

de

h=6.63·10⁻³⁴ J·s $\Pi=3,141593$

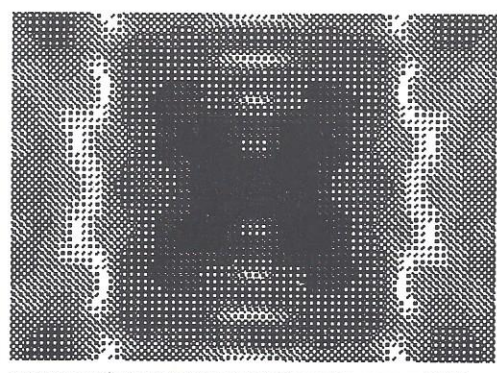
CENA ZŁ 8000,-

NR 2 (225) 1993

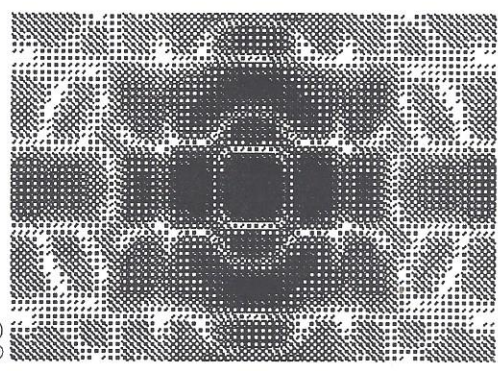
PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X

POPULARNY MIESIĘCZNIK MATEMATYCZNO-FIZYCZNO-ASTRONOMICZNY

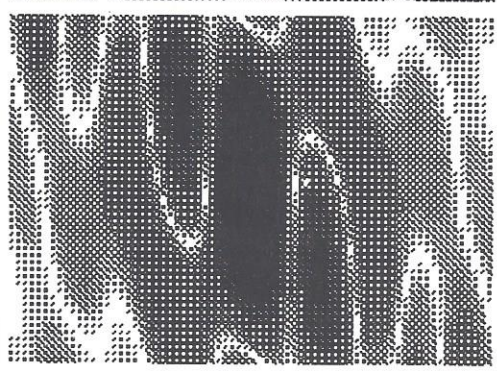
1



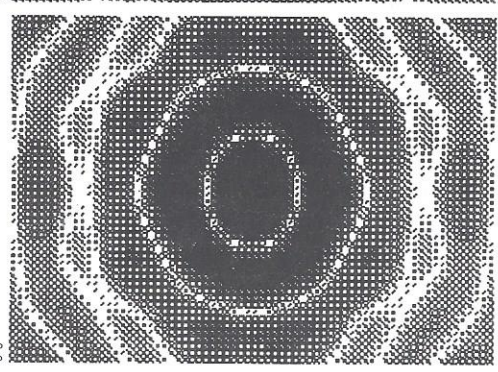
2



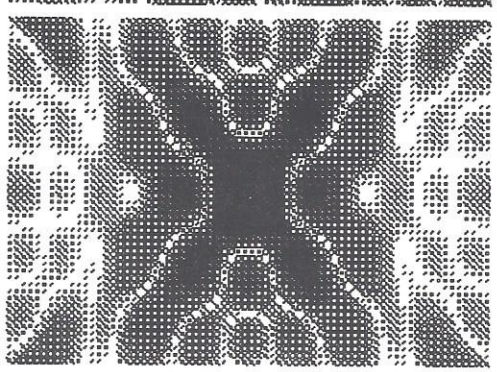
3



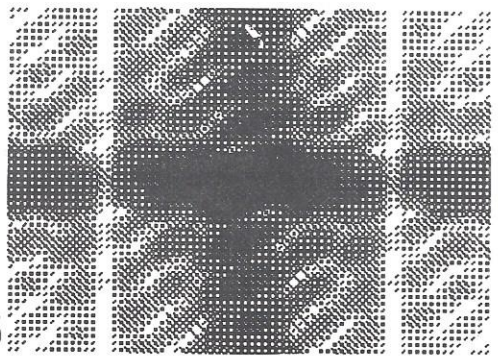
4



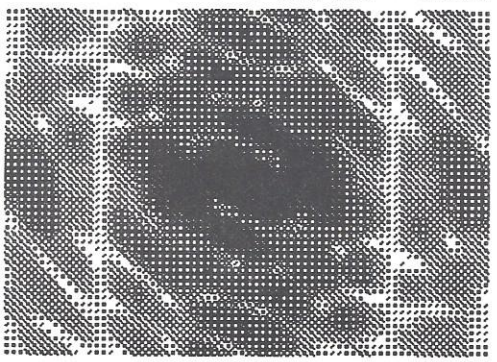
5



6



7



Dnia 11 XI 1992 roku
zmarł

Stanisław Hartman

matematyk, wychowawca, dobry i mądry człowiek
Autor Delty

SPIS TREŚCI

NUMERU 2(225)

Wbrew zdrowemu
rozsądkowi (V)
Tomasz Hofmokl

str. 1

Czy natura oscylatora
harmonicznego nie jest
bardziej skomplikowana niż
przypuszczaliśmy?
Wojciech Królikowski

str. 1

Drgania plazmowe
Stanisław Mrówczyński

str. 4

Dokładnie izochroniczne
wahadło matematyczne
Stanisław Bednarek

str. 6

Mała Delta

str. 8

Zadania

str.10

Klub 44

str.11

Patrz w niebo

str.16

Epsilon

str.17

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego
i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichocki
Roman Duda
Jan A. Gaj
Tomasz Hofmokl – wiceprzewodniczący
Tadeusz Jarzębowski
Marcin Kubiak
Andrzej Małowski
Andrzej Pelczar
Zbigniew Płochocki
Zdzisław Pogoda
Konrad Rudnicki
Zbigniew Semadeni
Grzegorz Sitarski
Józef I. Smak
Kazimierz Stępień
Mieczysław Subotowicz
Andrzej Szymacha
Andrzej Woszczyk
Wojciech Żakowski – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

Krzysztof Biesaga
Piotr Hajłasz
Jan Kalinowski – z-ca red. nac.
Krystyna Kordos – sekr. red.
Marek Kordos – red. nac.
Tomasz Kwast
Stanisław Mrówczyński
Anna Rudnik
Joanna Udalska

Adres Redakcji:

ul. Smyczkowa 5/7
02-678 Warszawa
tel. 43-02-43 wewn. 21
DELTA@PLEARN.BITNET

Wydrukowano w Zakładach Graficznych
w Warszawie, ul. Srebrna 16

Skład systemem TeX wykonała redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY w AMOS-ie

Od stycznia br. prenumeratę „Delty” prowadzi również firma AMOS,
01-506 Warszawa, ul. Szenwalda 1 (tel. 39-17-52). Wpłaty przyjmowane są
non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. Koszt trzech
numerów wynosi 24 000,-zł (rocznika'93 – 96 000,-zł). Przy wpłacie prosimy
zaznaczyć okres prenumeraty (co najmniej 3 miesiące).

Prenumerata zagraniczna trzech numerów wynosi 60 000,-zł. W przypadku życzenia
dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! AMOS dostarcza „Deltę” pod wskazany adres nie pobierając dodatkowej
opłaty. Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS
funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Blankiet pocztowy na prenumeratę „Delty” w AMOS-ie zamieszczamy na str. 9/10.
Konto AMOS-u: PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136

WARUNKI PRENUMERATY w RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.

2. Cena prenumeraty na III kwartał 1993 r. wynosi 24 000,- zł.

3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku
zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa
prenumerator.

4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:

– na teren kraju

– jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub
siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony
sposób,

– na zagranicę

– „Ruch” S.A. Oddział Warszawa, 00-958 Warszawa, konto
PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – dostawa odbywa się
pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia
dostawy pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni
pokrywa prenumerator.

5. Terminy przyjmowania prenumeraty:

– na kraj i zagranicę – do 20 XI na I kwartał roku następnego

do 20 II na II kwartał

do 20 V na III kwartał

do 20 VIII na IV kwartał.

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa

Cena 1 egzemplarsa 8 000,- zł

Czy natura oscylatora harmonicznego nie jest bardziej skomplikowana niż przypuszczaliśmy?

Wojciech KRÓLIKOWSKI

Wśród prostych układów dynamicznych jednym z najbardziej podstawowych teoretycznie, a jednocześnie najpopularniejszych w zastosowaniach fizycznych i technicznych, jest jednowymiarowy oscylator harmoniczny. Wystarczy wspomnieć, że wszechobecne w naszym życiu codziennym pole elektromagnetyczne można uważać z dynamicznego punktu widzenia za pewien (nieskończony) zbiór takich oscylatorów.

W mechanice klasycznej ruch jednowymiarowego oscylatora harmonicznego opisujemy równaniem Newtona

$$(1) \quad m\ddot{x} = -m\omega^2 x,$$

gdzie \ddot{x} jest drugą pochodną względem czasu t współrzędnej x określającej wychylenie oscylatora z położenia równowagi $x = 0$, m zaś i ω oznaczają masę i częstość (kołową) oscylatora. Ogólne rozwiązanie równania różniczkowego drugiego rzędu (1) ma postać drgania harmonicznego o częstości ω :

$$(2) \quad x = A \sin(\omega t + f),$$

przy czym dwie stałe dowolne, A i f , są amplitudą i przesunięciem fazy tego drgania (można je wyznaczyć z warunków początkowych w pewnej chwili $t = t_0$: $x(t_0) = x_0$ i $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$, gdzie x_0 i \dot{x}_0 są danymi stałymi). Energię jednowymiarowego oscylatora harmonicznego określa wzór

$$(3) \quad H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 x^2),$$

gdzie $p = m\dot{x}$ przedstawia pęd oscylatora. Ze związków (2) i (3) otrzymujemy wartość energii oscylatora:

$$(4) \quad H = E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2.$$

Gdy od mechaniki klasycznej przechodzimy do mechaniki kwantowej, rolę współrzędnej x i pędu p przejmują pewne macierze kwadratowe (o nieskończonej liczbie wierszy i kolumn). Oznaczmy je przez \hat{x} i \hat{p} . Jak wiadomo (przynajmniej niektórym z Czytelników, obeznanym nieco bliżej z pojęciem macierzy), mnożenie macierzy nie jest na ogół przemienne w odróżnieniu od mnożenia liczb (rzeczywistych i zespolonych). Można się więc spodziewać, że $\hat{x}\hat{p} \neq \hat{p}\hat{x}$. Rzeczywiście, podstawowym prawem mechaniki kwantowej jest relacja nieprzemienności Heisenberga

$$(5) \quad \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar,$$

gdzie \hbar oznacza stałą Plancka dzieloną przez 2π o wartości doświadczalnej $1,05457266 \times 10^{-34}$ J-s (zauważmy, że gdyby \hbar było równe 0, wielkości fizyczne \hat{x} i \hat{p} stałyby się przemienne, a wtedy wrócilibyśmy do mechaniki klasycznej). Dla porządku dodajmy, że po prawej stronie relacji (5) przy \hbar występuje domyślnie macierz jednostkowa $\hat{1}$ (tzn. macierz o samych jedynkach na przekątnej głównej), której zwykle nie wypisujemy. W konsekwencji macierzowego charakteru \hat{x} i \hat{p} rolę energii H danej wzorem (3)

Wbrew zdrowemu rozsądkowi (V)

(Według wykładów radiowych
z audycji IV programu – *Widnokrąg*)

Gorąca woda zamarznie
szybciej niż zimna

Tomasz HOFMOKL

W tym cyklu wykładów opowiadam Państwu o doświadczeniach, których wynik jest na tyle zaskakujący, że zdaje się przeczyć zdrowemu rozsądkowi. Na podstawie wiedzy nabytej i uogólnień doświadczeń życia codziennego wyrabiamy sobie kryteria tego, co jest możliwe, a co nie powinno żadną miarą się zdarzyć. Zakres naszych doświadczeń jest na ogół ograniczony i dlatego trudno się spodziewać, aby nasz zdrowy rozsądek mógł być arbitrem we wszystkich sytuacjach, zdarzających się w przyrodzie. Warto to sobie uświadomić; uczy to nas z jednej strony podziwu dla bogactwa otaczającego nas świata, a z drugiej sugeruje większą pokorę przy ocenie własnych możliwości osądu, co jest możliwe, a co nie.

Dziś zacznę moją pogawędkę od bardzo prostego zjawiska, a skończę na nieco trudniejszym. Oba zjawiska łączy proces oddawania do otoczenia ciepła. Historię można by zacząć dowolnie dawno. Ludzie mieszkający w krajach o zimnym klimacie zauważyli, że woda zimna zamarza na mrozie wolniej niż woda podgrzana. Uważano, że poidelka dla ptaków lepiej napełniać zimną wodą, a w nowszych czasach, że lepiej myć samochód zimną wodą, jeżeli jest on narażony na działanie mrozu. Były to poglądy na granicy przesądu do czasu, gdy zjawisko to zaczęto badać systematycznie.

