

quarta

h=6.63.10⁻³⁴ J·s $\hbar=3.141593$

CENA ZŁ 8000,-

NR 3 (226) 1993

PL ISSN 0137-3005 | NR IMP 34 550 X

POPULARNY MIESIECZNIK MATEMATYCZNO-FIZYCZNO-ASTRONOMICZNY

UWAGA !!!

Nową formę prenumeraty „Delta”
proponuje firma AMOS,
warunki poniżej.

SPIS TREŚCI

NUMERU 3(226)

O kilku otwartych problemach
teorii liczb pierwszych
Władysław Narkiewicz

Dziwne działanie otworu
o zmiennej średnicy
*Juliusz Domański,
Hanna Osicka*

Nierówności funkcyjne
Marek Pycia

Rozwiązać równanie $y^x = x^y$

Mała Delta

Spektroskopia jądrowa
(fotony w fizyce jądrowej)
Krzysztof Starosta

Klub 44

Patrz w niebo

Zadania

Epsilon

W następnym numerze:

Różne różności

Okładkę zaprojektowała
Monika WALCZYK

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego
i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichoński
Roman Duda
Jan A. Gaj
Tomasz Hofmokl – wiceprzewodniczący
Tadeusz Jarzębowski
Marcin Kubiak
Andrzej Mąkowski
Andrzej Pelczar
Zbigniew Płochocki
Zdzisław Pogoda
Konrad Rudnicki
Zbigniew Semadeni
Grzegorz Sitarski
Józef I. Smak
Kazimierz Stępień
Mieczysław Subotowicz
Andrzej Szymacha
Andrzej Woszczyk
Wojciech Żakowski – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

Krzysztof Biesaga
Piotr Hajlasz
Jan Kalinowski – z-ca red. nac.
Krystyna Kordos – sekr. red.
Marek Kordos – red. nac.
Tomasz Kwast
Stanisław Mrówczyński
Anna Rudnik
Joanna Udalska

Adres Redakcji:

ul. Smyczkowa 5/7
02-678 Warszawa
tel. 43-02-43 wewn. 21
DELTA@PLEARN.BITNET

Wydrukowano w Zakładach Graficznych
w Warszawie, ul. Srebrna 16
Skład systemem TeX wykonała redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY w AMOS-ie

Od stycznia br. prenumeratę „Delta” prowadzi również firma AMOS,
01-506 Warszawa, ul. Szenwalda 1 (tel. 39-17-52). Wpłaty przyjmowane są
non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. Koszt trzech
numerów wynosi 24 000,-zł (rocznika'93 – 96 000,-zł). Przy wpłacie prosimy
zaznaczyć okres prenumeraty (co najmniej 3 miesiące).

Prenumerata zagraniczna trzech numerów wynosi 60 000,-zł. W przypadku życzenia
dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! AMOS dostarcza „Deltę” pod wskazany adres nie pobierając dodatkowej
opłaty. Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS
funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Blankiet pocztowy na prenumeratę „Delta” w AMOS-ie zamieszczamy na str. 7/8.
Konto AMOS-u: **PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136**

WARUNKI PRENUMERATY w RUCH-u

- Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
- Cena prenumeraty na III kwartał 1993 r. wynosi 24 000,- zł.
- Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku
zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa
prenumerator.
- Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
 - na teren kraju
 - jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub
siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony
sposób,
 - na zagranicę
 - „Ruch” S.A. Oddział Warszawa, 00-958 Warszawa, konto
PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – dostawa odbywa się
pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia
dostawy pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni
pokrywa prenumerator.
- Terminy przyjmowania prenumeraty:
 - na kraj i zagranicę – do 20 XI na I kwartał roku następnego
do 20 II na II kwartał
do 20 V na III kwartał
do 20 VIII na IV kwartał.

Cena 1 egzemplarza 8 000,- zł

Dziwne działanie otworu o zmiennej średnicy

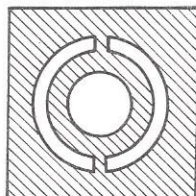
Juliusz DOMAŃSKI, Hanna OSICKA

W wielu szkołach znajduje się zestaw mikrofalowy z generatorem fal o długości około 3 cm. Proponujemy wykonanie niewielkiego uzupełnienia zestawu i przeprowadzenie interesującego doświadczenia na lekcji lub zajęciach koła fizycznego.

Mikrofalami nazywa się fale elektromagnetyczne o długości rzędu 1 cm.

Do wykonania elementów uzupełniających potrzebne będą 3 kawałki możliwie sztywnego kartonu o wymiarach około 35×35 cm.

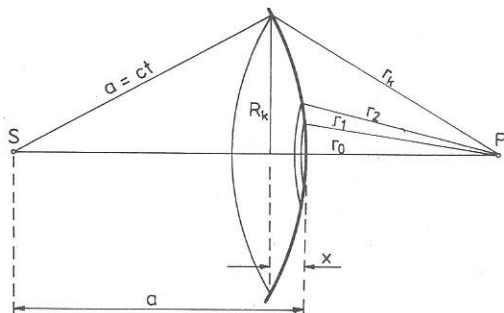
W pierwszym z nich wycinamy kołowy otwór o promieniu $R_1 = 5$ cm, w drugim o promieniu $R_2 = 7,1$ cm. W trzecim kołowy otwór o promieniu 5 cm i współśrodkowy z nim pierścień o promieniu wewnętrznym $R_3 = 8,7$ cm i zewnętrznym $R_4 = 10$ cm.



Kartony oklejamy folią aluminiową (do pakowania żywności), ponieważ powinny być „nieprzezroczyste” dla fal elektromagnetycznych. Oczywiście, lepsze (i trwalsze) byłyby przesłony wykonane z cienkiej, aluminiowej blachy.

Przystępujemy teraz do wykonania doświadczenia. Wylot anteny tubowej generatora i diodę mikrofalową ustawiamy w odległości około 32–33 cm. Diodę łączymy z wejściem Y oscylografu (o czułości rzędu 50 mV/cm) lub (a nawet lepiej) z odpowiednio czułym miernikiem. Opis wykonania takiego miernika, przydatnego do wielu innych doświadczeń, podamy na końcu artykułu. Uruchamiamy przyrządy. Na ekranie oscylografu (przy częstotliwości podstawy czasu większej od modulującej generator) powinniśmy uzyskać dwie równoległe, poziome linie. Odległość między liniami jest miarą wielkości odbieranego przez diodę sygnału. W połowie odległości między generatorem a diodą ustawiamy pierwszą przesłonę. Wylot generatora, środek otworu przesłony i dioda powinny znaleźć się na linii prostej. Wielkość odbieranego sygnału wyraźnie wzrasta! Uwaga: być może będziemy musieli teraz dokonać pewnej korekty ustawienia przyrządów – nasze źródło fal nie jest źródłem punktowym. Próbuujemy nieco zmienić położenie przesłony (lub diody), do uzyskania maksymalnego sygnału. Usuwamy przesłonę i wstawiamy drugą, z większym otworem. Odbierany sygnał maleje. Wygląda to dość dziwnie. Wykorzystujemy jeszcze trzecią przesłonę. Odbierany sygnał wzrasta niemal dwukrotnie!

A oto wyjaśnienie przebiegu doświadczenia. Rozważmy punktowe źródło S fali monochromatycznej, znajdujące się w ośrodku izotropowym. W dowolnej chwili czoło fali będzie mieć postać kuli o promieniu $a = ct$. Aby znaleźć amplitudę drgań w punkcie P , trzeba złożyć drgania wywołane falami ze wszystkich źródeł wtórnych na powierzchni falowej. W tym celu dzielimy czoło fali na obszary zwane strefami Fresnela.



Konstrukcja Fresnela: Czoło fali dzielimy na obszary (strefy) i traktujemy je jako niezależne, jednakowe źródła fal. Amplitudę fali w obserwowanym punkcie znajdujemy jako złożenie fal wytworzonych przez poszczególne strefy. Metoda daje dobre wyniki, jeśli tylko rozmiary otworów są większe niż długość fali.

O kilku otwartych problemach teorii liczb pierwszych

Władysław NARKIEWICZ

Już w szkole podstawowej stykamy się z liczbami pierwszymi. Określa się je jako liczby całkowite, większe od jedności, nie dające się przedstawić jako iloczyn liczb mniejszych. Takimi liczbami są np. liczby 2, 3, 5, 7, 65537, $2^{127} - 1$, czy też $2^{756839} - 1$. Ta ostatnia jest największą znaną obecnie liczbą pierwszą. Liczby pierwsze są cegiełkami, z których zbudowane są liczby naturalne – każda bowiem liczba naturalna większa od jedności daje się przedstawić jako iloczyn liczb pierwszych i to tylko na jeden sposób.

Liczby pierwsze i ich tajemnicze własności od wieków fascynują matematyków. Po raz pierwszy pojawiają się w *Elementach* Euklidesa, gdzie znajdujemy dowód tego, iż jest ich nieskończenie wiele. Od tego czasu odkryto wiele interesujących faktów o liczbach pierwszych, ale mimo to pozostaje jeszcze do rozwiązania szereg problemów ich dotyczących. Kilka z nich omówimy poniżej.

Funkcja $\pi(x)$ i hipoteza Riemanna

Jeden z głównych problemów teorii liczb pierwszych dotyczy zachowania się funkcji $\pi(x)$, dającej ilość liczb pierwszych w przedziale $[2, x]$. Nietrudno sprawdzić, że na przykład $\pi(10) = 4$, $\pi(1000) = 168$, a przy pewnym wysiłku można otrzymać $\pi(1\,000\,000) = 78\,498$. Analiza wzrostu funkcji $\pi(x)$ dla x aż do 3 000 000 skłoniła C.F. Gaussa do postawienia przypuszczenia, że jest ona dobrze przybliżana przez iloraz $x/\log x$. (Przez $\log x$ będziemy stale oznaczali logarytm naturalny liczby x .) W połowie XIX wieku P. Czebyszew wykazał, że iloraz

$$\frac{\pi(x)}{x/\log x}$$

leży pomiędzy dwiema dodatnimi stałymi, a w 1896 roku J. Hadamard i C. de la Vallée-Poussin niezależnie udowodnili, że iloraz ten zmierza do jedności wraz ze wzrostem x . Twierdzenie to nosi nazwę *twierdzenia o liczbach pierwszych* i zostało uznane za jedno ze szczytowych osiągnięć matematyki ubiegłego stulecia. Mówiono nawet, że jego autorzy uzyskali nieśmiertelność. To się prawie sprawdziło: Hadamard zmarł mając 98 lat, a de la Vallée-Poussin przeżył lat 96.

Można udowodnić, że różnica między funkcją $\pi(x)$ a $x/\log x$ jest mniejsza od $cx/\log^2 x$, gdzie c jest pewną dodatnią stałą, a przy tym tego oszacowania nie można polepszyć. Wynika stąd, że $x/\log x$ nie jest zbyt dobrym przybliżeniem dla funkcji $\pi(x)$. Znacznie lepsze przybliżenie daje funkcja $\text{li}(x)$, zwana *logarytmem całkowym*, a zdefiniowana wzorem

$$\text{li}(x) = a + \int_2^x \frac{dx}{\log x},$$

przy czym a jest pewną liczbą, której wartość nie jest tu istotna.

Okazuje się, że różnica

$$\Delta(x) \doteq |\pi(x) - \text{li}(x)|$$

jest przy każdym n naturalnym dla dostatecznie dużych x mniejsza niż $x/\log^n x$. Istnieje stare przypuszczenie, że oszacowanie to można znacznie poprawić, a mianowicie sądzi się, że dla każdej liczby $\alpha > 1/2$ mamy

$$(1) \quad \Delta(x) < x^\alpha,$$

o ile tylko x jest dostatecznie duże.

Wiadomo, że oszacowanie (1) jest konsekwencją tzw. *hipotezy Riemanna*, która dotyczy rozmieszczenia miejsc zerowych pewnej funkcji zmiennej zespolonej, mianowicie funkcji *zeta Riemanna*, która jest dla $x > 1$ określona wzorem

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x},$$

a którą można rozszerzyć do funkcji określonej na całej płaszczyźnie zespolonej. B. Riemann w 1859 roku wysunął przypuszczenie, że jeśli $0 < x < 1$ oraz $\zeta(x + iy) = 0$ przy pewnym rzeczywistym y , to $x = 1/2$. Przypuszczenie to nosi nazwę hipotezy Riemanna i mimo wielu prób pozostaje do dziś nie udowodnione.

Hipoteza Riemanna uchodzi za jeden z najtrudniejszych problemów współczesnej matematyki. D. Hilbert uważał ją za najważniejsze zagadnienie matematyczne. Jest w tym zapewne sporo przesady, jednakże konsekwencje udowodnienia tej hipotezy dla teorii liczb byłyby ogromne. Ujrzymy to przy omawianiu następných problemów.

