meteorów zostawia krzywoliniowe ślady. Ogromnej wartości byłyby jednocześnie obserwacje wygiętego śladu z dwóch punktów obserwacyjnych. Dostałoby się w efekcie stereoskopowy obraz fragmentu toru ciała meteorowego. Jak dotąd, takich obserwacji nie ma.

Tomasz KWAST

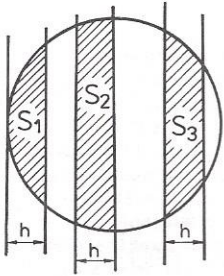
Prenumerata „Deltę”
za okres:

Prenumerata „Deltę”
za okres:

Prenumerata „Deltę”
za okres:



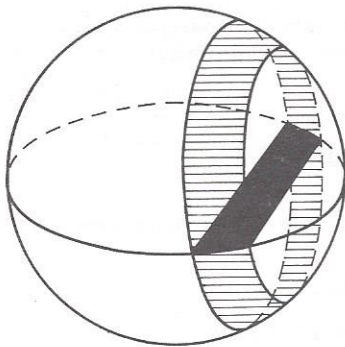
Pokryć paskami



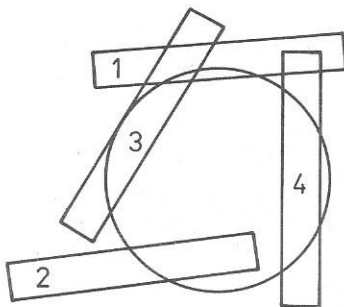
Rys. 2.

$$S_1 = S_2 = S_3.$$

To jest widok z boku – równoległy do płaszczyzn. S_1 jest przypadkiem granicznym – pierścień zdegenerował się do czapeczki.



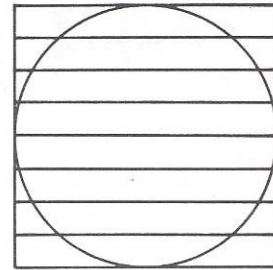
Rys. 3



Rys. 4. Odrzucamy te paski, które przykrywają koło w sposób „nieoszczędny” (możemy to, oczywiście, zrobić). Na rysunku paski 1 i 2 są złe, a paski 3 i 4 – dobre

W *Delcie* 8/1992 został ogłoszony otwarty konkurs na rozwiązanie następującego zadania:

Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną. Za pomocą n pasków o wymiarach $\frac{1}{n} \times 1$ możemy bez trudu pokryć koło o średnicy 1 (rys. 1). Wydaje się, że nie można pokryć tego koła za pomocą mniejszej liczby pasków o podanych wymiarach. Czy można to w prosty sposób udowodnić?



Rys. 1

Poprawnych rozwiązań, jak dotąd (tekst ten był pisany w styczniu 1993) nie otrzymaliśmy. Powyższe zadanie zostało sformułowane i rozwiązane jeszcze przed wojną przez polskiego matematyka Zenona Waraszkiewicza. Oryginalne rozwiązanie było jednak trudne. Poniżej przytaczamy niezwykle eleganckie rozwiązanie podane przez Samuela Eilenberga (Jeden z najbardziej znanych na świecie matematyków. W latach 30. wyemigrował z Polski do USA i tam obecnie pracuje.).

Zacznijmy od sformułowania twierdzenia Archimedesesa.

Przetnijmy sferę o średnicy 1 dwiema równoległymi płaszczyznami oddalonymi o h . Wówczas powierzchnia wyciętego pierścienia zależy tylko od h , a nie zależy od miejsca, w którym wycięliśmy pierścień (rys. 2).

Dowód tego twierdzenia można znaleźć np. w *Delcie* 9/1991 (str. 9). Archimedes korzystał z tego twierdzenia przy wyprowadzaniu wzoru na powierzchnię sfery.

Ale co ono ma wspólnego z naszym zadaniem?