Zaczął się wszystko na zajęciach w szkole wyższej w Tanzanii. Jednym z zadań dla studentów było sporządzenie lodów, zwykłych jadalnych lodów. Instrukcja, a ściślej mówiąc, receptura, nakazywała podgrzanie mleka, zmieszanie go z cukrem, ostudzenie mieszanki do temperatury pokojowej, a następnie zamrożenie w elektrycznym zamrażalniku. Wśród studentów, którzy przyrządzali lody był Erasto Mpemba. Tego dnia on i jego kolega z jakiegoś powodu bardzo

się spieszyli. Erasto nie miał cierpliwości poczekać, aż mieszanina ostygnie do temperatury pokojowej, a jego kolega nie zatroszczył się nawet o podgrzanie swojej porcji. Obaj włożyli przygotowane porcje równocześnie do zamrażalnika. Porcja Erasto była ciepła, może nawet gorąca, a porcja kolegi chłodna. Ku wielkiemu zdumieniu Mpemba stwierdził, że to jego, początkowo gorąca, mieszanka zamarza znacznie wcześniej niż mieszanka chłodna. Sprawa nabrała rozgłosu, gdy Mpemba wraz z D.G. Osbornem z University College Dar es Salaam opublikowali sprawozdanie w czasopiśmie *Physics Education*. Przez pewien okres czasopismo otrzymywało wiele listów ze stwierdzeniami, że efekt jest fałszywy, spowodowany jakimś błędem lub wprost przeciwnie, że zjawisko to jest dobrze znane. Dziś wiemy, że zjawisko to jest rzeczywiste, ale do końca nie znamy pełnego wyjaśnienia. Szereg czynników może być odpowiedzialnych za jego przebieg. W ciepłym płynie może być lepszy przepływ niż w zimnym i w związku z tym lepsza wymiana ciepła z otoczeniem. Wiadomo również, że w ciepłym płynie jest mniej rozpuszczonego gazu (powietrza) niż w zimnym. Rozpuszczony gaz spowalnia stygnięcie. Wiadomo, że rury z ciepłą wodą w domowej instalacji zamarzają w czasie awarii niekiedy wcześniej niż rury z zimną wodą, którą chroni rozpuszczone powietrze. Może jakąś rolę odgrywa fakt, że ciepły płyn szybciej paruje niż zimny i w rezultacie, nawet jeżeli na początku ilości płynu były jednakowe, to zamarza mniej płynu z ciepłego naczynia niż zimnego, bo część z ciepłego zdążyła wyparować. Nie chcę Państwu niczego sugerować, sam nie jestem pewny, co jest najważniejszym czynnikiem wywołującym wspomniany efekt. Proponuję natomiast wykonanie tego doświadczenia z użyciem małych pojemników na wodę i domowej zamrażarki.

Tak jak obiecałem, przejdę teraz do drugiego zjawiska, które określiłem jako trudniejsze. Uświadomiłem sobie, że tak naprawdę to jest ono nawet prostsze niż studzenie mleka z cukrem. Trudniejsze jest tylko zauważenie, że w jego przebiegu jest coś, co nie zgadza się ze zdrowym rozsądkiem. Cofnijmy się do początków naszego stulecia i zajmijmy się nie rozwiązaniem w tym czasie problemem, jakim było promieniowanie ciała doskonale czarnego. Niech nikogo nie zniechęca określenie ciała doskonale czarne. To tylko uproszczenie zagadnienia, bo wtedy nie musimy definiować, jakiego koloru jest

przejmuje w mechanice kwantowej macierz

$$(6) \quad \hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{p}^2 + m^2\omega^2\hat{x}^2).$$

Ogólniej, w mechanice kwantowej macierze kwadratowe (zwykle o nieskończonej liczbie wierszy i kolumn) opisują wielkości fizyczne. Prosimy Czytelnika o potraktowanie tego stwierdzenia jako wstępnej informacji, która, być może, zachęci Go do samodzielnej próby zapoznania się z elementami mechaniki kwantowej (w tym celu można by polecić podręcznik przeznaczony dla początkujących studentów uniwersytetu: E. H. Wichmann, *Fizyka kwantowa*, PWN, Warszawa 1973). Tutaj ograniczymy się do pewnej uwagi wskazującej na podstawową przyczynę sprawiającą, że właśnie macierze są odpowiednie do opisu wielkości fizycznych w świecie atomowym rządzonego prawami mechaniki kwantowej. Otóż, można ogólnie powiedzieć, że fizyka, badając pewien układ (fizyczny), rozważa zmiany jego stanu, a więc przejścia układu między różnymi parami jego stanów. W odróżnieniu od naszego makroświata, w świecie atomowym pomiar każdej wielkości fizycznej (nawet „maksymalnie subtelny”) powoduje (na ogół) zaburzenie stanu układu prowadzące do przejść między różnymi parami jego stanów. Stąd wszystkie możliwe pary stanów układu powinny być jakos zakodowane w opisie wielkości fizycznych określonych dla tego układu. Właśnie tym różnym parom stanów odpowiadają różne elementy macierzy kwadratowych opisujących wielkości fizyczne w mechanice kwantowej.

Jawny kształt macierzy energii (6) łatwiej można znaleźć operując zamiast \hat{x} i \hat{p} macierzami określonymi przez wzory

$$(7) \quad \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega}\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{m\omega}}\hat{p} \right),$$

$$\hat{a}^* = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega}\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{m\omega}}\hat{p} \right).$$

Wtedy prosty rachunek pokazuje, że relacja nieprzemienności (5) sprowadza się do postaci

$$(8) \quad \hat{a}\hat{a}^* - \hat{a}^*\hat{a} = 1,$$

macierz energii (6) zaś – do postaci

$$(9) \quad \hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{a}^*\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^*)\hbar\omega.$$

Nietrudno się przekonać wykonując mnożenie macierzy według reguły „wiersze przez kolumny”, tzn. $\hat{A}\hat{B} = \|\|C_{kl}\|\|$, gdzie $C_{kl} = \sum_m A_{km}B_{mi}$, że relację nieprzemienności (8) można spełnić za pomocą macierzy

$$(10) \quad \hat{a} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}, \quad \hat{a}^* = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

przy czym wtedy macierz energii (9) przyjmuje kształt

$$(11) \quad \hat{H} = \begin{vmatrix} E_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & E_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & E_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & E_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

gdzie

$$(12) \quad E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Podstawowym prawem interpretacyjnym mechaniki kwantowej jest stwierdzenie, że jeśli macierz opisująca pewną wielkość fizyczną, np. energię, ma postać diagonalną (tzn. zawiera wyrazy niezerowe jedynie na przekątnej głównej), wtedy liczby (rzeczywiste) występujące na przekątnej głównej przedstawiają możliwe wartości tej wielkości fizycznej (możliwe wyniki jej pomiarów). A zatem, z postaci (11) macierzy \hat{H} wynika, że wartości energii jednowymiarowego oscylatora harmonicznego w mechanice kwantowej są dane wzorem (12) (są więc nieciągłe, „skwantowane”).

Zauważmy teraz, że stosując analogiczną metodę algebraiczną można rozwiązać pewną „zdeformowaną” relację nieprzemienności, postaci wykraczającej poza mechanikę kwantową oscylatora harmonicznego, mianowicie relację

$$(13) \quad \hat{a}\hat{a}^* - q\hat{a}^*\hat{a} = 1,$$

gdzie $q > 0$ jest nowym parametrem, w ogólności różnym od 1 (zauważmy, że dla $q \rightarrow 1$ wracamy do mechaniki kwantowej).

Rzeczywiście, relację tę można spełnić za pomocą macierzy

$$(14) \quad \hat{a} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{N_1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{N_2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{N_3} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$\hat{a}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{N_1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{N_2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{N_3} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

gdzie liczby

$$(15) \quad N_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

są powiązane wzorem rekurencyjnym

$$(16) \quad N_{n+1} = qN_n + 1,$$

przy czym $N_0 = 0$. Wtedy macierz energii (9) uzyskuje postać (11), gdzie jednak zamiast wzoru (12) pojawia się nowy wzór

$$(17) \quad E_n = \left(\frac{q+1}{2} N_n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Dla $q \rightarrow 1$ wracamy do dawnego wzoru (12).

Logiczną atrakcyjność rozważań nad „zdeformowaną” relacją nieprzemienności (13) można uzasadnić następująco. Relacja nieprzemienności (8) występująca w mechanice kwantowej oscylatora harmonicznego jest najprostszą realizacją nieprzemienności $\hat{a}\hat{a}^* \neq \hat{a}^*\hat{a}$ macierzy \hat{a} i \hat{a}^* . Można postawić pytanie, czy nie występują dla fizycznych oscylatorów pewne odchylenia od tej realizacji (naturalnie, jeśli takie odchylenia rzeczywiście występują, to muszą być znikome, bo, jak dotąd, mechanika kwantowa jest zgodna w swych przewidywaniach ze wszystkimi doświadczeniami). W tej sytuacji ogólna liniowa realizacja nieprzemienności postaci $\hat{a}\hat{a}^* = q\hat{a}^*\hat{a} + r$, gdzie $q \simeq 1$ oraz $r \simeq 1$, jest szczególnie interesująca (przez normalizację \hat{a} i \hat{a}^* można zawsze osiągnąć, aby r było równe dokładnie 1, a wtedy otrzymujemy relację (13)).

Ze względu na swą postać przekraczającą ramy mechaniki kwantowej oscylatora harmonicznego teoria „zdeformowanego algebraicznie” oscylatora harmonicznego wzbudza od paru lat znaczne zainteresowanie wśród fizyków-teoretyków, a zwłaszcza wśród matematyków. Ponieważ jednak nie obserwuje się, jak dotąd, żadnych odchyżeń doświadczalnych od przewidywań mechaniki kwantowej, deformacja realnych oscylatorów harmonicznyczych występujących w przyrodzie (jeśli w ogóle ma miejsce) musi być znikoma (tzn. musi być $q \simeq 1$ w bardzo dobrym przybliżeniu), ale może jednak nie musi być ściśle zerowa (tzn. może $q \neq 1$). Sygnaturą doświadczalną tej deformacji byłoby pewne (bardzo małe) odchylenie energii E_n oscylatora przy bardzo dużych n od liniowej zależności od n danej wzorem (12). W szczególności, gdyby q było w przybliżeniu równe 1, ale mniejsze od 1, wystąpiłoby nowe, zdumiewające zjawisko nasycania energii oscylatora przy $n \rightarrow \infty$: $N_n \rightarrow (1 - q)^{-1} < \infty$. Doświadczalnym oscylatorem mógłby być pojedynczy mod (czyli sposób drgania) pola elektromagnetycznego realizowany np. w laserze.

badane ciało, a doskonale czarne to znaczy tylko tyle, że pochłania światło o wszystkich długościach fali, czyli wszystkie kolory i nic nie odbija. Wyobraźmy sobie doświadczenie przeprowadzone w ciemnym pokoju. Podgrzewamy badane ciało i pilnie obserwujemy, co się dzieje. Na początku nic nie widzimy, pokój jest przecież ciemny. Po jakimś czasie zaczniemy odczuwać, że z miejsca, w którym jest badane ciało, bije, zrazu ledwie wyczuwalna, a potem wyraźna, fala ciepła. Oznacza to, że nasze zmysły rejestrują niewidoczne dla oka promieniowanie podczerwone. Przy dostatecznie wysokiej temperaturze zauważymy bardzo słabe ciemnoczerwone świecenie. W dalszym ciągu odczuwamy promieniowanie podczerwone, ale część wysyłanego promieniowania jest już w zakresie widzialnym dla oka. Dalsze podgrzewanie powoduje, że barwa świecenia zmienia się i staje się coraz bielsza, jaśniejsza. W czasach, gdy kuźnie były bardziej rozpowszechnione, można było obserwować to zjawisko w odwrotnej kolejności podczas pracy kowala. Kawałek żelaza stygnąc na kowadło najpierw świecił jaskrawo, potem ciemniał, czerwieńiał, aby wreszcie stać się kawałkiem ciemnego gorącego żelaza. Doświadczenie to wskazuje, że przy każdej temperaturze każde ciało, a więc i ciało doskonale czarne, wysyła promieniowanie o różnej długości fali. Jeżeli fala jest długa, mówimy o podczerwieni, jeżeli fala jest coraz krótsza, przechodzimy do barw niebieskich i fioletowych. Doświadczenie jest proste. Wystarczy podgrzać badane ciało i obserwować, jaka część energii promienistej wysyłana jest w postaci fali o określonej długości. Możemy nawet stwierdzić, jak zależy ten rozdział energii na fale o poszczególnej długości od temperatury, do której podgrzaliśmy ciało. Dotąd nie widać nic zaskakującego. Powszechnie znany jest pogląd, że świecenie ciała zależy od temperatury, do której jest ono podgrzane. Myślę, że w sposób nieuświadomiony zdawał sobie z tego sprawę i człowiek pierwotny od chwili, gdy opanował z korzyścią dla siebie ogień. Problem pojawi się wtedy, gdy zechcemy na podstawie naszej wiedzy z życia codziennego przewidzieć, jak zależy świecenie podgrzanego ciała od temperatury. Pod koniec dziewiętnastego wieku przeprowadzono bardzo staranne badania dotyczące promieniowania ciała podgrzanego. Ściśle mówimy: dotyczące promieniowania ciała doskonale czarnego. Pozostawmy na boku ścisłość, bo nam wystarczy mówić o badaniu

promieniowania podgrzanego ciała. Nierozwiązalny okazał się problem wyprowadzenia znalezionej doświadczalnie prawa promieniowania – prawa przesunięcia Wiena. Jest ono bardzo proste. Mówi tylko tyle, że iloczyn temperatury ciała i długości fali promieniowanej z największym natężeniem jest stały. Wszystkie klasyczne próby wyprowadzenia tej tak prostej zależności zakończyły się niepowodzeniem. Usiłowano wyprowadzić ten wzór posługując się tym, co wiadano dotychczas. W naszej terminologii możemy powiedzieć, że wyprowadzono go zgodnie ze zdrowym rozsądkiem. Tymczasem postępowanie zgodne ze zdrowym rozsądkiem prowadziło do wyniku bezsensownego. Wzór, jaki wyprowadzono, nie zgadzał się z doświadczeniem, a co gorsza, przewidywał, że ciało powinno wypromieniować przy każdej temperaturze nieskończoną energię – oczywisty bezsens. Tak więc w roku 1900 sytuacja wydawała się beznadziejna. Doświadczenie swoje, a teoria swoje i, co gorsza, nie wiadano, gdzie tkwi błąd. Opierano się przecież przy wyprowadzeniu na dobrze poznanych zasadach.

