

deja

$h=6.63 \cdot 10^{-34}$ $\pi=3.141593$

CENA ZŁ 8000,-

NR 4 (227) 1993

PL ISSN 0137-9005 | NR IND 35 550 X

POPULARNY MIESIĘCZNIK MATEMATYCZNO-FIZYCZNO-ASTRONOMICZNY



nr 533/01-15 N:3141593...



UWAGA !!!

Nową formę prenumeraty „Deltę”
proponuje firma AMOS,
warunki poniżej.

SPIS TREŚCI

NUMERU 4(227)

Różne różności,

które przygotowali:

Piotr Hajłasz,

Robert Hajłasz,

Jan Kalinowski,

Marek Kordos,

Tomasz Kwast,

Waldemar Pompe,

Edmund Puczyłowski,

Paweł Strzelecki,

a ponadto:

Mała Delta

str. 8

Zadania

str.11

Klub 44

str.14

Epsilon

str.16

W następnym numerze:

Światło – piąty żywioł

Okladkę zaprojektował
Bernard BADZIOCH

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego
i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichocki
Roman Duda
Jan A. Gaj
Tomasz Hofmokl – wiceprzewodniczący
Tadeusz Jarzębowski
Marcin Kubiak
Andrzej Makowski
Andrzej Pelczar
Zbigniew Płochocki
Zdzisław Pogoda
Konrad Rudnicki
Zbigniew Semadeni
Grzegorz Sitarski
Józef I. Smak
Kazimierz Stępień
Mieczysław Subotowicz
Andrzej Szymacha
Andrzej Woszczyk
Wojciech Żakowski – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

Krzysztof Biesaga
Piotr Hajłasz
Jan Kalinowski – z-ca red. nac.
Krystyna Kordos – sekr. red.
Marek Kordos – red. nac.
Tomasz Kwast
Stanisław Mrówczyński
Anna Rudnik
Joanna Udalska

Adres Redakcji:

ul. Smyczkowa 5/7
02-678 Warszawa
tel. 43-02-43 wewn. 21
DELTA@PLEARN.BITNET

Wydrukowano w Zakładach Graficznych
w Warszawie, ul. Srebrna 16
Skład systemem T_pXwykonała redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY w AMOS-ie

Od stycznia br. prenumeratę „Deltę” prowadzi również firma AMOS,
01-506 Warszawa, ul. Szenwalda 1 (tel. 39-17-52). Wpłaty przyjmowane są
non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. Koszt trzech
numerów wynosi 24 000,-zł (rocznika'93 – 96 000,-zł). Przy wpłacie prosimy
zaznaczyć okres prenumeraty (co najmniej 3 miesiące).

Prenumerata zagraniczna trzech numerów wynosi 60 000,-zł. W przypadku życzenia
dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! AMOS dostarcza „Deltę” pod wskazany adres nie pobierając dodatkowej
opłaty. Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS
funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Blankiet pocztowy na prenumeratę „Deltę” w AMOS-ie zamieszczamy na str. 9/10.

Konto AMOS-u: PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-186

WARUNKI PRENUMERATY w RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na III kwartał 1993 r. wynosi 24 000,- zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
 - na teren kraju
 - jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób,
 - na zagranicę
 - „Ruch” S.A. Oddział Warszawa, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia dostawy pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni pokrywa prenumerator.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
 - na kraj i zagranicę – do 20 XI na I kwartał roku następnego
do 20 II na II kwartał
do 20 V na III kwartał
do 20 VIII na IV kwartał.

Cena 1 egzemplarza 8 000,- zł

Trójwymiarowe twierdzenie Pitagorasa

Nawet najbardziej krnąbrni i odporni na wiedzę uczniowie znają twierdzenie Pitagorasa (tak przynajmniej było w zamierzonych czasach, gdy autor niniejszego tekściku kończył szkołę podstawową) mówiące o tym, że w trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych równa jest kwadratowi długości przeciwprostokątnej. Opowiemy krótko o ładnym uogólnieniu tego twierdzenia.

Wyobraźmy sobie czworościan $ABCS$ o tej własności, że kąty ASC , CSB oraz BSA są proste (chciałoby się rzec: *czworościan prostokątny*). Udowodnimy, że dla takiego czworościanu

$$(1) \quad S_{\Delta ABC}^2 = S_{\Delta ASC}^2 + S_{\Delta BSC}^2 + S_{\Delta ASB}^2$$

($S_{\Delta ABC}^2$ oznacza tu kwadrat pola trójkąta ABC , itp.).

Niech w będzie wysokością opuszczoną z wierzchołka S na ścianę ABC (rys).

Popatrzmy na trójkąty ASC i ABC ; mają one wspólną podstawę AC , zatem stosunek k ich pól jest równy stosunkowi wysokości opuszczonych na bok AC . Zauważmy, że wysokość trójkąta ASC otrzymujemy rzutując wysokość trójkąta ABC prostopadłe na płaszczyznę ASC ; stąd wynika, że $k = \cos \beta$, gdzie β jest kątem pomiędzy płaszczyznami ABC i ASC , albo – co na jedno wychodzi – pomiędzy wysokością w i prostą BS (patrz margines). Stąd $S_{\Delta ASC}^2 = \cos^2 \beta S_{\Delta ABC}^2$.

Podobnie możemy wyznaczyć stosunki kwadratów pól trójkątów BSC i ASB do kwadratu pola trójkąta ABC ; są one odpowiednio równe $\cos^2 \alpha$ i $\cos^2 \gamma$, gdzie α i γ to kąty pomiędzy wysokością w a prostymi SA i SC . Stąd już tylko krok do wzoru

$$(2) \quad (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) \cdot S_{\Delta ABC}^2 = S_{\Delta BSC}^2 + S_{\Delta ASC}^2 + S_{\Delta ASB}^2$$

Wystarczy jeszcze tylko zauważyć, że suma kwadratów cosinusów w nawiasie po lewej stronie (2) jest równa 1 – wynika to natychmiast z twierdzenia Pitagorasa. (Czytelnik sam zechce zauważyć, w jaki sposób; nie sprawi mu to dużych trudności, jeśli kiedykolwiek obliczał długość przekątnej prostopadłościanu mając dane długości krawędzi. Tutaj rolę owej przekątnej spełnia w .)

Chętni mogą teraz bez kłopotu wypisać analogiczne twierdzenia dla czterech, pięciu, sześciu, ... wymiarów.

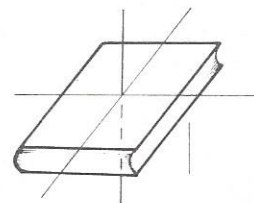
Zapamiętałym rachmistrzom polecamy dowód wzoru (1) z wykorzystaniem wzoru Herona na pole trójkąta.

P. S.

Wirująca książka

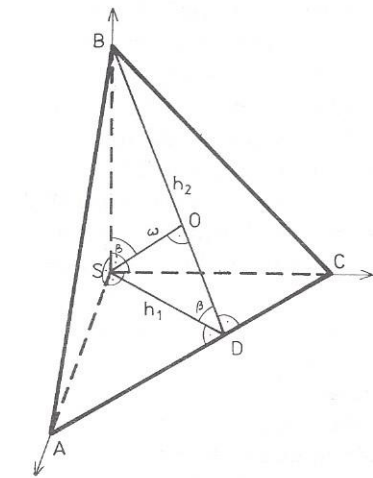
Weź książkę, najlepiej w sztywnej okładce, i nałóż na nią gumkę, aby się nie otwierała. Podrzuc ją teraz do góry wprawiając w ruch obrotowy.

Można ją wprawić w obrót wokół trzech osi zaznaczonych na rysunku. Przekonasz się, że obrót wokół dwóch z tych trzech osi jest stabilny, natomiast wokół trzeciej – nie. Książka, oprócz obrotu, wykonuje jeszcze wibracje. Dlaczego?

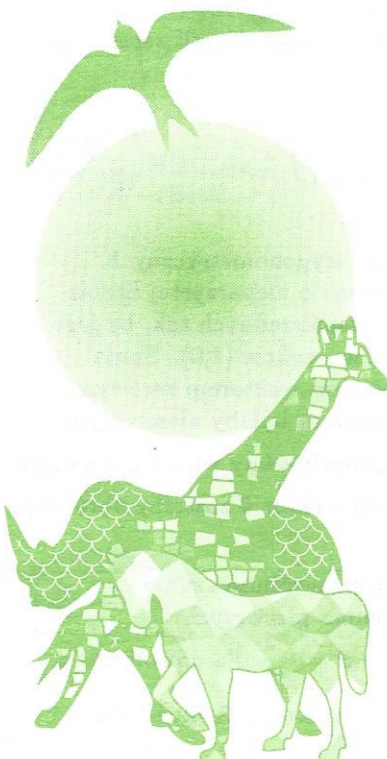


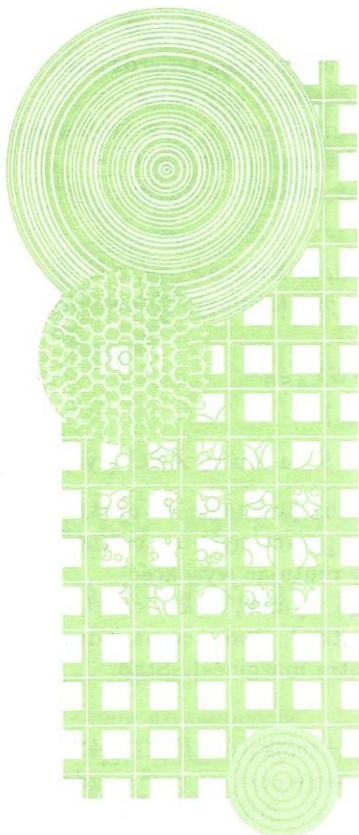
Żeby zjawisko wytłumaczyć w pełni, należy zastosować równanie ruchu bryły sztywnej. Jakościowo można to wytłumaczyć odwołując się do intuicji. Moment bezwładności książki względem dwóch osi jest minimalny i maksymalny; obroty wokół tych osi są stabilne ze względu na małe zaburzenia. Moment bezwładności względem trzeciej osi ma wartość pośrednią i ruch nie jest stabilny. Niewielkie zaburzenia powodują wibracje książki.

J. K.



Łatwo zauważyć, że wysokości h_1 i h_2 schodzą się w jednym punkcie, oraz że wysokość w „trafia” w h_2 (dlaczego?). Trójkąt BSD jest prostokątny, więc $\angle BSO = \angle SDB = \beta$.





Korona słoneczna

Dawne obserwacje spektroskopowe korony słonecznej wykazały obecność w niej jakiegoś pierwiastka nie znanego z żadnego laboratorium ziemskiego. Nazwano go koronium. Z biegiem czasu okazało się jednak, że nie jest to nowy pierwiastek, tylko zwyczajne żelazo znajdujące się jednak w niezwykłych warunkach. Otóż przy wysokim rozrzedzeniu pierwiastki mogą dawać linie widmowe odpowiadające przejściom energetycznym niemożliwym do zrealizowania w warunkach normalnych. W tych bowiem warunkach, które uważamy za normalne, atomy dość często zderzają się i pewne ich poziomy energetyczne są wskutek tych nieustannych zaburzeń praktycznie nieosiągalne. Stają się osiągalne dopiero właśnie, gdy atomy między zderzeniami mają „chwile wytchnienia” – a tak jest już w koronie słonecznej. Powstające w taki sposób linie widmowe nazywane są wzbronionymi. Tak więc owe podejrzane linie okazały się wzbronionymi liniami atomów żelaza, ale – i tu znów niespodzianka: żelaza wielokrotnie zjonizowanego. Odkrycie to stwarzało, jak widzimy, kolejną zagadkę: skąd w koronie słonecznej tak wysoka temperatura zdolna spowodować oderwanie się od atomów żelaza kilkunastu elektronów – a potrzeba do tego okrągi licząc miliona stopni. Zdawałoby się, że wysoko nad powierzchnią Słońca powinno być w każdym razie nie goręcej niż na jego powierzchni. Na szczęście i to zostało wyjaśnione. Mianowicie nieustannie wzburzona powierzchnia Słońca jest źródłem fal dźwiękowych. Fale te rozchodzą się w górę w ośrodku o malejącej gęstości, ich amplituda musi zatem rosnąć tak, że w końcu przekształcają się w fale uderzeniowe przekazując swoją energię rzadkiemu gazowi koronalnemu. Grzanie to jest, jak się okazuje, tak silne, że umożliwia utrzymywanie się w koronie słonecznej temperatury rzędu miliona stopni.