Koło o średnicy 1 jest kołem wielkim pewnej sfery o średnicy 1. Pokłómy na koło jeden z pasków o wymiarach $\frac{1}{n} \times 1$ (rys. 3). Prowadząc przez dłuższe boki tego paska płaszczyzny prostopadłe do koła wytniemy ze sfery pierścien. Powierzchnia tego pierścienia nie zależy od położenia paska. Ponieważ koło możemy przykryć za pomocą n pasków (rys. 1), więc prowadzi to do pokrycia sfery za pomocą n pierścieni o równych powierzchniach (dwa z nich są zdegenerowane, tzn. są czapeczkami). Stąd powierzchnia takiego pierścienia (czapeczki) jest równa $\frac{s}{n}$, gdzie s oznacza powierzchnię sfery. Przypuśćmy teraz, że potrafimy pokryć koło za pomocą k pasków. Mamy wykazać, że $k \geq n$. Otóż, pokrycie koła k paskami prowadzi do pokrycia sfery za pomocą k pierścieni i czapeczek. Ponieważ powierzchnia pojedynczego pierścienia (czapeczki) jest równa $\frac{s}{n}$, a razem pokrywają one całą sferę, więc $\frac{s}{n} \cdot k \geq s$, skąd $k \geq n$, c.d.o.

Piotr HAJŁASZ



Rozwiązanie zadania M 669. Utwórzmy ciąg $n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = 5, n_4 = 6, \dots$, zawierający w porządku wzrastania wszystkie liczby naturalne nie będące kwadratami liczb naturalnych. Niech

$$n_{k,m} = (n_k)^{2^m} \text{ dla } k = 1, 2, \dots \text{ oraz } m = 0, 1, \dots$$

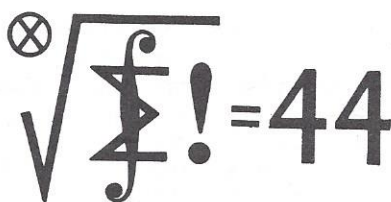
Oczywiście, dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ można jednoznacznie dobrać k i m tak, aby $n = n_{k,m}$. Naszą funkcję definiujemy tak:

$$f(1) = 1,$$

$$f(n_{k,m}) = \begin{cases} n_{k+1,m}, & \text{gdy } k \text{ jest nieparzyste,} \\ n_{k-1,m+1}, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Łatwo teraz zauważyć, że warunki zadania są spełnione.

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 1993

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 243 ($WT=2,00$) i 244 ($WT=2,78$)
z numeru 8/1992

Mikołaj Rotkiewicz - Warszawa	47,40
Marek Prauza - Poraj	45,98
Marcin Kasperski - Warszawa	38,26
Jerzy Janowicz - Bolesławiec	37,80

Witamy w Klubie 44 pana Mikołaja Rotkiewicza oraz gratulujemy dwunastemu Weteranowi matematycznego Klubu 44, którym został pan Marek Prauza.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1993.

Zadania z matematyki nr 261, 262

Redaguje Marcin E. KUCZMA

261. Wyznaczyć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych x, n spełniające równanie
$$x^n + (x+1)^n = (x+2)^n.$$

262. Czy istnieje na płaszczyźnie zbiór ograniczony wypukły, o niepustym wnętrzu, który można podzielić trzema liniami prostymi na siedem części o równych polach? (Podać przykład lub wykazać, że nie ma takiego zbioru.)

Zadanie 262 zaproponował pan Janusz Olszewski z Suwałk.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/1993

Przypominamy treść zadań:

253. Dane są liczby całkowite $a \geq 1, k \geq 0, m \geq 3$, przy czym m jest dzielnikiem liczby $a^{2^k} + 1$. Dowieść, że $m > 2^{k+1}$.