Różnice między liczbami pierwszymi

Jeśli się przyjrzymy odstępom między kolejnymi liczbami pierwszymi, to nie dostrzeżemy tam żadnej wyraźnej prawidłowości. Znajdziemy bowiem mnóstwo liczb pierwszych różniących się o 2, np. 3 i 5, 5 i 7, 11 i 13, 17 i 19,

Pierwszą strefę Fresnela ograniczają punkty powierzchni falowej, których odległość od punktu P jest równa $r_1 = r_0 + \frac{\lambda}{2}$, gdzie λ – długość fali. Druga strefa znajduje się między skrajem pierwszej strefy a punktami powierzchni falowej, których odległość od punktu P jest równa $r_2 = r_1 + \frac{\lambda}{2} = r_0 + \lambda$. Analogicznie określamy granice

kolejnych stref, ogólnie: $r_k = r_0 + k \frac{\lambda}{2}$. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że promień R_k k -tej granicy między strefami wynosi

$$R_k^2 = \left(r_0 + \frac{k\lambda}{2}\right)^2 - (r_0 + x)^2 \approx k r_0 \lambda - 2 r_0 x \quad \text{oraz}$$

$$R_k^2 = a^2 - (a - x)^2 \approx 2ax.$$

Przybliżenie jest dobre, jeśli x i λ są małe w porównaniu z a . Eliminując z tych równań x otrzymujemy

$$R_k^2 = k \frac{a r_0 \lambda}{a + r_0}.$$

Obliczmy jeszcze sumę powierzchni pierwszych k stref:

$$S_k = \pi R_k^2 = \pi k \frac{a r_0 \lambda}{a + r_0},$$

a zatem powierzchnia pojedynczej strefy

$$S = S_k - S_{k-1} = \frac{\pi a r_0 \lambda}{a + r_0}.$$

Jak widać, powierzchnie stref Fresnela są w przybliżeniu jednakowe. Dlatego jednakowe powinny być także amplitudy drgań wzbudzonych w punkcie P przez fale biegnące od każdej strefy. Ponieważ każda następna strefa jest średnio o pół długości fali dalej od punktu P , fale dochodzące do punktu P różnią się w fazie o π .

Wypadkowa amplituda wywołana działaniem wszystkich stref w punkcie P wynosi $A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots$, co można zapisać w postaci

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2}\right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2}\right) + \dots$$

Z pewnym przybliżeniem możemy przyjąć, że

$$A_2 = \frac{1}{2}(A_1 + A_3), \quad A_4 = \frac{1}{2}(A_3 + A_5) \quad \text{itd.}$$

Wobec tego, gdy rozpatrujemy dużą liczbę stref, możemy napisać

$A = \frac{1}{2}A_1$, pomijając działanie ostatniej strefy. Wynik zaskakujący: działanie wszystkich stref Fresnela daje amplitudę równą połowie amplitudy od pierwszej strefy!

Zastanówmy się, co się stanie, gdy na drodze między punktami S i P ustawimy ekran z otworem o zmiennej średnicy. Dopóki promień otworu jest mniejszy od promienia pierwszej strefy Fresnela, dopóty jego zwiększanie powoduje wzrost amplitudy w punkcie P . Amplituda drgań osiąga wartość maksymalną wówczas, gdy promień otworu jest równy promieniowi pierwszej strefy. Przy dalszym zwiększaniu promienia otworu amplituda maleje (fale biegnące od pierwszej i drugiej strefy mają w punkcie P przeciwne fazy) i osiąga wartość minimalną, gdy promień otworu jest równy promieniowi drugiej strefy. Przy dalszym zwiększaniu promienia otworu otrzymujemy kolejno wzrost i spadek amplitudy wypadkowej.

A może potrafilibyście wykonać przesłonę o zmiennej w sposób ciągle średnicy otworu, np. na zasadzie przesłony irysowej stosowanej w aparatach fotograficznych?

Z konstrukcji Fresnela wynika możliwość znacznego zwiększenia promieniowania w punkcie P . Jeżeli odległość przesłony od źródła jest duża, można przyjąć, że strefy Fresnela leżą w płaszczyźnie przesłony. Można więc na drodze mikrofal umieścić płytkę, na której we wszystkich miejscach, gdzie znajdują się strefy parzyste (lub nieparzyste), naniesione są koncentryczne pierścienie z nieprzezroczystego dla mikrofal materiału. Wówczas do punktu P dochodzić będą fale w zgodnych fazach i wystąpi interferencja konstruktywna.

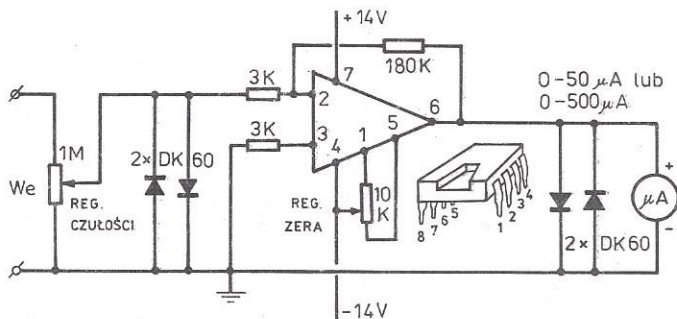
Płytkę strefową działa jak soczewka. Wyrażenie na promień pierwszej strefy $R_1^2 = \frac{ar_0\lambda}{a+r_0}$ możemy przekształcić do postaci:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{r_0} = \frac{\lambda}{R_1^2}$$

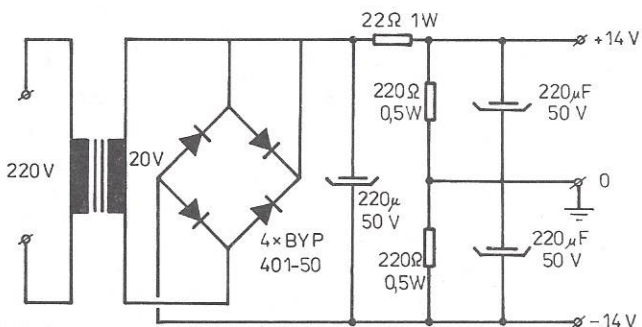
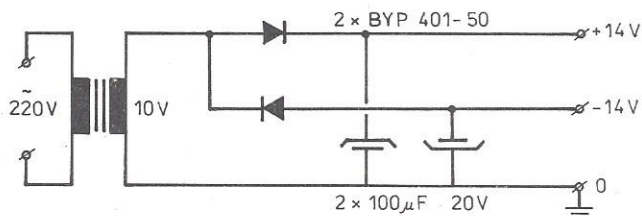
Jest to równanie soczewki o ogniskowej $f = \frac{R_1^2}{\lambda}$.

Sądzimy, że w tej chwili wynik doświadczenia jest w pełni zrozumiały. Dodajmy jeszcze, że jeśli w szkole nie ma generatora mikrofal, doświadczenie można wykonać z falami akustycznymi. Oczywiście, generator mikrofal zastępujemy generatorem akustycznym (o częstotliwości około 11 kHz) z niewielkim głośnikiem, a diodę mikrofonem z dowolnym wzmacniaczem.

I jeszcze obiecany schemat wzmacniacza do miernika.



Wykonamy go korzystając z łatwo dostępnego (i taniego) układu scalonego (wzmacniacz operacyjny) ULY 7741. Zasilanie, w najprostszym przypadku, za pomocą czterech baterii płaskich połączonych szeregowo (z wyprowadzonym „środkiem”). Można też wykonać zasilacz sieciowy wg jednego z rysunków przedstawionych poniżej. Powodzenia!



W przypadku, gdy Czytelnicy zechcą przeprowadzić stosowne doświadczenia, będziemy bardzo wdzięczni za listy z uwagami.

29 i 31 itd., a także ujrzymy odstępy dowolnie długie – np. wszystkie liczby z przedziału $[N! + 2, N! + N]$ są dla $N = 3, 4, 5, \dots$ złożone, ponieważ dla $k = 2, 3, \dots, N$ liczba $N! + k$ dzieli się przez k .

W 1845 roku J.L.F. Bertrand wysunął przypuszczenie (tzw. *postulat Bertranda*), że każdy przedział $(n, 2n]$ przy $n > 1$ zawiera przynajmniej jedną liczbę pierwszą i sprawdził to dla wszystkich $n < 3000000$. Dowód tego podał pięć lat później P. Czebyszew. Wkrótce potem pojawiło się pytanie, czy pomiędzy kolejnymi kwadratami liczb naturalnych musi leżeć liczba pierwsza. Odpowiedzi na nie nie znamy do dzisiaj. Pytanie to jest równoważne pytaniu, czy każdy przedział postaci $[x, x + 2\sqrt{x} + 1]$ zawiera liczbę pierwszą. W 1930 roku G. Hoheisel wykazał, że przedział $[x, x + x^\alpha]$, przy $\alpha = 1 - 1/33000$, zawiera dla dostatecznie dużego x przynajmniej jedną liczbę pierwszą. Dziś wiadomo, że w twierdzeniu Hoheisela można przyjąć za α dowolną liczbę większą od $6/11 = 0,5454\dots$ (S.T. Lou, Q. Yao, 1989). Przy założeniu słuszności hipotezy Riemanna nietrudno udowodnić, że za α można przyjąć dowolną liczbę większą od $1/2$.

Znacznie silniejszym przypuszczeniem jest *hipoteza Craméra*. Mówi ona, że jeśli p_n oznacza n -tą kolejną liczbę pierwszą, to istnieje taka stała C , że różnica $d_n = p_{n+1} - p_n$ nie przekracza $C \log^2 p_n$. Z hipotezy Riemanna wynika jedynie oszacowanie

$$d_n < C\sqrt{p_n} \log p_n,$$

udowodnione przez H. Craméra w 1921 roku.

Liczby pierwsze bliźniacze

Liczby pierwsze $p, p + 2$ nazywają się *liczbami pierwszymi bliźniaczymi*. Nie wiemy, czy takich liczb jest nieskończenie wiele, a największą znaną parę bliźniaczą tworzą liczby $1706595 \cdot 2^{11235} \pm 1$, znalezione w 1990 roku. W 1920 roku V. Brun zauważył, że liczby pierwsze bliźniacze nie mogą występować zbyt często. Udowodnił on mianowicie, że szereg utworzony z ich odwrotności jest zbieżny, podczas gdy już L. Euler wiedział, że szereg odwrotności wszystkich liczb pierwszych jest rozbieżny.

Definiuje się także pierwsze *trojaczki* jako trójki liczb pierwszych $p, p + 2, p + 6$. (Zauważmy, że liczby $p, p + 2, p + 4$ mogą być pierwsze jedynie w przypadku $p = 3$, gdyż jedna z nich musi być podzielna przez 3.) O nich niewiele wiadomo. Pytanie o liczbę pierwszych bliźniaków

i trojaczków jest szczególnym przypadkiem następującego przypuszczenia

L.E. Dicksona:

Jeśli a_1, a_2, \dots, a_n są liczbami naturalnymi o tej własności, że iloczyn

$$A(x) = x(x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n)$$

nie ma stałego dzielnika większego od 1, tj. nie ma takiej liczby $d > 1$, która dzieliłaby wszystkie wartości $A(1), A(2), A(3), \dots$, to istnieje nieskończenie wiele takich liczb pierwszych p , że wszystkie liczby $p + a_1, p + a_2, \dots, p + a_n$ są liczbami pierwszymi.

W przypadku $n = 1, a_1 = 2$ prowadzi to do problemu bliźniaków, a w przypadku $n = 2, a_1 = 2, a_2 = 6$ do trojaczków.

Przed kilkunastu laty powiązano przypuszczenie Dicksona z innym starym przypuszczeniem, dotyczącym funkcji $\pi(x)$. Chodzi o to, czy dla wszystkich x, y naturalnych słuszna jest nierówność

$$(2) \quad \pi(x + y) \leq \pi(x) + \pi(y),$$

z której wynika, że w żadnym przedziale o danej długości N nie może być więcej liczb pierwszych niż jest ich w przedziale $[1, N]$.

Okazało się mianowicie (D. Hensley, I. Richards, 1973), że to ostatnie przypuszczenie jest sprzeczne z przypuszczeniem Dicksona, a dokładniej, że ze słuszności przypuszczenia Dicksona wynika fałszywość nierówności (2) dla pewnych wartości x, y . Zatem jedno z tych przypuszczeń (a może i oba) musi być fałszywe. T. Vehka wykazał w 1979 roku, że jeśli hipoteza Dicksona jest prawdziwa, to istnieją przedziały o długości 11763, zawierające 1412 liczb pierwszych, podczas gdy przedział $[1, 11763]$ zawiera ich jedynie 1409.

Liczby pierwsze w postępach arytmetycznych

Nietrudno wykazać, że postęp arytmetyczny $3, 7, 11, 15, 19, \dots$, złożony z liczb naturalnych postaci $4k + 3$ zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych. Gdyby bowiem tak nie było i D byłoby iloczynem wszystkich liczb pierwszych tej postaci, to jedna z liczb $D + 2, D + 4$ dałaby się zapisać w postaci $4m + 3$. Ponieważ iloczyn dowolnej ilości liczb pierwszych postaci $4k + 1$ jest też tej postaci, zatem liczba $4m + 3$ musiałaby mieć dzielnik pierwszy p postaci $4k + 3$, a więc dzielnicy D , co jest niemożliwe, bo wówczas p dzieliłoby 2 lub 4.

Wynik ten jest szczególnym przypadkiem twierdzenia, udowodnionego w 1837 roku

Nierówności funkcyjne

Marek PYCIA

Autor jest zdobywcą złotego medalu w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki w 1992 r.

Przedstawię wybrane metody elementarnego rozwiązywania nierówności funkcyjnych na przykładzie analizy nierówności związanych z moją pracą nagrodzoną na Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki.

Będziemy rozważać funkcje zmiennej rzeczywistej o wartościach rzeczywistych nieujemnych, które dla wszystkich s i t ze swojej dziedziny spełniają nierówność

$$(1) \quad \frac{1}{2}f(s) + 2f(t) \leq f\left(\frac{1}{2}s + 2t\right).$$

W zależności od tego, jaka będzie dziedzina funkcji f , otrzymamy jakościowo inne rozwiązania. Przyjrzyjmy się kilku możliwościom.