T. K.

Zawsze tyle samo

Udowodnić, że

$$\begin{aligned} & \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) = \\ & = \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{9}\right). \end{aligned}$$

Zadanie to wydaje się okropne, ale można je szybko rozwiązać, jeśli zacznie się od czegoś znacznie mocniejszego: udowodnić, że wartość wyrażenia

$$S = \cos\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{2n+1}\right) + \dots + \cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right) + \dots + \cos\left(\frac{2n\pi}{2n+1}\right)$$

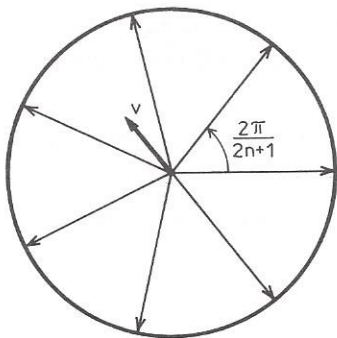
nie zależy od n .

Chcąc to udowodnić nie będziemy sięgali do wzorów trygonometrycznych. Możemy natomiast sięgnąć do ... wielokąta foremnego o nieparzystej liczbie wierzchołków. Umieścimy taki wielokąt w układzie współrzędnych tak, by jego środek był w punkcie $(0,0)$, a jeden z wierzchołków w punkcie $(1,0)$. Suma wektorów łączących $(0,0)$ z wierzchołkami wielokąta jest wektorem zerowym. Gdyby bowiem tak nie było (rys. 1 – tu $n = 3$) i suma ta byłaby niezerowym wektorem \vec{v} , to obracając wielokąt o kąt $\frac{2\pi}{2n+1}$ nałożylibyśmy wielokąt na niego samego; suma nie powinna się zmienić, a tymczasem wektor \vec{v} zostałby obrócony. Obrót nie zmienia tylko wektora zerowego.

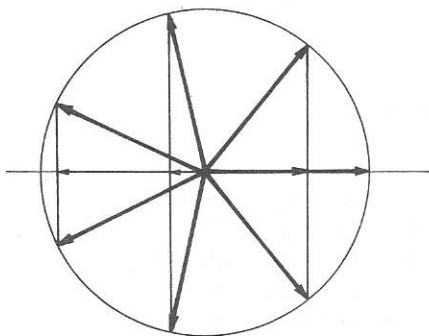
Jeśli suma wektorów jest wektorem zerowym, to w szczególności suma ich pierwszych współrzędnych jest równa zeru. A suma pierwszych współrzędnych (rys. 2) to $1 + 2 \cdot S$, skąd wynika, że $S = -\frac{1}{2}$ dla dowolnego n .

Ciekawe, że analogiczna suma sinusów nie ma stałej wartości. A może dla niektórych n otrzymuje się jednakowe wyniki?

M. K.



Rys. 1



Rys. 2

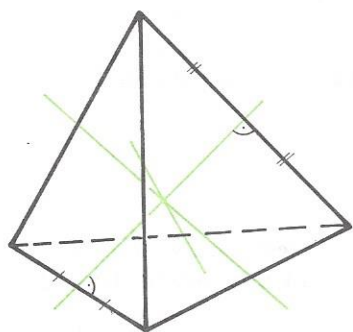
Plamy słoneczne

Obecność plam na Słońcu jest powszechnie znana. Jakoś nikogo jednak nie dziwi, że są one czarne. Jeżeli przecież cała powierzchnia Słońca ma temperaturę zbliżoną do 6000 K, to jakim cudem mogą na niej istnieć tak małe obszary zimne? Otóż wcale nie są one zimne. Plamy to miejsca, gdzie z głębi Słońca wydostają się na zewnątrz tzw. rurki magnetyczne, czyli wiązki linii pola magnetycznego. W plamach jest więc stosunkowo silne pole magnetyczne, które przeszkadza plazmie swobodnie poruszać się. Tymczasem pod powierzchnią Słońca zachodzą silne ruchy konwekcyjne materii (czego widowym przejawem jest granulacja), gdyż tam właśnie konwekcja jest najważniejszym mechanizmem przenoszącym energię. Pole magnetyczne hamując te ruchy utrudnia zarazem wypływ energii z wnętrza Słońca. Skoro więc przez plamę przepływa mniej energii niż obok (na jednostkę powierzchni, oczywiście), to jest w niej po prostu chłodniej, ale zaledwie o około 1500 K. Jasność powierzchniowa zależy jednak aż od czwartej potęgi temperatury, plama więc ma jasność powierzchniową stanowiącą $(4500/6000)^4 \approx 0,3$ jasności czystej powierzchni Słońca. A to już wystarcza, by wskutek kontrastu z tarczą Słońca sama plama wydawała się czarna.

T. K.

Osie symetrii

Czy czworościan może mieć oś symetrii? Prawie każdy o to zapytany próbuje rysować oś przechodzącą przez wierzchołek i błyskawicznie odpowiada, że oczywiście nie może. Tymczasem czworościan foremny ma aż trzy osie symetrii.

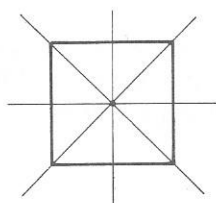


Są nimi proste przechodzące przez środki przeciwległych krawędzi (rys. na marginesie). A oto, dlaczego są one osiami symetrii: Każda taka prosta jest symetralną przeciwległych krawędzi. Wobec tego przy symetrii względem takiej prostej wierzchołki przechodzą na wierzchołki, a stąd cały czworościan przechodzi na siebie.

Na rysunku widać, że osie symetrii przecinają się w jednym punkcie. Może jest to niedokładność rysunku? Nie. Rzeczywiście, przecinają się. Zresztą nie jest to takie dziwne. Czworościan ten jest, bądź co bądź, foremny. A może jest to jakaś ogólniejsza własność? Istotnie. Zachodzi następujący fakt:

Osie symetrii dowolnego wielościanu przecinają się w jednym punkcie (oczywiście, o ile wielościan ma przynajmniej dwie osie symetrii).

Dowód. Ponieważ przy symetrii względem osi wielościan przechodzi na siebie, więc środek ciężkości pozostanie w tym samym miejscu, nie ruszy się. Oznacza to, że leży on na osi symetrii, na każdej osi symetrii. To zaś oznacza, że środek ciężkości jest punktem przecięcia wszystkich osi symetrii.



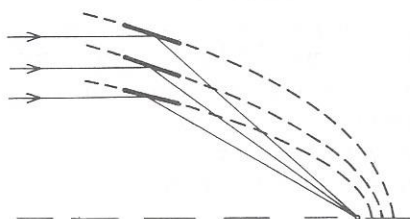
Kwadrat ma 5 osi symetrii. Piąta jest prostopadła do kartki.

Na zakończenie odnotujmy jeszcze jeden ciekawy fakt. Otóż, jeśli wielościan (lub wielokąt) ma przynajmniej jedną oś symetrii, to ma ich nieparzystą liczbę.

P. H.

Teleskop rentgenowski

Od lat obserwują niebo satelity pracujące w zakresie rentgenowskim. Sporządzają one m.in. obrazy fragmentów nieba w tym zakresie. A jak ogniskuje się promienie X, skoro przecież one przenikają przez rozliczne substancje łatwiej niż światło przez szkło? Otóż, wykorzystuje się przy tym fakt, że promieniowanie rentgenowskie padając niemal stycznie na metaliczną powierzchnię odbija się od niej, a nie wnika w głąb. Obiektywem rentgenowskim może być wobec tego tradycyjna paraboloidalna powierzchnia metaliczna, z tym tylko, że jej centralne części są zbędne. Do wykorzystania jest wąski pierścień tej paraboloidy, odległy od osi optycznej, na który równoległa wiązka promieniowania padałaby niemal stycznie. Taki pierścień ma dużo miejsca w centrum, można tam zatem umieścić drugi pierścień wycięty z innej paraboloidy, ale tak dobranej, by z tą pierwszą miała wspólne ognisko itd. W sumie obiektyw rentgenowski składa się z wielu współosiowych paraboloidalnych pierścieni metalicznych o wspólnym ognisku i przypomina wylot wielkiego wentylatora.



T. K.

Phobos

Phobos, pierwszy satelita Marsa, obiega planetę po orbicie w przybliżeniu kołowej o promieniu 9378 km. Znając masę Marsa ($6,42 \times 10^{23}$ kg) łatwo obliczyć, że okres obiegu Phobosa wynosi około 7 godz. 40 min, a więc jest krótszy od okresu obrotu Marsa. Dla stojącego na planecie obserwatora Phobos będzie więc wschodził na zachodzie i zachodził na wschodzie. Jest to jedyny taki przypadek w Układzie Słonecznym.

T. K.

Geometria na kuli

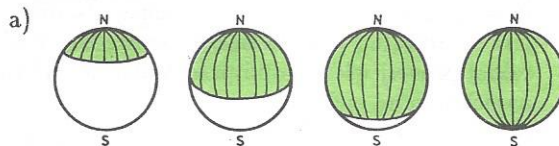
Potraktujmy kulę ziemską jako idealnie gładką kulę o obwodzie 40 000 km. Niech N oznacza biegun północny, S zaś południowy.

Jak będą wyglądać narysowane na powierzchni tej kuli

- koło o środku N i promieniu 20 000 km,
- okrąg o środku N i promieniu 20 000 km,
- odcinek o końcach N i S ,
- środek odcinka o końcach N i S ?

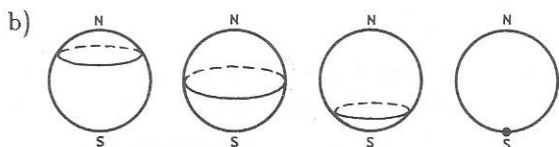
Uwaga. Koło – to brzeg wraz z wnętrzem. Okrąg – to tylko brzeg. Odcinek \overline{NS} składa się ze wszystkich takich punktów P powierzchni kuli, że $NP + PS = NS$; punkt P leży w środku odcinka \overline{NS} , jeśli ponadto $PN = PS$.

Odpowiedzi



To jest odpowiedź, czyli cała powierzchnia kuli.

Koła o coraz większych promieniach.



To jest odpowiedź, czyli okrąg składa się tylko z jednego punktu S .

Okręgi o coraz większych promieniach.

- c) cała powierzchnia kuli.



- d) równik.



R. H.

Hamowanie satelity

Jak zmienia się prędkość sztucznego satelity lekko hamowanego przez bardzo wysokie warstwy ziemskiej atmosfery? Pytanie może wyglądać na niepoważne, dopóki nie uświadomimy sobie, że opór powietrza nie jest jedyną siłą działającą na satelitę. Na satelitę działa wszak stale siła grawitacji. Gdyby nie hamowanie satelita obiegałby Ziemię po kole. Wskutek jednak lekkiego wyhamowania satelita musi nieco obniżyć orbitę, a na niższej orbicie musi poruszać się szybciej – tak wynika z praw Keplera! Oczywiście, rozumowanie to jest słuszne, jeżeli hamowanie jest rzeczywiście słabe, tzn. dopóki satelita porusza się w przybliżeniu zgodnie z prawami Keplera.

T. K.



Rozwiązanie zadania M 664.

Zauważmy, że jeśli wszystkie trzy wierzchołki trójkąta leżą we wnętrzu pewnego prostokąta, to pole trójkąta jest mniejsze od połowy pola prostokąta. (Wystarczy w tym celu rozciąć trójkąt na dwa mniejsze prostą równoległą do jednego z boków prostokąta; wspólna podstawa dwóch mniejszych trójkątów nie przekracza jednego z boków prostokąta, suma zaś wysokości nie przekracza drugiego boku.)

Podzielmy kwadrat na cztery rozłączne kwadraty, każdy o polu $1/4$. Wewnątrz przynajmniej jednego z nich znajdują się trzy spośród danych dziewięciu punktów (zasada szufladkowa Dirichleta!); zgodnie z poprzednią uwagą trójkąt o wierzchołkach w tych punktach ma pole mniejsze od $1/2 \cdot 1/4 = 1/8$.