254. Wyznaczyć wszystkie funkcje ciągłe $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ spełniające równanie

$$f(x+y) = f(x)f(y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \quad \text{dla } x, y \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Wykażemy, że

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1.$$

Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem liczb różnych od zera, zbieżnym do zera. Na mocy równania (1) ($x = x_n, y = 1$) mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(x_n + 1)}{g(1)} = \frac{g(1)}{g(1)} = 1,$$

co dowodzi słuszności związku (3). Zatem nadając funkcji g wartość $g(0) = 1$ przedłużamy ją do funkcji ciągłej na całym zbiorze liczb rzeczywistych.

Tak rozszerzona funkcja g spełnia równanie (1) także dla par liczb x, y , z których jedna (lub obie) równa się zeru. Pozostaje rozważyć sytuację, gdy $x, y \neq 0$, ale $x + y = 0$. Wówczas

$$g(x)g(y) = g(x)g(-x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g\left(x + \frac{1}{n}\right)g(-x) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} g\left(\left(x + \frac{1}{n}\right) + (-x)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} g\left(\frac{1}{n}\right) = g(0) = g(x+y).$$

Tak więc

$$g(x+y) = g(x)g(y) \quad \text{dla wszystkich } x, y \in \mathbf{R}.$$

Zatem funkcja ciągła $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dana wzorem $h(x) = \ln g(x)$ (określona poprawnie, dzięki nierówności (2)) spełnia równanie

$$h(x+y) = h(x) + h(y) \quad \text{dla } x, y \in \mathbf{R}.$$

Wiadomo, że każda taka funkcja ma postać $h(x) = cx$, gdzie c jest pewną stałą. W takim razie $g(x) = e^{cx} = a^x$ (gdzie $a = e^c > 0$), bądź też $g(x)$ równa się tożsamościowo zeru (przypadek rozpatrzony wcześniej).

Wobec tego funkcja f ma postać

$$f(x) = 0 \quad \text{lub} \quad f(x) = xa^x$$

(w zbiorze $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, więc też - przez ciągłość - w zbiorze \mathbf{R}); a może być dowolną stałą dodatnią. Sprawdzenie, że każda funkcja takiej postaci spełnia wyjściowe równanie, jest natychmiastowe.

253. Liczby a oraz m są względnie pierwsze. Stąd w szczególności wynika, że reszta z dzielenia każdej z liczb

$$a, a^2, a^3, a^4, a^5, \dots, a^{2^{k+1}}$$

przez m jest różna od zera. Przypuśćmy, wbrew tezie, że $m \leq 2^{k+1}$. W wypisanym wyżej ciągu znajdują się wówczas co najmniej dwie liczby dające jednakowe reszty przy dzieleniu przez m :

$$\exists r, s: 1 \leq r < s \leq 2^{k+1}, \quad a^r \equiv a^s \pmod{m}.$$

Skoro $\text{NWD}(a, m) = 1$, wnosimy stąd, że $a^{s-r} \equiv 1 \pmod{m}$. Zapiszmy różnicę $s - r$ w postaci $s - r = 2^\alpha q$, $0 \leq \alpha \leq k$, q nieparzyste. Skoro, z założenia, $a^{2^k} \equiv -1 \pmod{m}$, zatem

$$1 = 1^{2^{k-\alpha}} \equiv (a^{s-r})^{2^{k-\alpha}} = (a^{2^\alpha q})^{2^{k-\alpha}} = \\ = a^{2^k q} = (a^{2^k})^q \equiv (-1)^q = -1 \pmod{m},$$

wbrew temu, że $m \geq 3$. Sprzeczność kończy dowód.