Przełom następuje 14 grudnia 1900 roku. Na posiedzeniu Niemieckiego Towarzystwa Fizycznego w Berlinie Max Planck przedstawił wyprowadzenie prawa promieniowania ciała doskonale czarnego. Był ze swego wyprowadzenia niezadowolony. Cóż z tego, że otrzymał poprawny wynik (to znaczy – zgodny z doświadczeniem), jeżeli musiał zrobić bezsensowne i, jak się wydawało, nieuzasadnione założenie. Założył mianowicie, że energia promienista pochłaniana lub wysyłana przez dowolne ciało może być pochłaniana lub wysyłana tylko porcjami. Im większa długość fali, tym mniejsza porcja energii, która może być wyemitowana lub pochłonięta. Pojawiło się pojęcie porcji energii, którą nazwano kwantem energii. Są to narodziny fizyki kwantowej. Sam Planck bardzo niechętnie patrzył na to odejście od fizyki klasycznej i po swym wielkim odkryciu przez wiele lat starał się wyjaśnić zjawisko promieniowania ciała doskonale czarnego na gruncie czysto klasycznym. Po bezowocnych wysiłkach stwierdził później, że mimo wszystko nie uważa, iż trud jego poszedł na marne, bo dzięki wielokrotnym niepowodzeniom przekonał się w końcu, że nie można znaleźć wyjaśnienia mieszczącego się całkowicie w ramach fizyki klasycznej.

Drgania plazmowe

Stanisław MRÓWCZYŃSKI

Plazma to, jak pamiętamy, układ zjonizowanych atomów, czyli dodatnio naładowanych jonów i obdarzonych ładunkami ujemnymi elektronów. W przypadku plazmy wodorowej mamy mieszaninę protonów i elektronów z pewną ilością atomów wodoru, które jednak nie wpływają istotnie na własności plazmy. A własności te są bardzo szczególne i z tego powodu plazma bywa nazywana czwartym stanem materii, po gazach, cieczach i ciałach stałych. Bodaj najbardziej typowym zjawiskiem plazmowym są drgania elektronów względem jonów, zwane drganiami bądź oscylacjami plazmowymi. Ponieważ najlżejszy jon – proton jest blisko 2000 razy cięższy od elektronu, więc możemy myśleć w tym przypadku o jonach jako cząstkach nieruchomych.

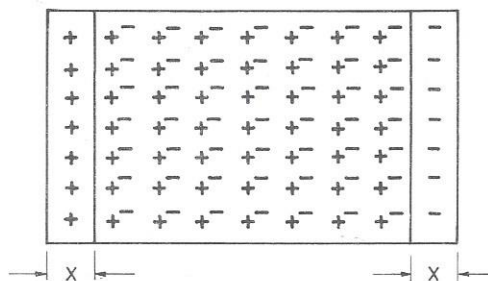
Wyobraźmy sobie prostopadłościenny, dla prostoty naszych rozważań, obszar zajmowany przez plazmę. Środek ciężkości elektronów został, na skutek jakiegoś zaburzenia, przesunięty względem środka ciężkości jonów o x . Przyjmijmy dalej, że gęstości elektronów ρ_e i jonów ρ_j są stałe w obszarach zajmowanych odpowiednio przez elektrony i jony. Ponieważ plazma jako całość jest elektrycznie neutralna, więc

$$Z\rho_e = \rho_j,$$

gdzie Z jest liczbą ładunkową jonu, tzn. Ze jest jego ładunkiem. Przesunięcie elektronów względem jonów sprawia, że pojawiają się nieneutralizowane ładunki (patrz rys.), a zatem powstaje pole elektryczne. Obliczmy, jakie to pole. Ponieważ ładunki odpowiedzialne za jego wytworzenie znajdują się tylko na brzegu obszaru, więc nasze zadanie jest identyczne z zadaniem o polu elektrycznym w prostopadłościennym kondensatorze. Zastosowawszy twierdzenie Gaussa znajdujemy pole (w układzie jednostek CGS)

$$E = 4\pi \frac{Q}{S} = 4\pi e\rho_e x,$$

gdzie Q jest całkowitym ładunkiem je wytwarzającym, a S przekrojem poprzecznym rozważanego obszaru.



Znając pole elektryczne możemy wyznaczyć ruch elektronów. Drugie prawo Newtona przyjmuje postać

$$(1) \quad Nm \frac{d^2x}{dt^2} = -4\pi Ne^2 \rho_e x;$$

N oznacza liczbę elektronów, a m masę elektronu. Znak minus pojawia się po prawej stronie dlatego, że pole stara się przeciwdziałać rozsuwaniu ładunków dodatnich i ujemnych.

Równanie (1) można zapisać następująco

$$(2) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_p^2 x,$$

gdzie wielkość $\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 \rho_e}{m}}$ zwana jest częstością plazmową.

Zależąc jedynie od gęstości i dwóch stałych ($e^2 = \frac{1}{137}$ i $m = 0,5 \text{ MeV}/c^2$) jest ω_p jednym z najważniejszych parametrów charakteryzujących plazmę.

Równanie (2) jest szczególnie lubianym przez fizyków równaniem oscylatora harmonicznego, którego rozwiązaniami są funkcje

$$(3) \quad x(t) = A \sin(\omega_p t + \varphi),$$

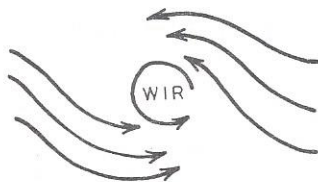
gdzie A jest amplitudą drgań, a φ fazą początkową. Widzimy więc, że wychylone względem jonów elektrony zaczynają oscylować i robią to bardzo szybko. Gęstość plazmy wytworzonej w urządzeniach mających doprowadzić do kontrolowanej syntezy termojądrowej waha się w granicach $10^{13} - 10^{17} \text{ cm}^{-3}$, co daje częstotliwość drgań $\nu = 2\pi\omega_p$ rzędu $10^{11} - 10^{13} \text{ s}^{-1}$.

Na podstawie postaci rozwiązań (3) stwierdzilibyśmy, że raz wywołane drgania plazmowe nigdy nie zanikają. Jest to jednak wynik naszego bardzo uproszczonego opisu, który uwzględnia jedynie oddziaływanie elektronów z polem elektrycznym. Można natomiast oczekiwać, że przemieszczanie się elektronów względem jonów wywoła siłę podobną do siły tarcia, która będzie tłumić oscylacje plazmowe prowadząc do ich zaniku. Rzeczywiście, tak się często dzieje. Bywa jednak i tak, że wspomniana siła tarcia nie odgrywa poważnej roli, a amplituda drgań nie zanika z czasem, lecz narasta. Mamy wówczas do czynienia z tzw. niestabilnościami plazmowymi, które sprawiają, że zachowanie plazmy trudno przewidzieć, a jeszcze trudniej nad plazmą zapanować. Niestabilności plazmowe, o których opowiem następnym razem, są właśnie główną przeszkodą na drodze do kontrolowanej reakcji termojądrowej.



Rozwiązanie zadania F 351.

Siła Coriolisa powoduje, że ruch ciał nie jest prostoliniowy. Na półkuli północnej ciała zbaczają w prawo, w wyniku czego pędzące na siebie strumienie powietrza (a tak jest w niżu) odchylają się jak na rysunku. Powoduje to powstawanie częściej wirów kręcących się w lewo.



Na półkuli południowej sytuacja jest odwrotna – wiry niżowy będzie kręcił się w prawo.



Rozwiązanie zadania M 659.

Jeśli n jest parzyste i n razy wykonamy ruch opisany w treści zadania, za każdym razem nie poruszając innej filiżanki, to w efekcie każdą filiżankę odwrócimy $n - 1$ razy. Spowoduje to odwrócenie wszystkich filiżanek do góry dnem, gdyż $n - 1$ jest nieparzyste.

Niech teraz n będzie liczbą nieparzystą. Wyobraźmy sobie, że w każdej prawidłowo stojącej filiżance umieszczona jest liczba $+1$, w każdej zaś filiżance odwróconej dnem do góry – liczba -1 . Przed wykonaniem pierwszego ruchu iloczyn wszystkich liczb jest równy 1 . Każdy ruch zmienia położenie $(n - 1)$, czyli parzystej liczby filiżanek; oznacza to, że iloczyn liczb umieszczonych w filiżankach jest stale równy $+1$. Nie można więc odwrócić wszystkich filiżanek do góry dnem, bo wtedy iloczyn wszystkich liczb musiałby przybrać wartość -1 .



Rozwiązanie zadania M 660.

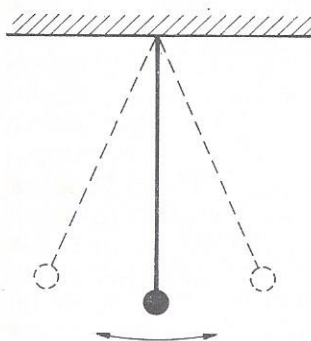
Ponieważ współczynnik wielomianu przy najwyższej potęgce jest równy 1 , więc iloczyn jego pierwiastków jest równy wyrazowi wolnemu, czyli 1 , ich suma zaś jest liczbą przeciwną do współczynnika przy x^{19} . Zatem, jeśli a_i (dla $i = 1, \dots, 20$) oznaczają pierwiastki wielomianu, to

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{20}}{20} &= 1 = \\ &= \sqrt[20]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{20}}, \end{aligned}$$

czyli w nierówności (nieostrej) między średnią arytmetyczną a geometryczną zachodzi równość. Jak wiadomo, jest to możliwe jedynie wtedy, gdy dla wszystkich i mamy $a_i = 1$.

Dokładnie izochroniczne wahadło matematyczne

Stanisław BEDNAREK



Rys. 1

Zapewne wszyscy pamiętają wykonywane w szkole lub podczas zabawy doświadczenia z wahadłem matematycznym. Niewielki ciężarek zawieszony na lekkiej i nierozciągliwej nici po odchyleniu od kierunku pionowego i puszczeniu swobodnie wykonuje drgania (rys. 1). W szkole często mówi się, że jest to przykład drgań harmonicznyc. Jeżeli ciało wykonuje drgania harmoniczne, to wypadkowa siła wprawiająca je w ruch, nazywana siłą kierującą \vec{F} , ma wartość wprost proporcjonalną do wychylenia i zwrócona jest zawsze do położenia równowagi. W przypadku wahadła matematycznego miarą tego wychylenia będzie kąt α zawarty między pionem a aktualnym kierunkiem nici. Wtedy wartość siły kierującej możemy wyrazić wzorem

$$(1) \quad F = -k\alpha,$$

w którym k oznacza współczynnik proporcjonalności.

Okres drgań T wahadła matematycznego, czyli czas, w którym powraca ono do tego samego skrajnego położenia, oblicza się ze znanego wzoru

$$(2) \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

w którym l to długość wahadła, g zaś – wartość przyspieszenia ziemskiego w miejscu wykonywania eksperymentu.

Jak wynika ze wzoru (2), okres drgań nie zależy od największego odchylenia wahadła od pionu, czyli od amplitudy drgań. Zgodnie z tym należy się spodziewać, że wahadło o danej długości odchyłone od pionu potrzebuje tyle samo czasu na powrót do skrajnego położenia niezależnie od tego, czy kąt odchylenia będzie 6° czy 60° . Ta właściwość ruchu drgającego nazywa się izochronizmem (od greckich słów *isos* – równy, *chronos* – czas). Ma ona istotne znaczenie, gdy wykorzystujemy ruch drgający do pomiaru czasu. Przyjmując okres tego ruchu za jednostkę czasu nie musimy się martwić o amplitudę drgań.

Niestety, dokładne rozważania dowodzą, że wahadło matematyczne wykazuje właściwość izochroniczną tylko w przybliżeniu, zwłaszcza dla małych kątów odchylenia nie przekraczających kilku stopni. Dokładnie bowiem, zgodnie z rysunkiem 2, wartość siły kierującej wyraża się wzorem

$$(3) \quad F' = -mg \sin \alpha,$$

w którym m oznacza masę wahadła. Jeśli α nie przekracza kilku stopni, to można skorzystać z przybliżenia

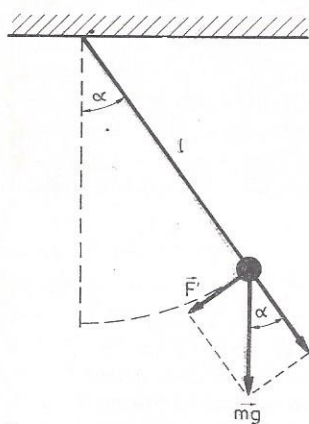
$$(4) \quad \sin \alpha \approx \alpha.$$

Wtedy wzór (3) przyjmuje postać wzoru (1), a rolę współczynnika k spełnia ciężar ciała mg .