Rozwiązanie zadania M 665. Zbiór n -elementowy $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ma 2^{n-1} różnych podzbiorów zawierających element a_1 ; każde dwa z nich mają, oczywiście, niepuste przecięcie. Zatem $k \geq 2^{n-1}$.

Ustawmy teraz wszystkie podzbiory zbioru A w 2^{n-1} par biorąc do każdej pary podzbiór i i jego uzupełnienie. Jeśli dane jest $m > 2^{n-1}$ różnych podzbiorów A , to (zgodnie z zasadą szufladkową Dirichleta) przynajmniej dwa spośród nich pochodzą z tej samej pary, czyli mają puste przecięcie; zatem k jest równe 2^{n-1} .



Rozwiązanie zadania M 666.

Skorzystamy z faktu, że każdy ciąg liczb naturalnych zawiera element najmniejszy.

Wybermy najpierw niemalejący podciąg $(a_{n_k})_{k=1,2,\dots}$ ciągu (a_n) . (To proste; jako a_{n_1} bierzemy najmniejszy wyraz ciągu (a_n) , jako a_{n_2} – najmniejszy wyraz ciągu $(a_{n_1+j})_{j=1,2,\dots}$, itd.) Następnie znajdziemy taki numer n_m , żeby b_{n_m} było najmniejszym wyrazem ciągu $(b_{n_k})_{k=1,2,\dots}$.

Jeśli teraz położymy $i = n_m$, $j = n_{m+1}$, to, oczywiście, warunki zadania będą spełnione.

Przyspieszenie ziemskie

Czy w miarę zjeżdżania w głąb kopalni czulibyśmy grawitację rosnącą czy malejącą? Przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni kuli o promieniu r i masie $M(r)$ wynosi, jak wiadomo, $g = GM(r)/r^2$. Uwaga: masa leżąca w kulistej warstwie „ponad” obserwatorem nie wywiera na niego żadnego działania! Wynik eksperymentu nie jest więc oczywisty, ponieważ z jednej strony w miarę zjeżdżania do kopalni obserwator zbliżałby się do gęstego jądra Ziemi i powinien odczuwać ciężenie coraz większe (maleje r), z drugiej jednak strony pod takim obserwatorem pozostawałoby coraz mniej masy Ziemi (maleje $M(r)$), więc może ciężenie powinno maleć. Wszystko zatem zależy od rozkładu gęstości materii w Ziemi. Zgodnie z obecnym modelem Ziemi na głębokości 2900 km występuje skok gęstości z 5,7 na 9,6 g/cm³ i obliczenia dowodzą, że do tej głębokości ciężenie rosłoby. Inaczej mówiąc, na mniejszych głębokościach w miarę zagłębiania się do kopalni odczuwalibyśmy dominujący efekt zbliżania się do jądra Ziemi (ponieważ warstwy zewnętrzne mają stosunkowo małą gęstość); dopiero głęboko przeważałby efekt drugi, tj. ubywania masy efektywnie przyciągającej obserwatora.

T. K.

Siodło

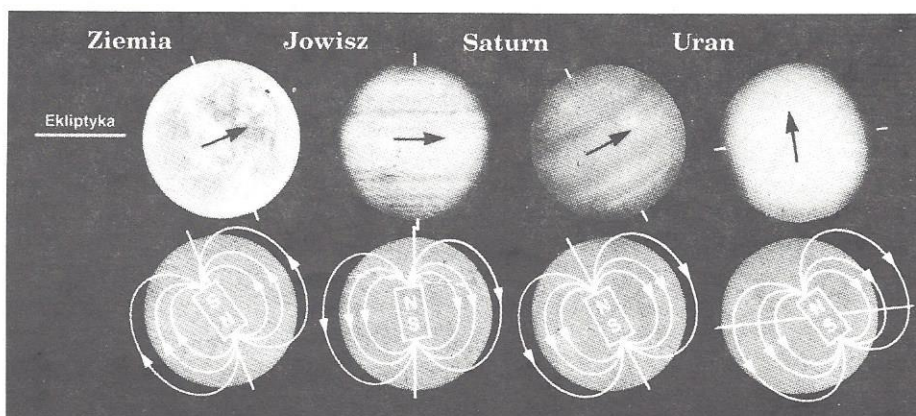
Na dobrym siodle do konnej jazdy można położyć prostą. Siodło bowiem ma (a przynajmniej powinno mieć) kształt, który w matematyce nazywa się paraboloidą hiperboliczną. Można go otrzymać tak: po dwóch nieruchomych prostych skośnych suwamy trzecią, stałe równoległą do pewnej płaszczyzny. Brzmi to zawile, ale da się zrealizować, np. tak: wtykamy w ziemię pod tym samym kątem dwa patyki tak, by odpowiadały prostym skośnym i suwamy po nich trzecim patykiem, stałe poziomym. Zakreśli on w przestrzeni właśnie kształt siodła. Ciekawe, że ten sam kształt można uzyskać suwając po paraboli mającej nogi w górze parabolą mającą nogi w dół i leżącą w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny pierwszej paraboli.

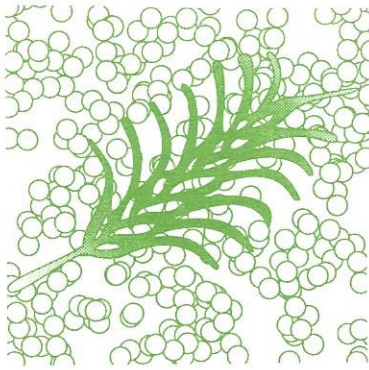
M. K.

P.S. Dach przystanku PKP Ochota w Warszawie ma taki właśnie kształt.

Kompas na planetach

Jaki kierunek pokazywałby kompas na powierzchni innych planet? Prawdę mówiąc, nawet w przypadku Ziemi jest to trochę skomplikowane. Tzw. północny biegun igły magnetycznej wskazuje na Ziemi w przybliżeniu północny biegun geograficzny, ale dlatego, że tam znajduje się południowy biegun magnetyczny. Na Jowiszu i Saturnie północny biegun magnetyczny jest przy północnym biegunie geograficznym, zatem nasz kompas pokazywałby tam akurat południe. Wreszcie na Uranie sprawa jest najbardziej skomplikowana. Przede wszystkim biegun, na którym obserwator obracałby się w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, a więc w zasadzie północny, wypada w ujemnej szerokości ekliptycznej. Może więc powinien nazywać się biegunem południowym? A wewnętrzny magnes Urana jest bardzo „nieporządnie” umieszczony w planecie i wyjaśnić to może chyba tylko rysunek.

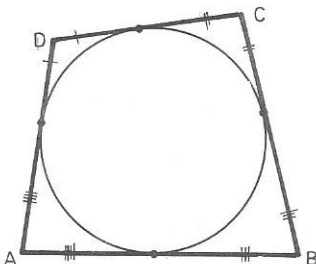




Atmosfera ziemska

Temperatura w ziemskiej atmosferze zależy od wysokości w sposób dosyć skomplikowany. W warstwach najniższych obserwujemy spadek temperatury ze wzrostem wysokości i to jest chyba zrozumiałe. Powietrze bowiem ogrzewa się od gruntu ziemskiego (nie od promieniowania słonecznego, ponieważ jest prawie przezroczyste), ogrzane masy powietrza unoszą się ku górze i tam ochładzają się wskutek rozprężenia. Ochładzanie to jest rzędu dziesięciu stopni na kilometr. Nic więc dziwnego, że w górach jest zawsze zimno. Tak zachowuje się atmosfera do wysokości około 12 km, a warstwa ta to troposfera. A dlaczego wyżej jest inaczej, czyżby prawa gazowe tam nie obowiązywały? Otóż, powyżej 12 km rozpościera się w atmosferze warstwa ozonu, który dość skutecznie absorbuje nadfioletowe promieniowanie słoneczne, a zatem cała ta warstwa (stratosfera sięgająca 50 km) musi być gorętsza. Od niej z kolei ogrzewają się warstwy jeszcze wyższe, dlatego w mezosferze znowu temperatura spada ze wzrostem wysokości. Wzrost temperatury w jonosferze jest spowodowany przez oddziaływanie gazów atmosferycznych z szybkimi cząstkami pochodzenia kosmicznego. Zresztą wskutek bardzo niskiej gęstości atmosfery pojęcie temperatury traci już tam sens.

T. K.



Rys. 1

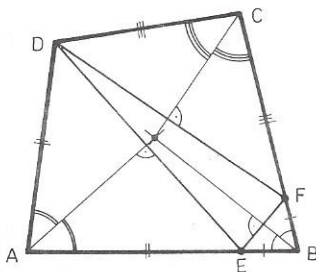
Czworokąt i okrąg

Uczniom szkół średnich dość dobrze znane jest twierdzenie:

Następujące dwa warunki są równoważne:

- 1) w czworokąt wypukły $ABCD$ da się wpisać okrąg,
- 2) $AB + CD = BC + AD$.

Dowód implikacji $1 \Rightarrow 2$ jest z grubsza widoczny na rysunku 1. Twierdzenie $2 \Rightarrow 1$ dowodzi się zazwyczaj nie wprost wykorzystując po drodze fakt $1 \Rightarrow 2$. Istnieje jednak dowód wprost twierdzenia $2 \Rightarrow 1$, którego szkic chciałbym tutaj przytoczyć.



Rys. 2

W tym celu wykazemy, że dwusieczne pewnych trzech kątów czworokąta $ABCD$ przecinają się w jednym punkcie (będzie to właśnie środek okręgu wpisanego). Na bokach AB i BC oberzmy odpowiednio punkty E i F tak, aby $AD = AE$ i $CD = CF$ (rys. 2). Wtedy na mocy równości $AB + CD = AD + BC$ otrzymujemy $BE = BF$. Zatem trójkąty ADE , BEF , FCD są równoramienne. Dwusieczne kątów DAB , ABC , BCD są symetralnymi boków trójkąta DEF , a to znaczy, że przecinają się w jednym punkcie.

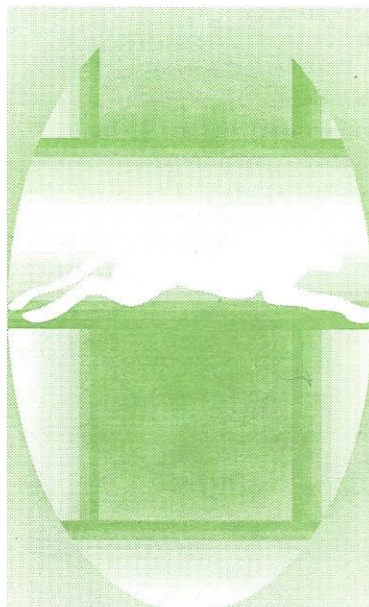
Powyższe rozumowanie zawiera jednak małą lukę, którą uważny Czytelnik z pewnością dostrzeże. Jaką?

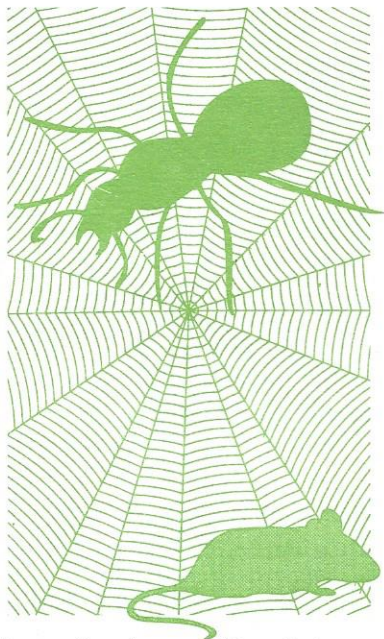
W. P.

Obrazy gwiazd

Gwiazdy widoczne w większym teleskopie są mniejsze. Miarą „wielkości” teleskopu jest jego średnica, a nie, na przykład, powiększenie, ono bowiem jest w ogóle nie ustalone – zależy od zastosowanego okularu. Gwiazdy są tak odległe, że ich obrazy w ognisku obiektywu nie mają nic wspólnego z rzeczywistymi kątowymi rozmiarami gwiazd. Rozmiar „punktowego” obrazu gwiazdy jest efektem uginania się fal świetlnych na brzegach obiektywu (dyfrakcji), przy czym im większy jest obiektyw, tym mniejszą średnicę ma ten obraz. Inaczej mówiąc, większy obiektyw daje ostrzejszy obraz. Ale tak jest dopóty, dopóki jakość obrazu zależy od falowej natury światła. W rzeczywistości przedstawiona tu prawidłowość można zauważyć bardzo rzadko, gdyż zazwyczaj zakłóca ją atmosfera. Mianowicie przed obiektywem nieustannie przesuwają się niejednorodności atmosfery, których rozmiar jest rzędu metra. Wskutek tego wpadająca do małego teleskopu wiązka światła stale lekko zmienia kierunek i obserwator widzi w okularze obraz gwiazdy wprawdzie ostry, lecz ciągle wędrujący. Gdy obiektyw jest duży, chwyta on naraz wiele wiązek światła o różnych kierunkach i w jego ognisku powstaje obraz gwiazdy pochodzący od wszystkich wiązek, czyli po prostu nieostry. W sumie większy teleskop daje w tej sytuacji większy obraz. Zjawisko takie to tzw. seeing.

