delta

$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\, J \cdot s$ $\pi = 3{,}141593$

POPULARNY MIESIĘCZNIK MATEMATYCZNO-FIZYCZNO-ASTRONOMICZNY

CENA ZŁ 8000,-

NR 1 (224) 1993

PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X

UWAGA !!!

Nową formę prenumeraty „Delty” proponuje firma AMOS, warunki poniżej.

SPIS TREŚCI

NUMERU 1(224)

Wczesne lata mechaniki kwantowej – wspomnienia Rudolfa Peierlsa	str. 1
Pocztówka z wakacji *Krzysztof Omiljanowski*	str. 1
Patrz w niebo	str. 5
Twierdzenie Liouville'a *Władysław Narkiewicz*	str. 6
Zadania	str. 8
Skażenia promieniotwórcze środowiska *Ryszard Wojtkiewicz*	str. 9
Klub 44	str.12
Mała Delta	str.14
Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki	str.16
Epsilon	str.17

W następnym numerze:

Oscylacje

Okładkę zaprojektowała
Monika WALCZYK

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.

Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7
02-678 Warszawa
tel. 43-02-43 wewn. 21
DELTA@PLEARN.BITNET

Wydrukowano w Zakładach Graficznych w Warszawie, ul. Srebrna 16

Skład systemem TEX wykonała redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY w AMOS-ie

Od stycznia br. prenumeratę „Delty” prowadzi również firma **AMOS**, 01-506 Warszawa, ul. Szenwalda 1 (tel. 39-17-52). Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. Koszt trzech numerów wynosi 24 000,-zł (rocznika'93 – 96 000,-zł). Przy wpłacie prosimy zaznaczyć okres prenumeraty (co najmniej 3 miesiące).

Prenumerata zagraniczna trzech numerów wynosi 60 000,-zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! AMOS dostarcza „Deltę” pod wskazany adres nie pobierając dodatkowej opłaty. Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Blankiet pocztowy na prenumeratę „Delty” w AMOS-ie zamieszczamy na str.15/16.

Konto AMOS-u: **PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136**

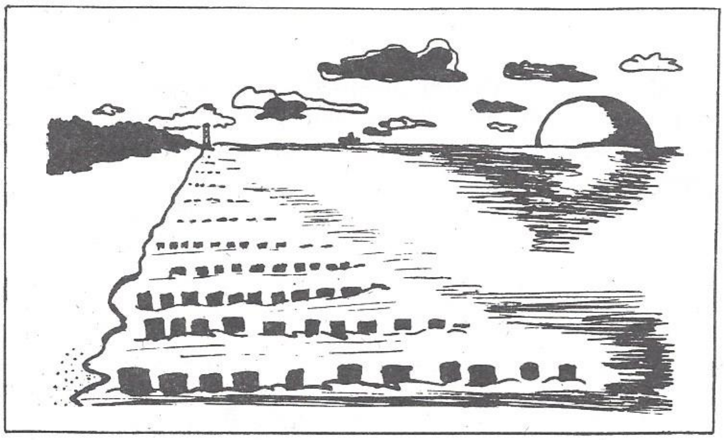
WARUNKI PRENUMERATY w RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na III kwartał 1993 r. wynosi 24 000,– zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
   - na teren kraju
     - jednostki kolportażowe „Ruch” właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób,
     - urzędy pocztowe na terenie wiejskim i w miejscowościach, w których nie ma jednostek kolportażowych „Ruch” – poczta zapewnia dostawę zamówionych egzemplarzy pocztą zwykłą pod wskazanym adresem **w ramach opłaconej prenumeraty,**
   - na zagranicę
     - Zakład Kolportażu Prasy i Wydawnictw, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – **dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty**, z wyjątkiem zlecenia dostawy pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni pokrywa prenumerator.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
   - na kraj i zagranicę – do 20 XI na I kwartał roku następnego
     do 20 II na II kwartał
     do 20 V na III kwartał
     do 20 VIII na IV kwartał.

Cena 1 egzemplarza 8 000,– zł

Pocztówka z wakacji

Krzysztof OMILJANOWSKI

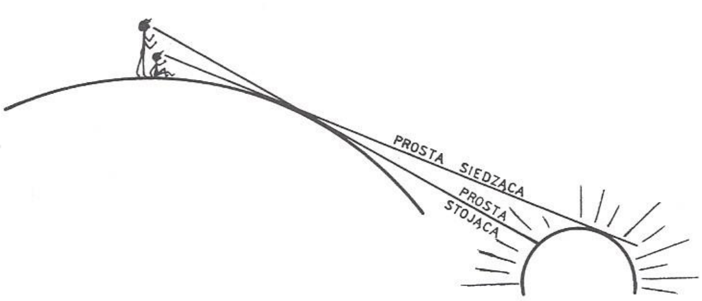


Wakacje już dawno są wspomnieniem, lecz jakże trwałym, takim, które często powraca, zwłaszcza gdy za oknem ziąb i niepogoda. Wtedy wystarczy tylko przymknąć oczy... słyszysz spokojny, miarowy szum, na twarzy czujesz ciepły, wilgotny powiew wieczornej bryzy, chłodne fale obmywają twoje stopy. Otwierasz oczy i widzisz... pustą, wielką, z lekka tylko pomarszczoną płaszczyznę morza, łączącą się gdzieś w dali z lazurem nieba i tylko jeden, jedyny szczegół – wielka czerwona słoneczna kula topiąca się w morzu... Znika ostatni jej skrawek... Chwila niesamowita... Czujesz, że jesteś świadkiem czegoś niezwykłego. Jest trochę tak, jak na wspaniałym koncercie, gdy zabrzmiał już ostatni akord, a oklaski wybuchną dopiero za moment...