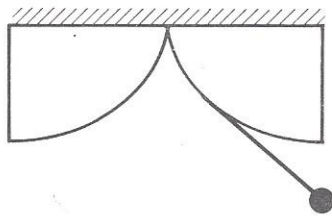
W przypadku większych amplitud przybliżenia (4) zastosować nie można. Okres drgań wahadła matematycznego wyraża się wówczas pełnym wzorem

$$(5) \quad T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^3 \sin^6 \frac{\alpha}{2} + \dots \right].$$

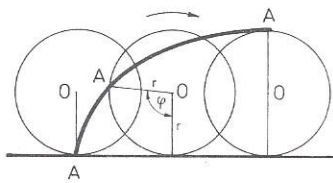
Łatwo zauważyć, że dla małych wartości α liczba $\sin \alpha$ jest dużo mniejsza od jedności i kolejne wyrazy szeregu występującego w nawiasie szybko maleją. Można więc pominąć te wartości jako znacznie mniejsze niż 1 i wzór (5) zastąpić przybliżonym wzorem (2).



Rys. 2



Rys. 3

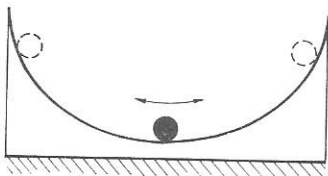


Rys. 4

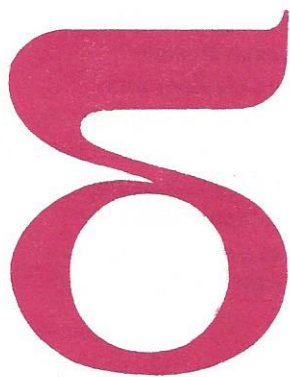
Żeby sprawdzić słuszność powyższych wywodów, wystarczy wykonać proste doświadczenie. W tym celu budujemy wahadło matematyczne złożone z niewielkiego obciążnika, np. dużej nakrętki zawieszanej na cienkiej nici o długości kilkudziesięciu centymetrów. Wahadło to wprawiamy w drgania o małej amplitudzie odchylając je od pionu o kąt około 5° i za pomocą stopera lub zegarka z sekundnikiem mierzymy czas trwania np. 20 drgań. Pomiar ten powtarzamy kilkakrotnie. Obliczamy czas średni, który następnie dzielimy przez liczbę drgań i otrzymujemy okres. Te same czynności powtarzamy dla dużej amplitudy odchylając wahadło od pionu o kąt około 45° . Jaką różnicę zauważymy? Który okres jest dłuższy?

Skoro okazało się, że najprostsze wahadło matematyczne wyraźnie nie jest izochroniczne dla dużych amplitud, powstaje problem, jak sporządzić wahadło mające tę własność? Pomocą ku temu może służyć wzór (5). Jeżeli okres drgań wzrasta ze wzrostem amplitudy α i długości l , to może by skracać l w miarę wzrostu α w taki sposób, aby okres pozostawał stały. Można to zrobić nawijając nić na krzywkę o odpowiednim kształcie (rys. 3). Dokładne obliczenia wykazują, że krzywka ta powinna mieć kształt odwróconej połówki cycloidy. Cycloida jest krzywą okresową zakreśloną przez dowolnie wybrany punkt A leżący na okręgu toczącym się bez poślizgu po linii prostej (rys. 4). Po cycloidach poruszają się więc względem obserwatora stojącego na Ziemi wszystkie punkty leżące na brzegu kół jadących bez poślizgu pojazdów. W przypadku naszego ściśle izochronicznego wahadła średnica okręgu, na którym leży punkt zakreślający cycloidę, powinna być równa połowie długości wahadła. Wtedy też długość łuku połówki tej cycloidy będzie równa długości wahadła. Po raz pierwszy wahadło takie zostało zaproponowane przez Huygensa, stąd też często nazywa się wahadłem cycloidalnym jego imienia.

Następnym problemem jest zbudowanie modelu tego wahadła. W tym celu potrzebna będzie płytka ze styropianu albo kawałek miękkiej płyty pilśniowej lub sklejki, kilkadziesiąt szpilek albo gwoździków, kawałek kartonu i poprzednio sporządzone wahadło matematyczne. Na kartonie rysujemy okrąg o dość dużym promieniu, np. 10 czy 15 cm. Po wycięciu zaznaczamy na brzegu otrzymanego krążka punkt. Teraz przystępujemy do wykreślenia gałęzi cycloidy. Na płytce układamy linijkę i przykładamy do niej krążek tak, aby krawędź linijki przechodziła przez zaznaczony punkt. Przetaczamy bez poślizgu krążek po krawędzi linijki zaznaczając na płytce kolejne położenia wyróżnionego punktu – zgodnie z rysunkiem 4. Po wykonaniu przez krążek połowy obrotu i połączeniu zaznaczonych punktów otrzymujemy łuk cycloidy. Podobnie wykreślamy drugą, symetryczną gałąź cycloidy (porównaj rys. 3). Wzdłuż wykreślonych linii, co kilka milimetrów wbijamy szpilki lub gwoźdźki, między którymi można przepleść pasek kartonu o szerokości równej wysokości wystających części szpilek lub gwoździków. W miejscu, gdzie łuki cycloidy zbiegają się, wbijamy gwoździć i zawieszamy na nim wahadło matematyczne. Jego długość powinna być dwa razy większa od średnicy krążka użytego do wykreślenia łuków cycloidy. Tak przygotowaną płytkę z wahadłem zawieszamy w płaszczyźnie pionowej na dwóch gwoździćkach. Teraz możemy przystąpić do badania izochronizmu naszego wahadła cycloidalnego. W tym celu powtarzamy w poprzednio opisany sposób pomiary okresu. Wykonujemy je dla coraz to większych amplitud zaczynając np. od około 10° i przy każdym następnym pomiarze zwiększając amplitudę o kolejne 10° . Dla każdej z amplitud obliczamy średni okres z kilku pomiarów i porównujemy otrzymane wartości. Jaki wniosek możemy stąd wyciągnąć? I na koniec jeszcze jeden problem. Jaka linia jest torem, po którym porusza się obciążnik naszego wahadła cycloidalnego konstrukcji Huygensa? Jaką zaletę ma to wahadło w porównaniu z innym wahadłem cycloidalnym sporządzonym z kuleczki staczającej się po rynience w kształcie odwróconej cycloidy (rys. 5)?



Rys. 5



mała delta

(tym razem dla nauczycieli)

Budujemy bombę atomową

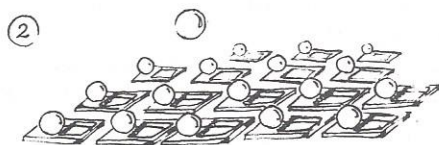
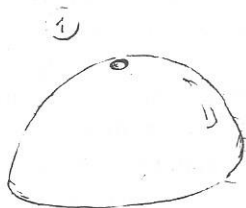
Oczywiście, nie prawdziwą, tylko taką, która będzie mogła wielokrotnie wybuchać na lekcjach fizyki bez szkody dla obserwatorów.

Zasada działania bomby atomowej i reaktora atomowego jest dzisiaj powszechnie znana. Paliwo jądrowe jest niestabilne. Składa się z ciężkich pierwiastków (uranu, plutonu itp.), których jądra wzbudzone w wyniku pochłonięcia neutronu mogą ulec rozszczepieniu na dwie, w przybliżeniu równe, części. W każdym akcie rozszczepienia wyzwala się kilka neutronów, które z kolei mogą powodować rozszczepienie dalszych jąder paliwa. W ten sposób następuje reakcja łańcuchowa.

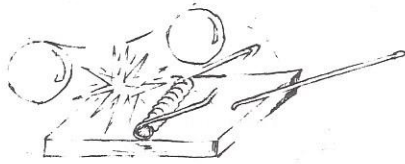
Rozszczepieniu jąder ciężkich pierwiastków towarzyszy wydzielenie się ogromnej ilości energii, na przykład z 1 grama uranu uzyskuje się około 22 MWh energii, tzn. tyle, ile ze spalania około 2,5 tony węgla.

W reaktorze atomowym reakcja łańcuchowa ma przebieg kontrolowany, aby zbyt wielkie tempo wydzielania się energii nie zniszczyło reaktora. W bombie atomowej reakcja przebiega lawinowo. Prawie wszystkie neutrony wyzwolone w trakcie rozpadu inicjują kolejne akty rozszczepienia jąder. Dla uranu 235 średnia liczba wyzwolonych neutronów wynosi 2,5. Jeśli dwa z nich inicjują kolejne akty rozszczepienia, to najpierw rozpadnie się jedno jądro, następnie 2, 4, 8, 16 itd.

Piękną ilustracją, jak szybko przebiega niekontrolowana reakcja łańcuchowa, będzie model bomby atomowej, do konstrukcji którego zachęcam.



(3)



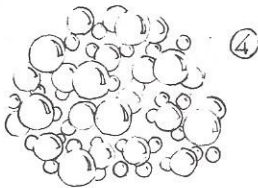
Potrzebne będą: kawałek płyty drewnianej (sklejka, płyta wiórowa itp.), około stu pułapek na myszy, tyle samo piłeczek pingpongowych i pokrywa wykonana, na przykład, z pleksiglasu.

Pułapki na myszy przybijamy do płyty drewnianej (10 rzędów po 10 sztuk) i dopasowujemy pokrywę o wysokości około 20 cm. W pokrywie wiercimy otwór o średnicy nieco większej od średnicy piłeczki pingpongowej. I to wszystko.

Napinamy pułapki na myszy i na każdą kładziemy ostrożnie piłeczkę pingpongową tak, aby nie zwolnić pułapki, i przykrywamy pokrywą. Bomba gotowa. Każda pułapka – to atom gotowy do rozpadu, a piłeczka – to neutron, który zostaje wyzwolony w trakcie procesu rozszczepienia. W przyrodzie reakcja łańcuchowa inicjowana jest spontanicznie. My możemy zainicjować ją wrzucając piłeczkę przez otwór w pokrywie. W ułamku sekundy wszystkie pułapki zostaną zwolnione – bomba wybuchnie.

Z fizyki jądrowej nie ma zbyt wielu doświadczeń do przeprowadzenia w czasie lekcji lub wykładu. Pokaz z opisaną bombą atomową może uatrakcyjnić nasze zajęcia, a słuchacze na zawsze zapamiętają ideę reakcji łańcuchowej.

Małą Deltę przygotował Jan KALINOWSKI



Odcinek dla poczty		Odcinek dla posiadacza rachunku		Potwierdzenie dla wpłacającego	
Zł	Zł	Zł
słownie złotych		słownie złotych		słownie złotych	
Dokładny adres	wpłacający	Dokładny adres	wpłacający	Dokładny adres	wpłacający
na r-k	AMOS	na r-k	AMOS	na r-k	AMOS
Dokładna nazwa	01-506 Warszawa	Dokładna nazwa	01-506 Warszawa	Dokładna nazwa	01-506 Warszawa
	ul. Szenwalda 1		ul. Szenwalda 1		ul. Szenwalda 1
nazwa banku	PKO VIII O/W-wa	nazwa banku	PKO VIII O/W-wa	nazwa banku	PKO VIII O/W-wa
Nr r-ku	1586-77578-136	Nr r-ku	1586-77578-136	Nr r-ku	1586-77578-136
stempel	stempel	stempel
podpis przyjmującego	podpis przyjmującego	podpis przyjmującego
	Pobrano opłatę		Pobrano opłatę		Pobrano opłatę
	zł		zł		zł



Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

M 658. Udowodnić, że jeżeli liczby naturalne a_i , $i = 1, 2, \dots, 6$, spełniają zależność

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = a_6^2,$$

to przynajmniej jedna z nich jest parzysta.

Rozwiązanie na str. 16

M 659. Na stole stoi (normalnie) n filiżanek. Należy odwrócić je wszystkie do góry dnem, postępując zgodnie z następującą zasadą: za jednym razem można odwrócić $n - 1$ filiżanek (dowolnie wybranych); procedurę tę można powtarzać wiele razy.

Udowodnić, że można to wykonać wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą parzystą.

Rozwiązanie na str. 5

M 660. Pewien uczeń obudził się pod sam koniec lekcji algebry i usłyszał końcówkę wypowiedzi nauczyciela: „... powiem tylko jeszcze, że wszystkie pierwiastki są rzeczywiste i dodatnie”. Spojrzał na tablicę, na której widniał wielomian dwudziestego stopnia, którego pierwiastki należało obliczyć w domu; niestety, zanim dyżurny wytarł tablicę, zdołał zapisać tylko dwa składniki, $x^{20} - 20x^{19}$ i zapamiętać, że wyraz wolny był równy $+1$. Należy postawić się w sytuacji owego ucznia i rozwiązać jego zadanie domowe, dysponując jedynie podanymi wyżej informacjami.

Rozwiązanie na str. 5

Redaguje Jarosław KULPA

F 351. W którą stronę wiruje powietrze w niżu atmosferycznym? Czy na półkuli południowej zmienia się uprzywilejowany kierunek wiru?