T. K.



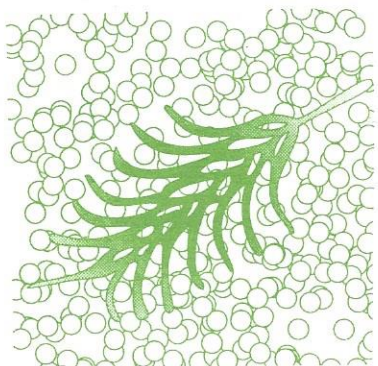


Przypuśćmy, że ustawiliśmy liczby rzeczywiste z odcinka $[0, 1]$ w ciąg. Wypiszmy jedno pod drugim nieskończone rozwinięcia dziesiętne tych liczb – jeśli jakaś liczba ma dwa takie rozwinięcia, to wypisujemy oba.

0,	a_1	a_2	a_3	a_4	...
0,	b_1	b_2	b_3	b_4	...
0,	c_1	c_2	c_3	c_4	...
0,	d_1	d_2	d_3	d_4	...

Teraz weźmy liczbę z $[0, 1]$, która na pierwszym miejscu po przecinku ma cyfrę różną od a_1 , na drugim od b_2 , na trzecim od c_3 , na czwartym od d_4 itd. Łatwo zauważyć, że wskazana przez nas liczba nie występuje w powyższym ciągu. Sprzeczność.

Merkury	6 023 600
Wenus	408 523
Ziemia	328 900
Mars	3 098 710
Jowisz	1 047
Saturn	3 499
Uran	22 869
Neptun	19 314
Pluton	3 000 000



Ustawić w ciąg

Czy liczby wymierne z odcinka $[0, 1]$ można ustawić w ciąg? Tak. Proszę bardzo

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \dots$$

Wypisujemy po kolei wszystkie liczby z mianownikami 2,3,4,5,6,... Oczywiście, w tym ciągu niektóre liczby powtarzają się, np. $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{4}$. Teraz wystarczy wyrzucić powtarzające się wyrazy (zostawiając po jednym). To, co zostanie, to będą wszystkie liczby wymierne z odcinka $[0, 1]$ i, oczywiście, będą one ustawione w ciąg.

No to może uda nam się teraz ustawić w ciąg wszystkie liczby rzeczywiste z odcinka $[0, 1]$? Nic z tego. Nie uda się. Pierwszy zauważył to Georg Cantor. Przypuśćmy bowiem, że ustawiliśmy wszystkie te liczby rzeczywiste w ciąg.

Weźmy odcinek o długości $\frac{1}{10^n}$ i przykryjmy nim n -tą w tym ciągu liczbę rzeczywistą, to znaczy połączmy go na odcinku $[0, 1]$ tak, aby nasza n -ta liczba rzeczywista znalazła się w środku. Zróbmy tak z każdą liczbą rzeczywistą. Naszymi odcinekami pokryliśmy cały odcinek $[0, 1]$, a nawet trochę więcej (bo niektóre z odcineków wystają poza 0 i 1). Wobec tego łączna ich długość większa jest niż 1. Z drugiej zaś strony łączna długość naszych odcineków równa jest

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots = 0,1111\dots < 0,2,$$

a więc mniej niż 1. Otrzymaliśmy sprzeczność. Oznacza to, że liczb rzeczywistych z odcinka $[0, 1]$ nie można ustawić w ciąg. Ale zaraz, zaraz. Czy nasz dowód jest w pełni poprawny? Czy argument, że jeśli pokryjemy odcinek $[0, 1]$ odcinkami nieco więcej niż odcinek $[0, 1]$, to ich łączna długość jest większa od 1, jest ścisły? Tak jest, oczywiście, jeśli pokrywamy skończoną liczbą odcinków, lecz tutaj mamy ich nieskończenie wiele.

Można udowodnić (pozostawiamy to Czytelnikom znającym granice ciągów), że z każdego pokrycia odcinka $[0, 1]$ odcinkami otwartymi można wybrać skończoną liczbę odcinków, które już pokrywają cały odcinek $[0, 1]$. Korzystając z tego faktu widzimy, że powyższy dowód jest w pełni poprawny.

Na marginesie przytaczamy oryginalny dowód Cantora.

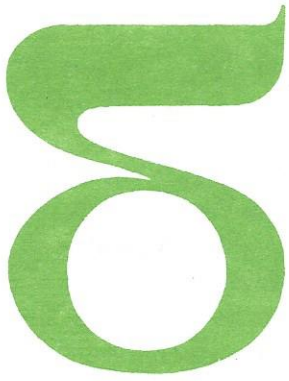
P. H.

Moment pędu planet

W tablicach astronomicznych masy planet podawane są z reguły nie wprost, lecz jako liczby oznaczające stosunek masy Słońca do masy planety. Dane przytaczamy na marginesie.

Jako ćwiczenie rachunkowe każdy może sobie obliczyć łączny moment pędu wszystkich planet, tj. sumę wyrażenia mvr , przy czym odległość r można znaleźć w licznych tablicach, a prędkości v też lub obliczyć samemu. Na przykład, dla Jowisza powinna wyjść liczba rzędu 10^{43} w jednostkach MKS. Dużo to czy mało? Najlepiej porównać to z obrotowym momentem pędu Słońca, trzeba jednak przyjąć jakiś jego model. Przyjmijmy więc, że moment bezwładności Słońca wynosi, jak dla jednorodnej kuli, $\frac{2}{5}MR^2$ (M i R to masa i promień Słońca). Prędkość kątową Słońca znamy z obserwacji i wynosi ona w przybliżeniu $2\pi \text{ rad}/25 \text{ dni} = 2,9 \times 10^{-6} \text{ rad/s}$. Łatwo się już teraz przekonać, że orbitalny moment pędu samego Jowisza o rząd wielkości przekracza moment pędu Słońca. Rzeczywistość jest dla Słońca jeszcze bardziej niekorzystna (zawyżyliśmy tu jego moment bezwładności): zawiera ono zaledwie 2% momentu pędu całego Układu Słonecznego. Przypuszcza się, że w początkowym etapie powstawania naszego układu planetarnego uformowane już i szybko wirujące Słońce przekazało część swojego momentu obrotowego otaczającej je, jeszcze gorącej, mgławicy za pośrednictwem pola magnetycznego.

T. K.



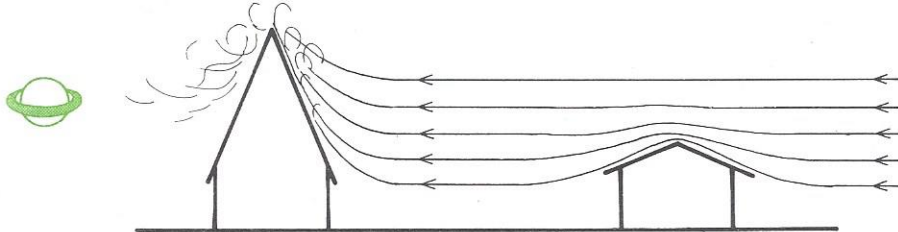
mata delta

O spadzistych dachach i 'oblych kształtach



Jak powszechnie wiadomo, górale zwykli budować domy o wysokich, spadzistych dachach, podczas gdy na nizinach spotyka się dachy raczej płaskie. Na pierwszy rzut oka takie postępowanie górali wygląda nierozsądnie, gdyż wysokie dachy zdają się być mniej odporne na uderzenia wiatru, które w górach są szczególnie silne. W rzeczywistości to płaskie dachy są mniej wytrzymałe.

Przepływ powietrza nad dachem płaskim ma zwykle charakter laminarny, podczas gdy nad dachem spadzistym jest turbulentny (rys. 1). Mówiąc najprościej, podczas przepływu laminarnego masy gazu czy cieczy przemieszczają się spokojnie wzdłuż gładkich krzywych. Przepływ turbulentny natomiast jest niespokojny, chaotyczny, pełen zawirowań.



Rys. 1a

Rys. 1b

Dlaczego przepływ turbulentny ma być mniej groźny dla dachu niż laminarny? Rozważmy sytuację przedstawioną na rysunku 1b. Aby taka sama ilość powietrza przepływała w jednostce czasu nad szczytem dachu, jak i nad jego brzegiem, prędkość powietrza nad szczytem, gdzie widzimy zagęszczenie linii wiatru, musi być większa niż nad brzegiem. Prawo Bernoulliego orzeka zaś, że wielkość $\rho \frac{v^2}{2} + p$, gdzie ρ jest gęstością gazu, v jego prędkością, a p ciśnieniem, pozostaje stała. A zatem, tam, gdzie przepływ odbywa się szybciej, następuje obniżenie ciśnienia. Widzimy więc, że na dach, podobnie jak na skrzydło samolotu, działa siła skierowana ku górze. To ona właśnie, nie mogąc podnieść całego domu, odrywa i demoluje dach.

W przypadku przepływu turbulentnego nad dachem spadzistym (rys. 1a) pole prędkości wiatru jest nader skomplikowane i obszary z różnymi prędkościami są poprzeplatane. A zatem, nie mamy dużego obszaru o obniżonym ciśnieniu i odpowiedniej sile nośnej, jak to było dla dachu płaskiego.



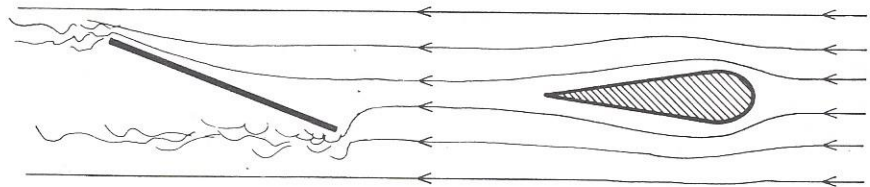
Turbulentność przepływu zapewnia stabilność spadzistym dachom. Bywa jednak i tak, że przepływ laminarny jest bardziej pożądany.

Mogłoby się wydawać, że przy ruchu w wodzie czy powietrzu należy minimalizować powierzchnię poprzeczną do kierunku ruchu obiektu poruszającego się, tak aby był najmniejszy opór ośrodka. Jest to nie cała prawda. Wielokrotnie ważniejsze okazuje się zachowanie gładkości, obłości kształtu poruszającego się obiektu. Wygląd szybkich samochodów czy podwodnych części statków jasno to pokazuje (rys. 2).



Rys. 2. Schematyczny rysunek dziobu statku.

Gdy płaski przedmiot porusza się w wodzie wzdłuż płaszczyzny, w której jego grubość jest znikoma, to opór wody jest rzeczywiście niewielki. Jeśli jednak płaszczyzna ta nie pokrywa się z kierunkiem ruchu, to przepływ cieczy za przedmiotem staje się turbulentny (rys. 3a) i opór gwałtownie wzrasta.



Rys. 3a

Rys. 3b

Ponieważ ruch samochodu czy statku nie odbywa się przez cały czas w kierunku, w którym ich przekrój poprzeczny jest najmniejszy, więc dba się nie tyle o minimalizację przekroju, lecz o to, by przepływ był laminarny. I dlatego płaski przedmiot z rysunku 3a zamienia się często na obły z rysunku 3b.