254. Załóżmy, że funkcja f spełnia podane równanie funkcyjne i przyjmijmy

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \quad \text{dla } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Równanie przybiera postać

$$(x+y)g(x+y) = xg(x) \cdot yg(y) \cdot \frac{x+y}{xy} \quad \text{dla } x, y, x+y \in \mathbf{R} \setminus \{0\},$$

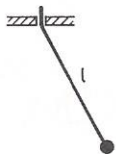
czyli

$$(1) \quad g(x+y) = g(x)g(y) \quad \text{dla } x, y, x+y \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Przypuśćmy, że $g(x_0) = 0$ dla pewnego $x_0 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Kładąc w (1) $x = x_0, y = t - x_0$ (gdzie t jest dowolną liczbą różną od 0 i od x_0) otrzymujemy $g(t) = 0$; z dowolności wyboru t wnosimy, że g jest funkcją tożsamościowo równą zeru w $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Przyjmijmy teraz, że $g(x) \neq 0$ dla wszystkich $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Kładąc w (1) $x = y = t/2$ (gdzie t jest dowolną liczbą różną od 0) dostajemy

$$(2) \quad g(t) = (g(t/2))^2 > 0 \quad \text{dla } t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$



Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 143 (WT=3,80) i 144 (WT=2,40)
z numeru 9/1992

Tomasz Wietecha - Tarnów 28,92
Przemysław Gworys - Częstochowa 28,13
Andrzej Nowogrodzki - Chocianów 21,02

Zadania z fizyki nr 159, 160

Redaguje Jerzy B. BROJAN

159. Małe ciało zawieszono na nici, która może być wciągana przez mały otworek (rys.) i wprowadzono w ruch drgający o amplitudzie kątowej α_0 ; swobodna długość nici wynosiła wtedy l_0 . Następnie wciągnięto nić bardzo powolnym ruchem jednostajnym tak, że długość swobodna zmalała do l_1 . Jak wyraża się przez dane wielkości końcowa amplituda kątowa α_1 ? Założyć, że obie amplitudy kątowe są małe.

160. W okolicach niezelektryfikowanych używa się czasem lodówek działających dzięki spalaniu ropy (lub innego paliwa). Ocenic ilość ropy, którą trzeba spalić, aby zamrozić 1 kg wody. Założyć, że lodówka jest idealną maszyną cieplną. Dane: temperatura otoczenia (czyli także temperatura początkowa wody) 25°C , ciepło właściwe wody $4200 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$, ciepło topnienia lodu $3,3 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$, ciepło spalania ropy 45 MJ/kg , temperatura spalania 1200°C .

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/1993

Przypominamy treść zadań:

- 151.** Czy można zwiększyć amplitudę drgań w obwodzie LC:
a) zbliżając i oddalając w odpowiednich momentach okładki kondensatora?
b) wsuwając między okładki i wysuwając płytkę z dielektryka?
c) zbliżając i oddalając zwoje cewki?
d) wsuwając do wnętrza cewki i wysuwając magnes stały?
W jakich momentach trzeba wykonywać opisane wyżej ruchy, aby wzrost amplitudy był największy?

- 152.** Przednia i tylna oś motocykla są odległe o $d = 1,4 \text{ m}$, promień kół wynosi $r = 0,4 \text{ m}$, a współczynnik tarcia opon o jezdnię jest równy $f = 1$. Środek masy motocykla wraz z motocyklistą znajduje się w jednakowej odległości od obu osi na wysokości $h = 0,8 \text{ m}$ nad ziemią. Obliczyć minimalną drogę hamowania motocykla jadącego z prędkością początkową $v = 60 \text{ km/h}$, jeśli
a) używać tylko tylnego hamulca,
b) używać tylko przedniego hamulca,
c) używać obu hamulców.
Przedyskutować wyniki.

151. Zwiększenie amplitudy drgań wymaga dostarczenia energii, które w tym przypadku następuje na drodze pracy mechanicznej. W naładowanym kondensatorze okładki przyciągają się wzajemnie, a dielektryk jest wciągany do środka (inaczej: dla ustalonego ładunku energia kondensatora rośnie przy oddaleniu okładek lub usunięciu dielektryka), zatem oddalając okładki lub wysuwając płytkę należy w tych momentach, gdy ładunek osiąga wartość maksymalną, zbliżać zaś wtedy, gdy ładunek przechodzi przez zero. W cewce zwoje przyciągają się (według prawa oddziaływania prądów), należy więc je oddalać wtedy, gdy prąd jest maksymalny, a zbliżać, gdy przechodzi przez zero. Oddziaływanie między magnesem a cewką może być zarówno przyciągające, jak i odpychające, czyli oba ruchy należy wykonywać przy maksymalnym prądzie: zbliżać przy odpychaniu (jednoimiennie bieguny naprzeciw siebie), a oddalać przy przyciąganiu (naprzeciw bieguny różnoimiennie). Odnotujmy, że tylko metodą d) można wzbudzić drgania, jeśli początkowo nie występowały w ogóle.