Rozwiązanie na str. 5

F 352. Dwóch podróżnych wyruszyło w podróż dookoła świata wzdłuż równika ziemskiego w przeciwne strony. Obaj zabrali ze sobą zegary wahadłowe i obaj poruszali się względem Ziemi z tą samą prędkością. Po okrążeniu Ziemi znów spotkali się w tym samym punkcie. Obliczyć różnicę wskazań ich zegarów. Promień Ziemi wynosi $R \approx 6,4 \cdot 10^6$ m.

Rozwiązanie na str. 16

Prenumerata „Delfi”

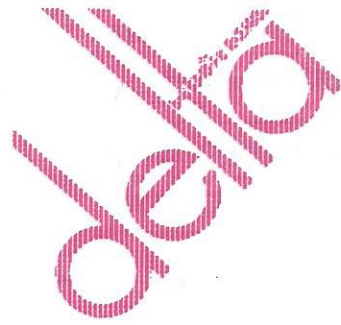
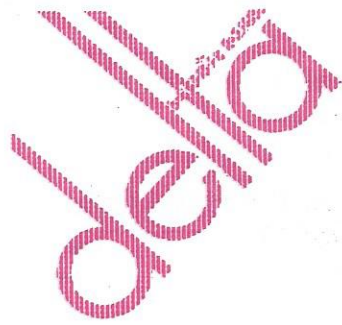
za okres:

Prenumerata „Delfi”

za okres:

Prenumerata „Delfi”

za okres:



Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki,
Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Regulamin

1. Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego oraz Redakcja miesięcznika *Delta* organizują konkurs – ligę zadaniową pod nazwą **Klub 44**.
2. Zadania konkursowe są ogłaszane w miesięczniku *Delta*, po cztery zadania w każdym numerze: dwa z matematyki i dwa z fizyki, z dwumiesięczną przerwą (nr 6 i 7 każdego roku).
3. Uczestnikiem ligi może być każdy.
4. Uczestnictwo w lidze polega na rozwiązywaniu zadań konkursowych i przysyłaniu opracowanych rozwiązań do redakcji *Delty*. Uczestnikiem zostaje się po przysłaniu rozwiązania co najmniej jednego zadania.
5. Moment przystąpienia do ligi można wybrać dowolnie. Nie ma konieczności rozwiązywania zadań z każdego miesiąca.
6. Rozwiązania zadań z numeru n należy nadsyłać do końca miesiąca $n + 3$ (dodawanie modulo 12; na przykład termin nadsyłania rozwiązań zadań z numeru 11/1992 upływa 28 lutego 1993). W numerze $n + 4$ podane są szkicowe rozwiązania.
7. Rozwiązanie każdego zadania powinno być pisane na oddzielnym arkuszu papieru oraz podpisane imieniem i nazwiskiem. Uczniowie proszeni są o podanie klasy, studenci – roku i uczelni. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, z dopiskiem na kopercie: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**.
8. Prace powinny być samodzielne. Jednobrzmiące rozwiązania pisane przez różnych uczestników nie będą brane pod uwagę.
9. Rozwiązanie każdego zadania jest ocenione w skali od 0 do 1, z dokładnością do 0,1. Przy ocenie brana jest pod uwagę nie tylko poprawność merytoryczna i rachunkowa, lecz także pomysłowość metody i elegancja rozwiązania.
10. Każde zadanie otrzymuje współczynnik trudności ustalany po wystawieniu ocen. Współczynnik ten jest liczbą pomiędzy 1 a 4 obliczaną według następującej reguły: jeśli N oznacza liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (matematyka lub fizyka), a S oznacza sumę ocen uzyskanych przez wszystkich uczestników za dane zadanie, wówczas otrzymuje ono współczynnik trudności $WT = 4 - 3S/N$. Za nadesłane rozwiązanie uczestnik otrzymuje w punktacji ligowej liczbę punktów równą iloczynowi uzyskanej oceny przez współczynnik trudności (z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku).
11. Niektóre z zadań można znaleźć (w brzmieniu identycznym lub bardzo zbliżonym) wraz z rozwiązaniami w różnych książkach i czasopismach. Uczestnicy, którzy w takich przypadkach przyślą zamiast własnego rozwiązania dokładny odczytacz do literatury, otrzymają ocenę maksymalną, pod warunkiem, że w cytowanym źródle istotnie znajduje się pełne rozwiązanie (dowód, obliczenie, konstrukcja).
12. Czytelnicy *Delty* mogą zgłaszać propozycje zadań; jeśli zadanie nie jest własnego autorstwa, należy podawać źródło. Gdy zadanie wykorzystane w lidze pochodzi z propozycji uczestnika ligi (tj. osoby, która przysłała już rozwiązanie jakiegoś zadania – por. p. 4), a dostarczone zostało wraz z rozwiązaniem (choćby szkicowym, ale poprawnym, ewentualnie odsyłaczem do literatury), uczestnik otrzymuje ocenę maksymalną.
13. Punkty zdobyte przez każdego uczestnika za rozwiązania poszczególnych zadań, obliczone według reguły podanej w p. 10, są sumowane – oddzielnie dla matematyki i dla fizyki. Z chwilą osiągnięcia sumy **44** punktów w jednej z tych dwóch dziedzin uczestnik staje się członkiem **Klubu 44**.
14. Po zgromadzeniu **44** punktów (i zostaniu członkiem **Klubu 44**) można w dalszym ciągu brać udział w konkursie ligowym. Nadwyżka punktów ponad wartość **44** zostaje zaliczona na poczet ponownego uczestnictwa w lidze.
15. Trzykrotne uzyskanie członkostwa **Klubu 44** daje tytuł **Weterana Klubu 44**.
16. Aby uzyskać informacje o swoich wynikach, należy przysłać do redakcji *Delty* kartkę pocztową (oddzielną dla matematyki i dla fizyki), ofrankowaną i zaadresowaną do siebie, ze sporządzoną tabelką z umieszczonymi w jej rubrykach numerami zadań i z pustymi okienkami do wpisania ocen. Zaleca się przysyłanie takich kartek nie częściej niż co kilka miesięcy, gdy zbiera się materiał dotyczący rozwiązań kilkunastu zadań.
17. Czołówka listy ligowej jest systematycznie ogłaszana w miesięczniku *Delta*. Nazwisko uczestnika może być wymienione w czołówce z nie zmienioną sumą punktów co najwyżej trzykrotnie; następny raz ukaże się wtedy, gdy wykona ruch w górę.
18. Raz do roku, w numerze lutym, drukowane jest omówienie przebiegu konkursu, prezentowane są w skrócie ciekawsze rozwiązania i uogólnienia oraz ogłaszana jest obszerna czołówka (kilkadziesiąt nazwisk).
19. Członkowie **Klubu 44** są zapraszani na spotkania **Klubu 44**.
20. Organizatorzy zastrzegają sobie wyłączne prawo interpretacji i możliwość zmian regulaminu.

255. Czworokąt wypukły o bokach długości a, b, c, d jest wpisany w koło i opisany na kole. Promień koła opisanego ma długość R . Pole czworokąta równa się S . Dowieść, że

$$\frac{S}{a} + \frac{S}{b} + \frac{S}{c} + \frac{S}{d} \leq 2\sqrt{S} + \frac{4R^2}{\sqrt{S}}.$$

256. Dane są liczby całkowite $n \geq k \geq 1$. Ile jest k -elementowych ciągów liczb całkowitych dodatnich (x_1, \dots, x_k) spełniających równanie $x_1 + \dots + x_k = n$? (Ciągi o tych samych wyrazach, ale występujących w różnej kolejności, uważamy za różne.)

Zadanie 256 zaproponowała pani Ilona Królak z Nysy, uczennica liceum.

Rozwiązania zadań z numeru 10/1992

Przypominamy treść zadań:

247. Dla liczb dodatnich a, b, c przyjmijmy $A = (a + b + c)/3$, $G = (abc)^{1/3}$, $H = 3/(a^{-1} + b^{-1} + c^{-1})$. Udowodnić, że $3A^2 + G^2 \geq 4G^3H^{-1}$.

248. Wyznaczyć wszystkie pary różnych liczb naturalnych x, y spełniające warunek $NWW(x, y) = xy/(\max\{x, y\} - \min\{x, y\})$.

247. Przyjmijmy, że c jest najmniejszą z liczb a, b, c . Zachodzi więc nierówność $a + b - c \geq 2\sqrt{ab} - c \geq 0$, z której wynika, że

$$\begin{aligned} 0 &\leq (a + b - c)^2 - (2\sqrt{ab} - c)^2 = \\ &= (a + b + c)^2 - 4(bc + ca + ab) + 4c\sqrt{ab} - c^2 = \\ &= (3A)^2 - 4 \cdot 3G^3H^{-1} + 4c\sqrt{ab} - c^2. \end{aligned}$$

Skorzystamy teraz z nierówności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną czwórki liczb: c^2 oraz trzykrotnie wziętej liczby G^2 :

$$c^2 + 3G^2 \geq 4(c^2G^6)^{1/4} = 4c\sqrt{ab}.$$

Wracamy do poprzedniego szacowania:

$$0 \leq 9A^2 - 12G^3H^{-1} + 4c\sqrt{ab} - c^2 \leq 9A^2 - 12G^3H^{-1} + 3G^2$$

- a to jest teza zadania.

248. Przypuśćmy, że liczby naturalne x, y ($x > y$) spełniają podany warunek i oznaczmy $NWD(x, y)$ przez d . Ponieważ $NWD(x, y) \cdot NWW(x, y) = xy$, z równania $NWW(x, y) = xy/(x - y)$ wynika, że $x - y = d$. Stąd $y = kd$, $x = (k + 1)d$. Uwzględniając drugą możliwość ($x < y$) otrzymujemy jako ogólne rozwiązanie wszystkie pary postaci $(kd, (k + 1)d)$ oraz $((k + 1)d, kd)$; $k, d = 1, 2, 3, \dots$

Przed kilkoma miesiącami pożegnaliśmy naszego Kolegę **Krzysztofa Trautmana**. Zmarł tragicznie podczas pobytu naukowego w Stanach Zjednoczonych. Przypomnijmy: Krzysztof był jednym z pierwszych członków matematycznego Klubu 44. Pierwsze rozwiązania przysłał jesienią 1981 roku i po kilkunastu miesiącach, będąc jeszcze uczniem liceum, zgromadził czterdzieści cztery punkty. Jeszcze przez jakiś czas przysyłał rozwiązania, zawsze eleganckie i dopracowane. Jedno z zadań ligowych było autorstwa Krzysztofa. Studia matematyczne, praca na uczelni, aktywność naukowa - i nieoczekiwany kres.

Matematyczna liga zadaniowa Klub 44 trwa już lat jedenaście i pół. Większość uczestników to uczniowie i studenci. Po okresie aktywnego uczestnictwa w zabawie (tak to nazywajmy i traktujmy) zmniejszają intensywność udziału, po czym znikają z naszego pola widzenia. To normalne: zmieniają się obowiązki, cele, wartości; przychodzi czas na poważniejszą działalność. Czasem, po latach przerwy, ktoś znów przysłał rozwiązanie jakiegoś zadania, które mu szczególnie przypadło do gustu. To znaczy, że nie pozostał się z nami na dobre, że nadal jest naszym wiernym czytelnikiem. Bardzo miłe są dla nas takie sygnały pamięci.

Wśród osób, które w „bieżącym okresie sprawozdawczym” (rok szkolny 1991/92) uczestniczyły w lidze, ogromna większość zaczynała karierę ligową dwa-trzy lata wcześniej. Ale są i długodystansowcy. Rekord nie do pobicia dzierży pan Jerzy Janowicz (nauczyciel szkoły podstawowej), który wystartował w lidze w pierwszym miesiącu jej istnienia; można na palcach policzyć te miesiące, w których nie otrzymaliśmy od niego korespondencji: rozwiązań oraz propozycji zadań, zawsze pomysłowych.

Spśród uczestników pierwszej lub drugiej kolejki ligowej (jesień 1981), jeszcze trzech wytrzymało do tej pory (1991/92), chociaż z okresami odpoczynku: **Kazimierz Serbin**, **Mirosław Matłega**, **Marek Prausa**. Nietrudno zresztą wymienić *wszystkich*, którzy wystartowali przed rokiem 1986 i nadal aktywnie uczestniczą - z przerwami niewielkimi: **Krzysztof Jedziniak** (82), **Tadeusz Józefczyk** (83), **Jan Ciach** (83) (Panie Janie! Erudycji w dziedzinie klasycznej geometrii możemy Panu tylko pozazdrościć) - lub z przerwami znacznie większymi: **Józef Siwy** (82), **Krzysztof Zapisek** (83); w nawiasie rok startu.

Na zakończenie zwróćmy uwagę na mały jubileusz, czy może raczej „ćwiartkę jubileuszu”: jedenaście lat naszej ligi; pełny jubileusz będziemy świętować, gdy liga skończy 44 lata. Teraz, jak co roku, omówimy ciekawsze rozwiązania zadań oraz uogólnienia i komentarze uczestników. Jeśli jakieś trudne zadanie zostało zrobione przez nie więcej niż sześć osób, podajemy ich nazwiska.