Małą Deltę przygotował Stanisław MRÓWCZYŃSKI

Odcinek dla poczty

Zł

słownie złotych

wpłacający

Dokładny
adres

na **AMOS**

r-k 01-506 Warszawa

ul. Szenwalda 1

Dokładna
nazwa

nazwa banku **PKO VIII O/W-wa**

Nr r-ku 1586-77578-136

stempel

.....
podpis przyjmującego

Pobrano
opłatę

zł

Odcinek dla posiadacza rachunku

Zł

słownie złotych

wpłacający

Dokładny
adres

na **AMOS**

r-k 01-506 Warszawa

ul. Szenwalda 1

Dokładna
nazwa

nazwa banku **PKO VIII O/W-wa**

Nr r-ku 1586-77578-136

stempel

.....
podpis przyjmującego

Pobrano
opłatę

zł

Potwierdzenie dla wpłacającego

Zł

słownie złotych

wpłacający

Dokładny
adres

na **AMOS**

r-k 01-506 Warszawa

ul. Szenwalda 1

Dokładna
nazwa

nazwa banku **PKO VIII O/W-wa**

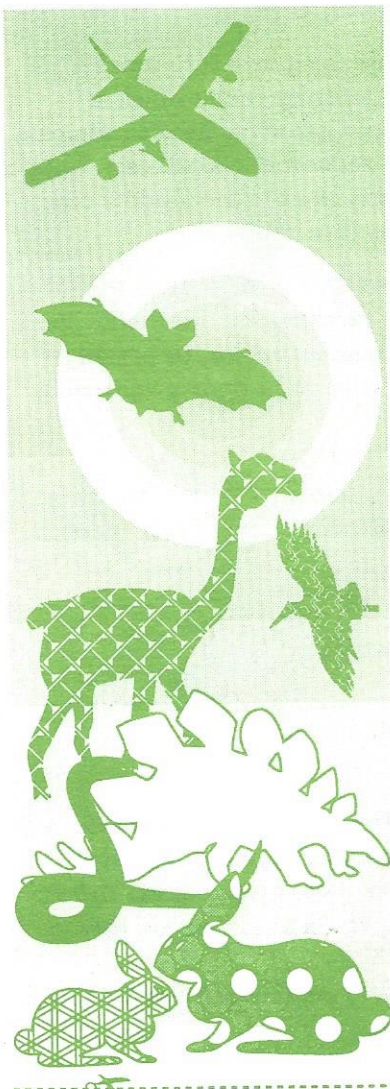
Nr r-ku 1586-77578-136

stempel

.....
podpis przyjmującego

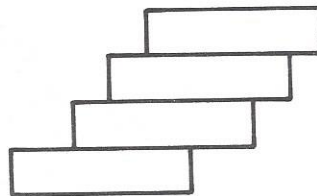
Pobrano
opłatę

zł



Cegły

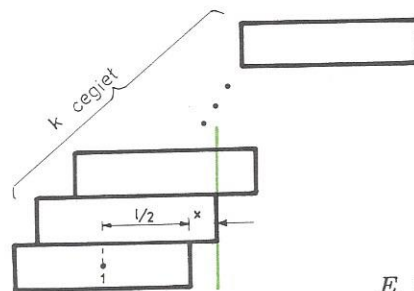
Mamy nieograniczony zapas jednakowych cegieł. Kładziemy je jedną na drugiej przesuwając kolejnie nieco w prawo. Jak daleko w prawo możemy się posunąć?



Okazuje się, że dowolnie. By się o tym przekonać, lepiej jest podkładać cegły pod już zbudowaną piramidę. Drugą cegłę podkładamy pod pierwszą tak, aby środek ciężkości pierwszej znalazł się na prawym brzegu drugiej (a więc w środku pierwszej). Następnie pod te dwie podkładamy trzecią tak, by jej prawy brzeg znalazł się w środku ciężkości pierwszych dwóch itd. Jeśli cegły mają długość l , to pierwsza będzie przesunięta w stosunku do drugiej o $l/2$ w prawo i, jak zaraz udowodnimy, druga w stosunku do trzeciej o $l/4$, k -ta w stosunku do $(k+1)$ -szej o $l/2k$. W efekcie piramida będzie przesunięta w prawo po położeniu n cegieł o $\frac{l}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} \right)$. Przesunięcie to może być dowolnie duże, gdyż suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżna. I tak np. już dla czterech cegieł górna będzie przesunięta w prawo więcej niż o l , a więc wyjdzie całkiem poza podstawę. A dla ilu cegieł górna będzie przesunięta w prawo więcej niż o dwie swoje długości? (Odpowiedź na str. 12.)

Pozostał do uzasadnienia wzór na przesunięcie k -tej cegły w stosunku do $(k+1)$ -szej.

Skorzystamy z oznaczeń wprowadzonych na rysunku. Środek ciężkości układu k górnych cegieł znajduje się, zgodnie z założeniem, na linii kolorowej. Odpowiada on masie k (cegieł). Chcemy, aby środek ciężkości układu $(k+1)$ cegieł był na krawędzi $(k+1)$ -szej. Mamy więc $\frac{l}{2} \cdot 1 = x \cdot k$, skąd $x = \frac{l}{2k}$, a to mieliśmy wykazać.



E. P.

Prenumerata „Delfy”
za okres:

Prenumerata „Delfy”
za okres:

Prenumerata „Delfy”
za okres:

delfy

delfy

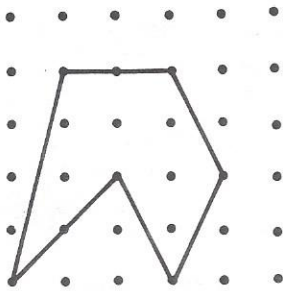
delfy

Twierdzenie Picka

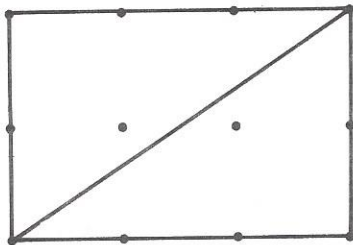
Punktami kratowymi na płaszczyźnie nazywamy punkty o obu współrzędnych całkowitych. Twierdzenie Picka daje prostą formułę obliczania pól wielokątów, których wierzchołki położone są w punktach kratowych (dalej wielokąty takie nazywamy kratowymi). Pole to jest równe

$$w + \frac{1}{2}b - 1,$$

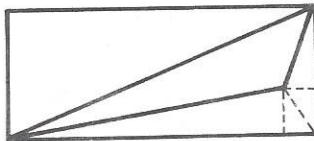
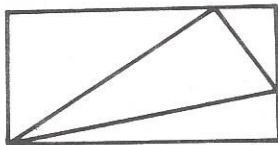
gdzie w oznacza liczbę punktów kratowych leżących wewnątrz wielokąta, a b – liczbę punktów kratowych leżących na jego brzegu. Uzasadnienie tej formuły podzielimy na kilka części.



Rys. 1. Pole = $6 + \frac{1}{2} \cdot 8 - 1 = 9$.



Rys. 2.



Rys. 3.

1. Załóżmy, że wielokąt kratowy został podzielony odcinkiem o końcach w punktach kratowych, leżącym wewnątrz wielokąta, na dwa mniejsze wielokąty. Niech liczby punktów kratowych, leżących wewnątrz dużego wielokąta i wielokątów mniejszych, będą odpowiednio równe w, w_1, w_2 , punktów zaś brzegowych b, b_1, b_2 . Załóżmy, że na odcinku dzielącym znajduje się poza końcami x punktów kratowych. Wówczas $w + \frac{1}{2}b - 1 = (w_1 + w_2 + x) + (\frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2 - x - 1) - 1 = w_1 + \frac{1}{2}b_1 - 1 + w_2 + \frac{1}{2}b_2 - 1$. Z zależności tej wynika, że jeśli formuła jest prawdziwa dla dwóch z tych trzech wielokątów (dwóch mniejszych lub większego i jednego z mniejszych).
2. Prostokąt kratowy o bokach długości m, n równoległych do osi zawiera wewnątrz $w = (m - 1)(n - 1)$ punktów kratowych i na brzegu $b = 2m + 2n$ takich punktów. Zatem $w + \frac{1}{2}b - 1 = mn$, a więc formuła jest prawdziwa dla takich prostokątów.
3. Trójkąt kratowy prostokątny o przyprostokątnych równoległych do osi jest połową pewnego prostokąta kratowego o bokach równoległych do osi (rys. 2). Formuła dla takich trójkątów wynika więc z 1 i 2.
4. Dowolny trójkąt kratowy można uzyskać usuwając z pewnego prostokąta kratowego o bokach równoległych do osi kilka trójkątów kratowych prostokątnych o przyprostokątnych równoległych do osi. Jak to można zrobić, pokazujemy na rysunku 3. Formułę dla takich trójkątów otrzymuje się więc z 1-3.
5. Dowolny wielokąt kratowy można podzielić na trójkąty kratowe. Następnie wystarczy zastosować 1 i 4.

E. P.



Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

M 664. Wewnątrz kwadratu o boku 1 danych jest dziewięć różnych punktów. Udowodnić, że wśród wszystkich trójkątów o wierzchołkach w tych punktach istnieje przynajmniej jeden mający pole mniejsze od $1/8$.
Rozwiązanie na str. 5

M 665. Dla danego $n \in \mathbb{N}$ znaleźć największe $k \in \mathbb{N}$ o własności: w zbiorze n -elementowym można wybrać k podzbiorów o parami niepustych przecięciach.
Rozwiązanie na str. 5

M 666. Dane są dwa nieskończone ciągi liczb naturalnych (a_n) oraz (b_n) . Wykazać, że istnieją takie $i, j \in \mathbb{N}$, $i < j$, dla których jednocześnie $a_i \leq a_j$ oraz $b_i \leq b_j$.
Rozwiązanie na str. 5

Redaguje Jarosław KULPA

F 355. Oszacować, jakie ciśnienie panuje na szczycie Mount Everest ($H = 8848$ m n.p.m.). Przyjąć, że ciśnienie na poziomie morza jest równe ciśnieniu normalnemu $p_0 = 101325$ Pa, masa molowa powietrza wynosi $\mu = 0,029$ kg/mol, temperatura na poziomie morza wynosi 15°C i maleje wraz z wysokością. Gradient temperatury wynosi $a = 6,5^\circ\text{C}/\text{km}$.
Rozwiązanie na str. 12

F 356. Meteoryt o gęstości trzykrotnie większej od gęstości wody wpadł do oceanu. Obliczyć, ile razy prędkość meteorytu w powietrzu była większa od jego prędkości w wodzie po wyhamowaniu. Gęstość powietrza wynosi $\rho_p = 1,3$ kg/m³, gęstość wody $\rho_w = 1000$ kg/m³.
Rozwiązanie na str. 12



Rozwiązanie zadania F 855.

Zmianę ciśnienia hydrostatycznego możemy zapisać w postaci $dp = \rho g dh$, gdzie ρ oznacza gęstość powietrza, a g – przyspieszenie ziemskie. Gęstość powietrza możemy wyznaczyć z równania stanu gazu doskonałego $pV = \frac{m}{\mu}RT$. Uwzględniając, że $\rho = \frac{m}{V}$

znajdujemy $\rho = \frac{p\mu}{RT}$. Temperatura zmienia się wraz z wysokością h według wzoru $T = T_1 - ah$, gdzie $T_1 = 288$ K. Podstawiając powyższe zależności do wzoru na zmianę ciśnienia otrzymujemy równanie $\frac{dp}{p} = \frac{\mu g dh}{R(T_1 - ah)}$, które możemy obustronnie scałkować. Uwzględniając, że $p(h=0) = p_0$, dostajemy $\ln \frac{p}{p_0} = \frac{\mu g}{aR} \ln \left(1 - \frac{aH}{T_1}\right)$, skąd po przekształceniu otrzymujemy ostateczną postać

$$p = p_0 \left(1 - \frac{aH}{T_1}\right)^{\frac{\mu g}{aR}}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy

$$p \approx 31000 \text{ Pa.}$$



Rozwiązanie zadania F 856. Niech v_p i v_w oznaczają prędkości meteorytu odpowiednio w powietrzu i w wodzie, $k = 3$ zaś niech oznacza stosunek gęstości meteorytu i wody. Siła oporu powietrza równoważy siłę ciężkości: $mg = Cv_p^2 \rho_p$, gdzie C – stała zależna od kształtu meteorytu. W wodzie oprócz tego istotną staje się siła wyporu równa ciężarowi wypartej cieczy $m_w g$, więc

$$mg - m_w g = Cv_w^2 \rho_w.$$

Dzieląc dwa równania stronami i podstawiając $\frac{m}{m_w} = k$ dostajemy

$$1 - \frac{1}{k} = \frac{v_w^2 \rho_w}{v_p^2 \rho_p}.$$

Stąd

$$\frac{v_p}{v_w} = \sqrt{\frac{k}{k-1} \frac{\rho_w}{\rho_p}} \approx 34 \text{ razy.}$$

Dla 31 cegieł.