Kiedyś, wiedziony nieodpartą chęcią przedłużenia tej chwili, wstałem nagle, by jeszcze raz zobaczyć brzeżek czerwonej kuli. Nie uwierzycie! Udało mi się ! Dostrzegłem fragment ciepłej tarczy.

Następnego dnia wcale nie byłem już tego taki pewien. Może to tylko złudzenie? Postanowiłem spróbować raz jeszcze. Niestety, kolacja przeciągnęła się i nie zdążyłem zbiec na plażę. Śledziłem więc topiące się Słońce siedząc w głębokim leżaku na tarasie domu stojącego na skarpie nad plażą. Gdy słoneczna tarcza całkiem zniknęła, wstałem chcąc zobaczyć ją raz jeszcze, choćby mały tylko rąbek. Niestety! Nie zobaczyłem nic!!! Już do końca mego pobytu nad morzem nie powtórzyłem tego eksperymentu – pogoda się popsuła. Ciągle dręczyło mnie jednak pytanie: czy to, co widziałem, widziałem naprawdę, czy też było to tylko projekcją mojej pobudzonej wyobraźni? Czy możliwe jest, bym wstając na plaży zobaczył skrawek Słońca ponownie?

Oczywiście, że tak:



Wczesne lata mechaniki kwantowej – wspomnienia Rudolfa Peierlsa

Profesor Rudolf Peierls jest wybitnym fizykiem-teoretykiem znanym z wielu klasycznych już prac w dziedzinie fizyki ciała stałego, fizyki jądrowej, fizyki matematycznej oraz mechaniki kwantowej.

Sir Rudolf, urodzony w Berlinie w 1907 r., znaczną część życia spędził w Anglii pracując na uniwersytetach: w Manchesterze, Birmingham, Cambridge i Oxfordzie. W czasie drugiej wojny światowej uczestniczył w badaniach prowadzonych w Los Alamos (USA), które doprowadziły do skonstruowania bomby atomowej. Jednakże młodość spędził w Europie, gdzie był świadkiem i istotnie przyczynił się do rozwoju mechaniki kwantowej, podstawowej teorii fizycznej. W ciągu swego długiego życia spotykał się i pracował z niemal wszystkimi wybitnymi fizykami XX wieku.

O nich i o czasach, gdy powstawał fundament współczesnej fizyki, opowiada w swoim wykładzie wygłoszonym w Moskwie jesienią 1987 roku, który w nieautoryzowanej i niestylizowanej formie opublikował Kwant 10/1988, *skąd poniższy tekst zaczerpnęliśmy.*

Może wydać się nieskromne, że zaczynam od opowieści o sobie. Zwykle się tak nie robi, ale mowa będzie o moich osobistych wrażeniach i dlatego powinienem wpierw się przedstawić. Wstąpiłem na uniwersytet w 1925 r. Chciałbym móc teraz powiedzieć, że wybrałem fizykę, gdyż była ona interesującym przedmiotem i burzliwie się rozwijała. Byłoby to jednak nieuczciwe. W rzeczywistości chciałem zostać inżynierem. Był to czas, gdy rozwijało się lotnictwo, nowe samochody i było oczywiste, że chłopiec chce zostać inżynierem. Ale ktoś tam stwierdził, że do tego się nie nadaję, że nie będę dobrym inżynierem. Dlatego wybrałem, jak mi się wydawało, coś najbliższego mojemu marzeniu – fizykę.

Zacząłem studia w Berlinie, w mieście, gdzie był mój dom. Rodzice uważali, że jestem za młody, by daleko wyjeżdżać. Tam uczęszczałem na wykłady Maxa Plancka. Były to najgorsze wykłady, jakich kiedykolwiek słuchałem. Czytał je kropka w kropkę ze swojego podręcznika fizyki teoretycznej. Jeśli miało się go ze sobą, można było śledzić za tekstem. Planck był bardzo znanym fizykiem, ale wtedy nie wiedzieliśmy jeszcze dlaczego. Pierwsze słowa o stałej Plancka, atomie Bohra i tym podobnych rzeczach usłyszałem na wykładach Waltera Bothego (później został fizykiem jądrowym). Tam stało się dla mnie jasne, że w fizyce dzieje się coś nowego, niezwykle interesującego.

Po roku zdecydowałem, że stałem się już wystarczająco dorosły, żeby opuścić Berlin. Przeniosłem się do Monachium, gdzie wówczas pracował najlepszy nauczyciel fizyki teoretycznej – Arnold Sommerfeld. Dla fizyki teoretycznej był to wspaniały czas. Tworzyła się mechanika kwantowa i obecnie bardzo trudno jest sobie wyobrazić, jak szybko się to odbyło – naprawdę w dwa lata.

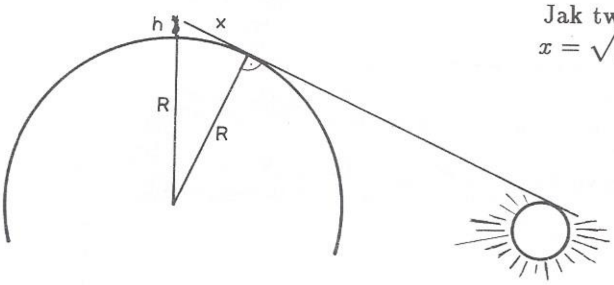
Właśnie w tym okresie rozpocząłem studia i już po roku mogłem czytać prace z mechaniki kwantowej. Nie zdążyłem jednak na jej tworzenie. Gdyby można było powtórzyć życie, to chciałbym się urodzić rok lub dwa lata wcześniej. Feliks Bloch wyjaśnił mi potem, że nie każdy człowiek jest zdolny do tworzenia nowych teorii i że pojawiliśmy się akurat w czasie, gdy należy je stosować. Moim zdaniem miał rację. Był to najdogodniejszy czas, żeby wziąć jakikolwiek problem, przy rozwiązywaniu którego stara fizyka prowadziła do sprzeczności, i zastosować nowe metody.