1. $f: R \rightarrow [0, +\infty)$. Oczywiście, funkcja stale równa 0 spełnia (1). Wykażemy, że jest to jedyne rozwiązanie tej nierówności. Łatwo zauważyć (podstawiając w (1) $s = t = 0$), że $f(0) = 0$, a stąd dla dowolnego $t \in R$

$$f(t) \leq \frac{1}{2}f(-4t) + 2f(t) \leq f\left(\frac{1}{2}(-4t) + 2t\right) = f(0) = 0.$$

(bo f nieujemna)

Stąd $f(t) = 0$ (gdyż $f(t) \geq 0$).

2. $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$. Wykażemy, że w tym przypadku jedynymi rozwiązaniami (1) są funkcje liniowe, tzn. funkcje postaci $f(t) = at$. Podobnie jak poprzednio otrzymujemy $f(0) = 0$. Składając nierówności (iterując) mamy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}f(s_1) + 2f(s_2) \right) + 2 \left(\frac{1}{2}f(t_1) + 2f(t_2) \right) &\leq \\ &\leq \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}s_1 + 2s_2\right) + 2f\left(\frac{1}{2}t_1 + 2t_2\right) \leq \\ &\leq f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}s_1 + 2s_2\right) + 2\left(\frac{1}{2}t_1 + 2t_2\right)\right). \end{aligned}$$

Teraz podstawiając $s_1 = t_2 = 0, s_2 = s$ i $t_1 = t$ otrzymujemy

$$(2) \quad f(s) + f(t) \leq f(s + t),$$

czyli funkcja f jest tak zwaną funkcją nadaddytywną, a że wartości f są nieujemne, więc f jest niemalejąca. Podstawiając w nierówności (1) $s = 0$ uzyskujemy $2f(t) \leq f(2t)$. Natomiast podstawiając 0 w miejsce t i $2t$ w miejsce s uzyskujemy

$$\frac{1}{2}f(2t) \leq f(t). \text{ Z obu tych nierówności mamy } 2f(t) = f(2t). \text{ Stąd}$$

natomiast nietrudno jest wykazać indukcyjnie, że $f(2^m t) = 2^m f(t)$ dla każdego m całkowitego (m może być ujemne). Udowodnimy teraz, że dla każdego k naturalnego $f(kt) = kf(t)$. Istotnie.

Nietrudno jest wykazać indukcyjnie (korzystając z (2)), że $f(kt) \geq kf(t)$. Wystarczy więc wykazać, że zachodzi nierówność przeciwna, tzn. $f(kt) \leq kf(t)$. Wykażemy to też za pomocą indukcji. Dla $k = 1$ – oczywiście. Załóżmy teraz, że nierówność ta zachodzi dla liczb naturalnych mniejszych od k . Udowodnimy ją dla k . Otóż, jeżeli k jest parzyste, to

$$f(kt) = 2f\left(\frac{k}{2}t\right) \leq 2 \cdot \frac{k}{2}f(t) = kf(t).$$

(zał. ind.)

Jeżeli k jest nieparzyste, to

$$f(kt) \leq f((k+1)t) - f(t) = 2f\left(\frac{k+1}{2}t\right) - f(t) \leq$$

(wobec (2))
 $\leq 2\left(\frac{k+1}{2}\right)f(t) - f(t) = kf(t).$
 (zał. ind.)

Łącząc uzyskane równości otrzymujemy, że

$$(3) \quad f(k \cdot 2^m) = k \cdot 2^m f(1) \quad \text{dla } k \in N \text{ i } m \in Z.$$

Zbiór A liczb postaci $k \cdot 2^m$ jest gęsty w $(0, +\infty)$. Oznacza to, że dla dowolnej liczby dodatniej t znajdziemy takie dwa ciągi (a_n) i (b_n) o wyrazach ze zbioru A (tzn. każdą z liczb a_n i b_n można przedstawić w postaci $k \cdot 2^m$), że

$$a_n \leq t \leq b_n \quad \text{oraz} \quad a_n \rightarrow t, \quad b_n \rightarrow t.$$

Skąd wobec (3) i monotoniczności f mamy

$$a_n f(1) = f(a_n) \leq f(t) \leq f(b_n) = b_n f(1).$$

Przechodząc do granicy mamy

$$t f(1) \leq f(t) \leq t f(1),$$

czyli $f(t) = t f(1)$, a więc funkcja f jest liniowa.

Zauważmy, że nie tylko postać dziedziny funkcji f , ale i postać zbioru wartości ma decydujące znaczenie dla rozwiązywalności nierówności (1). Widzieliśmy, że wśród funkcji $f: R \rightarrow [0, +\infty)$ tylko funkcja stale równa zeru jest rozwiązaniem. Stąd wśród funkcji $f: R \rightarrow (0, \infty)$ nierówność (1) rozwiązań nie ma. Natomiast gdybyśmy szukali rozwiązań wśród funkcji $f: R \rightarrow R$, to można udowodnić korzystając z pewnego twierdzenia G. Hamela istnienie rozwiązań, których wykres jest gęstym podzbiorem płaszczyzny R^2 (tzn., że w każdym otoczeniu dowolnego punktu płaszczyzny znajdują się punkty wykresu)! Co więcej, rozwiązania te są addytywne, to znaczy spełniają warunek $f(s+t) = f(s) + f(t)$. Warunek ten jest silniejszy niż nierówność (1).

Nierówność (1) to szczególny przypadek następującej nierówności funkcyjnej

$$(4) \quad a f(s) + b f(t) \leq f(as + bt),$$

gdzie a i b są stałymi dodatnimi, a f jest, dla ustalenia uwagi, funkcją z $[0, +\infty)$ w $[0, +\infty)$.

Jeżeli $a + b = 1$, to nierówność (4) jest równoważna nierówności definiującej wklęsłość funkcji

$$\lambda f(s) + (1 - \lambda)f(t) \leq f(\lambda s + (1 - \lambda)t) \quad \text{dla wszystkich } \lambda \in [0, 1]$$

(wynika to z pewnych twierdzeń Kuhna, Daróczego, Pálesa, i Bernsteina-Doetscha).

Gdy $a + b < 1$, pojawiają się rozwiązania nieciągłe (zgodnie z rezultatami K. Barona, J. Matkowskiego i K. Nikodema); podobnie jest, gdy $a + b \geq 1$. Przypadek $a < 1 < a + b$ (zbadany przez J. Matkowskiego) można sprowadzić do przypadku $a < 1 < b$ (iterowanie!), a rozwiązaniami tego ostatniego są wyłącznie funkcje liniowe. Dowód daje się poprowadzić dla niektórych wartości stałych a i b tak jak w punkcie 2. W ogólnym jednak przypadku trzeba sobie radzić trochę inaczej.

Wszystkie te wyniki są znane. Czym zatem zajmowałem się w pracy konkursowej? – innymi przypadkami nierówności

$$(5) \quad \alpha f(s) + \beta f(t) \leq f(as + bt),$$

gdzie $f: (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, α, β, a, b są stałymi dodatnimi oraz $a < 1 < b$. Przy tym założeniu udało się udowodnić, że jeżeli dla danych a, b, α, β nierówność (5) ma rozwiązanie niezerowe, to ma także rozwiązanie potęgowe. Pomogło to opisać klasy rozwiązań (5) (podobnie jest z nierównością $\alpha f(s) + \beta f(t) \geq f(as + bt)$, gdy $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 0$).

przez P.G. Lejeune Dirichleta, a głoszącego, że każdy postęp arytmetyczny, utworzony z liczb naturalnych, którego pierwszy wyraz jest względnie pierwszy z różnicą postępu, zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Powstaje pytanie, jak duża może być najmniejsza liczba pierwsza leżąca w takim postępie. Z hipotezy Riemanna można wydedukować, że jeśli c jest dowolną liczbą większą od 2, oraz d jest dostatecznie duża, liczbą naturalną, to w każdym z postępów arytmetycznych

$$dk + a \quad (k = 1, 2, \dots; \\ 1 \leq a < d, \\ (a, d) = 1)$$

znajduje się liczba pierwsza nie przekraczająca d^c . W 1944 roku J.V. Linnik udowodnił (bez żadnych nieudowodnionych hipotez), że to twierdzenie jest słuszne dla pewnego, zresztą bardzo dużego, wykładnika c . Problemem zmniejszenia wielkości c w twierdzeniu Linnika zajmowało się wielu autorów. Przedostatni rekord należy do J.R. Chena i J.M. Liu, którzy w 1989 roku wykazali, że za c można przyjąć dowolną liczbę większą od 13,5, a zupełnie świeżo, bo w 1991 roku, Wang Wei zastąpił tu liczbę 13,5 przez 8.

Problem Goldbacha

W 1742 roku G. Goldbach zapytał, czy każda liczba parzysta, większa od 4, jest sumą dwóch liczb pierwszych nieparzystych i czy każda liczba nieparzysta, większa od 7, jest sumą trzech liczb pierwszych nieparzystych. Pytanie to nosi nazwę problemu Goldbacha, a pełnej odpowiedzi na nie dotąd nie znamy.

Pierwszy krok w kierunku rozwiązania tego problemu uczynili w 1922 roku G.H. Hardy i J.E. Littlewood, którzy przy użyciu pewnych hipotez, będących uogólnieniem hipotezy Riemanna (a dotąd nie udowodnionych) udowodnili, że każda dostatecznie duża liczba nieparzysta jest sumą trzech liczb pierwszych nieparzystych. W 1937 roku I.M. Winogradow uzyskał tenże wynik, już bez użycia żadnych nieudowodnionych hipotez. Niedawno J.R. Chen i T.Z. Wang wykazali, że każda liczba nieparzysta większa od

$$e^{11,503}$$

jest sumą trzech liczb pierwszych. Niestety, liczba ta jest zbyt duża, by sprawdzić przypuszczenia Goldbacha dla wszystkich mniejszych liczb

nieparzystych. Sprawdzenia takiego dokonano jedynie dla liczb nie przekraczających $2 \cdot 10^{10}$ (A. Granville, J. van de Lune, H.J.J. te Riele, 1989).

W problemie Goldbacha dla liczb parzystych postęp był znacznie mniejszy. Dziś wiemy jedynie, że ilość liczb parzystych, mniejszych od x , które nie są sumami dwóch liczb pierwszych, nie przekracza cx^{δ} , gdzie c jest pewną stałą i $\delta < 1$ (H.L. Montgomery, R.C. Vaughan, 1971), a nadto każda dostatecznie duża liczba parzysta jest sumą liczby pierwszej i liczby, która jest bądź pierwsza, bądź też jest iloczynem dwóch różnych liczb pierwszych (J.R. Chen, 1973).

Wszystkie te wyniki uzyskano za pomocą trudnych środków analitycznych. Prostsze podejście zaproponował w 1930 roku L.G. Schnirelman, który za pomocą elementarnych metod udowodnił istnienie takiej liczby M , że każda liczba naturalna jest sumą co najwyżej M liczb pierwszych. Najmniejsza taka liczba M nosi nazwę *stałej Schnirelmana*, a przypuszczenie Goldbacha jest równoważne równości $M = 3$. Pierwsza wartość M była ogromna, ale obecnie udało się ją znacznie zmniejszyć, a rekord należy do H. Riesel i R.C. Vaughana, którzy w 1983 roku wykazali, że można przyjąć $M = 18$.



Rozwiązanie zadania M. 668. Niech S oznacza sumę naszego szeregu; w układzie siódmkowym mamy

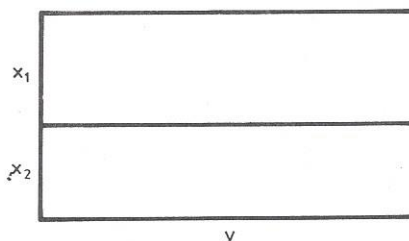
$$S = 0, 1001000010000001 \dots,$$

a dobrze wiadomo, że liczba o nieokresowym rozwinięciu (w jakimkolwiek układzie!) jest niewymierna.

Komentarz do artykułu Marka Pyci

W artykule Marka Pyci (str. 4), punkt 2, zostało udowodnione, że funkcja spełniająca podaną tam nierówność (1) (np. spełniają ją funkcje addytywne, tj. takie, że $f(x+y) = f(x) + f(y)$ dla dowolnych x i y), mająca za dziedzinę i zbiór wartości zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych, jest funkcją liniową, tj. postaci $f(t) = at$, dla stałego a . Wynika stąd od razu, że jedynym możliwym wzorem na pole prostokąta o bokach x i y jest αxy , gdzie α jest stałą (zależną od wyboru jednostki długości).

Oznaczmy bowiem pole prostokąta przez $P(x, y)$.



Rys. 1

Z rysunku 1 wynika, że

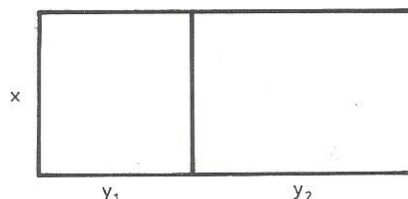
$$P(x_1 + x_2, y) = P(x_1, y) + P(x_2, y).$$

Ustalmy wartość y . Zgodnie z dowodem Marka Pyci funkcja $f_y(x) = P(x, y)$, jako spełniająca równość

$$f_y(x_1 + x_2) = f_y(x_1) + f_y(x_2),$$

jest postaci $f_y(x) = a(y) \cdot x$.

Spójrzmy teraz na rysunek 2.