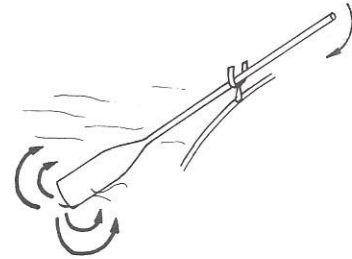
Lecą żurawie

Już wiosna, żurawie wracają z ciepłych krajów. Każdy z nas widział zapewne stado lecących żurawi. W czasie lotu formują one charakterystyczną figurę w kształcie litery V.

Czy jest w tym jakaś przyczyna fizyczna, czy tylko takie „upodobanie” żurawi? Jeśli jest w tym istotna przyczyna, to możemy zastanowić się dodatkowo, czy powinna to być figura symetryczna, czy istotne jest zsynchronizowanie uderzeń skrzydłami żurawi itp.

Żurawie uderzają skrzydłami w powietrze ruchem skrzydeł w dół, aby utrzymać się w powietrzu.

Żeby zrozumieć, co się wtedy dzieje, przypomnijmy sobie obraz powierzchni wody uderzonej wiosłem w czasie wiosłowania. Po obu stronach wiosła tworzą się zawirowania wody, tak jak pokazane jest na rysunku. Woda na zewnątrz porusza się w kierunku przeciwnym do ruchu wiosła.



Podobnie dzieje się z powietrzem uderzonym przez skrzydła żurawia.

Po obu stronach skrzydeł tworzą się zawirowania powietrza i są miejsca, gdzie powietrze wznosi się do góry.



Celem formacji V jest takie ustawienie następnego żurawia, aby wykorzystywał on pęd wznoszącego się powietrza. W ten sposób wszystkie żurawie, z wyjątkiem tego na czele, mogą zaoszczędzić trochę energii.

J. K.

Na odwrót

Dla rozwoju nauki niezbędny jest m.in. „język”, którym porozumiewaliby się wszyscy uprawiający daną dziedzinę. W tym celu zawiera się pewne umowy dotyczące nazewnictwa i terminologii, sposobów wykonywania obserwacji, konstruowania wzorców mierzonych wielkości itd. Jest to naturalne i pożyteczne – dlatego więc niektóre umowy w astronomii wyglądają opacznie? Na przykład dlaczego azymut mierzy się od południa, a nie od północy jak w nawigacji, wojsku, harcerstwie? Tu usprawiedliwieniem jest pewna wygoda. Mianowicie z obszaru Europy, gdzie astronomia powstała, większość obserwacji prowadzi się w kierunku południowym, gdyż tam widać „większość” nieba. Prościej jest zatem, gdy azymuty na ogół wyrażają się małymi liczbami. Drugi przykład to tzw. juliańska rachuba dni. Uwaga: nie ma ona nic wspólnego z kalendarzem juliańskim! Sprowadza się ona do przyporządkowania każdej dobie kolejnego numeru (by łatwo było operować dużymi interwałami czasu) poczynając od 1 I 4713 r.p.n.e. Mniejsza z tym, od którego roku – istotne jest, że zero rachuby ustawiono na południe czasu Greenwich tej właśnie daty początkowej, też dla wygody. Mianowicie przy takiej umowie prowadząc obserwacje w tejże Europie nie trzeba zmieniać daty (juliańskiej) w środku nocy. Mamy też umowę, że im słabsza jest gwiazda, tym większą liczbą określa się jej jasność. To akurat jest skutkiem tradycji. Starożytni astronomowie przyjęli mianowicie, że najjaśniejsze gwiazdy nieba nazwiemy gwiazdami pierwszej wielkości a najśłabsze (widoczne gołym okiem, bo teleskopów wtedy nie było) szóstą wielkości. I tak już zostało, a umowa została rozciągnięta konsekwentnie także na obiekty gołym okiem niewidoczne. A dlaczego barwa niebieska jest określana jako zimna, czerwona zaś jako ciepła? Przecież maksimum energii w zakresie niebieskim wyświeca ciało gorętsze niż mające maksimum w zakresie czerwonym!

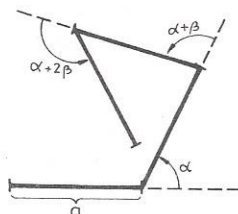
T. K.

Łamane spiralne

W 1991 roku pani Małgorzata Sęk zdobyła brązowy medal w Konkursie Prac Uczniowskich z Matematyki. Opowiemy tu, o czym była ta praca, gdyż wydaje się, że temat jest bardzo ciekawy i daje duże możliwości własnych badań.

Ustalmy długość odcinka a oraz dwa kąty α i β . Łamana spiralna jest to łamana otrzymana w sposób następujący.

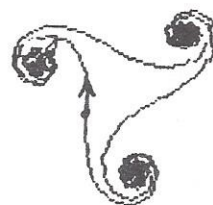
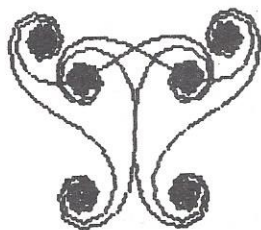
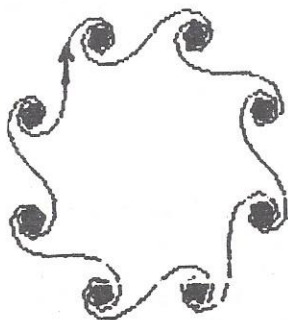
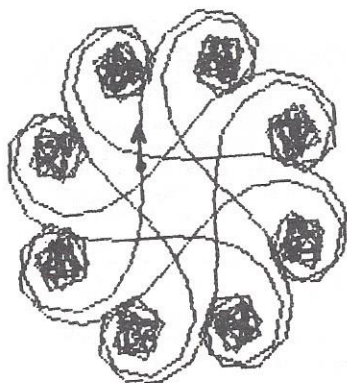
Rysujemy odcinek o długości a . Z końca tego odcinka rysujemy pod kątem α drugi odcinek o długości a . Z końca tego odcinka rysujemy pod kątem $\alpha + \beta$ trzeci odcinek o długości a . Kolejne odcinki rysujemy pod kątami $\alpha + 2\beta$, $\alpha + 3\beta, \dots, \alpha + k\beta, \dots$



Taką procedurę rysowania bardzo wygodnie zapisuje się w języku LOGO.

Okazuje się, że przy podawaniu różnych wartości a , α i β otrzymywane łamane czasami mają identyczny kształt, a czasami bardzo różne kształty.

Pani Małgorzata Sęk badała, w jaki sposób kształt tych łamanych zależy od a , α i β . Zmiana parametru a wpływa jedynie na zmianę wielkości łamanej, natomiast kształt pozostaje niezmienny. Dlatego istotne jest jedynie badanie wyglądu łamanej w zależności od α i β . A oto kilka przykładów łamanych spiralnych.



Wiele pytań w tej pracy pozostało bez odpowiedzi. Można, oczywiście, wymyślać bardzo wiele podobnych procedur graficznych i zajmować się badaniem otrzymywanych rysunków. Jest to cała grupa tematów na Konkurs Prac Uczniowskich z Matematyki. Problem wydaje się ważny ze względu na wzrost zainteresowania komputerami.

P. H.

Kule w sześciianie

Jaką część objętości sześcianu zajmuje wpisana w niego kula? Obliczyć to można łatwo, jednak gdy poprosi się kogoś, by szybko zgadł (by odpowiedział szybciej niż pomyśli), to odpowiedź może być bardzo odległa od prawdy. Jest to bowiem

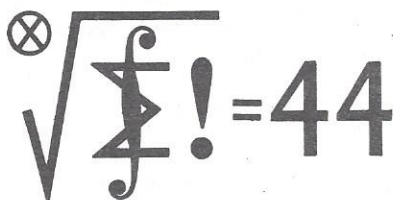
$$\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{(2r)^3} = \frac{\pi}{6} \approx 52,3\%.$$

Niewiele ponad połowę. A jaką część objętości sześcianu może wypełnić drobny, ale złożony z jednakowych kuleczek, śrut? Jest to już znacznie więcej, ale mniej niż

$$\frac{\pi}{\sqrt{18}} \approx 74\%.$$

Tak więc jednakowe kule nie są w stanie (niezależnie od rozmiarów) wypełnić nawet $\frac{3}{4}$ objętości sześcianu.

M. K.



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 1993

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1993.

Zadania z matematyki nr 259, 260

Redaguje Marcin E. KUCZMA

259. Dana jest liczba rzeczywista a . Wyznaczyć wszystkie czwórki liczb rzeczywistych (x_1, x_2, x_3, x_4) spełniające układ równań

$$\begin{cases} (x_1 + x_2 + x_3) \cdot x_4 = a \\ (x_2 + x_3 + x_4) \cdot x_1 = a \\ (x_3 + x_4 + x_1) \cdot x_2 = a \\ (x_4 + x_1 + x_2) \cdot x_3 = a \end{cases}$$

260. Na okręgu danych jest pięć różnych punktów A, B, C, D, U . Rzuty prostokątne punktu U na proste AB, AC, BC leżą na jednej prostej (znany fakt); jest to tzw. *prosta Simsona* punktu U względem trójkąta ABC . Analogicznie określamy proste Simsona punktu U względem trójkątów ABD, ACD, BCD . Udowodnić, że rzuty prostokątne punktu U na te cztery proste Simsona są współliniowe.

Zadanie **260** zaproponował pan Jan Ciach z Ostrowca Świętokrzyskiego.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/1992

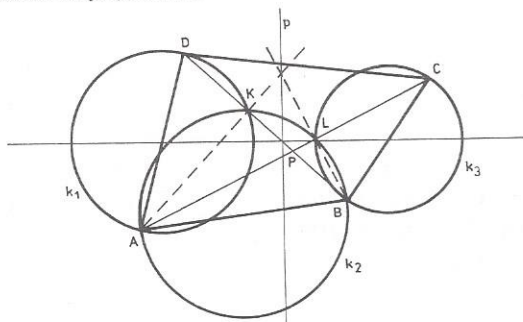
Przypominamy treść zadań:

251. Przekątne czworokąta wypukłego $ABCD$ nie są prostopadłe i przecinają się w punkcie P . Udowodnić, że prosta przechodząca przez ortocentra trójkątów PAB i PCD jest prostopadła do prostej przechodzącej przez środki boków BC i DA .

252. Ciąg wielomianów $W_0(x), W_1(x), \dots$ jest określony przez warunki: $W_0(x) = 1, W_{n+1}(x) = W_n'(x) - 2xW_n(x)$. Dowiedź, że $W_{2k+1}(0) = 0, W_{2k}(0) = (-1)^k(2k)!/k!$ dla $k = 0, 1, 2, \dots$

251. Skoro przekątne nie są prostopadłe, rozważane ortocentra nie pokrywają się.

Oznaczmy przez k_1, k_2, k_3, k_4 okręgi, których średnicami są odpowiednio odcinki DA, AB, BC, CD , i niech $k_1 \cap k_2 = \{A, K\}, k_2 \cap k_3 = \{B, L\}$ (rys.). Kąty AKB, AKD, BLA, BLC są proste, zatem proste AK i BL zawierają wysokości trójkąta PAB .



Niech p będzie prostą potęgową pary okręgów k_1, k_3 . Liniami potęgowymi par k_1, k_2 oraz k_2, k_3 są odpowiednio proste AK oraz BL . Te trzy proste potęgowe są współpękowe. Zatem punkt przecięcia prostych AK i BL , czyli ortocentrum trójkąta PAB , leży na prostej p . Analogicznie (rozważając trójkę okręgów k_1, k_3, k_4) wykazujemy, że ortocentrum trójkąta PCD także leży na prostej p . Pozostaje zauważyć, że prosta p jest prostopadła do prostej przechodzącej przez środki okręgów k_1 i k_3 , czyli środki odcinków DA i BC .