152. Oznaczmy siły nacisku przedniego i tylnego koła na jezdnię przez N_1 i N_2 , a odpowiednie siły tarcia przez T_1 i T_2 , mamy równania

$$(1) \quad N_1 + N_2 = mg,$$

$$(2) \quad T_1 + T_2 = ma,$$

$$(3) \quad (T_1 + T_2)h = (N_1 - N_2)\frac{d}{2},$$

przy czym ostatni wzór wynika stąd, że motocykl jako całość nie obraca się (suma momentów sił względem środka masy równa się zero). Zauważmy, że promień kół nie ma dla rozwiązania żadnego znaczenia. W przypadku a) podstawiamy $T_1 = 0$, $T_2 = N_2 f$ i rozwiązując układ równań znajdujemy opóźnienie motocykla hamującego tylnym hamulcem

$$a = \frac{fg}{2(1 + fh/d)} = 3,12 \text{ m/s}^2.$$

Gdy posługujemy się przednim hamulcem, podstawienie $T_2 = 0$, $T_1 = N_1 f$ daje wynik

$$a = \frac{fg}{2(1 - fh/d)},$$

przy użyciu zaś obu hamulców otrzymujemy $a = fg$. Należy jednak pamiętać, że użycie przedniego hamulca grozi przewróceniem się motocykla. Formalnie rzecz biorąc, ostatnie dwa wyniki są poprawne tylko wtedy, gdy wyliczona z równań wartość N_2 jest nieujemna. Przegląd dokonywanych przekształceń prowadzi do wniosku, że z warunku $N_2 \geq 0$ wynika $a \leq g\frac{d}{2h}$; dalej widzimy, że obliczone wyżej wartości przyspieszenia w przypadkach b) i c) są prawidłowe tylko wtedy, gdy $\frac{d}{2} \geq fh$. Podstawiając dane liczbowe przekonujemy się, że warunek ten nie

jest spełniony, zatem dla obu przypadków b) i c) $a_{max} = g\frac{d}{2h} = 8,58 \text{ m/s}^2$. Widać też, jaka jest bezpieczna metoda hamowania: ponieważ do równań nie wchodzi siły T_1 i T_2 oddzielnie, lecz tylko ich suma, należy więc nacisnąć maksymalnie tylny hamulec, przedni zaś ścisnąć tylko tyle, aby opóźnienie wzrosło do granicznej wartości $g\frac{d}{2h}$.

Drogę hamowania obliczamy ze wzoru $s = v^2/2a$ - przy hamowaniu tylnym hamulcem wynosi ona $44,5 \text{ m}$, a w pozostałych przypadkach $16,2 \text{ m}$.



U W A G A
NOWA FORMA STUDIÓW
NA UNIWERSYTECIE WARSZAWSKIM



MIĘDZYWYDZIAŁOWE
INDYWIDUALNE STUDIA
MATEMATYCZNO-PRZYRODNICZE

W roku akademickim 1993/94
Uniwersytet Warszawski kontynuuje
nową formę studiów
pod nazwą
Międzywydziałowe Indywidualne
Studia Matematyczno-Przyrodnicze (MISMP).

Każdy ze studentów będzie mieć opiekuna, z którym ustali
własny, w pełni indywidualny program studiów.