Tak więc przybyłem do Sommerfelda. Sommerfeld był niskiego wzrostu i miał ogromne wąsy. Czasami nazywaliśmy go „górna połowa i jeszcze trochę". Sommerfeld wyglądał dość godnie, nosił tytuł *Geheimrat* – tajny radca (można to porównać ze współczesnym tytułem członka akademii) i lubił, kiedy go tak nazywano. Pewien amerykański student początkowo o tym nie wiedział i zwracał się do Sommerfelda po prostu „Herr Professor". W ciągu tygodnia lub dwóch wszystko mu wyjaśniono i przy kolejnym spotkaniu zwrócił się do Sommerfelda już per „Herr Geheimrat". Sommerfeld zauważył to, mówiąc, że jego niemiecki ostatnio wyraźnie się poprawił.

Ale w instytucie Sommerfeld wcale nie był *Geheimrat*, nigdy go tak nie nazywaliśmy. Był znakomitym nauczycielem, jego wykłady dla studentów i doktorantów były nadzwyczaj jasne. Są one opublikowane i ciągle jeszcze interesujące; można je z pożytkiem czytać nawet obecnie. Sommerfeld zawsze podkreślał, że fizyka teoretyczna jako nauka powinna, mimo

Ale w takim razie dlaczego nie udało mi się to, gdy wstałem będąc na tarasie??? Czym można usprawiedliwić tak dziwne zachowanie się Słońca? Czy można je w ogóle jakoś wytłumaczyć? Pewnie astronomowie powiedzą, że gdy widziałem Słońce, to tak naprawdę już go nie widziałem, bo to atmosfera, rozproszenie, załamania, odbicia itp. Za grosz im nie wierzę! Postanowiłem zdać się na geometrię.

Zacząłem od pytania: w którym „miejscu" Słońce tonie? A raczej, jak daleko ode mnie Słońce tonie, gdy patrzę na nie z wysokości h metrów nad poziomem morza? (Jest to pytanie o promień horyzontu.)



Jak twierdzi Pitagoras:
$$x = \sqrt{(R+h)^2 - R^2} = \sqrt{2Rh + h^2}.$$

Ale ile to jest konkretnie? To zależy od h. Zatem $x = x(h) = \sqrt{2Rh + h^2}$. Pamiętałem, że promień R Ziemi jest gdzieś pomiędzy 6300 a 6400 km. Gdy „przejdę na metry", to chociaż stoję na balkonie, h jest w porównaniu z R bardzo małe ($h < 100$), czyli składnik h^2 pod pierwiastkiem mogę śmiało pominąć – teraz jest znacznie prościej:
$$x(h) = \sqrt{2Rh}.$$
Gdy siedziałem nad samą wodą, h było równe, powiedzmy, jeden metr; porachowałem

$$\sqrt{2\cdot 6300000\cdot 1} \le x(1) = \sqrt{2R\cdot 1} \le \sqrt{2\cdot 6400000\cdot 1}$$
$$\sqrt{2\cdot 6300000\cdot 1} > \sqrt{2\cdot 625\cdot 100^2} = 2500\cdot\sqrt{2} > 2500\cdot 1{,}4 = 3500$$
$$\sqrt{2\cdot 6400000\cdot 1} = \sqrt{2\cdot 8^2\cdot 10\cdot 100^2} = 800\cdot\sqrt{20} < 800\cdot\sqrt{25} = 4000$$

Zatem horyzont był gdzieś pomiędzy 3,5 a 4 km ode mnie.

(Mam nadzieję, że ten sposób zapisu pozwala prześledzić kolejność rachunków i sposób dokonywania przekształceń. Główny pomysł to zastępowanie jednych liczb drugimi i to takimi, przy których rachunki stają się prostsze. Dlaczego nie wziąłem kalkulatora i nie porachowałem dokładnie? Wcale nie byłoby dokładnie, a tak przynajmniej znam wielkość błędów, które mogłem popełnić. A poza tym, jak bym wyglądał z kalkulatorem na plaży!!!)

Gdy wstałem, to podniosłem się – powiedzmy – o metr, czyli:

$$2\sqrt{6300000} \le x(2) = \sqrt{2R\cdot 2} \le 2\sqrt{6400000}$$
$$2\sqrt{6300000} > 2\cdot 100\cdot\sqrt{625} = 200\cdot 25 = 5000$$
$$2\sqrt{6400000} = 2\cdot 800\cdot\sqrt{10} < 2\cdot 800\cdot\sqrt{10{,}24} = 5120$$

Porównując wyniki otrzymałem:

$$\begin{array}{ccccc} 5000-4000 & \le & x(2)-x(1) & \le & 5120-3500 \\ \| & & & & \| \\ 1000 & & & & 1620 \end{array}$$

Podnosząc się zwiększyłem więc swoje pole widzenia (a raczej jego promień) o co najmniej jeden kilometr, ale nie więcej niż o 1620 metrów! A jak to było w przypadku tarasu? Przypuśćmy, że siedziałem około 25 metrów n.p.m. O ile zwiększyło się pole widzenia, gdy wstając uniosłem się o jeden metr? Obliczmy:

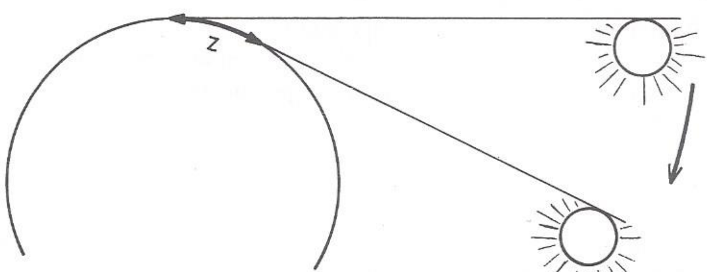
$$x(26)-x(25) \le \sqrt{2R\cdot 26}-\sqrt{2R\cdot 25} = \sqrt{R}(\sqrt{52}-\sqrt{50}) =$$

$$= \sqrt{R}\left(\frac{52-50}{\sqrt{52}+\sqrt{50}}\right) \le \sqrt{R}\frac{2}{2\sqrt{50}} \le \sqrt{\frac{6400000}{50}} =$$

$$= 100\sqrt{12,8} < 100\sqrt{12,96} = 100\cdot 3,6 = 360\,.$$

Czyli na pewno mniej niż 360 metrów! Wszystko jasne! Powiedzmy, że wstawałem w przeciągu jednej sekundy; w tym czasie Słońce „uciekło", „punkt tonięcia" oddalił się, ale o mniej niż 1000 metrów (zatem wstając nad brzegiem zobaczyłem go ponownie), jednak dostatecznie daleko, bym wstając na tarasie już go nie dostrzegł.

No tak, ale właściwie to ile metrów w ciągu sekundy ucieka ode mnie punkt tonięcia?



Porachuję to najpierw tak, jakbym siedział na równiku. Wtedy w ciągu doby ($24\cdot 60\cdot 60$ sekund) punkt tonięcia obiegnie Ziemię dookoła; zatem w ciągu sekundy

$$\begin{array}{ccccc}
\dfrac{2\cdot 3{,}14\cdot 6300000}{24\cdot 3600} & \le & z=\dfrac{2\pi R}{24\cdot 3600} & \le & \dfrac{2\cdot 3{,}15\cdot 6400000}{24\cdot 3600} \\
\vee & & & & \wedge \\
\dfrac{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\overset{7}{\cancel{63}}000\cancel{00}}{\underset{8}{\cancel{24}}\cdot\underset{\cancel{4}2}{\cancel{36}}\cancel{00}} & & & & \dfrac{2\cdot\overset{\cancel{4}}{\cancel{32}}\cdot 6400\cancel{00}}{\underset{3}{\cancel{24}}\cdot\underset{9}{\cancel{36}}\cancel{00}} \\
\| & & & & \| \\
\dfrac{7}{16}\cdot 1000 & & & & \dfrac{128}{27}\cdot 100 \\
\| & & & & \wedge \\
\left(0,5-\dfrac{1}{16}\right)\cdot 1000 & & & & \dfrac{129}{27}\cdot 100 \\
\vee & & & & \| \\
0,4\cdot 1000 & & & & \dfrac{43}{9}\cdot 100 \\
\| & & & & \| \\
400 & & & & 4\frac{7}{9}\cdot 100 \\
 & & & & \wedge \\
 & & & & 478
\end{array}$$

wszystko, opierać się na danych doświadczalnych. Nigdy nie pozwalał nam zapomnieć, na jakich to faktach opiera się takie czy inne prawo.

Sommerfeld świetnie znał matematykę, napisał wiele prac czysto matematycznych, bardzo wartościowych, ale nigdy nie był nadmiernie dokładny. Pamiętam, jak w czasie wykładu na temat elektronowej teorii metali w rachunkach na tablicy przeoczył czynnik 2. Zauważyliśmy to, wydawało się nam to niezbyt ważne. Pod koniec przeszedł do prawa Wiedemanna–Franza, w którym występuje znany współczynnik liczbowy. Wtedy spostrzegł, że dostaje błędny wynik. Teraz już z dużym zainteresowaniem obserwowaliśmy, co się stanie. Zauważywszy błąd Sommerfeld nie zatrzymując się podkreślił, że teraz należy uwzględnić zarówno elektrony poruszające się z lewa na prawo, jak i elektrony poruszające się z prawa na lewo, po czym postawił we właściwym miejscu brakujący współczynnik 2.

Sommerfeld miał w górach małą chatę letniskową, dokąd czasami zapraszał doktorantów i wykładowców. Dał mi tam możliwość wystąpienia na moim pierwszym seminarium. Akurat pojawiły się prace Diraca i Jordana z teorii transformacji. Sommerfeld powiedział: „Nie udało się nam jeszcze zrozumieć tych prac i, być może, potrafi Pan nam je wytłumaczyć". Mimo wszystko było to trudne zadanie dla studenta, który spędził na uniwersytecie zaledwie dwa lata. Jednak wziąłem się za nie z przyjemnością. Nie wiem, ile nauczyli się inni uczestnicy seminarium, ale ja sam nauczyłem się wiele.

W owym czasie w Monachium doktorantem był Hans Bethe. Był o rok starszy ode mnie, a w takim wieku to wielka różnica. Bethe sprawiał wrażenie inteligentnego człowieka, od którego dużo można się nauczyć. Bardzo się zaprzyjaźniliśmy. Do tej pory jest ode mnie starszy o rok. Obecnie nie jest to już tak ważne, ale nadal wiele mogę się od niego nauczyć.

Spędziłem w Monachium półtora roku i z przyjemnością pozostałbym dłużej, ale Sommerfeld został zaproszony do Ameryki na pół roku czy rok. Za radą Sommerfelda wyjechałem do Lipska pracować u Heisenberga.

Heisenberg był zupełnie niepodobny do Sommerfelda. O żadnym *Geheimrat* nawet mowy nie było. W każdej sytuacji postrzegało się go jako bardzo skromnego człowieka. Charakterystyczne, że raz w tygodniu urządzał seminarium, a przed nim była herbata. Profesor osobiście szedł do cukierni i wybierał odpowiednie ciastka. A przynajmniej tak to zapamiętałem. Co prawda, pewien nasz kolega, będący w owym czasie asystentem Heisenberga, przekonywał mnie później, że załatwianie ciastek było jego zadaniem. Nie jest to pozbawione sensu, gdyż jako rodowity wiedeńczyk znał się na tych rzeczach. Z pewnością przypominam sobie więc ten okres, kiedy nie było go jeszcze w Lipsku.