252. Weźmy pod uwagę funkcję $f(x) = e^{-x^2}$. Pochodna dowolnego rzędu n funkcji f ma postać $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2}$, gdzie $P_n(x)$ jest wielomianem. Dla dowolnie ustalonego n różniczkujemy tę równość i znajdujemy

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= P_n'(x)e^{-x^2} - 2xP_n(x)e^{-x^2} = \\ &= (P_n'(x) - 2xP_n(x))e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Jednocześnie $f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}(x)e^{-x^2}$. Wobec tego $P_{n+1}(x) = P_n'(x) - 2xP_n(x)$. Widzimy, że ciąg wielomianów $(P_n(x))$ spełnia tę samą zależność rekurencyjną, co dany w zadaniu ciąg $(W_n(x))$; a ponieważ $f^{(0)}(x) = f(x) = 1 \cdot e^{-x^2}$, zatem $P_0(x) = 1 = W_0(x)$. Stąd $P_n(x) = W_n(x)$ dla wszystkich n , czyli mamy równość

$$f^{(n)}(x) = W_n(x)e^{-x^2} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Wykorzystamy teraz rozwinięcie potęgowe

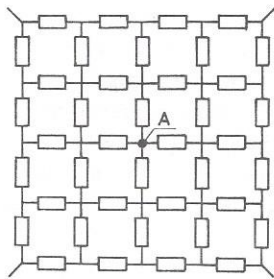
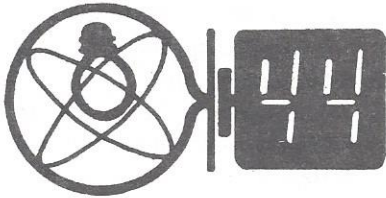
$$f(x) = e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

gdzie $a_n = \begin{cases} (-1)^k/k! & \text{dla } n = 2k, \\ 0 & \text{dla } n = 2k + 1 \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$

Wiadomo, że współczynniki szeregu potęgowego przedstawiającego funkcję f dane są wzorem

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{W_n(0)}{n!} = \begin{cases} W_{2k}(0)/(2k)! & \text{dla } n = 2k, \\ W_{2k+1}(0)/(2k+1)! & \text{dla } n = 2k+1. \end{cases}$$

Z przyrównania otrzymanych wyrażeń wynikają dowodzone równości.



Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 141 (WT=3,85) i 142 (WT=1,60)
z numeru 8/1992

Tomasz Wietecha - Tarnów 27,72
Przemysław Gworys - Częstochowa 25,69
Andrzej Nowogrodzki - Chocianów 21,02

Zadania z fizyki nr 157, 158

Redaguje Jerzy B. BROJAN

157. W układzie 40 jednakowych oporników po 1Ω (rys.) cztery rogi są zwarte. Ile wynosi opór zastępczy między tymi czterema rogami a środkowym punktem A?

158. Do dwóch punktów A i B odległych o d przymocowane są końce wiotkiego, nierozciągliwego przewodu o długości $l > d$, przez który płynie prąd o natężeniu I . Zbadać kształt przewodu i obliczyć siłę napinającą, jeśli przewód znajduje się w zewnętrznym jednorodnym polu magnetycznym \vec{B} skierowanym równolegle do odcinka AB. Założyć, że własne pole magnetyczne przewodu jest pomijalnie małe w porównaniu z polem zewnętrznym.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/1992

Przypominamy treść zadań:

149. W celu usprawnienia komunikacji między Ziemią i Księżycem rozpięto od jednego do drugiego ciała niebieskiego drabinkę sznurową. Masa jednego kilometra drabinki jest równa 100 kg. Do którego ciała - Księżycu czy Ziemi - drabinka musi być przymocowana, aby nie spadła na drugie? Ile wynosi siła napięcia w miejscu przymocowania, jeśli o drugie ciało drabinka opiera się luźno? Ile wynosi maksymalna siła napięcia drabinki i w którym miejscu to maksimum występuje?

150. Dopuszczalna wielkość rozmycia obrazu na kliszy fotograficznej wynosi $d = 0,1$ mm. Jaki jest zakres „głębokości ostrości”, jeśli ogniskowa obiektywu wynosi $f = 50$ mm, średnica otworu obiektywu $h = 30$ mm, a obiektyw nastawiono na odległość $l = 5$ m?

149. Wprowadźmy oznaczenia: $R = 384400$ km - odległość środków Ziemi i Księżycy, $R_Z = 6370$ km - promień Ziemi, $R_K = 1738$ km - promień Księżycy, $\mu_Z = GM_Z = gR_Z^2 = 3,98 \cdot 10^{14} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-1}$ (gdzie G - stała grawitacji, M_Z - masa Ziemi, g - przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni Ziemi), $n = \frac{M_Z}{M_K} = 81$ - stosunek masy Ziemi do masy Księżycy, $R_S = R \frac{M_K}{M_K + M_Z} = R \frac{1}{n+1}$ - odległość środka masy układu Ziemia - Księżyc od środka Ziemi, ω - prędkość kątowna układu (wynikająca z ruchu obiegowego), $\rho = 0,1$ kg/m - masa drabinki na jednostkę długości.

W obracającym się układzie odniesienia przyspieszenie grawitacyjne γ na odcinku Ziemia - Księżyc w odległości r od środka Ziemi jest złożeniem grawitacji ziemskiej $\frac{\mu_Z}{r^2}$, księżycowej $\frac{\mu_Z/n}{(R-r)^2}$ oraz przyspieszenia odśrodkowego $\omega^2(r - R_S)$.

Odejmując od pierwszego wyrażenia dwa pozostałe i podstawiając

$$\omega^2 = \frac{G(M_Z + M_K)}{R^3} = \frac{\mu_Z}{R^3} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad (\text{III prawo Keplera})$$

mamy

$$\gamma = \frac{\mu_Z}{r^2} - \frac{1}{n} \frac{\mu_Z}{(R-r)^2} - \frac{\mu_Z}{R^3} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(r - R \frac{1}{n+1}\right) = \mu_Z \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{n(R-r)^2} - \frac{n+1}{n} \frac{r}{R^3} + \frac{1}{nR^2}\right)$$

Podstawiając wartość n można numerycznie wyznaczyć „punkt równowagi”, czyli punkt, w którym $\gamma = 0$. Okazuje się, że leży on w odległości $R_r = 0,8489 \cdot R$ od środka Ziemi. W tym punkcie napięcie drabinki jest maksymalne, a całkując γ od R_Z do R_r oraz od R_r do $R - R_K$ i mnożąc przez ρ obliczamy „ciężary” obu części drabinki - P_1 i P_2 .

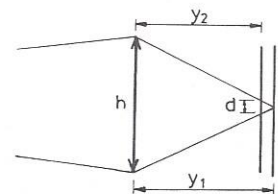
$$P_1 = \rho \int_{R_Z}^{R_r} \gamma(r) dr = \rho \mu_Z \left[\left(\frac{1}{R_Z} - \frac{1}{R_r}\right) - \frac{1}{n} \left(\frac{1}{R - R_r} - \frac{1}{R - R_Z}\right) - \frac{n+1}{n} \frac{1}{2R^3} (R_r^2 - R_Z^2) + \frac{1}{nR^2} (R_r - R_Z) \right] = \rho \mu_Z \cdot 0,0001528 \text{ km}^{-1} = 6,03 \cdot 10^6 \text{ N}.$$

$$P_2 = \rho \int_{R_r}^{R-R_K} |\gamma(r)| dr = \rho \mu_Z \left[-\left(\frac{1}{R_r} - \frac{1}{R - R_K}\right) + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{R_K} - \frac{1}{R - R_r}\right) + \frac{n+1}{n} \frac{1}{2R^3} ((R - R_K)^2 - R_r^2) - \frac{1}{nR^2} (R - R_K - R_r) \right] = \rho \mu_Z \cdot 0,0000679 \text{ km}^{-1} = 2,70 \cdot 10^5 \text{ N}.$$

Jak widać, P_1 jest kilkadziesiąt razy większe od P_2 . Wynika stąd, że należy przymocować drabinkę do Księżycy. Maksymalna siła napięcia jest równa P_1 , a siła w punkcie zawieszenia wynosi $P_1 - P_2 = 5,81 \cdot 10^6$ N.

Dobre wyniki przybliżone można otrzymać pomijając R_S lub całkowicie pomijając siłę odśrodkową.

150. Przyjmijmy dla uproszczenia, że obiektyw jest pojedynczą soczewką (nie jest to istotne ograniczenie). Jeśli obraz powstaje w odległości y_1 od soczewki, a klisza znajduje się w odległości y_2 , to - jak widać z rysunku - rozmycie d można znaleźć z proporcji



$$\frac{h}{d} = \frac{y_1}{y_1 - y_2} \approx \frac{y}{\Delta y}$$

Odległość l do przedmiotu jest powiązana z y równaniem

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}. \quad \text{Stąd} \quad \Delta \left(\frac{1}{l}\right) = \Delta \left(\frac{1}{y}\right) \approx \frac{\Delta y}{y^2},$$

gdzie pominięto znaki i uwzględniono, że Δy jest małe w porównaniu z y . Wyrażenie $\Delta \left(\frac{1}{l}\right)$ oznacza tu różnicę między odwrotnością nastawionej odległości do przedmiotu a odwrotnością odległości rzeczywistej, na granicy zakresu głębi ostrości. Ponieważ y jest dość bliskie ogniskowej f , więc otrzymujemy

$$\Delta \left(\frac{1}{l}\right) \approx \frac{d}{yh} \approx \frac{d}{fh} = 0,067 \text{ m}^{-1}.$$

Zatem obszar głębi ostrości obejmuje $\frac{1}{l} \in [0,133; 0,267] \text{ m}^{-1}$, czyli $l \in [3,75; 7,5] \text{ m}$.

Instytut Matematyki Najwspółczesniejszej został poczęty z ojca Półmetka (naszego roku studiów) i z matki Nudy, jaka panowała na pewnych ćwiczeniach w jakiś czas po Półmetku. Na nazwę przedmiotu spuścimy litościwie zasłone milczenia. Narodziny IMN nastąpiły 24 kwietnia 1970 roku, czyli kilka epok temu (przypomnijmy młodszym: był to okres *schyłkowego Gomułki*). Wszyscy, poza jednym, członkowie założyciele byli wówczas *semimagistrami*, który to tytuł uzyskali zaliczając z pozytywnym wynikiem rzeczony Półmetek. Nie będziemy wnikali w szczegóły Statutu regulującego działalność IMN. Powiedzmy tu jedynie, że statut nasz nigdy nie został zgłoszony do akceptacji (lub odrzucenia) żadnym ważnym *Władzom*, chociaż najważniejsze władze, Dyrekcja Instytutu Matematyki UJ i jego pracownicy wiedzieli o istnieniu IMN i byli w zasadzie na bieżąco informowani o jego działalności. Dzięki temu, że IMN nie był nigdzie oficjalnie zarejestrowany, nie został też ani rozwiązany, ani zawieszony w okresie stanu wojennego, chociaż sympatie znakomitej większości członków Instytutu były jawnie i jednoznacznie po stronie antyrządowej. (Uwaga: piszę *znakomitej większości*, a nie *wszystkich*, ponieważ wrodzona ścisłość matematyczna nie pozwala mi użyć tak kategorięznego stwierdzenia; czuję się jednak w obowiązku nadmienić, że nie jest mi znany przypadek poparcia działalności WRON przez któregośkolwiek z członków IMN.) Co także bardzo ważne, ostatnie wybrane władze samego Instytutu formalnie sprawują urząd do dziś, jako że nie został ustalony termin upływu kadencji. Tak więc, od chwili swoich narodzin IMN istnieje nieprzerwanie, ma ważne wybrane władze, aczkolwiek od lat wielu żyje życiem utajonym (nawet dla swoich członków).

Najważniejszymi przejawami działalności Instytutu w jego złotym okresie (1970–1972) były:

- (i) gromadzenie odkryć matematyki najwspółczesniejszej (jak np. *zbioru absurdalnego*, tj. takiego, który nie zawiera *żadnego* zbioru; to nie może być zbiór pusty, bo ten zawiera siebie);
- (ii) gromadzenie cytatów z wypowiedzi naszych wykładowców i asystentów (np., *Wrócił w tym sensie, że nie wyszedł* – o zbiorze powracającym, *Istnieją ciała nieprzesuwalne* – to, chyba, o teorii miary?, *Interesuje mnie wszystko, co jest wypukłe(?)*, *zbiór nadziany topologią* itd.);

W kolejnym numerze EPSILONA przybliżamy instytucję absolutnie wyjątkową w spektrum matematycznym – Instytut Matematyki Najwspółczesniejszej. Obok informacji o Instytucie autorstwa pierwszego Przewodniczącego Supremum IMN, Józefa Piórka (następnymi, wybieranymi na kolejnych semirocznicach powstania IMN byli Adam Grobler i Jacek Stasica) zamieszczamy skromną część dorobku naukowego Instytutu. W przedstawionych fragmentach skryptu „*Rozmaitości absurdalne*”, zawierającego największe osiągnięcia IMN z półtorarocznego okresu jego aktywnej działalności, dokonaliśmy pewnych „kosmetycznych” korekt – koniecznych ze względu na wyrwanie z kontekstu dwóch stron skryptu stanowiącego, jako dzieło matematyczne, logiczną całość. Rysunek pochodzi z bogatego zbioru ilustrowanych cytatów IMN, wykonywanych przez Zofię Denkowską.