Rys. 2

Mamy

$$P(x, y_1 + y_2) = P(x, y_1) + P(x, y_2).$$

A zatem

$$f_{y_1+y_2}(x) = f_{y_1}(x) + f_{y_2}(x).$$

Mamy więc dla dowolnego x

$$a(y_1 + y_2)x = a(y_1)x + a(y_2)x,$$

w szczególności, dla $x = 1$,

$$a(y_1 + y_2) = a(y_1) + a(y_2).$$

Znów odwołując się do tego samego dowodu otrzymujemy, że $a(y) = \alpha \cdot y$, gdzie α jest stałą.

Zatem $P(x, y) = f_y(x) = a(y)x = \alpha xy$, co chcieliśmy wykazać.

Inny dowód tego samego faktu można znaleźć w artykule Marka Kuczmy (co jeden, to Marek), w *Delcie* 1/1977 lub 7/1983.

Marek KORDOS

Rozwiązać równanie $y^x = x^y$

Rozwiążemy to równanie przy założeniu, że $x > 0$ i $y > 0$. Otóż pary postaci (v, v) , gdzie $v > 0$, są rozwiązaniami równania.

Przypuśćmy teraz, że para (x, y) , gdzie $x \neq y$, jest też rozwiązaniem równania.

Wtedy $y = ax$, dla pewnego $0 < a \neq 1$, oraz prawdziwe są równości

$$\begin{aligned} (ax)^x &= x^{ax}, & ax &= x^a, & a &= x^{a-1}, \\ x &= a^{\frac{1}{a-1}}, & y &= a \cdot a^{\frac{1}{a-1}}, & y &= a^{\frac{a}{a-1}}. \end{aligned}$$

Zatem wykazaliśmy, że jeśli (x, y) , gdzie $x \neq y$, jest rozwiązaniem równania, to $(x, y) = \left(a^{\frac{1}{a-1}}, a^{\frac{a}{a-1}}\right)$, gdzie $0 < a \neq 1$. Innymi słowy, wykazaliśmy, że jedynie pary postaci $\left(a^{\frac{1}{a-1}}, a^{\frac{a}{a-1}}\right)$, gdzie $0 < a \neq 1$, są potencjalnymi „kandydatami” na rozwiązania równania leżące poza półprostą $y = x$, $x > 0$.

Czy „kandydaci ci przejdą”, przekonamy się przez sprawdzenie. Mamy więc sprawdzić, czy zachodzi równość

$$\left(a^{\frac{a}{a-1}}\right)^{a^{\frac{1}{a-1}}} = \left(a^{\frac{1}{a-1}}\right)^{a^{\frac{a}{a-1}}}.$$

Przekształcając równoważnie mamy

$$\left(a^{\frac{a}{a-1}}\right)^{a^{\frac{1}{a-1}}} = \left(a^{\frac{1}{a-1}}\right)^{a \cdot a^{\frac{1}{a-1}}}, \quad a^{\frac{a}{a-1}} = \left(a^{\frac{1}{a-1}}\right)^a - \text{prawda oczywista.}$$

Odp. Wszystkimi rozwiązaniami równania są pary postaci (a, a) , gdzie $a > 0$, oraz pary postaci $\left(a^{\frac{1}{a-1}}, a^{\frac{a}{a-1}}\right)$, gdzie $0 < a \neq 1$.

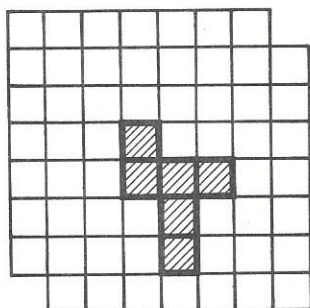
Robert HAJŁASZ

Odcinek dla poczty	Odcinek dla posiadacza rachunku	Potwierdzenie dla wpłacającego
Zł	Zł	Zł
słownie złotych	słownie złotych	słownie złotych
Dokładny adres wpłacający	Dokładny adres wpłacający	Dokładny adres wpłacający
na r-k AMOS	na r-k AMOS	na r-k AMOS
01-506 Warszawa	01-506 Warszawa	01-506 Warszawa
ul. Szenwalda 1	ul. Szenwalda 1	ul. Szenwalda 1
nazwa banku PKO VIII O/W-wa	nazwa banku PKO VIII O/W-wa	nazwa banku PKO VIII O/W-wa
Nr r-ku 1586-77578-136	Nr r-ku 1586-77578-136	Nr r-ku 1586-77578-136
stempel	stempel	stempel
podpis przyjmującego	podpis przyjmującego	podpis przyjmującego
Pobrano opłatę	Pobrano opłatę	Pobrano opłatę
zł	zł	zł



mata delta

Wystarczy pomalować



Rys. 1. Położyliśmy trzy kostki domina.

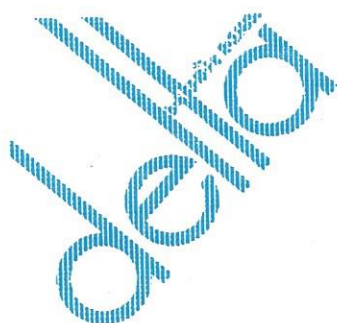
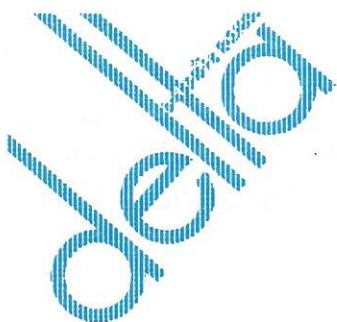
Czy można pokryć kostkami domina obszar taki, jak na rysunku 1? Kostkami domina pokrywamy za każdym razem dwa pola. Kostki mają na siebie nie zachodzić i nie wychodzić poza brzeg.

Nie zachęcamy do zbyt wielu prób, bo... i tak się nie uda. Dlaczego? Wystarczy pomalować nasz obszar w szachownicę. Kostki domina pokrywają za każdym razem jedno białe i jedno czarne pole. A więc niezależnie od tego, jak sprytnie układamy domino, to i tak cały czas pokrywamy tyle samo pól białych co czarnych, a że nasz obszar ma o dwa pola więcej w jednym kolorze niż w drugim, więc tej wygryzionej szachownicy nie pokryjemy.

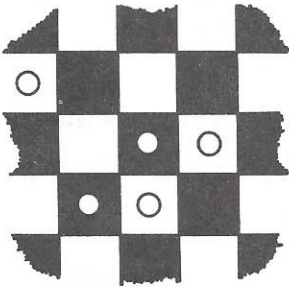
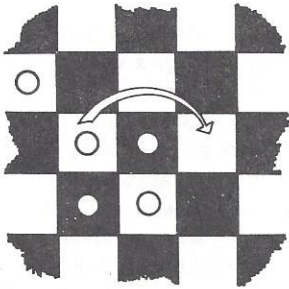
Prenumerata „Deltę”
za okres:

Prenumerata „Deltę”
za okres:

Prenumerata „Deltę”
za okres:



Czy można obejść ruchem konika szachowego całą szachownicę 8×8 startując z lewego dolnego rogu i kończąc na prawym górnym, stając na każdym polu dokładnie raz?



Rys. 2

Znowu jakoś nic nie wychodzi. Rzeczywiście, to jest niewykonalne. Aby to udowodnić, podobnie jak poprzednio, wykorzystamy fakt, że szachownica jest pomalowana. Początkowo stoimy w lewym dolnym rogu na polu czarnym. Po pierwszym ruchu przejdziemy na białe, po drugim znowu na czarne – za każdym razem zmienia się kolor pola, na którym stajemy.

Po nieparzystym ruchu zawsze lądujemy na polu białym. Aby przejść całą szachownicę, musimy wykonać 63 ruchy – nieparzystą liczbę, a więc zakończymy na polu białym, nie może to zatem być prawy górny róg (bo jest on czarny).

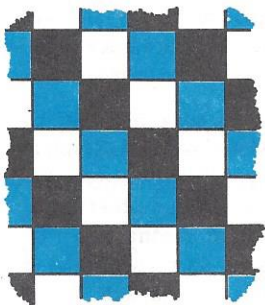
A swoją drogą, czy można obskoczyć szachownicę konikiem stając na każdym polu dokładnie raz? (Już nic nie zakładamy, gdzie mamy zakończyć.)

Na zakończenie przyjrzyjmy się jeszcze jednej grze – w „samotnika”. Weźmy bardzo, bardzo dużą szachownicę 100×100 , albo jeśli ktoś woli, to może wziąć jeszcze większą, na przykład 1000×1000 . Gdzieś pośrodku tej szachownicy ustawmy z pionków prostokąt o bokach 9 na 10.

Jedynym dozwolonym ruchem jest bicie – podobnie, jak w warcabach, z tym że możemy przeskakiwać sąsiadów jedynie w poziomie lub w pionie: w lewo, w prawo, w górę lub w dół. Nie dopuszczamy natomiast bicia na ukos. (Przykłady ruchów – bić – pokazane są na rysunku 2.)

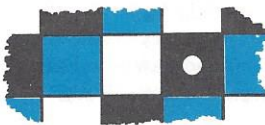
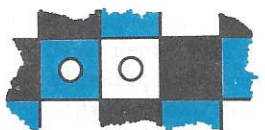
Czy możemy doprowadzić do sytuacji, w której pozostanie tylko jeden pionek?

I tym razem nie uda nam się wygrać ze sobą. A oto dlaczego. Mimo iż szachownica jest już pomalowana, to my ją pomalujemy inaczej – na trzy kolory – tak, jak na rysunku 3.



Rys. 3

Zauważmy, że ponieważ długość jednego z boków naszego prostokąta jest podzielna przez 3, to na polach każdego z trzech kolorów stoi po tyle samo (po 30) pionków. A więc na polach każdego koloru stoi parzysta liczba pionków. Wykonajmy teraz bicie, na przykład takie, jak na rysunku 4.



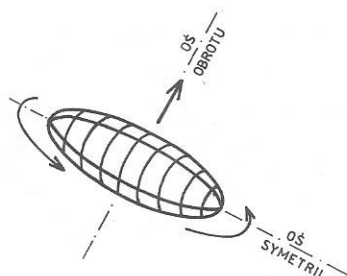
Rys. 4

Wówczas na polach różnych kolorów stoi odpowiednio po 29, 29 i 31 pionków. Wszystkie te liczby są nieparzyste. Po kolejnym biciu otrzymamy trzy liczby parzyste (bo na polach dwóch kolorów zmaleje liczba pionków o 1, a na polu trzeciego koloru wzrośnie o 1). Po kolejnym biciu – trzy liczby nieparzyste. Za każdym razem: albo na polach każdego koloru stoi parzysta liczba pionków, albo na polach każdego koloru stoi nieparzysta liczba pionków. Nie możemy więc doprowadzić do sytuacji, gdy zostanie tylko jeden pionek.

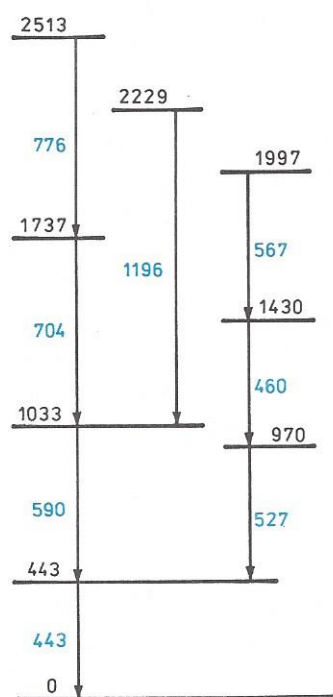
Małą Deltę przygotował Piotr HAJŁASZ

Spektroskopia jądrowa (fotony w fizyce jądrowej)

Krzysztof STAROSTA



Rys. 1



Rys. 2. Fragment schematu poziomów jądra ^{128}Xe z zaznaczonymi energiami poziomów. Kolorem zaznaczono energie przejść gamma. Wszystkie energie wyrażone są w keV.



Rozwiązanie zadania M. 662. Niech n oznacza liczbę małych trójkątów, l zaś – liczbę ich boków położonych wewnątrz dużego trójkąta. Spośród wszystkich $3n$ boków n małych trójkątów 3 boki są jednocześnie bokami dużego trójkąta, a pozostałe leżą w jego wnętrzu, więc każdy z nich liczymy dwukrotnie (bo jest wspólny dla dwóch sąsiednich małych trójkątów). Zatem

$$\frac{3n - 3}{2} = l$$

jest liczbą całkowitą, czyli n musi być nieparzyste.

Mimo że od odkrycia E. Rutherforda upłynęło ponad 80 lat, jądro atomowe cieszy się niesłabnącym zainteresowaniem fizyków. Opis obiektu zbudowanego z wielu nukleonów (protonów i neutronów) stawia przed fizyką teoretyczną trudne, lecz zarazem bardzo interesujące problemy. Podstawowa trudność wynika właśnie z liczby składników jądra. Choć mechanika kwantowa (czyli mechanika mikroświata) radzi sobie z wieloma skomplikowanymi problemami, to jednak w jej ramach nie potrafimy dokładnie rozwiązać problemu wielu oddziałujących ciał (nie potrafi tego także mechanika klasyczna!). Kluczem do poznania jądra stały się więc „modele” przyjmujące założenia oparte na fizycznej intuicji i upraszczające rachunki. Jednym z takich modeli jest model rotatora traktujący jądro jako obracającą się bryłę sztywną kształtem przypominającą np. cygaro lub dysk (rys. 1). Energia związana z obrotem takiej bryły jest dana wzorem znanym z kursu mechaniki klasycznej

$$(1) \quad E = \frac{L^2}{2J},$$

gdzie L jest momentem pędu, a J momentem bezwładności jądra liczonym względem osi obrotu. Zgodnie z mechniką kwantową uzyskujemy wzór bardzo podobny, w którym kwadrat klasycznego momentu pędu zastępujemy wyrażeniem

$$(2) \quad L^2 = I(I + 1) \left(\frac{h}{2\pi} \right)^2,$$

gdzie h jest stałą Plancka, a I spinem, czyli miarą wewnętrzznego momentu pędu jądra. Spin jest wielkością skwantowaną, więc może przyjmować tylko ściśle określone wartości, np. dla jąder o parzystej liczbie nukleonów przyjmuje wartości całkowite $I = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$. Tak więc (oznaczając $h/2\pi$ jako \hbar) mamy

$$(3) \quad E = \frac{\hbar^2}{2J} I(I + 1), \quad I = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

W powyższym wzorze bardzo interesujący dla fizyka jest parametr J . Moment bezwładności silnie zależy od rozkładu masy obracającej się bryły, a rozkład masy zależy przecież od wewnętrznej budowy obiektu. Zmierzony moment bezwładności to bardzo cenna informacja o wewnętrznej strukturze jądra, pozwala np. wyznaczyć stosunek długości do maksymalnej średnicy „cygara” lub grubości do średnicy „dysku”, a więc pozwala poznać kształt jądra.