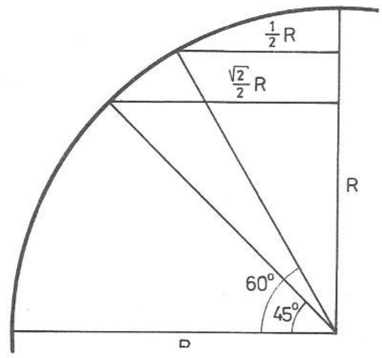
Heisenberg bardzo lubił grać w ping-ponga i był bardzo dobrym zawodnikiem. W wolnym czasie graliśmy wszyscy. Pewnego razu przyjechał chiński fizyk, któremu udało się pokonać Heisenberga. Była to sensacja. Słyszałem potem, że kiedy Heisenberg płynął statkiem z Ameryki do Japonii, to trenował przez całą drogę, żeby więcej taka żałosna rzecz się nie powtórzyła.

Heisenberg nie lubił czystej matematyki i traktował ją tylko jak niezbędny aparat. Jego metoda była następująca. Rozmyślając nad problemem najpierw zgadywał, jakie będzie rozwiązanie, a potem dobierał aparat matematyczny, który właśnie to rozwiazanie daje. Świetna metoda, jeśli ma się tak doskonałą intuicję jak Heisenberg. Dla innych postępowanie takie może być cokolwiek ryzykowne.

W Lipsku udało mi się napisać moją pierwszą pracę. Dotyczyła ona tzw. anomalnego efektu Halla. Kiedy przez kawałek metalu, umieszczony w polu magnetycznym, płynie prąd, to pojawia się w nim napięcie poprzeczne. Wiadomo, że dzieje się tak na skutek odchylenia elektronów w polu magnetycznym. Ale w niektórych metalach efekt ma przeciwny znak. Teraz tłumaczymy to tym, że w takich substancjach prąd przenoszony jest nie przez elektrony, lecz przez dziury. Ale wówczas sprawa nie była tak jasna, więc Heisenberg po prostu powiedział mi, że Bloch sformułował elektronową teorię metali i czy nie mógłbym zastosować jej do tego problemu. Ku memu wielkiemu zadowoleniu okazało się, że rzeczywiście można to zrobić i w ten sposób rozwiązałem postawione mi zadanie.

W Lipsku spędziłem rok. Heisenberg został zaproszony do Ameryki i wziął urlop. Za jego radą pojechałem do Zurychu, żeby pracować u Pauliego. U niego właśnie napisałem swoją rozprawę doktorską. Powinienem powiedzieć, że wiele zawdzięczam temu systemowi

Gdy teraz uwzględnię, że byłem gdzieś pomiędzy 45-tym a 60-tym stopniem szerokości geograficznej północnej (nie ma to jak Bałtyk!), to otrzymam:



$$200 = \frac{1}{2} \cdot 400 < z < \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 478 < \frac{1,5}{2} \cdot 480 = 1,5 \cdot 240 = 360\,.$$

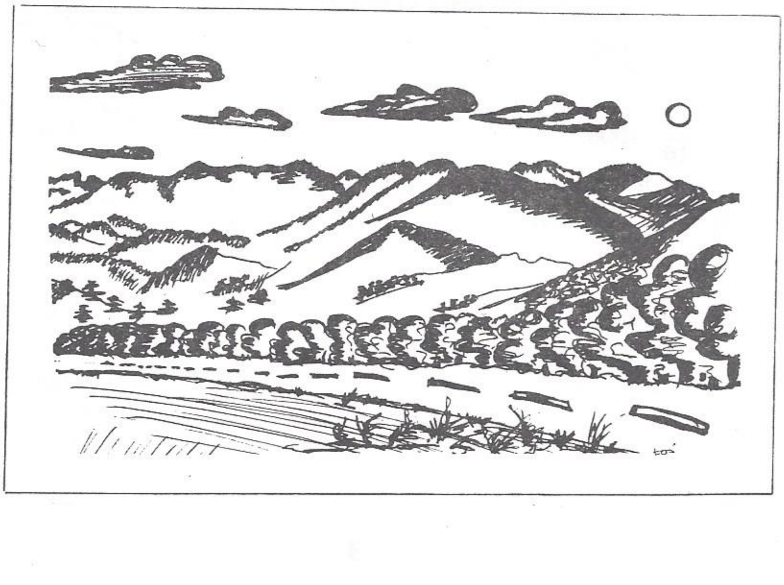
No i fiasko!? Punkt tonięcia przesuwa się w ciągu jednej sekundy o więcej niż 200, ale mniej niż 360 metrów; poprzednio otrzymałem tylko, że na tarasie zwiększyłem swe pole widzenia o nie więcej niż 360 metrów. Zatem **nie uzasadniłem**, że **nie mogłem** go zobaczyć!

Oj, wszystko się zgadza, wszystko jest jasne, gdy tylko przyjąć, że na tarasie podnosiłem się w ciągu nie jednej, lecz **dwóch** sekund (spróbujcie wstać z głębokiego leżaka – na pewno zajmie to Wam co najmniej dwie sekundy!). Wtedy Słońce ucieka o co najmniej 400 metrów – więc z tarasu już go nie dostrzegam, ale nie więcej niż 720 metrów – czyli nad brzegiem na pewno je zobaczę. Zagadka się wyjaśniła.

Wiem, że wielu z Was powątpiewa: że przecież skarpy nad morzem nie są takie wysokie, że nie można zaniedbywać wpływu atmosfery, która powoduje załamania itp. Nie mogę odmówić Wam racji, lecz pomimo to zostanę przy swoim. Bo tak właściwie to chciałem Wam pokazać, jak się bawiłem w piasku; w budowanie teoryjek, w przybliżenia (w szacowania). No tak – powiecie – ale jak to było naprawdę? Nie wiem, a jeśli już tak bardzo chcecie wiedzieć, to tak naprawdę byłem... w górach.