Lista uczestników
ligi zadaniowej Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 241 (WT=1, 28) i 242 (WT=1, 71)
z numeru 5/1992

Mikołaj Rotkiewicz	-	42,90
Krzysztof Zawistawski	-	1-42,82
Marek Prausa	-	2-42,43
Józef Siwy	-	1-42,42
Piotr Kumor	-	2-39,98
Mirosław Matłega	-	38,46
Marcin Kasperski	-	38,26
Przemysław Gadziński	-	1-36,49
Leszek Krawczyk	-	36,37
Jerzy Janowicz	-	7-35,80
Leszek Gasiński	-	35,52
Andrzej Bonk	-	3-33,92
Jerzy Mikuta	-	2-33,87
Anna Gluza	-	1-32,96
Leszek Krzywonos	-	32,51
Krzysztof Witek	-	1-32,00
Krzysztof Jedziniak	-	2-31,81
Eukasz Wiechecki	-	31,48
Marek Karaf	-	30,10
Adam Czornik	-	1-29,56
Tomasz Wietecha	-	1-28,33
Ryszard Pagacz	-	2-27,16
Tadeusz Józefczyk	-	2-27,15
Andrzej Kondracki	-	26,60
Krzysztof Zapisek	-	24,68
Tomasz Szymczyk	-	1-23,06

Legenda (przykładowo): stan konta 7-35,80 oznacza, że uczestnik już siedmiokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (ósmej) rundzie ma 35,80 punktów.

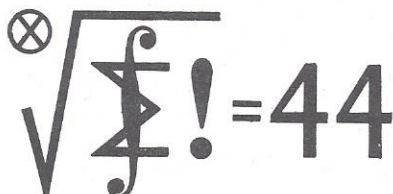
Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:

- stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;
- przysłał rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 1990, 1991 lub 1992.

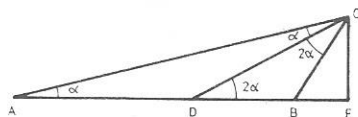
Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy zostali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście, jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani Klubu 44M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):
J. Janowicz (7), P. Kamiński (5), M. Galecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik, M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to cyfra w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44M (alfabetycznie; nie powtarzamy nazwisk figurujących na liście powyżej):
„dwukrotni”: Z. Bartold, P. Jedrzejewicz, H. Kasprzak, T. Komorowski, H. Kornacki, Z. Koza, D. Kurpiel, J. Malopolski, E. Orzechowski, K. Pióro, S. Solecki, G. Zakrzewski;
„jednokrotni”: T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, P. Figurny, M. Fiszer, Z. Galias, T. Grzesiak, K. Hryniewicz, K. Jachacy, A. Krzysztofowicz, P. Kubit, A. Langer, R. Latała, J. Mańdziuk, M. Marczak, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, J. Olszewski, W. Olszewski, M. Roman, A. Ruzel, A. Smolczyk, Z. Surduka, W. Szymczyk, K. Trautman, P. Wach, A. Wyrwa, M. Zajac, Z. Zaus.



Zadanie 223. [W trójkącie ABC : $|\sphericalangle C| = 3 \cdot |\sphericalangle A| \implies h_C < \frac{1}{2}|AB|$] (współczynnik trudności $WT = 2,04$; liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 14$). Autorami rozwiązań eleganckich – to znaczy z przewagą geometrii nad rachunkami – byli: **J. Janowicz, M. Kasperski, J. Olszewski, K. Witek** oraz **P. Gadziński**, którego dowód tu przytaczamy:



$|\sphericalangle CDB| = 2\alpha = |\sphericalangle DCB| \implies |BC| = |BD|$; stąd $|AB| = |AD| + |DB| = |CD| + |CB| \geq 2|CE|$, przy czym nierówność jest ostra, bo co najmniej jeden z punktów B i C nie pokrywa się z E .

Autor rozwiązania nie poprzestał na tym, ale postawił pytanie, czy współczynnik $1/2$ da się „poprawić”; to znaczy, jakie jest minimum stosunku $|AB| : |CE|$; przy użyciu trygonometrii i rachunku różniczkowego obliczył, że minimum to wynosi

$$1 + \frac{3}{\sqrt[3]{2(23 + 3\sqrt{57})} + \sqrt[3]{2(23 - 3\sqrt{57})} - 2} = \sqrt{1 - \frac{1}{9} \left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}(23 + 3\sqrt{57})} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}(23 - 3\sqrt{57})} - 1 \right)^2} = 2,284542897 \dots$$

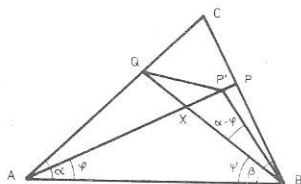
Zadanie 225. [$f: \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f(f(n)) + f(n) = 2n + 6$; $f = ?$] ($WT = 1,89$; $LPR = 14$). Krótkie, zgrabne rozwiązanie (**P. Kumor**): Ustalmy $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i przyjmijmy $a_0 = k$, $a_{n+1} = f(a_n)$, $d_n = a_{n+1} - a_n$. Z podanego równania wynika rekurencja $a_{n+2} + a_{n+1} = 2a_n + 6$, a z niej $d_{n+1} = 6 - 2d_n$, skąd przez indukcję: $d_n = 2 + (-2)^{n+1} + (-2)^n d_0$. Wobec tego $a_n = k + (d_0 + \dots + d_{n-1}) = k + 2n + \frac{1}{3}(2 - d_0)((-2)^n - 1)$; a skoro $a_n \geq 0$ dla wszystkich n , zatem d_0 musi się równać 2. Ostatecznie $a_n = k + 2n$ i w szczególności $f(k) = a_1 = k + 2$.

Zadanie 226. [$0 < a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$; $b_n = n - \sum_{i=1}^n (a_{i-1}/a_i)$ \implies (ciąg (a_n) jest zbieżny \iff ciąg (b_n) jest zbieżny)] ($WT = 2,52$; $LPR = 9$). Ta równoważność, w sformułowaniu: (szereg $\sum_{i=1}^{\infty} (a_{i-1} - a_i)/a_i$ jest zbieżny \iff ciąg (a_n) jest

zbieżny) – jest znana pod nazwą *kryterium Sapogowa*; można ją znaleźć na przykład w podręczniku Fichtenholza. Na ten fakt zwrócili uwagę panowie **T. Kulpa** i **T. Wietecha**.

Zadanie 227. [W trójkącie ABC : punkty P i Q leżą na bokach BC i AC , $|AC| \geq |BC|$; $|\sphericalangle BAP| : |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ABQ| : |\sphericalangle ABC| \implies |AP| \geq |BQ|$] ($WT = 3,11$; $LPR = 5$). Najładniejsze rozwiązanie (**Barbara Wolnik**): Oznaczając $|\sphericalangle CAB| = \alpha$, $|\sphericalangle ABC| = \beta$, $|\sphericalangle PAB| = \varphi$, $|\sphericalangle ABQ| = \psi$

mamy $\varphi/\alpha = \psi/\beta$ oraz $\alpha \leq \beta$, $\varphi \leq \psi$, skąd $\alpha - \varphi \leq \beta - \psi$; istnieje więc na odcinku XP taki punkt P' , że $|\sphericalangle XBP'| = \alpha - \varphi = |\sphericalangle XAQ|$.



Zatem na czworokącie $QABP'$ można opisać okrąg, którego promień oznaczmy przez r . Z nierówności $\alpha \leq \alpha + \psi - \varphi < 180^\circ - \beta + \psi - \varphi \leq 180^\circ - \alpha$ wynika, że $\sin(\alpha + \psi - \varphi) \geq \sin \alpha$; wobec tego $|AP| \geq |AP'| = 2r \sin |\sphericalangle ABP'| = 2r \sin(\psi + \alpha - \varphi) \geq 2r \sin \alpha = |BQ|$.

Zadanie także rozwiązali poprawnie (rozważając ilorazy funkcji trygonometrycznych zależnych od parametru i badając ich wypukłość względem parametru): **P. Gadziński, H. Kornacki, T. Kulpa, T. Wietecha**, a z niewielkimi usterkami – **J. Olszewski** i **M. Rotkiewicz**.

Zadanie 230. [$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła; dowieść, że $(\exists a, b, c$ (różne): $f(a) = b, f(b) = c, f(c) = a) \implies (\exists t, u, v, w$ (różne): $f(t) = u, f(u) = v, f(v) = w, f(w) = t)$ oraz że nie zachodzi implikacja przeciwna] ($WT = 3,17$; $LPR = 4$). Autorzy poprawnych rozwiązań (nie prostszych od naszego): **B. Wolnik, P. Kumor, P. Gadziński, T. Kulpa**; ponadto kilka dobrych rozwiązań drugiej części zadania (kontrprzykłady: funkcje przedziałami liniowe).

Zadanie jest szczególnym przypadkiem twierdzenia Szarkowskiego, które mówi, że jeśli liczby naturalne $k = 2^\alpha p$, $m = 2^\beta q$ ($\alpha, \beta \geq 0$, p, q nieparzyste) spełniają którykolwiek z następujących warunków: (i) $\alpha < \beta$, $p > 1$; (ii) $\alpha = \beta$, $1 < p < q$; (iii) $p > q = 1$; (iv) $\alpha > \beta$, $p = q = 1$ – to z istnienia cyklu iteracyjnego długości k (funkcji ciągłej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) wynika istnienie cyklu długości m , ale nie na odwrót (w naszym zadaniu: $k = 3$, $m = 4$).

Autorzy kilku prac powołują się na twierdzenie Szarkowskiego, odsyłając do *Zbioru zadań z olimpiad matematycznych* (t. 6), gdzie to twierdzenie jest cytowane, nie dość, że bez dowodu (vide: *Regulamini*, p. 11), to na dodatek z usterką w sformułowaniu (zbędne słowo „pierwszych”). „Rozwiązania” takie nie zostały, oczywiście, uznane.

Zadanie 231. [Dla kątów trójkąta: $\sqrt{3}(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) \geq 2(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)^2$] ($WT = 3,82$; $LPR \leq 1$).

Trudne! Jedyny dowód zasadniczo poprawny, choć nie w pełni zadowalający (maksymalizacja przy użyciu rachunku różniczkowego funkcji wielu zmiennych, z numerycznym rozwiązaniem uzyskanego w jednym przypadku układu równań trygonometrycznych) przysłał pan **M. Matłęga**.

Zadanie 239. [Dane $n \geq 3$; znaleźć kresy wyrażenia $\sum_{k=1}^n a_k / (a_k + a_{k+1} + a_{k+2})$, $a_k > 0$ ($a_{n+1} = a_1, a_{n+2} = a_2$)] ($WT = 2,40$; $LPR = 6$). Dobre rozwiązania (tą samą metodą, co nasze) podali: **M. Kasperski, J. Kraszewski, I. Królak, J. Olszewski, M. Rotkiewicz, T. Wietecha**; Kraszewski i Olszewski z uogólnieniem na m składników w mianowniku (zamiast trzech); kresy w tym ogólniejszym przypadku wynoszą 1 oraz $n - m + 1$.

Zadanie 242. [W każdym wierzchołku trójkąta ABC jest masa 1; okrażamy trójkąt, w każdym kroku przerzucając połowę masy zgromadzonej przy danym (kolejnym) wierzchołku do następnego wierzchołka (startujemy z A); po n rundach mamy w wierzchołku A liczbę a_n ; $\lim a_n = ?$] ($WT = 1,71$; $LPR = 8$). Na uwagę zasługują rozwiązania, których autorzy **J. Kraszewski** i **J. Olszewski** elegancko operują pojęciami granicy górnej i granicy dolnej. Oto pierwsze z tych rozwiązań: dochodzimy do rekurencji $a_n = \frac{5}{8}a_{n-1} - \frac{1}{8}a_{n-2} + \frac{3}{4}$ (por. *Delta* 9/1992). Niech $g = \limsup a_n$, $d = \liminf a_n$. Mamy więc

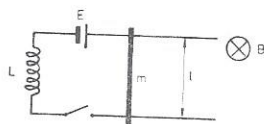
$$g \leq \frac{5}{8} \cdot \limsup a_{n-1} + \frac{1}{8} \cdot \limsup (-a_{n-2}) + \frac{3}{4} = \frac{5}{8}g - \frac{1}{8}d + \frac{3}{4},$$

$$d \geq \frac{5}{8} \cdot \liminf a_{n-1} + \frac{1}{8} \cdot \liminf (-a_{n-2}) + \frac{3}{4} = \frac{5}{8}d - \frac{1}{8}g + \frac{3}{4},$$

skąd $3g \leq 6 - d$, $3d \geq 6 - g$, a to pociąga $d = g = 3/2 = \lim a_n$.

T. Wietecha rozważa analogiczne zagadnienie dla m -kąta i zauważa, że ciąg wartości uzyskanych po n pełnych rundach w wierzchołku, w którym dokonuje się „pomiaru”, jest zbieżny do granicy $2s/(m+1)$ (gdzie s oznacza sumę liczb we wszystkich wierzchołkach, daną na starcie); jeśli w tych samych momentach będziemy notować wartość zgromadzoną w dowolnym innym wierzchołku, uzyskamy ciąg zbieżny do granicy $s/(m+1)$, przy czym wyniki te nie zależą od „rozkładu masy” w chwili startu. Oblicza też, że dla trójkąta, po 10 rundach mamy w wierzchołkach A, B, C odpowiednio liczby $\frac{1610604095}{402661463}$, $\frac{805298451}{1073741824}$, $\frac{536870912}{1073741824}$, różniące się o mniej niż 10^{-5} od wartości granicznych $3/2, 3/4, 3/4$.