Aby wyznaczyć moment bezwładności, musimy znać energie jądra oraz momenty pędu (patrz wzór (3)). Takich informacji dostarcza eksperyment. Metodą doświadczalną stosowaną do wyznaczania energii stanów jądra jest spektroskopia jądrowa, tzn. analiza energetyczna widm promieniowania elektromagnetycznego uzyskanych z obserwacji danego obiektu. Wyniki badań spektroskopowych odegrały bardzo istotną rolę w nowoczesnej fizyce. Interpretacja widm wodoru przyczyniła się do rozwoju mechaniki kwantowej. Spektroskopia wykorzystuje fakt istnienia w układach kwantowo-mechanicznych poziomów o dobrze określonej energii. Przykładem może być znany ze szkoły model atomu Bohra, gdzie elektron porusza się po ściśle określonych orbitach, dla których przyjmuje dokładnie określone energie. W modelu rotującego jądra stan jest określony przez wartość momentu pędu, a energię stanu opisuje przytoczony wzór (3). Pomiedzy stanami możliwe są przejścia. Aby spełnione było prawo zachowania energii, przejściu towarzyszy emisja lub absorpcja fotonu (czyli promieniowania elektromagnetycznego) o energii równej różnicy energii poziomów (mówi o tym drugi postulat Bohra). W przypadku atomu wodoru fotony niosą energię kilka bądź kilkanaście elektronowoltów; należą więc do części widzialnej promieniowania elektromagnetycznego. W przypadku jądra atomowego energie fotonów są około milion razy większe. Zadaniem eksperymentatora jest zmierzenie energii fotonów i odtworzenie schematu poziomów, np. takiego, jak na rysunku 2. Wnioski, jakie teoretycy potrafili wysnuć z analizy schematów, przedstawia w bardzo interesujący sposób artykuł J. Dobaczewskiego i W. Nazarewicza *O obrotach ciał niewielkich* (*Delta* 2, 4/1988).

Dynamiczny rozwój spektroskopii jądrowej rozpoczął się w latach sześćdziesiątych. Znalaziono wtedy nową metodę dokładnego i łatwego pomiaru energii wysokoenergetycznego fotonu (czyli promieniowania gamma). O ile widma atomów przypadające w części widzialnej promieniowania analizuje się metodami optycznymi (za pomocą siatek dyfrakcyjnych lub pryzmatów), to aby zmierzyć energię kwantu gamma, należy użyć bardziej wyrafinowanych metod.



Rozwiązanie zadania F 353.

Energia obrotowa bryły sztywnej

dana jest wzorem $E = \frac{I\omega^2}{2}$, gdzie I jest momentem bezwładności, dla kuli wynoszącym $\frac{2}{5}MR^2$, zaś

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ jest prędkością kątową.

Stąd $E = \frac{1}{5} \frac{MR^2 \cdot 4\pi^2}{T^2}$. Moc P jest pochodną czasową energii:

$$P = \left| \frac{dE}{dt} \right| = \frac{1}{5} \frac{MR^2 4\pi^2}{T^3} \cdot 2 \cdot \frac{dT}{dt}$$

Podstawiając $\frac{dT}{dt} = 0,0016$ s/stulecie otrzymujemy

$$P = 3,0 \cdot 10^{13} \text{ W, oraz } \frac{P_0}{P} = \frac{1}{2}$$

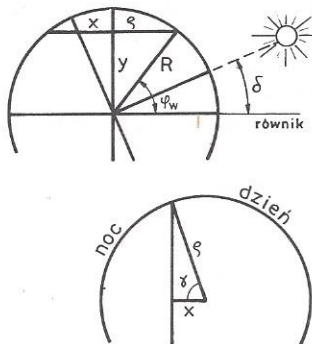
Wynika stąd, że ludzkość zużywa mniej energii niż wydziela się w trakcie przyływów i odpływów.



Rozwiązanie zadania F 354.

Niech $\vec{\omega} = (\omega \cos \alpha, 0, \omega \sin \alpha)$ wyznacza położenie osi ziemskiej, a $\vec{r} = (r \cos \Omega(t-t_0), r \sin \Omega(t-t_0), 0)$ jest wektorem łączącym Ziemię ze

Słońcem ($t_0 = 172, \Omega = \frac{2\pi}{365}$). Kąt δ określający wysokość Słońca nad równikiem (tj. deklinację) możemy znaleźć z iloczynu skalarnego $\vec{\omega} \cdot \vec{r} = \omega \cdot r \cos(\pi/2 - \delta) = r\omega \cos \alpha \cos \Omega(t-t_0)$. Stąd $\delta = \pi/2 - \arccos(\cos \alpha \cos \Omega(t-t_0))$. Warszawa obiega oś ziemską po okręgu o promieniu $\varrho = R \cos \varphi_w$, gdzie R jest promieniem Ziemi. Płaszczyzna prostopadła do promieni słonecznych dzieli ten okrąg na sferę dnia i nocy.



Na podstawie rozważań trygonometrycznych znajdujemy:

$$y = R \sin \varphi_w, x = y \cdot \operatorname{tg} \delta.$$

$$\text{Stąd } \cos \gamma = x/\varrho = \operatorname{tg} \varphi_w \operatorname{tg} \delta,$$

$$\gamma = \arccos(\operatorname{tg} \varphi_w \operatorname{tg} \delta).$$

Kąt 2γ określa długość nocy, stąd kąt $2\pi - 2\gamma$ określa długość dnia. Długość dnia w godzinach jest równa

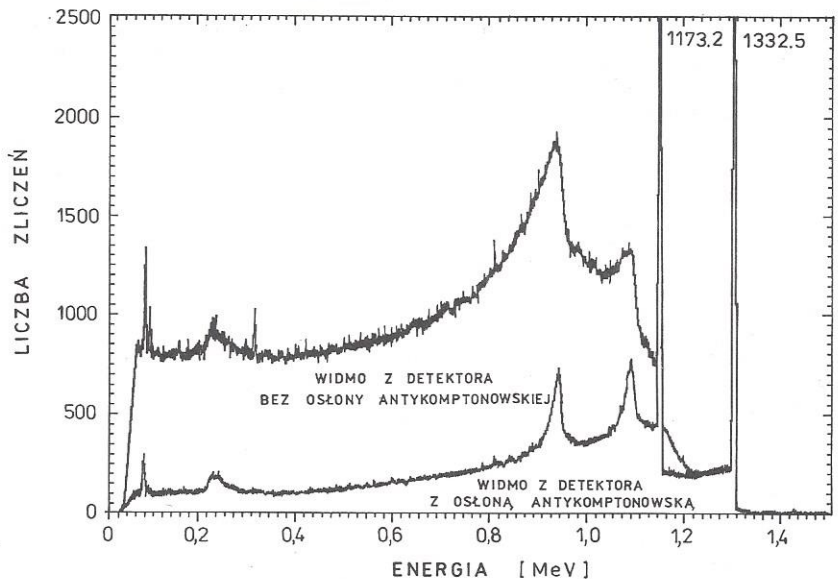
$$\tau = \frac{\pi - \gamma}{\pi} \cdot 24.$$

Dla 1 września ($t = 244$) mamy $\tau = 13$ godzin 17 minut (13 godz 37 min według kalendarza). W naszym rachunku poprawki związane z rozmiarami Słońca, ugięciem promieni w atmosferze oraz eliptycznym kształtem orbity ziemskiej nie zostały uwzględnione.

Nie potrafimy rejestrować kwantów gamma bezpośrednio. Jak wiadomo ze szkoły, foton nie ma ładunku. Nie potrafimy więc zaobserwować toru fotonu tak, jak to ma miejsce w przypadku cząstek naładowanych, które poruszając się np. zostawiają ślad w specjalnych emulsjach. Nie można zagiąć toru fotonu w polu magnetycznym, by wyznaczyć jego energię z pomiaru krzywizny toru. Foton oddziałuje z materią jedynie w procesie zderzeń, np. zderzeń z lekkimi cząstkami – elektronami. Możliwa jest jedynie pośrednia obserwacja fotonu poprzez rejestrację elektronu po zderzeniu. Przy obecnym stanie techniki rejestracja elektronu, dobrze nam znanej cząstki naładowanej, nie jest trudna.

Przyrządami obecnie najdokładniej mierzącymi energie kwantów gamma są germanowe detektory półprzewodnikowe, których najistotniejszym elementem jest kryształ germanu. Detektor przypomina dużą diodę półprzewodnikową spolaryzowaną w kierunku zaporowym. Całość chłodzi się ciekłym azotem. W niskiej temperaturze przez półprzewodnik nie płynie prąd, gdyż wszystkie nośniki znajdują się w paśmie podstawowym. Gdy kwant gamma wpadnie do detektora, może zderzyć się z elektronem przekazując mu całą swoją energię i zniknąć. fZachodzi tu znane ze szkoły zjawisko fotoelektryczne. Elektron poruszając się w kryształach jonizuje atomy, czyli wyrывa z nich elektrony. Wyrывa ich tym więcej, im wyższą ma energię. Wytworzone w ten sposób nośniki umożliwiają krótkotrwały przepływ prądu przez diodę. Natężenie tego prądu jest proporcjonalne do energii kwantu gamma. Mierzmy więc energię fotonów mierząc natężenie prądu! Dokładność pomiaru energii jest obecnie bardzo dobra – kwant o energii 1000 keV mierzymy z dokładnością 0,1 keV.

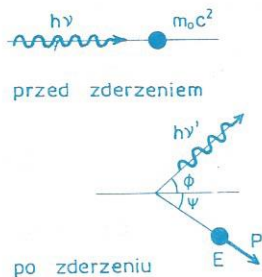
Tak dobry detektor, chociaż spowodował szybki postęp w badaniach, miał jednak bardzo poważną wadę. Otóż, w detektorze bardzo często obok zjawiska fotoelektrycznego ma miejsce tzw. efekt Comptona. W wyniku zjawiska Comptona elektronowi przekazana jest tylko część energii fotonu, który nie znikną, lecz zmienia kierunek lotu. Elektron z oczywistych przyczyn uzyska mniej energii w wyniku zjawiska Comptona niż w zjawisku fotoelektrycznym. Co gorsza, elektrony wybite w zjawisku Comptona mają różne energie zależne od kierunku rozproszenia fotonu (patrz notatka poniżej). Dlatego w widmie zmierzonych energii oprócz silnego, bardzo wysokiego pików odpowiadającego całkowitemu przekazowi energii w wyniku zjawiska fotoelektrycznego, pojawi się szerokie rozmyte „tło” odpowiadające przekazowi energii w wyniku efektu Comptona. Informację o energii fotonów daje nam położenie pików (rys. 3), tło zaś nie niosące istotnej informacji utrudnia pomiary, szczególnie słabych linii.



Rys. 3. Porównanie widm pochodzących z detektorów z osłoną i bez osłony antykomptonowskiej. Linie odpowiadające energiom 1173 i 1332 keV w obu przypadkach są takie same, redukcja ulega tło pochodzące od zjawiska Comptona.

Zjawisko Comptona to rozpraszanie fotonów na elektronach. Fotonowi przypisuje się energię $h\nu$ i pęd $h\nu/c$ (c – prędkość światła). Zakładamy, że elektron przed zderzeniem z fotonem spoczywa. Jego energia wynosi wtedy m_0c^2 , w wyniku zaś rozproszenia uzyskuje energię E i pęd p . Równanie zachowania energii ma postać

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + E,$$



a równania zachowania pędu

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \phi + p \cos \psi, \quad 0 = \frac{h\nu'}{c} \sin \phi - p \sin \psi.$$

W powyższych wzorach ν' oznacza częstotliwość promieniowania rozproszonego, ϕ i ψ – kąty rozproszenia (rysunek obok). Równania te można rozwiązać obliczając zmianę długości fali fotonu (a więc także częstotliwości i energii) $\lambda = c/\nu$ w zależności od kąta rozproszenia ϕ . Pomocny jest przy tym relatywistyczny związek pędu z całkowitą energią elektronu

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4.$$

Pamiętając, że energia fotonu jest dana wzorem $E = h\nu = hc/\lambda$, otrzymujemy

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = hc \left(\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} \right) = \frac{h}{mc} (1 - \cos \phi),$$

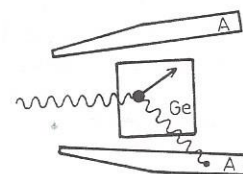
gdzie λ' to długość fali fotonu rozproszonego, $\Delta\lambda$ zaś jest zmianą długości fali.