P.S. Nie myli się ten, kto twierdzi, że opisany wyżej fenomen prosto tłumaczy się maleniem pochodnej funkcji $x(h) = \sqrt{2Rh}$. A przy okazji tego wzoru: starzy górale powiadają, że dawniej z Giewontu widać było wieże Kościoła Mariackiego w Krakowie (teraz nie widać – dymy). Czy można im wierzyć?

A jeśli ktoś pragnie sięgać wyżej, to niech rozstrzygnie, czy z Mount Everestu może być widać jakieś morze. *Miłej zabawy!*



Patrz w niebo

Ostatnie ciężkie lato dobitnie przypomniało nam, że tak pospolity surowiec, jak zwykła woda, w pewnych sytuacjach staje się niezwykle cenny, a jego brak może mieć katastrofalne skutki. Dzieje się tak na planecie, na której w zasadzie wody jest dużo, a tylko czasem nie trafia ona tam, gdzie akurat jest potrzebna. A jak jest na innych planetach?

Merkury jest tak blisko Słońca, że jego nasłoneczniona półkula rozgrzewa się do temperatury wykluczającej utrzymanie się jakiejkolwiek atmosfery, w tym wody. W panującej tam temperaturze cząsteczki tworzące jego atmosferę musiałyby mieć prędkości przekraczające prędkość ucieczki z powierzchni planety, dlatego Merkury praktycznie atmosfery nie ma. Nawet nasz Księżyc, choć położony znacznie dalej od Słońca, jest w tej samej sytuacji z powodu swojej małej masy. Mars znajduje się już na tyle daleko od Słońca, że jest w stanie utrzymać atmosferę, w tym także wodę. Obecnie część wody na Marsie skupiona jest w czapach polarnych, a reszta prawdopodobnie zmagazynowana została w głębi popękanej skorupy planety. W każdym razie o obecności wody na powierzchni Marsa w przeszłości świadczą liczne, suche obecnie, koryta rzek.

A Wenus? Jest to planeta w miarę masywna, jak Ziemia, i krąży nie tak wiele bliżej Słońca – a jednak okazuje się, że jest miejscem niemal całkiem pozbawionym wody. Tak w każdym razie donoszą aparaty sondujące atmosferę i badające powierzchnię planety. Nasuwa się pytanie, czy było tak zawsze. Jak łatwo przewidzieć, odpowiedzieć na to pytanie jest w tym przypadku bardzo trudno, ponieważ powierzchni Wenus nie można obserwować tak łatwo, jak powierzchni innych planet. Wszelkie wnioski uzyskiwane są więc okrężnymi drogami.

Podstawowe znaczenie dla tego zagadnienia ma pewien bardzo subtelny pomiar, mianowicie pomiar stosunku zawartości deuteru do zwykłego wodoru (który w całym Wszechświecie jest bardzo niewielki). Okazało się, że na Wenus jest on 100 razy większy niż na Ziemi. Wnioskuje się stąd, że kiedyś było tam 100 razy więcej wody niż teraz, aczkolwiek niekoniecznie w formie ciekłej. Wskutek bowiem wysokiej temperatury będącej rezultatem efektu szklarniowego (wywołanego z kolei przez gęstą atmosferę dwutlenku węgla i pary wodnej) oceany mogły nigdy nie powstać, sama zaś para wodna była na dużych wysokościach dysocjowana przez promieniowanie słoneczne na wodór i tlen, a wodór ulegał ciągłemu rozpraszaniu w próżnię kosmiczną. Zwykły wodór jako lżejszy rozpraszał się szybciej, dlatego obecnie jest nadmiar deuteru.

Inni badacze twierdzą jednak, że wobec tego Wenus do dziś powinna mieć dość wilgotną atmosferę (co wynika z oszacowania tempa dysocjacji pary wodnej, tempa rozpraszania się wodoru itd.). Skoro tak nie jest, mechanizm wysychania planety musiał widocznie być inny. Np. pierwotne oceany skondensowały się, ponieważ chmury odbijały znaczną część promieniowania słonecznego nie pozwalając gruntowi zbyt silnie się nagrzewać, a ponadto wysokie ciśnienie atmosferyczne zapobiegało zagotowaniu się oceanów nawet w temperaturze wyższej od 100°C. W tych warunkach jednak nastąpiło związanie dwutlenku węgla ze skałami, ciśnienie atmosferyczne spadło, oceany wyparowały i – jak powiedzieliśmy wyżej – wodór uległ rozproszeniu. Rozrzedzona atmosfera stała się przezroczysta dla światła słonecznego, co spowodowało uwolnienie dwutlenku węgla z powrotem do atmosfery, jej ponowne zgęstnienie i powtórne pojawienie się efektu szklarniowego przy niemal całkowitym braku wody – co obserwujemy obecnie.

Wygląda więc na to, że gęsta atmosfera może spowodować zarówno ochłodzenie klimatu (wskutek silnego odbijania promieniowania słonecznego), jak i ocieplenie (wskutek efektu szklarniowego). Co się może stać z Ziemią w wyniku coraz silniejszego zanieczyszczania jej atmosfery – nie wiadomo, gdyż nie wszystkie decydujące o tym czynniki znamy i nie potrafimy ich skutków przewidzieć. Jedno jest pewne: takich eksperymentów na organizmie Ziemi lepiej nie robić.

Tomasz KWAST

urlopów i zaproszeń do Ameryki, dzięki któremu dane mi było mieć tak wspaniałych nauczycieli.

Jak wiadomo, Pauli wyróżniał się także i tym, że czynił wszystkim bardzo nieuprzejme uwagi. Jedną z najostrzejszych popisał się w rozmowie z Ernestem Stückelbergiem. Gdy ten powiedział: „Pauli, niech Pan nie mówi tak szybko, nie potrafię myśleć tak szybko jak Pan", Pauli odparł: „To nic, że myśli Pan wolno. Gorzej, że publikuje Pan szybciej niż jest Pan w stanie myśleć".