B C D G X
H I J L Z
N O S T :
) ~



Zadania z fizyki nr 153,154

Redaguje Jerzy B. BROJAN

153. Na okładce przedstawione są obrazy dyfrakcyjne powstałe w wyniku przejścia fali przez odpowiedni otwór. Kształty otworów przedstawione są obok. Zakładamy, że fala pada na otwór prostopadle, a potem jest obserwowana na bardzo odległym ekranie (lub też – w przypadku fali świetlnej – przechodzi przez soczewkę skupiającą, a ekran znajduje się w płaszczyźnie ogniskowej). Długość fali jest mniejsza od rozmiarów otworu. Przyporządkować obrazy dyfrakcyjne właściwym otworom. Objasnić zasady rozumowania.

Uwaga. Gdy otwór ma większą powierzchnię, ogólne natężenie fali jest – oczywiście – większe. Tym kryterium nie należy się kierować, gdyż dla każdego rysunku pomnożono natężenie przez inny współczynnik korekcyjny.

154. Narysowany obok obwód znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B , prostopadłym do płaszczyzny rysunku. Prawą część obwodu tworzy pręt o masie m , który może bez tarcia ślizgać się po poziomych szynach odległych o l . Opisać ruch pręta po zamknięciu klucza. Opór obwodu pominąć.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/1992

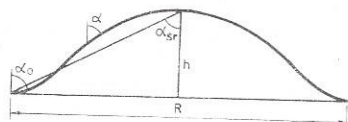
Przypominamy treść zadań:

145. Rozchodzeniu się dźwięku na duże odległości towarzyszy często występowanie zewnętrznej strefy słyszalności oddzielonej strefą ciszy od bezpośredniej okolicy źródła dźwięku. Objasnić to zjawisko i obliczyć lub orientacyjnie ocenić promień zewnętrznej strefy słyszalności zakładając, że temperatura powietrza maleje od -10°C przy powierzchni

145. Przyczyną zjawiska jest całkowite wewnętrzne odbicie dźwięku (analogiczne do znanego z optyki) od warstwy, w której prędkość dźwięku jest większa, niż przy powierzchni ziemi. Aby zbadać drogę „promienia dźwiękowego” można przyjąć, że mamy do czynienia z układem poziomych warstw powietrza, przy czym w obrębie każdej warstwy prędkość dźwięku jest stała. Przy przejściu z jednej warstwy do drugiej następuje załamanie, a stosując do niego prawo Snella oraz podany wzór na prędkość dźwięku nietrudno wyprowadzić zależność

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_0} = \frac{v}{v_0} = \sqrt{\frac{T}{T_0}}$$

gdzie α – kąt nachylenia promienia do pionu w warstwie, w której prędkość wynosi v , α_0 i v_0 – analogiczne wartości początkowe. Biorąc pod uwagę podaną zależność



temperatury od wysokości możemy naszkicować drogę dźwięku.

Aby obliczyć orientacyjnie promień R strefy słyszalności, przyjmijmy, że początkowy kąt α_0 jest bliski 90° , zatem minimalna wartość $\sin \alpha$ wynosi

$$\sin \alpha_{min} = \sqrt{\frac{T_{min}}{T_0}} = \sqrt{\frac{203}{263}} \approx 0,88.$$

Jeśli założymy, że średnia wartość $\sin \alpha$ od punktu początkowego do maksymalnego wzniesienia jest równa

$$\sin \alpha_{er} = \frac{1}{2}(\sin 90^{\circ} + \sin \alpha_{min}) = 0,94,$$

to z równania $\text{tg } \alpha_{er} = \frac{R}{2h}$ (gdzie $h = 50$ km) możemy obliczyć $R = 2h \text{tg } \alpha_{er} \approx 276$ km. Dokładniejszy rachunek numeryczny uwzględniający zmieniającą się wartość kąta daje wynik $R \approx 330$ km. Niestety, wynik ten niezbyt dobrze odpowiada rzeczywistości, gdyż obserwowana zewnętrzna strefa słyszalności ma promień 150 – 200 km. Autor nie jest pewien, które z przyjętych założeń należałoby zmodyfikować w celu poprawienia wyniku.

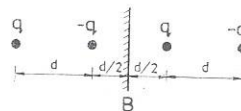
146. Pole ładunku oraz jednej nieskończonej płyty można znaleźć korzystając z metody odbicia (rys. b). Według niej pole na lewo od płaszczyzny A jest sumą pola ładunku q oraz

do -70°C na wysokości 13 km, a następnie rośnie do 0°C na wysokości 50 km.

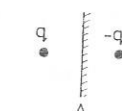
Wskazówka. Prędkość dźwięku w gazie dana jest wzorem $v = \sqrt{RT/\mu\kappa}$ gdzie μ – masa molowa, $\kappa = c_p/c_v$.

146. Dwie płaskie, równoległe i nieskończone płyty przewodzące są uziemione i odległe o d . W połowie odległości między płytami znajduje się punktowy ładunek q . Obliczyć siłę działającą na każdą z płyt.

fikcyjnego ładunku $-q$ położonego symetrycznie względem q (ładunek ten zastępuje ładunki indukowane na A). Po wprowadzeniu drugiej płaszczyzny B pole obu tych ładunków indukuje na B nowe ładunki. Stosując ponownie metodę odbicia zastępujemy na prawo od B pole ładunków indukowanych przez pole dwóch fikcyjnych ładunków $-q$ i q (rys. a).

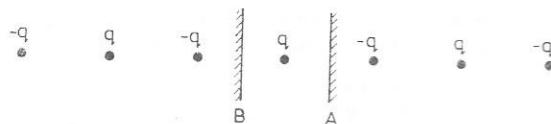


Rys. a



Rys. b

Dodatkowe ładunki z kolei działają na A indukując następne ładunki... itd., itd. Ostatecznie pole pomiędzy płaszczyznami A i B jest nieskończoną sumą pól ładunków q i $-q$ na przemian.



Siła przyciągania płaszczyzny A przez płaszczyznę B oraz przez rzeczywisty ładunek w środku jest równa sumie sił przyciągania wszystkich fikcyjnych ładunków na lewo od A przez wszystkie ładunki na prawo od A , tzn.

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{d^2} - \frac{1}{(2d)^2} + \frac{1}{(3d)^2} - \frac{1}{(4d)^2} + \dots - \frac{1}{(2d)^2} + \frac{1}{(3d)^2} - \frac{1}{(4d)^2} + \dots + \frac{1}{(3d)^2} - \frac{1}{(4d)^2} + \dots \right]$$

Pierwszy wiersz tego wyrażenia jest sumą sił działających na pierwszy ładunek, drugi – sumą sił działających na drugi ładunek itd. Otrzymaliśmy więc sumę

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \left(1 - \frac{2}{4} + \frac{3}{9} - \frac{4}{16} + \dots \right) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right),$$

która – korzystając ze wzoru na rozwinięcie w szereg funkcji $\ln(1+x)$ – można sprowadzić do prostego wyrażenia

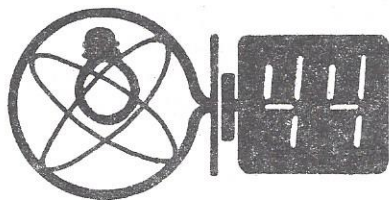
$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \ln 2.$$

Lista uczestników
ligi zadaniowej Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 139 (WT=1, 41) i 140 (WT=2, 80)
z numeru 5/1992

Paweł Perkowski	- 1- 44,95
Dzierżysław Lipniacki	- 3- 29,11
Tomasz Wietecha	- 1- 26,12
Przemysław Gworys	- 1- 25,69
Anna Gluza	- 1- 24,35
Andrzej Nowogrodzki	- 19,29
Dariusz Wilk	- 18,75
Andrzej Borowski	- 1- 17,33
Konrad Banaszek	- 13,70
Jacek Piotrowski	- 12,08
Zbigniew Kapala	- 9,92
Sławomir Oszałdowski	- 9,16
Artur Poliński	- 9,14

Lista obejmuje uczestników, którzy przystali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z rocznika 1990, 1991 lub 1992, oraz maja na swoim koncie co najmniej 9 punktów w bieżącej rundzie. Cyfra przed kreską oznacza, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty. Prowadzacy pan Perkowski właśnie zakończył drugą rundę.

Pozostali członkowie Klubu 44F (alfabetycznie; liczba w nawiasach oznacza wielokrotność przekroczenia 44 punktów): Piotr Bała (3), Wiesław Kacprzak (1), Jerzy Lipkowski (2), Bogusław Mikielwicz (1), Leszek Motyka (1, przy okazji skorygujmy zeszlaczoną pomyłkę: jest 5,80 punktu), Roman Musiał (1), Tomasz Rawlik (1), Robert Repucha (1), Adam Sikorski (3), Jacek Stelmach (1), Aleksander Surma (2), Leszek Szalast (1), Piotr Wach (1).



Liczba uczestników ligi fizycznej utrzymuje się od dłuższego czasu na stałym, niskim poziomie. Pocięającym objawem jest jedynie zahamowanie tendencji spadkowej i kilka udanych debiutów, jakie miały miejsce w ciągu ostatniego roku. Oby było to zapowiedzią nadchodzącego „odbicia się od dna”. Może zadanie z okładki tego numeru wciągnie do ligi nowych zawodników?

A oto omówienie niektórych zadań.

Zadanie 123. [Pudełko z nieznanym obwodem, znaleźć wartości R , L i C] (WT = 1,97; LPR = 7). Duża liczba prawidłowych odpowiedzi, jak zwykle przy zadaniach dotyczących obwodów elektrycznych. Jednak tylko dwa rozwiązania były bezbłędne: **R. Nowaka** i **P. Perkowskiego**.

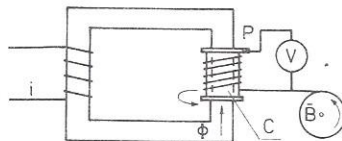
Zadanie 125. [Soczewka; znaleźć kształt ekranu] (WT = 2,70, LPR = 1). Jedyne zadowolające rozwiązanie nadesłał **P. Perkowski**. Pan **A. Sikorski** poprzestał na podaniu odsyłacza do książki (zgodnie z punktem 11 regulaminu) – ale w cytowanym podręczniku nie ma żadnego dowodu, że taki kształt ekranu jest prawidłowy. Regulamin wymaga zaś, aby wskazane źródło zawierało kompletne rozwiązanie.

Zadania 126 i 133. [Wirująca kulka] (126: WT = 3,60; LPR = 0; 133: WT = 4,00; LPR = 0). Zadania okazały się za trudne dla uczestników ligi – pierwsze z nich próbowały jeszcze rozwiązać dwie osoby (ze słabymi efektami), ale w drugim wszyscy z góry zrezygnowali i w rezultacie padł rekord współczynnika trudności.

Zadanie 129. [Zawieszony na jednym końcu wirujący łańcuszek] (WT = 2,08; LPR = 2) i **Zadanie 130.** [Gaz wypływający przez mały otworek] (WT = 3,40; LPR = 1). Doprawdy dziwnymi drogami czasem wartość WT! W tym zestawie rolę lokomotywy autor wyznaczył zadaniu 130, którego rozwiązanie sprowadza się do dwóch-trzech banalnych stwierdzeń na temat ruchu cząstek w gazach. Znacznie trudniejsze było natomiast zadanie 129, wymagające całkowania numerycznego lub też zbadania nieelementarnego równania różniczkowego. Okazało się, że aż pięciu uczestników spróbowało sił w zadaniu 129 i przeprowadziło co najmniej prawidłową analizę wymiarową; do końca rozwiązali bezbłędnie **Dz. Lipniacki** i **A. Sikorski**. Pan Lipniacki już po raz drugi wykazał się tu znajomością funkcji specjalnych, dzięki czemu uniknął obliczeń numerycznych. Do zadania 130 jedyne prawidłowe rozwiązanie nadesłał **D. Wilk**.

Zadanie 135. [Interferencja elektronów] (WT = 2,56; LPR = 2). Choć dosyć proste, zadanie to sprawiło niektórym poważne kłopoty. Kilku uczestników obliczało różnicę między czasem przejścia elektronu jedną i drugą drogą, a potem przeliczało tę różnicę na przesunięcie fazy. Zasadniczy błąd polega tu na tym, że prędkość elektronu jest – z falowego punktu widzenia – tzw. prędkością grupową, podczas gdy w tej metodzie istotna byłaby inna wielkość – prędkość fazowa. Dzielnik drogę przez długość fali de Broglie’a omija się te trudności – tak właśnie rozwiązali zadanie **K. Banaszek** i **P. Perkowski**.

Zadanie 137. [Obracająca się cewka nawija drut; jakie jest wskazanie woltomierza dołączonego poprzez styki ślizgowe?] (WT = 3,33; LPR = 0). Nie ma to zadanie szczęścia do korekty; najpierw rysunek został wydrukowany odwrotnie, a przy rozwiązaniu opuszczono go całkowicie. Niech więc choć teraz Czytelnicy zobaczą go we właściwej formie.



Rozwiązań prawidłowych nie było – wszyscy stosowali rutynowo wzór $E = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ nie dostrzegając paradoksu. A wystarczyło zastanowić się nad bilansem energii – przecież SEM indukcji może wykonać pracę tylko kosztem ruchu przewodnika w polu magnetycznym lub kosztem energii, której dostarcza źródło zmiennego pola magnetycznego. Żadna z tych ewentualności tu nie występowała.



Rozwiązanie zadania F 352.