Z efektem Comptona poradzono sobie w bardzo sprytny sposób. Otoczono detektor germanowy innym dużym detektorem (zwanym osłoną antykomptonowską), który bardzo efektywnie wykrywa wpadające do niego kwanty γ . Z tak skonstruowanej pułapki rzadko który foton wychodzi niezauważony. Wyobraźmy sobie, że do detektora germanowego wpadł kwant, który został zarejestrowany dzięki efektowi Comptona. Rozproszony w wyniku tego zjawiska foton wyleci z kryształu germanu i trafi do otaczającej go osłony, gdzie zostanie zarejestrowany (rys. 4). W takim przypadku zostaną uruchomione dwa detektory: germanowy i osłona. Komputer zbierający dane nie rejestruje zdarzeń, gdy zadziałają osłony. W ten sposób do analizy wybieramy zdarzenia, w których rejestrujemy całą energię fotonu, znacznie redukując tło. Rysunek 3 przedstawia widmo z detektora germanowego z osłoną i bez osłony antykomptonowskiej.

W pierwszych eksperymentach wykorzystywano jeden detektor germanowy. Rozszyfrowanie schematu poziomów na podstawie jednego tylko widma jest jednak dość trudne. Zaczęto więc używać dwóch, a potem większej liczby detektorów rejestrując fotony w koincydencji.

Pomiary koincydencyjne polegają na nałożeniu na układ zbierania danych pewnych warunków czasowych. Układ rejestruje tylko te zdarzenia, w których jednocześnie do co najmniej dwóch detektorów wpadły i zostały zarejestrowane kwanty gamma. W rzeczywistości jednoczesność oznacza odstęp czasu mniejszy niż około 50 ns ($1 \text{ ns} = 10^{-9} \text{ s}$). Aby zrozumieć wartość takiego pomiaru, przyjrzyjmy się schematowi z rysunku 1. Widzimy na nim poziomy, przez które przechodzi jądro ze stanu o wysokiej do najniższej energii. Każdej z takich kaskad towarzyszy szybko następująca po sobie emisja kilku kwantów gamma. Pomiar koincydencyjny sprawia, że mierzymy energię kwantów, które wystąpiły „jeden za drugim”. Możemy więc przyporządkować je tej samej kaskadzie. Z naszego schematu wynika, że gdybyśmy powtórzyli pomiary dla jądra ^{128}Xe , to w koincydencji z kwantem o energii 776 keV (rys. 2) pojawią się, między innymi, kwanty o energiach 443, 590 i 704 keV. Eksperymentalne widmo koincydencyjne, w którym widać ten efekt, przedstawia rysunek 5.

Rys. 4a. Jeżeli przekaz energii zachodzi na skutek zjawiska fotoelektrycznego, zadziała jedynie detektor germanowy. Komputer rejestruje takie zdarzenia. Ge oznacza kryształ germanu, A – detektory osłony antykomptonowskiej.



Rys. 4b. Gdy przekaz energii zachodzi na skutek zjawiska Comptona, zadziała detektor germanowy i detektor osłony antykomptonowskiej. Komputer nie rejestruje takich zdarzeń.



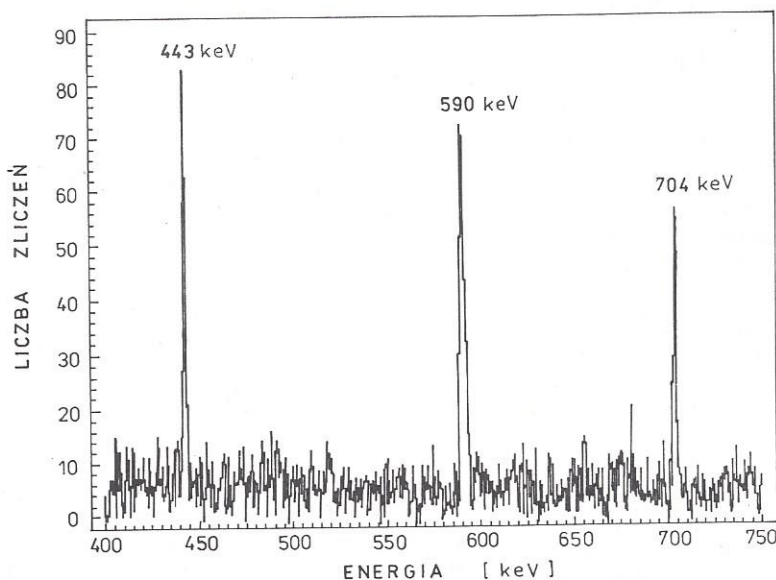
Rozwiązanie zadania M. 661.
Rozpatrzmy iloczyn pięciu kolejnych liczb naturalnych

$$(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2);$$

przynajmniej jeden z czynników jest podzielny przez 3 oraz jeden czynnik jest podzielny przez 5. Ponadto $a-2$, a oraz $a+2$ są trzema kolejnymi liczbami parzystymi; przynajmniej jedna z nich dzieli się przez 4, a każda z dwóch pozostałych – przez 2. Ponieważ $a-1$, $a+1$ są liczbami pierwszymi, większymi od 10, więc nie dzielą się one ani przez 3, ani przez 5, skąd liczba

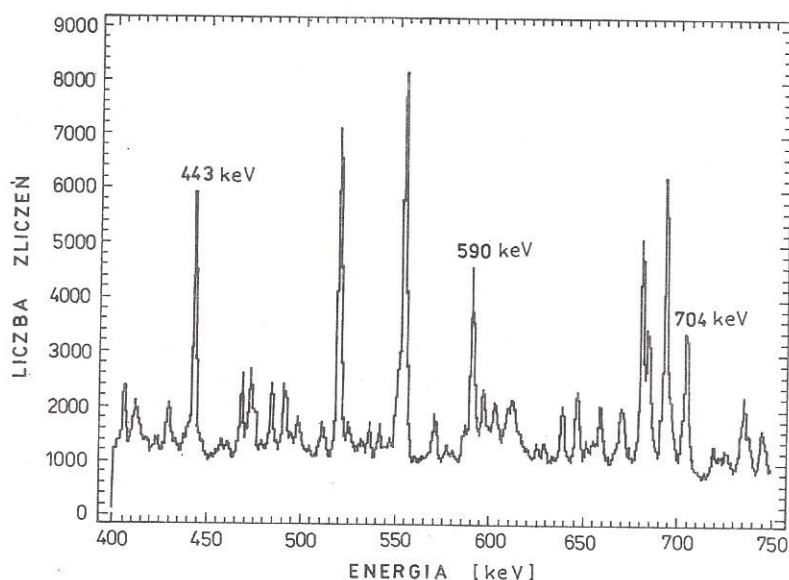
$$a^3 - 4a = (a-2)a(a+2)$$

musi dzielić się przez $3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = 240$.



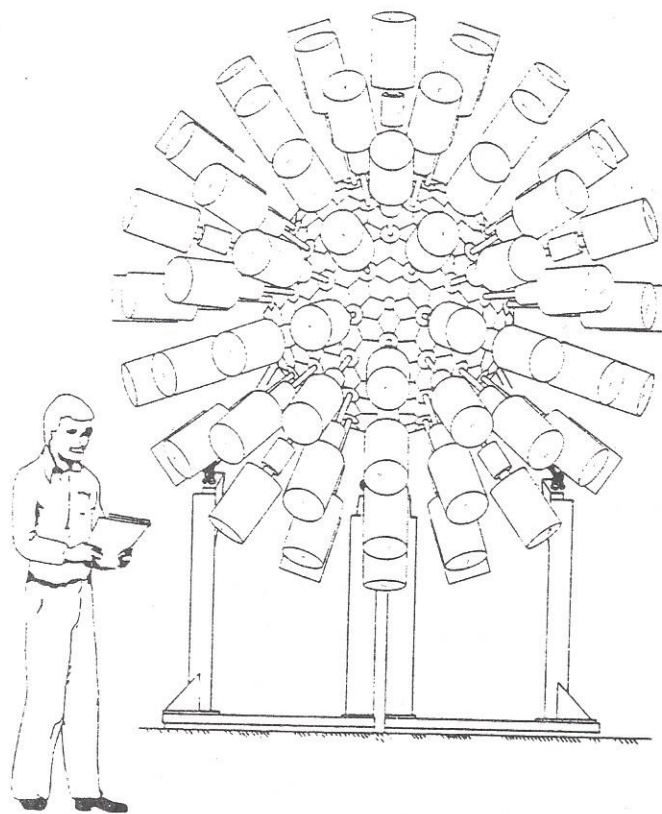
Rys. 5. Widmo koincydencyjne z kwantem o energii 776 keV.

W typowym eksperymencie wzbudzamy jądro do stanu o wysokiej energii i rejestrujemy widma koincydencyjne. Gdybyśmy nie mierzyli koincydencji, otrzymalibyśmy jedno widmo z gęstwiną linii. Pomiar koincydencji pozwala uzyskać kilka widm, w których występują jedynie kwanty z danej kaskady. Jeśli chcą Państwo docenić koincydencje, proszę porównać rysunek 5 z rysunkiem 6.

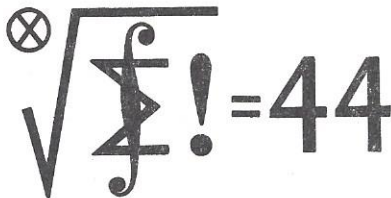


Rys. 6. Widmo kwantów gamma zarejestrowane bez warunków koincydencji. Zawiera ono wszystkie możliwe linie pochodzące z jądra.

Rozwój układów eksperymentalnych stosowanych w spektroskopii jądrowej idzie w kierunku zwiększenia liczby detektorów: Obecne układy składają się z kilkunastu, a projektowane i budowane są zestawy zawierające od kilkudziesięciu do ponad stu detektorów germanowych (rys. 7 i na tylnej okładce). Właśnie wzrost liczby detektorów umożliwił pomiar wielu istotnych parametrów charakteryzujących budowę jądra. Znacznym sukcesem było zauważenie kilka lat temu zjawiska superdeformacji w jądrze ^{152}Dy za pomocą układu 16 detektorów zwanego TESSA. Zmierzone momenty bezwładności (patrz początek artykułu) wykazały, że jądro w stanach superzdeformowanych ma kształt silnie wydłużonej elipsoidy („cygara”), o stosunku osi 2 : 1. Nie byłoby w tym może nic dziwnego, gdyby nie fakt, że dla innych znanych nam jąder stosunek długości do średnicy nie przekracza 1,3. Zaobserwowanie superdeformacji było zarówno sukcesem teorii jądra, która przewidziała to zjawisko wiele lat wcześniej, jak również doświadczenia, w którym potrafiono zmierzyć bardzo rzadki efekt (na 1000 produkowanych jąder ^{152}Dy zaledwie kilka jest superzdeformowanych). Liczymy na to, że za pomocą układów nowej generacji (takich, jak na rys. 7) uda się zaobserwować przewidzianą przez teoretyków hiperdeformację, czyli jądra o stosunku osi 3 : 1. Układy te pozwolą zaobserwować wiele bardzo słabych efektów. Umożliwią obserwacje bardzo szybko wirujących jąder w pobliżu granicy, przy której jądro na skutek rotacji rozszczepia się na fragmenty. Na pewno zbadanie jąder w stanach dotychczas niedostępnych naszej obserwacji przyczyni się do głębszego poznania ich struktury, a co za tym idzie, do konfrontacji modeli teoretycznych z doświadczeniem. Fizycy jądrowi liczą więc na pojawienie się w najbliższym czasie danych o nowych, ciekawych, nie obserwowanych dotąd zjawiskach.



Rys. 7. Projekt amerykańskiego układu wielu detektorów. GAMMASPHERE ma składać się ze 110 detektorów. Badane jądro znajdujące się wewnątrz kuli jest ze wszystkich stron otoczone detektorami.



Termin nadsyłania rozwiązań:
30 VI 1993

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki,
Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1993.

Zadania z matematyki nr 257, 258

Redaguje Marcin E. KUCZMA

257. Czworoscian o krawędziach długości a, b, c, d, e, f jest wpisany w sferę o środku O i promieniu R . Niech O' będzie środkiem sfery przechodzącej przez środki ciężkości czterech ścian czworoscianu. Obliczyć odległość punktu O' od punktu O .

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 11/1992
Przypominamy treść zadań:

249. Wykazać zbieżność i obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie $a_1 = 1/(x+1)$, $a_n = (n/(x+n)) \prod_{j=1}^{n-1} (x-j)/(x+j)$ dla $n \geq 2$, a x jest daną liczbą dodatnią.

250. Wyznaczyć wszystkie liczby $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ spełniające warunek: dla każdej liczby naturalnej $k \geq 4$ można umieścić w przestrzeni $4k$ przystających kostek sześciennych tak, aby każda miała dokładnie n ścian wspólnych z innymi kostkami.

249. Dla $n \geq 2$ zachodzi równość

$$(1) \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n}{x+n} \cdot \frac{x-n+1}{n-1}$$

Zauważmy, że dla dostatecznie dużych n (powiedzmy, dla $n \geq n_0$) prawdziwa jest nierówność

$$n^2 |n-1-x| < 2(n-1)^2(n+x);$$

stąd, wobec (1),

$$\left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| < 2 \cdot \frac{n-1}{n} \quad \text{dla } n \geq n_0$$

i w konsekwencji otrzymujemy (dla $n > n_0$):

$$|a_n| = \left| a_{n_0} \prod_{k=n_0+1}^n \frac{a_k}{a_{k-1}} \right| < 2|a_{n_0}| \cdot \prod_{k=n_0+1}^n \frac{k-1}{k} = 2|a_{n_0}| \cdot \frac{n_0}{n}$$

Zatem $\lim a_n = 0$.