Ktoś pokazał mu pracę młodego teoretyka wiedząc, że nie jest ona zbyt dobra, lecz mimo to chcąc poznać opinię Pauliego. Ten przeczytał ją i powiedział kwaśno: „Nawet nie fałszywa".

Pauli miał takie przyzwyczajenie: chodził wieczorem do kina, na koncert albo coś w tym rodzaju. Wracał mniej więcej o jedenastej i od razu zaczynał pracować. Pracował dość długo i dlatego późno wstawał. Pewnego razu został zaproszony na zebranie o dziewiątej rano, lecz odmówił: „Nie, nie, tak długo bez snu nie potrafię wytrzymać".

Swego czasu Pauli był w obcym mieście i zapytał miejscowego fizyka, jak znaleźć kino. Ten objaśnił mu i następnego dnia zapytał Pauliego, czy udało mu się tam trafić. Pauli odparł: „Wyraża się Pan całkiem zrozumiale, jeśli nie mówi Pan o fizyce".

Spędziłem u Pauliego trzy lata i nieraz musiałem wysłuchiwać podobnych rzeczy. Ale nie było to już tak bardzo nieznośne. Nikt długo nie obrażał się na Pauliego, prawdopodobnie dlatego, że tak samo krytycznie odnosił się on do siebie samego, do swoich własnych pomysłów. Raz wytłumaczył mi, dlaczego to robi. Jego zdaniem, ludzie na tyle wrażliwi, że można z nimi żyć, to ci, którym nadepnięto na „chory odcisk" dostateczną liczbę razy. Tak naprawdę, nie sądzę, żeby to było rzeczywistą przyczyną.

Dwa razy był u nas w Zurychu Landau. Pierwszy raz przyjechał w grudniu 1930 r. W tym czasie ZSRR i Szwajcaria nie utrzymywały stosunków dyplomatycznych. Otrzymał zgodę na pobyt dwutygodniowy, potem przedłużono mu ten okres o kolejne dwa tygodnie. Wszyscy się bardzo o to starali. Ale w końcu musiał wyjechać. Wtedy zażartował: „Lenin był w Szwajcarii parę lat, ale i tak rewolucja tu nie wybuchła. Widocznie boją się, że ja mogę do tego doprowadzić". Po roku przyjechał na stypendium Rockefellera i wtedy nie było już żadnych problemów – mógł przebywać jak długo chciał. Pracowaliśmy razem. Landau był jeszcze bardzo młodym, ale już bardzo sumiennym fizykiem. Kiedy pojawiała się jakaś praca, która go interesowała, nie czytał jej, lecz od razu sam przeprowadzał rachunki. I jeśli zgadzały się one z tym, co tam napisano, uważał pracę za dobrą. Lubił wszystko systematyzować. Na przykład, podzielił fizyków na kilka klas: do pierwszej weszli Bohr, Sommerfeld; Einstein był w specjalnej klasie, sam jeden. Siebie Landau skromnie umieścił w drugiej klasie. W taki „systematyczny" sposób odnosił się również i do innych spraw.

Landau bardzo nie lubił brody, mówił, że to przeżytek czasów wiktoriańskich, zwłaszcza u młodych ludzi. Był wśród nas fizyk, który nie nosił brody, lecz miał bardzo długie bokobrody. Landau również i to uważał za burżuazyjne i zadzwoniwszy do jego żony spytał: „Kiedy Pani przekona męża, by zgolił te śmieszne bokobrody?". Utrzymywał, że na Zachodzie, w Zurychu, jest więcej brodaczy niż w Rosji, w Leningradzie. Założyliśmy się i policzyliśmy, ilu brodaczy spotkaliśmy na ulicy. Potem, kiedy przyjechałem do Leningradu, przeprowadziliśmy podobne obliczenia i stwierdziliśmy, że w Leningradzie było więcej brodaczy. Wygrałem zakład, a Landau próbował tłumaczyć to tym, że trwała kolektywizacja i wielu chłopów przenosiło się do miasta.

Landau był przekonany, że tylko młodzi teoretycy mogą dokonać wartościowych odkryć. Co prawda, zmienił później zdanie. Kiedyś w rozmowie padło nazwisko pewnego teoretyka, o którym Landau nie słyszał. Dowiedziawszy się, że ma on 27 lat, powiedział: „Taki młody, a już taki nieznany!".

Oprócz Landaua byli w Zurychu również i inni, wśród nich George Gamow. Gamow był już wtedy wybitnym fizykiem, ale miał też ogromne poczucie humoru i uwielbiał wszelkie dowcipy. Kiedyś poszliśmy w góry i trafiliśmy na szczyt o dość interesującej nazwie. Tam Gamow wyciągnął z kieszeni kartkę papieru – był to list do *Nature* o jakiejś reakcji jądrowej, którego jeszcze nie dokończył. Gamow usiadł na wierzchołku góry i kończył swój list. Napisawszy ostatnie linijki, umieścił pod nimi nazwę szczytu, gdzie były one napisane i złożył podziękowania towarzyszom wyprawy za stworzenie możliwości popracowania tamże.

... W owych czasach, zupełnie tak jak teraz, fizycy lubili podróżować, jeździć na

Twierdzenie Liouville'a

Władysław NARKIEWICZ

1. Wiele rezultatów teorii liczb uzyskuje się metodami elementarnymi, bez używania środków tzw. wyższej matematyki. Są jednakże działy tej teorii, w których użycie metod analitycznych lub algebraicznych znacznie upraszcza rozumowanie, a czasem pozwala na uzyskanie wyników niedostępnych dla metod elementarnych. Przykładem takiego wyniku jest twierdzenie G. Faltingsa, które pokazuje m.in., że przy ustalonym wykładniku n równanie Fermata $x^n + y^n = z^n$ może mieć jedynie skończenie wiele rozwiązań x, y, z nie mających wspólnego dzielnika większego od 1.