ZASADY REKRUTACJI

Konkursowy egzamin wstępny odbędzie się w terminie wcześniejszym niż zwykła rekrutacja. Mogą do niego przystąpić kandydaci ubiegający się jednocześnie o przyjęcie na studia w normalnym trybie na dowolną uczelnię. Egzamin będzie mieć formę testu; kandydat wybierze dwa spośród pięciu testów: z matematyki, fizyki, chemii, biologii i geografii.

ZGŁOSZENIA z podaniem przedmiotów egzaminacyjnych należy przesyłać pod adresem:

Pełnomocnik Rektora UW d.s. MISMP

prof. dr hab. Andrzej Hennel

Instytut Fizyki Doświadczalnej UW

ul. Hoża 69, 00-681 Warszawa

tel. 628-30-31 w. 136

Osoby zainteresowane Międzywydziałowymi Studiami Indywidualnymi Matematyczno-Przyrodniczymi (MSIMP) w Uniwersytecie Warszawskim mogą otrzymać informator po przesłaniu zgłoszenia pod podany wyżej adres.

Jeszcze o ciągłych bijekcjach

Przypomnijmy: homeomorfizm to taka ciągła bijekcja, że funkcja do niej odwrotna też jest ciągła. O niehomeomorficznych zbiorach, które można przekształcać wzajemnie na siebie za pomocą bijekcji ciągłych, pisaliśmy w *EPSILONACH* nr 8 i 9. Ale można zadać jeszcze inne pytanie związane z tymi zagadnieniami: czy istnieje zbiór X i ciągła bijekcja $f: X \rightarrow X$, która nie jest homeomorfizmem?

Odpowiedni zbiór i funkcję można znaleźć, bazując na konstrukcji „par niehomeomorficznych”. Zbiór określamy następująco:

$$X = \dots(-2, -1) \cup \{0\} \cup (1, 2) \cup \{3\} \cup (4, 5) \cup \{6\} \cup \dots$$



Funkcję zaś definiujemy tak: punkt $\{3\}$ i przedział $(4, 5)$ przesuwamy i „doklejamy” do przedziału $(1, 2)$; za pomocą „ściśnięcia” otrzymamy znów przedział $(1, 2)$. Wszystkie liczby zbioru X większe niż 5 przesuwamy o 3 w lewo. Funkcja ta (jak ją zapisać wzorem?) będzie bijekcją ciągłą X na X , ale nie homeomorfizmem (przy funkcji odwrotnej przedział $(1, 2)$ byłby rozerwany).

Nasuwa się kolejne pytanie. Skorzystaliśmy w sposób istotny z tego, że nasz zbiór miał nieskończenie wiele „kawalków”. Czy gdyby zbiór był „jednokawalkowy” (matematycy nazywają takie zbiory spójnymi), odpowiedź byłaby inna?

* NADCHODZI SESJA EGZAMINACYJNA * NADCHODZI SESJA EGZAMINACYJNA * NADCHODZI SESJA EGZAMINACYJNA *

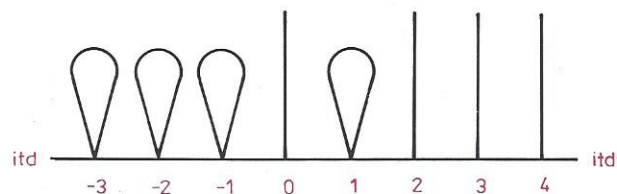
Podczas egzaminu student przedstawia dowód twierdzenia. W pewnym momencie „zacina się” i mimo kilku prób nie może sobie przypomnieć, jak dowód poprowadzić dalej.

W tej sytuacji profesor decyduje się mu pomóc, jednakże po chwili zadumy stwierdza:

– Wie pan co? Dobrze, że to pan ten egzamin zdaje, a nie ja.

Okazuje się, że i tu można podać kontrprzykład.

Do prostej na płaszczyźnie dodajmy „pętelki” i odcinki (bez górnego końca), zaczepiając je w punktach o współrzędnych całkowitych (por. rys.).



Funkcję określamy „zawijając” odcinki zaczepione w 0 i 3 w pętelki i przesuwając całą figurę o 2 w lewo.