Jedynym istotnym motorem rozwoju są pomyłki.

- (iii) organizowanie semirocznic Półmetka s udziałem naszych nauczycieli, którzy byli poddawani egzaminom z matematyki najwspółczesniejszej, ale także odznaczani, np. *Złotymi*, *Srebrnymi* lub *Braźowymi Cudzysłowami* po przekroczeniu ustalonej liczby cytatów zanotowanych w archiwach IMN. Najwyższym klasą był *Złoty Cudzysłów ze wstęgą Möbiusa*;
- (iv) zorganizowanie studium matematyki najwspółczesniejszej: mieliśmy studentów zarówno stacjonarnych, jak i zaocznych, z UMCS w Lublinie.

Tych, którzy chcieliby zapoznać się z dorobkiem IMN bardziej szczegółowo, zachęcamy do kontaktu z Kołem Matematyków Studentów UJ (ul. W.Reymonta 4, 30-059 Kraków), które niegdyś, za zgodą IMN, wydało przygotowany dla naszych studentów skrypt *Rozmaitości absurdalne* wraz z elementami logiki nieformalnej.

Józef PIÓREK

4.4. Zagadnienie prawdy.

TWIERDZENIE (o istnieniu prawdy). Istnieje twierdzenie prawdziwe.

Istnieje wiele dowodów tego twierdzenia. Przytoczymy kilka najciekawszych.

1) *Dowód nie wprost (standardowy).* Jeżeli nie istnieje twierdzenie prawdziwe, to każde twierdzenie jest fałszywe. Zatem fałszywe jest twierdzenie, że nie istnieje twierdzenie prawdziwe. Toteż twierdzenie prawdziwe istnieje.

2) *Dowód teoriomnogościowy W. Forysia.* Niech D oznacza zbiór twierdzeń prawdziwych. Jeżeli $D \neq \emptyset$, to twierdzenie jest udowodnione. Jeżeli zaś $D = \emptyset$, to co z tego? Zbiór pusty też jest zbiorem.

3) *Dowód negatywny M. Bieleckiej.* Nie istnieje żaden kontrprzykład.

4) *Dowody przez podanie przykładu twierdzenia prawdziwego:*

a) *Twierdzenie Tylko-Woźniaka.*

Definicja. D jest zbiorem potraw liniowo niezależnych wtedy i tylko wtedy, gdy da się jednorazowo skonsumować bez obawy o zdrowie żołądka.

Twierdzenie. Jeżeli D jest zbiorem potraw liniowo niezależnych, to zbiór $D \cup \{\text{jedno piwo}\}$ jest zbiorem potraw liniowo niezależnych.

b) *Twierdzenie o bezmyślności Piotra B.* Non cogito ergo sum. Dowód przez obejrzenie Piotra B. w godzinach 5.30–5.35 rano.

c) *Twierdzenie patriotyczne M. Bieleckiej.* Rzetelną i twórczą pracą zapewnimy jasną przyszłość Ojczyźnie.

Zajmiemy się teraz zagadnieniem prawdy w bardziej konkretnych warunkach.

Następujące twierdzenie znane przedtem jako hipoteza kwantynium, a odkryte przez St. Ostoję-Łojasiewicza jr. ma na celu wyjaśnić, dlaczego niektórzy wykładowcy nie używają kwantyfikatorów na swoich wykładach.

HIPOTEZA KWANTINUUM

(St. Ostoja-Łojasiewicz jr.) Dla każdego twierdzenia istnieje taki układ kwantyfikatorów, przy którym to twierdzenie jest prawdziwe.

Spośród licznych prób dowodu hipotezy kwantynium najbardziej na uwagę zasługuje dowód przeprowadzony przez J. Piórka. Weźmy twierdzenie T . Dobierzemy do niego pewien układ kwantyfikatorów K_1 , który przybliży nam twierdzenie T do prawdy z prawdopodobieństwem większym niż $1/2$. „Wprawdzie ja nie definiowałem”, co oznacza, że układ kwantyfikatorów przybliży twierdzenie do prawdy z pewnym prawdopodobieństwem, „ale to nie szkodzi. Wykłada się przecież rachunek różniczkowy i całkowy bez podawania definicji rachunku”. Dalej, weźmy układ kwantyfikatorów K_n , który nam będzie przybliżał nasze twierdzenie do prawdy z prawdopodobieństwem $2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-n}$. W granicy otrzymamy układ kwantyfikatorów K , który przybliży twierdzenie T do prawdy z prawdopodobieństwem 1. Korzystając z ciągłej zależności prawdziwości twierdzenia od kwantyfikatorów otrzymujemy tezę hipotezy. C.b.d.u.

5.1. Ułamki kardynalne.

Niech X będzie dowolnym skończonym zbiorem niepustym.

Rozważmy zbiór $\{f : A \rightarrow X\}$ (przez A oznaczamy zbiór absurdalny). Biorąc pod uwagę fakt, że $\text{card } A = -1$ i korzystając ze znanych twierdzeń teorii mnogości

otrzymamy, że $\text{card } X^A = 1/\text{card } X$, zatem zbiór X^A ma moc ułamkową. Udowodniliśmy w ten sposób **TWIERDZENIE (o zbiorach ułamkowych).** Istnieją zbiory o mocy ułamkowej.

Ważnym przykładem zbioru ułamkowego jest odkryty przez M. Łuczyńskiego przedział półpusty (półpunkt), tj. przedział $[x, x)$ lub $(x, x]$, gdzie x jest dowolną liczbą rzeczywistą. Wobec faktu, że $[x, x) \cup (x, x] = \{x\}$, przedział półpusty ma moc $1/2$.

Na drodze odpowiedniego dodawania mnogościowego odpowiednich zbiorów o odpowiednich liczbach kardynalnych uzyskujemy, i to nawet przez sumowanie skończone, zbiory o dowolnej liczbie kardynalnej wymiernej dodatniej. Ponieważ zbiór liczb wymiernych jest gęsty w zbiorze liczb rzeczywistych, to przez odpowiednie nieskończone dodawanie mnogościowe odpowiednich zbiorów o odpowiednich liczbach kardynalnych otrzymamy zbiory o dowolnej liczbie kardynalnej rzeczywistej dodatniej. Udowodniliśmy w ten sposób:

TWIERDZENIE (o rzeczywistości kardynalnej A. Groblera). Liczby rzeczywiste dodatnie są kardynalne. **PRZYKŁAD zbioru o liczbie kardynalnej niewymiernej:**

$$\text{card } \{f : [x, x) \rightarrow \{a, b\}\} = \sqrt{2} \quad (a \neq b).$$

5.2. Liczby kardynalne zespolone.

TWIERDZENIE (o urojeniach kardynalnych A. Groblera). Istnieje zbiór o mocy i (jednostka urojona).

Dowód. Moc zbioru $I = \{f : [x, x) \rightarrow A\}$ wynosi i .

LEMAT. Prawa górna ćwiartka koła jednostkowego na płaszczyźnie jest kardynalna.

Dowód. Niech X będzie zbiorem o dowolnej nieujemnej mocy rzeczywistej r . Wówczas

$\text{card } \{f : X \rightarrow \{F : [x, x) \rightarrow A\}\} = i^r$. Otrzymujemy w ten sposób dowolną liczbę z okręgu jednostkowego. Stosując podobne rozumowanie jak w twierdzeniu o rzeczywistości kardynalnej dochodzimy do prawej górnej ćwiartki koła.

TWIERDZENIE (o pierwszej ćwiartce

A. Groblera). Pierwsza ćwiartka zbioru liczb zespolonych jest kardynalna.

Dowód. Pierwszą ćwiartkę napelnimy dodając do siebie mnogościowo odpowiednie zbiory odpowiednich mocy, których istnienie gwarantują powyższy lemat i twierdzenie o rzeczywistości kardynalnej. C.b.d.u.

„Matematycy mają mocne głowy i na pierwszej ćwiartce nie poprzestają”. Dodając do pierwszej ćwiartki zbiór absurdalny otrzymamy liczby kardynalne z pasa (a raczej półpasa): $P = \{z : \text{Re } z \in [-1, 0), \text{Im } z \geq 0\}$. Dalsze dodawanie zbioru absurdalnego jest niemożliwe, co wynika z jego jednoegzemplaryczności (por. §2.2). W ten sposób doszliśmy do centralnego twierdzenia absurdalnej teorii mocy, mówiącego o zbiorze liczb kardynalnych różnych od pozaskończonych:

TWIERDZENIE (A. Groblera). Po pierwszej ćwiartce mamy pas P , a za pasem broń (Boże nic innego).

Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
ZAPRASZA

na pięcioletnie studia magisterskie na kierunkach

■ **Matematyki**

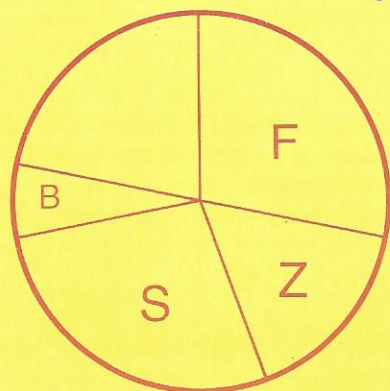
■ **Informatyki**

oraz na

■ **Trzyletnie zawodowe studia nauczycielskie**
uprawniające do nauczania matematyki w szkole podstawowej

Wykształcenie matematyczne daje szansę atrakcyjnej pracy:

- w bankach, firmach ubezpieczeniowych itp. (F),
- w szkołach wszystkich szczebli i rodzajów (S),
- w zarządzaniu (organizacja i optymalizacja) (Z),
- prowadzenia badań naukowych (B).



Rysunek pokazuje, gdzie trafili absolwenci z 1986 roku Wydziału Matematyki Uniwersytetu w Manchesterze (Wlk. Brytania).

A Polska jest coraz bliżej Europy, więc i u nas można spodziewać się podobnego popytu na matematyków na rynku pracy.

Informatyka od wielu już lat jest odrębną, samodzielną nauką. Ponieważ jej związki z matematyką są szczególnie silne, jest wraz z matematyką wykładana pod auspicjami jednego wydziału Uniwersytetu Warszawskiego.

Studia informatyczne na poziomie uniwersyteckim różnią się znacznie od kursów programowania czy innych kursów informatycznych prowadzonych w szkołach różnego typu (pomaturalnych, wyższych szkołach biznesu itp.). Są to pięcioletnie, magisterskie studia uniwersyteckie dające pełne, nowoczesne wykształcenie informatyczne, poczynając od matematycznych podstaw informatyki, a kończąc na współczesnych metodach i narzędziach informatyki. Wykształcenie informatyczne daje szansę zatrudnienia w najlepiej płatnym obecnie zawodzie w Polsce.

STUDIA NA UNIWERSYTECIE WARSZAWSKIM DAJĄ SZANSE

- uczęszczania na zajęcia z rozmaitych dziedzin matematyki czystej, stosowanej i informatyki, prowadzone przez wykładowców o międzynarodowej renomie,
- kontaktu z nowoczesną techniką komputerową,
- udziału w międzynarodowych programach wymiany studentów,
- otrzymania wykształcenia otwierającego drogę do kariery zawodowej na całym świecie.

Bliższych informacji o rekrutacji na Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW – również na inne rodzaje studiów na naszym Wydziale – udziela osobiście lub telefonicznie w godz. 9 – 15, Dziekanat Wydziału, ul. Banacha 2 (wejście od ul. Pasteura), pok. 2110, 02-097 W-wa, tel. (2) 658-30-93.

W Dziekanacie można też nabyć Informator dla kandydatów na Wydział MIM.