Przepiszmy teraz zależność (1) w postaci

$$\left(1 + \frac{x}{k}\right) a_k = \left(\frac{x}{k-1} - 1\right) a_{k-1},$$

czyli – oznaczając $c_k = a_k x/k$:

$$(2) \quad a_{k-1} + a_k = c_{k-1} - c_k.$$

Niech $s_n = a_1 + \dots + a_n$. Sumujemy stronami równości (2) dla $k = 2, \dots, n$ i otrzymujemy wzór:

$$2s_n = a_1 + a_n + c_1 - c_n = 1 + a_n - c_n.$$

Wcześniej stwierdziliśmy, że ciąg (a_n) dąży do zera. Tym bardziej ciąg (c_n) dąży do zera. Wobec tego ciąg $(2s_n)$ dąży do jedności, i ostatecznie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{2}.$$

258. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ oraz dla dowolnych liczb rzeczywistych $\alpha \geq 1$, $x_1, \dots, x_n > 0$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{s-x_i} \right)^\alpha \geq \frac{n}{(n-1)^\alpha}, \quad \text{gdzie } s = x_1 + \dots + x_n.$$

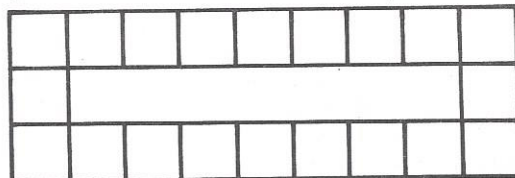
Zadanie 258 zaproponował pan Adam Czornik z Bytomia.

250. Wykażemy najpierw, że na płaszczyźnie nie można umieścić skończonej liczby przystających kwadratów tak, aby każdy miał co najmniej trzy boki wspólne z innymi kwadratami. Przypuśćmy, że jest to możliwe i że mamy taki układ kwadratów. Jeśli rozpada się on na kilka oddzielnych układów, będziemy w dalszym ciągu rozważać tylko jeden z nich; nie prowadzi to do straty ogólności. Istnieje prosta zawierająca bok co najmniej jednego kwadratu i taka, że wszystkie kwadraty rozważanego układu leżą po jednej jej stronie. Weźmy punkt będący „skrajnym końcem skrajnego odcinka” (tj. takim, że wszystkie odcinki leżą na jednej z półprostych, na które dzieli on daną prostą). Punkt ten jest jednocześnie wierzchołkiem kwadratu naszego układu, mającego co najwyżej dwa boki wspólne z innymi kwadratami.

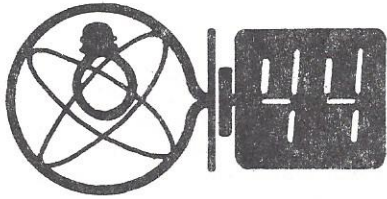
Przypuśćmy teraz, że mamy w przestrzeni skończony układ sześcianów, z których każdy ma z innymi sześcianami co najmniej cztery ściany wspólne. Jak w przypadku kwadratów, jeśli konstrukcja składa się z kilku oddzielnych układów, bierzemy do dalszych rozważań tylko jeden z nich. Znajdujemy płaszczyznę zawierającą ścianę co najmniej jednego sześcianu i taką, że wszystkie sześciany rozważanego układu leżą po jednej jej stronie. Ściany zawarte w tej prostej wyznaczają na niej pewną konfigurację kwadratów, wśród których istnieje kwadrat mający z pozostałymi co najwyżej dwa boki wspólne (to zostało wykazane przed chwilą). Kwadrat ten jest ścianą sześcianu, mającego z innymi sześcianami wspólne co najwyżej trzy ściany.

Wynika stąd, że żadna liczba $n \geq 4$ nie spełnia warunku, o którym mowa w zadaniu.

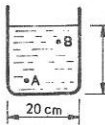
Natomiast dla $n = 0, 1, 2, 3$ można utworzyć żądane konfiguracje. Dla $n = 0, 1$ jest to oczywiste; dla $n = 2$: budujemy z $4k$ kostek „ramkę” o wymiarach zewnętrznych $(2k-1) \times 3$ oraz wewnętrznych $(2k-3) \times 1$; rysunek ilustruje przypadek $k = 5$. Wreszcie dla $n = 3$ budujemy z $4k$ kostek podobną „ramkę”, ale o grubości 2, o wymiarach zewnętrznych $(k-1) \times 3$.



Tak więc postulowany warunek spełniają liczby $n = 0, 1, 2, 3$, i tylko one.



Rys. 1



Rys. 2

Zadania z fizyki nr 155, 156

Redaguje Jerzy B. BROJAN

155. W obwodzie przedstawionym na rysunku 1 wszystkie woltomierze są jednakowe. Ile wskazują V_3 i V_4 , jeśli $V_1 = 12 \text{ V}$, a $V_2 = 2 \text{ V}$?

156. Ciało o masie M porusza się swobodnie z prędkością v_0 w kierunku nieruchomej ściany. Gdy znajduje się w odległości d od niej, następuje zderzenie z początkowo nieruchomą kulką o pomijalnych rozmiarach i masie m znacznie mniejszej od M . Zakładamy, że dalszy ruch kulki zachodzi wzdłuż tej samej prostej, co ruch ciała, a jej zderzenia z ciałem i ścianą są doskonale sprężyste. Obliczyć w przybliżeniu (dla $m \ll M$) minimalną odległość zbliżenia ciała do ściany.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 11/1992

Przypominamy treść zadań:

147. Dwie doskonale sprężyste kulki poruszają się z jednakową prędkością v po linii prostej tak, że ich tory pokrywają się.

Na drodze kulek jest prostopadła sprężysta ściana, od której pierwsza kulka się odbija, a potem zderza z drugą.

a) Jaką maksymalną prędkość może uzyskać druga kulka, gdy zderzą się jeden raz?

b) Jaką maksymalną prędkość może uzyskać druga kulka, gdy zderzą się dwa razy?

c) W jakim przedziale musi leżeć stosunek $\frac{m_2}{m_1}$, aby kulki zderzyły się dwa razy i nastąpiły też dwa uderzenia o ścianę?

d) W jakim przedziale musi leżeć stosunek $\frac{m_2}{m_1}$, aby kulki zderzyły się trzy razy i nastąpiły cztery uderzenia o ścianę?

148. Dziesięć kilogramów wody nalano do prostopadłościennego naczynia – przyjmijmy rozmiary dna np. $20 \times 25 \text{ cm}$, wysokość 20 cm . W punkcie A (rys. 2) umieszczono grzałkę o mocy 100 W , a w punkcie B – chłodnicę o mocy -100 W . Ocenic orientacyjnie średnią prędkość krążenia wody w naczyniu.

Dane: współczynnik rozszerzalności objętościowej wody wynosi $2 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$, lepkość wody $0,01 \text{ puaza} = 0,001 \text{ N s/m}^2$.

147. Zadanie wymaga skorzystania ze znanych wzorów na prędkości v_1 i v_2 kulek po zderzeniu sprężystym prostoliniowym, jeśli przed zderzeniem prędkości te były równe u_1 i u_2 :

$$(1) \quad \begin{aligned} v_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2, \\ v_2 &= \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} u_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1. \end{aligned}$$

W przypadku pojedynczego zderzenia podstawiając $u_2 = -v$, $u_1 = v$ (po odbiciu od ściany) otrzymujemy $v_2 = \frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v$.

Prędkość ta jest tym większa, im większy jest iloraz m_1/m_2 i asymptotycznie osiąga wartość $3v$ – jest to odpowiedź na pytanie a). Aby odpowiedzieć na pytania b) i c), zbadajmy także prędkość $v_1 = \frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2} v$. Jeśli $\frac{m_2}{m_1} > \frac{1}{3}$, to ta

prędkość jest ujemna, czyli nastąpi drugie uderzenie o ścianę i v_1 zmieni zwrot. Kulka 1 może wtedy dogonić kulkę 2 – pod warunkiem, że

$$\frac{3m_2 - m_1}{m_1 + m_2} > \frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2}, \text{ czyli } m_2 > m_1.$$

Stosując powtórnie wzory (1) otrzymujemy

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \frac{3m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v = \\ &= \frac{v}{(m_1 + m_2)^2} (-m_1^2 + 10m_1m_2 - 5m_2^2), \\ v_2' &= \frac{v}{(m_1 + m_2)^2} (-5m_1^2 + 10m_1m_2 - m_2^2). \end{aligned}$$

Wielkość v_2' osiąga maksymalną wartość $v_2' = 1,25v$ dla stosunku $\frac{m_2}{m_1} = \frac{5}{3}$ (odpowiedź na pytanie b)). Aby nie nastąpiło

trzecie uderzenie o ścianę, prędkość v_1' musi być nieujemna – stąd $\frac{m_2}{m_1} \leq 1 + \sqrt{0,8} \approx 1,8944$. Odpowiedź na pytanie c) brzmi zatem

$$1 < \frac{m_2}{m_1} \leq 1,8944.$$

Nietrudno sprawdzić, że trzecie zderzenie kulek nastąpi przy $\frac{m_2}{m_1} > 3$. Powtarzając raz jeszcze nakreślony wyżej schemat obliczeniowy można wyliczyć odpowiedź na pytanie d)

$$4,312 < \frac{m_2}{m_1} \leq 5,828.$$

148. Przyjmijmy dla uproszczenia, że całość wody jednakowo się ogrzewa mijając grzałkę i oziębia mijając chłodnicę. Jeśli oznaczymy średnią prędkość jako v , to przyjmując „średnią drogę obiegu” równą 40 cm (w odległości 5 cm od ścianek) mamy średni okres obiegu równy $\frac{0,4 \text{ m}}{v}$. Mnożąc ten czas przez moc grzałki możemy przyrównać otrzymane wyrażenie do iloczynu masy wody przez ciepło właściwe i przyrost temperatury:

$$100 \text{ W} \cdot \frac{0,4 \text{ m}}{v} = 4,2 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 10 \text{ kg} \cdot \Delta T.$$

Pomijając jednostki mamy $\Delta T = 10^{-3} \cdot \frac{1}{v}$. Siłą powodującą krążenie wody jest różnica ciężyć wody w lewej i prawej części, równa $\Delta m \cdot g = V \Delta \rho \cdot g$ (gdzie V – objętość połowy naczynia). Różnicę gęstości możemy zaś w przybliżeniu zapisać w postaci iloczynu gęstości przez współczynnik rozszerzalności i przyrost temperatury. Stąd siła

$$F = 5 \text{ kg} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1} \cdot \Delta T \cdot 10 \text{ m/s}^2,$$

a pomijając jednostki i podstawiając ΔT mamy

$$F = 10^{-5} \cdot \frac{1}{v}.$$

Siłę tę przyrównamy do siły tarcia warstw cieczy opisywanej wzorem

$$\frac{F}{S} = \eta \frac{\Delta v}{\Delta z},$$

gdzie S – powierzchnia warstw, η – współczynnik lepkości, Δv – różnica prędkości warstw odległych o Δz . W naszym przypadku przyjmijmy, że prędkość tuż przy ścianie jest równa zero, a w odległości 5 cm od niej jest równa podwojonej prędkości średniej. Niech powierzchnia S będzie równa $25 \text{ cm} \times 15 \text{ cm} \times 3$ (uwzględniamy tarcie o trzy ścianki, pomijając dla uproszczenia ścianki równoległe do płaszczyzny rysunku). Stąd

$$F = 0,1 \text{ m}^2 \cdot 0,001 \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} \cdot \frac{2v}{0,05 \text{ m}} = 4 \cdot 10^{-3} v,$$

gdzie w ostatnim wyrażeniu pominieliśmy jednostki. Przez porównanie z siłą napędową otrzymujemy ostateczny wynik

$$v = \frac{1}{20} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 5 \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

Dokonyując bardziej precyzyjnych oszacowań można zapewne uzyskać wynik dokładniejszy. Nie sądzę jednak, aby ścisły wynik różnił się od wartości 5 cm/s więcej niż dwa razy.

Patrz w niebo

Zazwyczaj po wystrzeleniu kolejnego sztucznego satelity przeznaczonego do obserwowania Słońca pojawiał się w literaturze ze zwiększoną częstością problem domniemanej zmienności Słońca. Tak też się stało w 1980 r., kiedy uruchomiony został satelita SMM (Solar Maximum Mission). Jego zadaniem było m.in. systematyczne mierzenie natężenia promieniowania słonecznego w całym zakresie widma. Wykryte przez niego krótkookresowe (w skali dni) zmiany jasności Słońca nie były zaskoczeniem – są skutkiem pojawiania się i znikania plam oraz pochodni i wynoszą około dwóch promili. Istotniejsze i ciekawsze jest, czy nasze Słońce wykazuje jakieś poważniejsze zmiany długookresowe. Wszystko wskazuje na to, że tak. SMM wykrył (a potwierdzone to zostało przez inne satelity), że w rytmie cyklu aktywności pełna moc Słońca zmienia się w granicach pół promila, przy czym większa moc odpowiada wyższej aktywności. W jednostkach bezwzględnych oznacza to, że stała słoneczna, tj. natężenie promieniowania słonecznego odbieranego na Ziemi, waha się pomiędzy 1367 a 1368 W/m². Ciekawym przypominamy, że ostatnie maksimum aktywności było w okolicy 1992 r. Jak widać, precyzyjne pomiary obejmują na razie jeden cykl słoneczny. Próby wyznaczenia wartości stałej słonecznej w dawniejszych czasach (właściwie: próby jej szacowania) dają wyniki tak niepewne, że nie ma sensu dyskutować o zmienności Słońca w dłuższych okresach czasu.