Niech v_Z oznacza prędkość obrotową Ziemi, a v – prędkość podróży. Przyspieszenie odśrodkowe pierwszego podróznego jest równe

$$a_1 = \frac{(v_Z - v)^2}{R},$$

drugiego zaś

$$a_2 = \frac{(v_Z + v)^2}{R}.$$

Dla tradycyjnych środków podróży a_1 i a_2 są znacznie mniejsze od przyspieszenia ziemskiego g . Czasy podróży wskazywane przez zegary będą proporcjonalne do okresów drgań wahadeł

$$t_1 \approx 2\pi \sqrt{\frac{L}{g - a_1}},$$

$$t_2 \approx 2\pi \sqrt{\frac{L}{g - a_2}},$$

gdzie L oznacza długość wahadła. Stąd

$$\begin{aligned} \frac{t_1}{t_2} &= \sqrt{\frac{g - \frac{(v+v_Z)^2}{R}}{g - \frac{(v-v_Z)^2}{R}}} = \\ &= \sqrt{\frac{1 - \frac{(v+v_Z)^2}{gR}}{1 - \frac{(v-v_Z)^2}{gR}}}. \end{aligned}$$

Dokonajmy rozwinięcia $\sqrt{\frac{1-x_1}{1-x_2}} \approx 1 + \frac{x_2}{2} - \frac{x_1}{2}$ dla małych wartości x_1 i x_2 . Stąd

$$\frac{t_1}{t_2} = -\frac{2v_Z v}{gR} + 1.$$

Cznając $t_2 - t_1 = \Delta t$ otrzymujemy

$$\frac{\Delta t}{t_2} = \frac{2v_Z v}{gR}, \quad v_Z = \frac{2\pi R}{T}, \quad T = 24 \text{ h}.$$

Uwzględniając, że $v \approx \frac{2\pi R}{t_2}$, mamy

$$\Delta t = \frac{8\pi R}{Tg} = 3 \text{ min } 10 \text{ sek.}$$



Rozwiązanie zadania M 658.

Przypuśćmy przeciwnie, że wszystkie liczby a_i są nieparzyste. Kwadrat liczby nieparzystej daje z dzielenia przez 8 resztę równą 1, bowiem

$$(2k+1)^2 = 4k(k+1) + 1,$$

$k(k+1)$ zaś jest liczbą parzystą.

Stąd wynika, że obie strony równania podanego w zadaniu dają różne reszty z dzielenia przez 8 (lewa strona resztę równą 5, prawa zaś resztę 1); uzyskana sprzeczność kończy dowód.

Patrz w niebo

Widoma zmienność blasku gwiazd może mieć dwojaką przyczynę. Jedną jest wzajemne przesłanianie się gwiazd w przypadku układu podwójnego, który nazywa się wtedy gwiazdą zmienną zaćmieniową. Drugą przyczyną jest rzeczywista niestacjonarność gwiazdy, zwanej wtedy gwiazdą zmienną fizycznie. Zarówno gwiazd zmiennych zaćmieniowych jak i zmiennych fizycznie jest wiele typów, a śledzenie ich zmienności dostarcza wielu informacji o ich powierzchni (w pierwszym przypadku) lub też o ich budowie wewnętrznej (w drugim).

Bardzo ważną grupą gwiazd zmiennych fizycznie są tzw. cefeidy, biorące nazwę od swojej przedstawicielki δ Cefeusza, której regularną zmienność zauważono w 1784 r. Charakterystyczny dla cefeid jest szybszy wzrost jasności niż spadek i maksimum blasku zaznaczony wyraźniej niż minimum. Taki właśnie przebieg jasności stanowi obserwacyjne kryterium przynależności gwiazdy zmiennej do tej grupy. Do dziś zarejestrowano około 800 cefeid o okresie zmienności od 1 do 50 dni, przy czym najwięcej ma okres zbliżony do 5 dni. Są one gwiazdami samotnymi, a jednak wykazują okresowe zmiany prędkości radialnej. Przebieg tych zmian i jego korelacja z innymi parametrami cefeidy niedwuznacznie dowodzi, że musi to być gwiazda pulsująca. Ujemna prędkość radialna oznacza, że nie cała gwiazda, lecz tylko jej powierzchnia zbliża się wtedy do obserwatora, gwiazda więc pęcznieje i zarazem, co naturalne, spada jej temperatura i to na tyle, że jej jasność też spada pomimo rosnącej powierzchni. Przy dodatniej prędkości radialnej procesy te przebiegają, oczywiście, przeciwnie.

Okresowe, z wysoką dokładnością powtarzające się pulsacje sugerują, że gwiazda wykonuje drgania wokół położenia równowagi jak wahadło, a analogia ta jest głębsza, niż by się na pierwszy rzut oka zdawało. Okres T wahań wahadła o długości l wynosi $2\pi\sqrt{l/g}$, gdzie g oznacza przyspieszenie grawitacyjne. Jeżeli długość wahadła zastąpić promieniem R gwiazdy i za g przyjąć przyspieszenie na jej powierzchni $g = GM/R^2$ (G oznacza stałą grawitacji, a M masę gwiazdy), to można się spodziewać, że okres zmienności cefeidy wyniesie $T = 2\pi\sqrt{R^3/GM}$. Wprowadziwszy jeszcze do tego wzoru średnią gęstość gwiazdy równą, oczywiście, $\rho = M/(\frac{4}{3}\pi R^3)$, dostaniemy bardzo ważną zależność:

$$T\sqrt{\rho} = \text{const.}$$

Po raz pierwszy zależność tę wyprowadził Eddington na podstawie, rzecz jasna, dokładnych obliczeń modelowych.

Cefeidy odegrały ogromną rolę w procesie poznawania skali odległości, nawet międzygalaktycznych. Otóż z przyczyn, o których nie będziemy już tu mówić, gwiazdy masywniejsze są zarazem jaśniejsze (w sensie jasności absolutnej) i większe, i to tak dalece większe, że średnią gęstość mają mniejszą. Zatem im większa jest gęstość tym mniejsza jasność absolutna gwiazdy. Wprowadzenie tej informacji do ostatniego wzoru daje wniosek, że im jaśniejsza jest cefeida, tym dłuższy musi mieć okres zmienności. I rzeczywiście – fakt ten został zaobserwowany w 1912 r. przez panią Henriettę Leavitt badającą wtedy gwiazdy zmienne w Małym Obłoku Magellana. Wpływ odległości na jasność był w tym przypadku nieistotny, ważne mianowicie było to, że wszystkie te cefeidy znajdują się w jednakowej odległości od nas. Prawidłowo wyskalowana zależność jasności od okresu jest bardzo ważnym narzędziem do wyznaczania odległości: obserwujemy okres zmian jasności, przeliczamy na jasność absolutną gwiazdy (o ile jest to cefeida!) i mierzymy jasność widomą, a stąd już mamy odległość. Ponieważ cefeidy są gwiazdami z natury jasnymi, udało się je zaobserwować w najbliższych galaktykach i tak wyznaczyć ich odległości.

Przyczyną pulsacji cefeidy jest zachowanie się warstwy częściowej jonizacji helu. W ogromnym skrócie wygląda to następująco. Energia płynąca z wnętrza gwiazdy jest silnie w takiej warstwie absorbowana, gdyż zostaje wykorzystana do jonizowania gazu. Nie może to jednak trwać w nieskończoność – gdy nastąpi jonizacja całkowita, gaz zaczyna rozpręczać się jak doskonały. Ale gęstość jego cząstek jest teraz znacznie większa (przybyło dużo elektronów), wobec tego zaczyna rozpręczać się energiczniej, niż uczyniłby to przed osiągnięciem pełnej jonizacji. Następuje silne rozepchnięcie zewnętrznych warstw gwiazdy, które następnie już ochłodzone spadają i ścisną tym samym gwiazdę bardziej, niż zrobiłyby to w stanie równowagi i cykl się powtarza. Gdyby realne były podróże międzygalaktyczne, cefeidy mogłyby pełnić rolę latarni morskich dzięki ich łatwemu namierzaniu i określaniu ich odległości.

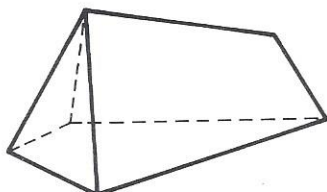
Tomasz KWAST

Matematyka na falach eteru

Polskie Radio organizuje od czasu do czasu w programie I konkurs: trzeba się do studia dodzwonić, gdy odpowiesz na kilka pytań, wygrasz pewną kwotę. Oto, co niedawno usłyszeliśmy:
 PYT.: – Ile wynosi suma kątów w trójkącie?
 ODP. (*radośnie*): – Trzy!
 PYT.: – Ale, proszę pani, nam chodzi o... w stopniach...
 ODP.: – Co proszę?

W grudniu zaproponowaliśmy Czytelnikom zadania świąteczne. Oto ich rozwiązania:

1. Pytaliśmy o liczbę przekątnych wielościanu:



Otóż bliższa analiza rysunku wykazuje, że wielościan taki... nie istnieje! Czemu?

2. Prosiłiśmy o wykazanie, że $\sin 1^\circ$ jest liczbą niewymierną. Dowód można poprowadzić nie wprost. Gdyby $\sin 1^\circ$ był liczbą wymierną, to wymierne byłyby też $\sin^2 1^\circ$ i $\cos^2 1^\circ$, a na mocy wzoru na cosinus kąta podwojonego również $\cos 2^\circ$ (więc i $\sin^2 2^\circ$), $\cos 4^\circ$, $\cos 8^\circ$, $\cos 16^\circ$ i $\cos 32^\circ$.

Ale wtedy liczbą wymierną byłaby liczba $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ($= \cos 30^\circ = \cos(32^\circ - 2^\circ) = \cos 32^\circ \cos 2^\circ + \sin 32^\circ \sin 2^\circ$, jako że $\sin 32^\circ = 16 \cdot \cos 16^\circ \cdot \cos 8^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \sin 2^\circ$).

3. Należało udowodnić, że spełniona jest nierówność:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$

Zauważmy, że nierówność ta równoważna jest następującej:

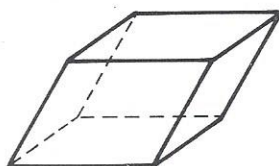
$$\frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 99 \cdot 99}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 100 \cdot 100} < \frac{1}{100}.$$

Ale $(n-1)(n+1) = n^2 - 1$, zatem po lewej

stronie mamy iloczyn $\frac{1}{100}$ i liczb mniejszych niż 1 $\left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2}, \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4}, \dots, \frac{97 \cdot 99}{98 \cdot 98} \text{ i } \frac{99}{100}\right)$.

4. Co jest częścią wspólną czworoscianu foremnego i jego obrazu w symetrii środkowej względem środka wysokości czworoscianu?

Szukaną bryłą jest równoległoscian.



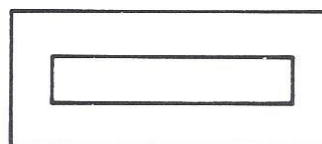
Łatwiej to sobie wyobrazić, ustawiając bryłę tak, że należąca do tej bryły wierzchołek jednego z czworoscianów jest jej lewym dolnym rogiem, drugiego zaś – prawym górnym. Warto przy tym zwrócić uwagę na dobrze znany fakt, że obrazem płaszczyzny i prostej w symetrii środkowej są odpowiednio płaszczyzna i prosta równoległe do wyjściowych.

5. Losowo włożono n listów do n kopert, p_i oznaczało prawdopodobieństwo tego, że dokładnie i listów trafiło do kopert właściwych. Należało wykazać, że $p_1 \cdot \dots \cdot p_n \leq \frac{\ln \sqrt{\pi n}}{2\pi n!} \cdot e^{-\pi n}$, gdy $n \geq 100$.

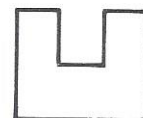
Zauważmy, że lewa strona nierówności równa się zero (gdyż $p_{n-1} = 0$; jeśli $n-1$ listów trafi do właściwych kopert, to i n -ty list też). Założenie, że $n \geq 100$, jak i przypomniany wzór Stirlinga do niczego się tu nie przydadzą.

6. Całkowaliśmy przez części funkcję tangens i po kilku przekształceniach otrzymaliśmy wynik: $0 = 1$. W pewnym momencie pojawiła się tam równość: $\int \operatorname{tg} x dx = -1 + \int \operatorname{tg} x dx$. I tu zostało popełnione oszustwo; z równości tej wywnioskowaliśmy, że $0 = -1$, a przecież całki nieoznaczonej nie można traktować jako liczby, gdyż jest to rodzina funkcji (różniących się o stałą). Całkowanie przez części było natomiast poprawne.

7. Oto dwa rzuty pewnej bryły. Co to za bryła?

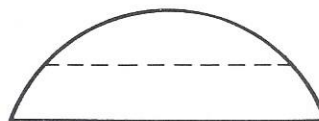


z góry



z boku

Mogłoby się wydawać, że bryła taka nie istnieje. Nic podobnego! Jej trzeci rzut wygląda tak:



Można tę bryłę wykonać np. tnąc walec na dwa „półwalce”, biorąc jedną z połówek i wycinając dłutem (równoległe do poprzedniego cięcia) kawałek bryły.

Ze względu na to, że od oddania tekstu do druku w *Delcie* do ukazania się numeru w sprzedaży mija kilka miesięcy, w tej chwili nie wiemy jeszcze, ile poprawnych odpowiedzi otrzymaliśmy. Listę nagrodzonych osób podamy wkrótce.

DYFRAKCJA na literach