Tu zbiór był już spójny, ale nie był domknięty (ze względu na końce pionowych odcinków) ani ograniczony. Co by się zatem stało, gdybyśmy narzucili i te dwa warunki?

Jeżeli myślimy o podzbiorach płaszczyzny, to dodanie jednego z nich nie przeszkadza w istnieniu kontrprzykładu – możemy zamienić odcinki w półproste lub „ściśnić i zagęścić” figurę tak, by ją zawrzeć w pewnym kole. Gdy jednak dodamy oba warunki jednocześnie, sytuacja jest inna!

Bardzo ważnym pojęciem matematyki jest zwartość. *Jaką cudowną własnością jest zwartość* – tak zaczyna Klaus Jänich rozdział I.8 swego podręcznika *Topologia* (polski przekład: PWN 1991). W przypadkach podzbiorów \mathbb{R}^n (a więc i prostej, płaszczyzny, przestrzeni) zbiór jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony. Klasyczne twierdzenie (i wcale nie trudne w dowodzie) mówi natomiast, że bijekcja ciągła określona na zbiorze zwartym jest homeomorfizmem. Dodajmy, że spójność nie odgrywa tu roli.

Zauważmy przy okazji, jak może przydać się znajomość rozmaitych twierdzeń. Znając wspomniany wynik od razu wiadomo, gdzie ewentualnego kontrprzykładu na pewno szukać nie należy...

Krzysztof CIESIELSKI

(Obie historie są autentyczne.)

ZOSTAŃ STUDENTEM WYDZIAŁU FIZYKI NA UNIWERSYTECIE WARSZAWSKIM

Na Wydziale można studiować na kierunkach:
fizyka, astronomia lub Nauczycielskie Kolegium Fizyki.

NKF umożliwia ukończenie studiów

3-letnich
z prawem nauczania
fizyki i matematyki
(w szkołach podstawowych)

5-letnich
dających dyplom magistra
oraz prawo nauczania
matematyki i fizyki

Na kierunku fizyka po trzech latach studiów można wybierać specjalizację doświadczalną, teoretyczną lub komputerową w następujących dziedzinach:

- fizyka ciała stałego
- fizyka medyczna
- fizyka jądra atomowego
- fizyka cząstek elementarnych
- kosmologia i teoria względności
- biofizyka
- optyka
- geofizyka

Warunki przyjęcia:

fizyka, astronomia – egzamin wstępny obowiązuje tylko dla osób ze średnią niższą niż dobra z ocen z fizyki i matematyki na świadectwie maturalnym w roku 1993.

NKF – rozmowa kwalifikacyjna.

Od roku akademickiego 1992/93 oferowane są zajęcia na różnych poziomach trudności w zależności od predyspozycji i przygotowania studentów.

Już od pierwszego roku można studiować systemem **indywidualnym** i brać udział w aktualnie prowadzonych badaniach naukowych.

Współczesne badania fizyczne wymagają szerokich kontaktów międzynarodowych oraz szybkiego przepływu i analizy informacji.

Studując fizykę poznasz również techniki komputerowe stosowane w eksperymencie fizycznym oraz metody numeryczne. Staniesz się ekspertem w dziedzinie najbardziej wyrafinowanych zastosowań komputerowych.

Cała historia fizyki Uniwersytetu Warszawskiego, w szczególności fizyki doświadczalnej, wiązała się stale z budynkiem przy ulicy Hożej 69 i w ten sposób „Hoża” stała się symbolem fizyki warszawskiej. Mówiąc po prostu „Hoża” miało się zawsze na myśli ośrodek powołany do życia przez Stefana Pieńkowskiego w 1921 roku.

Jerzy PNIEWSKI

*Wszystkich dociekliwych serdecznie zapraszam na przygodę z fizyką.
Miło mi będzie powitać Was w gronie studentów naszego Wydziału.*

Krzysztof ERNST
Dziekan Wydziału Fizyki