Wszystko to wiąże się niezmiennie z pytaniem, jakie mogą być tego konsekwencje dla Ziemi. Można by sądzić, że tak małe wahania blasku Słońca nie powinny mieć większego znaczenia dla ziemskiego klimatu. Wszak Słońce zachowuje się tak od miliardów lat i procesy zachodzące na Ziemi zdążyły się do tego dostosować. To prawda, tylko że teraz człowiek dość poważnie te procesy zdążył zakłócić i nie wiadomo na przykład, czy na te nadal drobne przyczyny obecne środowisko nie zareaguje w sposób gwałtowny. Problemem jest więc, czy rozkład pogody na Ziemi jest stabilny czy nie, i jakie mogą być powody niestabilności. A że może to być sprawą niebłaha, dowodzi choćby następujący przykład. Okazuje się mianowicie, że trasa zimowych cyklonów na północnym Atlantyku przebiega podczas minimum aktywności 600 km bardziej na północ niż podczas maksimum. Niewykluczone, że obserwację tę można by potwierdzić śledząc mapy pogodowe pojawiające się w naszej telewizji. To akurat może być nieco śmieszne, niemniej jednak skomplikowany wpływ Słońca na Ziemię z pewnością zasługuje na rzetelne badania.

Tomasz KWAST



Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

M 661. Udowodnić, że jeśli $a - 1$ oraz $a + 1$ są liczbami pierwszymi większymi od 10, to liczba $a^3 - 4a$ dzieli się przez 240.

Rozwiązanie na str. 12

M 662. Wewnątrz trójkąta dana jest skończona liczba punktów. Łączymy je odcinkami między sobą i z wierzchołkami trójkąta tak, by poszczególne odcinki nie przecinały się i żeby cały trójkąt podzielony był na mniejsze trójkąty. Udowodnić, że liczba małych trójkątów jest nieparzysta.

Rozwiązanie na str. 10

M 663. Udowodnić, że suma szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} 7^{-n^2}$ jest liczbą niewymierną.

Rozwiązanie na str. 6

Redaguje Jarosław KULPA

F 353. Obliczyć, jaka moc wydziela się podczas przyplływów i odpływów, jeżeli wiadomo, że okres obrotu Ziemi maleje na skutek tych zjawisk w tempie 0,0016 sekundy na stulecie. Porównać otrzymaną wartość ze średnim poborem mocy prądu elektrycznego przez ludzkość, wynoszącym $P_0 = 1,5 \cdot 10^{12}$ W. Masa Ziemi jest równa $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg, promień Ziemi $R = 6,4 \cdot 10^6$ km.

Rozwiązanie na str. 11

F 354. Znaleźć wzór opisujący długość dnia na przestrzeni roku dla Warszawy znajdującej się na szerokości geograficznej $\varphi_W = 52^\circ$. Wiadomo, że 21 czerwca (172 dzień roku) dzień jest najdłuższy. Oś ziemską nachyloną jest pod kątem $\alpha = 66,5^\circ$ do płaszczyzny ekliptyki. Sprawdzić wzór dla 1 września (244 dzień roku).

Rozwiązanie na str. 11

Matematyka na falach eteru

Jedna z prywatnych rozgłośni radiowych organizuje od czasu do czasu konkurs: ogłasza pytanie, gdy zadzwonisz i odpowiesz poprawnie jako pierwszy, otrzymasz nagrodę. Oto, co niedawno usłyszeliśmy:

PYT.: – Ile wynosi rząd macierzy zerowej?

ODP.: – Zero.

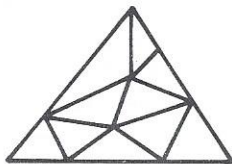
PYT.: – Znakomicie! A pytanie poza konkursem – co to jest macierz zerowa?

ODP.: – Nie mam pojęcia.

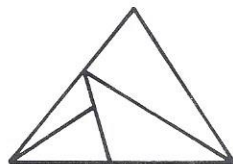
Mieszkaniowy dowód lematu Spernera

W teorii punktów stałych ważną rolę odgrywa kombinatoryczno-geometryczny lemat o podziale trójkąta, udowodniony przez niemieckiego matematyka Emanuela Spernera (1905–1980) w 1928 roku. Brzmi on następująco:

Lemat 1. Załóżmy, że wierzchołki trójkąta T są ponumerowane liczbami 1, 2 i 3. Trójkąt podzielony jest na małe trójkąty, przy czym część wspólną dwóch trójkątów podziału jest albo wspólny bok obu trójkątów, albo wspólny wierzchołek obu trójkątów, albo zbiór pusty. Wierzchołki małych trójkątów numerujemy według zasady: jeśli wierzchołek leży na boku trójkąta T , to ma numer taki, jak jeden z końców tego boku; wierzchołki leżące wewnątrz trójkąta T są ponumerowane liczbami 1, 2 i 3 w dowolny sposób. Wtedy istnieje trójkąt podziału, którego wierzchołki mają numery 1, 2 i 3. Co więcej, liczba takich trójkątów jest nieparzysta.



podział „dobry”



podział „zły”

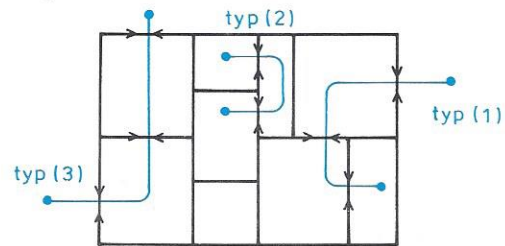
Oto jednowymiarowy odpowiednik powyższego lematu:

Lemat 2. Dzielimy odcinek za pomocą skończonej liczby punktów na odcinki mniejsze; lewy koniec dużego odcinka ma numer 1, prawy – numer 2, punktem podziału przypisujemy numery 1 i 2 w sposób losowy. Istnieje wówczas odcinek mały o końcach z numerami 1 i 2; co więcej, liczba takich odcinków jest nieparzysta. Oba lematy (choćby drugi jest niemal oczywisty) udowodnimy metodą mieszkaniowo-drzwiową.

Wyobraźmy sobie wielopokojowe mieszkanie, przy czym każdy pokój ma 0, 1 lub 2 drzwi (dopuszczamy istnienie pokoiów bez drzwi). Niektóre drzwi mogą być zewnętrzne (wyprowadzać na zewnątrz mieszkania). Wykażemy, że liczba drzwi pozwalających wyjść z mieszkania i liczba pokoiów z jednymi drzwiami są tej samej parzystości.

Dla dowodu pospacerujmy po mieszkaniu – jednakże według pewnych reguł: otóż przez każde drzwi przechodzimy dokładnie raz. Każdy spacer zaczynamy i kończymy na zewnątrz mieszkania lub w pokoju

z jednymi drzwiami; dzięki temu, że żaden pokój nie ma więcej niż dwoje drzwi, nasz spacer jest jednoznacznie określony początkiem i końcem (kierunek wędrówki nie gra roli).



Rozważmy teraz takie spacery, po których – w sumie – „zaliczymy” wszystkie drzwi (każde raz). Mogą pojawić się drogi trzech rodzajów:

- 1) od drzwi zewnętrznych do pokoju z jednymi drzwiami (lub na odwrót),
- 2) od drzwi zewnętrznych do drzwi zewnętrznych,
- 3) od pokoju z jednymi drzwiami do pokoju z jednymi drzwiami.

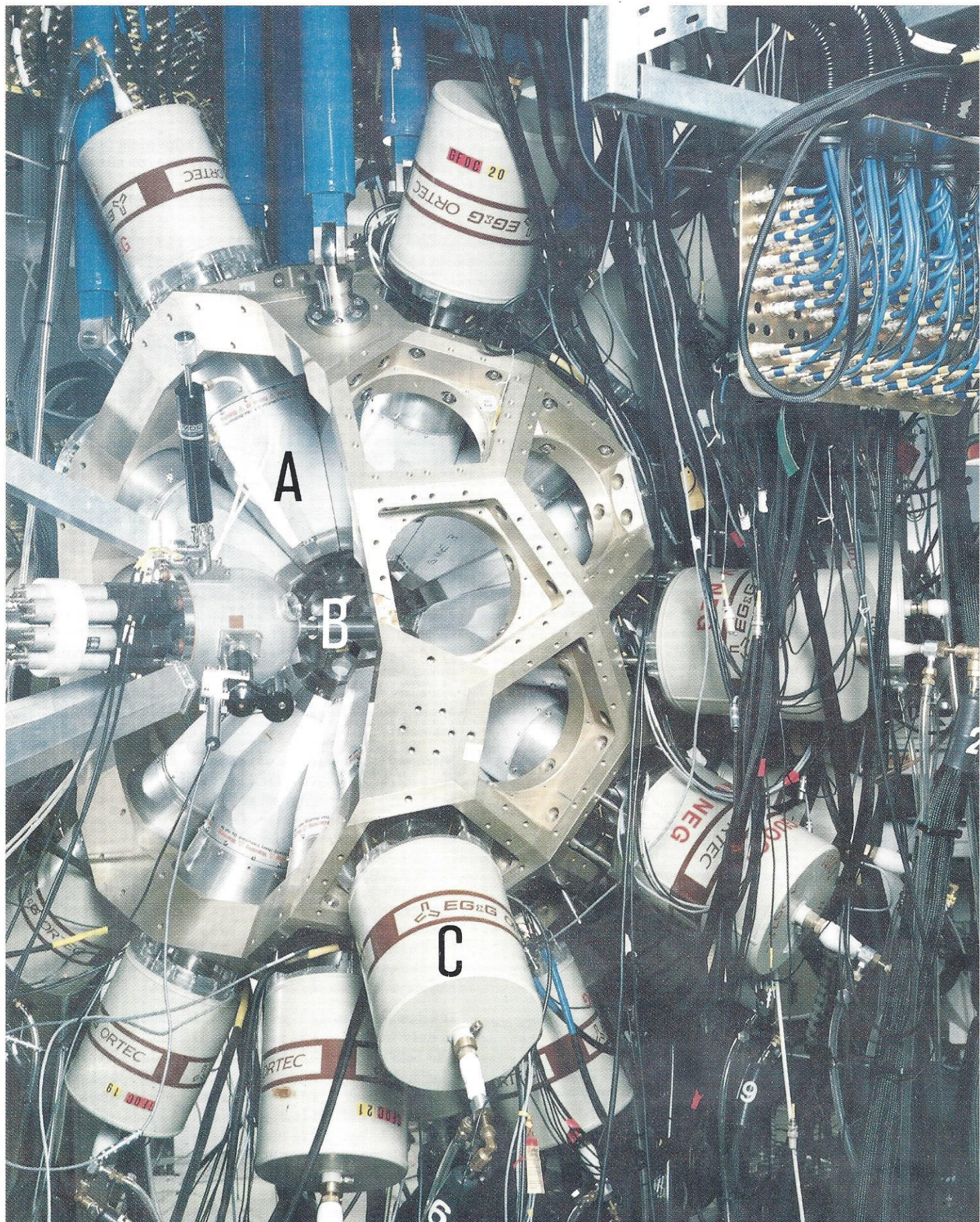
Niech m , n i p oznaczają odpowiednio liczbę dróg pierwszego, drugiego i trzeciego rodzaju. Wtedy liczba zewnętrznych drzwi wynosi $m + 2n$, natomiast pokoiów z jednymi drzwiami $m + 2p$. Oczywiście jest, że liczby $m + 2n$ i $m + 2p$ mają tę samą parzystość.

Teraz wykażemy Lemat 2; niech odcinek będzie mieszkaniem, małe odcinki pokojami, a drzwiami wierzchołki o numerze 1. Wówczas pokojem z jednymi drzwiami będzie odcinek o wierzchołkach z numerami 1 i 2. Drzwi zewnętrzne są tylko jedno (lewy koniec dużego odcinka), więc liczba pokoiów z jednymi drzwiami jest nieparzysta (w szczególności różna od zera).

Dla dowodu Lematu 1 przyjmijmy, że mieszkanie to duży trójkąt, pokoje zaś – małe trójkąty. Drzwi – to boki małych trójkątów, oznaczone jedną jedynką i jedną dwójką. Pokój z jednymi drzwiami to trójkąt o wierzchołkach (1,2,3), drzwiami zaś wyprowadzającymi na zewnątrz odcinki (1,2) leżące na bokach dużego trójkąta (z założenia wynika, że muszą one być na boku o końcach 1 i 2). Na mocy Lematu 2 liczba tych ostatnich jest nieparzysta, a więc i liczba trójkątów typu (1,2,3) – czyli pokoiów z jednymi drzwiami – też.

Powtarzając to rozumowanie możemy wykazać lemat Spernera dla piramidy o wierzchołkach (1,2,3,4).

Armen EDIGARIAN



EUROGAM – układ 72 detektorów do rejestracji promieniowania gamma. Zdjęcie przedstawia jedynie część układu. Obudowy oznaczone symbolem A zawierają detektory germanowe wraz z osłonami antykomptonowskimi. Symbolem B oznaczono komorę, w której znajdują się badane jądra. Widoczne na zewnątrz ramy naczyń, oznaczone symbolem C, służą do przechowywania ciekłego azotu chłodzącego detektory. Niewidoczna część EUROGAM-u zbudowana jest bardzo podobnie, tak że uzupełnia do pełnego kąta bryłowego fragment przedstawiony na zdjęciu.