Czasem zupełnie proste fakty analityczne prowadzą do ciekawych wyników. Podamy tutaj zastosowanie jednego z najprostszych twierdzeń analizy.

Twierdzenie o wartości średniej J.L. Lagrange'a. *Jeśli $f(x)$ jest funkcją określoną w pewnym przedziale i mającą tam ciągłą pochodną $f'(x)$, to dla każdej pary A, B różnych liczb tego przedziału istnieje taki punkt c leżący między A i B, że zachodzi równość*

$$\frac{f(B) - f(A)}{B - A} = f'(c)\,.$$

2. Skorzystamy z tego twierdzenia przy dowodzie twierdzenia J. Liouville'a dotyczącego przybliżania liczb algebraicznych przez liczby wymierne. Rozpoczniemy od definicji liczby algebraicznej: liczba a nazywa się *liczbą algebraiczną*, jeśli istnieje niezerowy wielomian o współczynnikach całkowitych, którego jednym z pierwiastków jest liczba a. Najmniejszy ze stopni takich wielomianów nazywamy *stopniem* liczby a.

I tak, na przykład, każda liczba wymierna jest liczbą algebraiczną stopnia 1, liczby $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $(1+\sqrt{5})/2$ są liczbami algebraicznymi stopnia 2, a liczba $\sqrt[n]{2}$ jest liczbą algebraiczną stopnia n.

Każda liczba rzeczywista da się przybliżyć z dowolną dokładnością przez liczby wymierne. Jest jasne, że chcąc uzyskać dobre przybliżenia danej liczby niewymiernej należy używać liczb wymiernych o coraz większych mianownikach. W przypadku liczb algebraicznych to banalne spostrzeżenie można sformułować w sposób bardziej konkretny.

Twierdzenie Liouville'a. *Jeśli a jest niewymierną rzeczywistą liczbą algebraiczną stopnia n, to istnieje taka stała $C(a) > 0$ zależna jedynie od liczby a, że dla dowolnych liczb całkowitych p, q zachodzi nierówność:*

$$\left| a - \frac{p}{q} \right| > \frac{C(a)}{q^n}\,.$$

Dowód. Oznaczmy przez

$$f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_0$$

wielomian stopnia n o współczynnikach całkowitych, którego pierwiastkiem jest a. Zauważmy, że pochodna $f'(X)$ nie może znikać w punkcie a, gdyż jest ona wielomianem stopnia mniejszego od n. Wynika stąd, że w pewnym przedziale $I = [a - d, a + d]$, zawierającym a, pochodna ta jest różna od zera, a ponadto jej wartość bezwzględna jest tam ograniczona przez, powiedzmy, liczbę M. Zatem dla $x \in I$ mamy

$$0 < |f'(x)| < M .$$

Zauważmy, że a jest jedynym pierwiastkiem wielomianu $f(X)$ w przedziale I, gdyż gdyby b był innym jego pierwiastkiem, to stosując twierdzenie o wartości średniej do liczb a i b otrzymalibyśmy punkt $c \in I$ spełniający $f'(c) = 0$.

Niech teraz $r = p/q$ (p, q – całkowite) będzie liczbą wymierną. Rozpatrzymy dwa przypadki, w zależności od tego, czy r leży w I, czy też nie. Jeśli $r \in I$, to stosując twierdzenie o wartości średniej do wielomianu $f(X)$ oraz punktów $A = r$, $B = a$ otrzymamy, korzystając z tego, że $f(a) = 0$, równość

$$f(r) = f'(c)(r - a),$$

przy czym c leży między a i r, więc należy do przedziału I. Zatem

$$|r - a| = \left|\frac{f(r)}{f'(c)}\right| > \frac{|f(r)|}{M}.$$

Ponieważ

$$f(r) = f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_0 q^n}{q^n},$$

a licznik tego ułamka jest niezerową liczbą całkowitą, zatem otrzymujemy $|f(r)| \geq 1/q^n$, a więc

$$|r - a| > \frac{1}{Mq^n}.$$

Jeśli zaś $r \notin I$, to

$$|r - a| > d \geq \frac{d}{q^n}.$$

Przyjmując teraz za $C(a)$ mniejszą z liczb d i $1/M$ otrzymujemy tezę twierdzenia. ■

Podany dowód pozwala jawnie wyznaczyć wielkość $C(a)$. I tak, na przykład, bez trudu otrzymujemy, że w przypadku $a = \sqrt{2}$ możemy przyjąć $d = 0{,}1$, $M = 3$, a więc $C = 0{,}1$ i widzimy, że jeśli liczba p/q jest przybliżeniem wymiernym $\sqrt{2}$, to

$$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{10q^2}.$$

3. Liczby, które nie są algebraiczne, nazywają się *liczbami przestępnymi.* Takimi liczbami są, na przykład, liczby $2^{\sqrt{3}}$, π czy też liczba e, zdefiniowana jako suma szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!},$$

ale dowód tych faktów nie jest łatwy. Sprawdzenie, czy konkretna liczba jest algebraiczna czy przestępna, jest na ogół bardzo trudne. I tak, na przykład, nie wiadomo, czy liczba $e + \pi$ jest przestępna. Twierdzenie Liouville'a pozwala na prostą konstrukcję liczb przestępnych. Sam Liouville zauważył, że suma S szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n!}}$$

jest liczbą przestępną. (Był to pierwszy przykład takiej liczby.) Oto jego rozumowanie.

Przypuśćmy, że S jest liczbą algebraiczną i oznaczmy przez n jej stopień. Suma częściowa

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^{i!}}$$

konferencje, sesje. Co prawda, przejazdy nie były wtedy finansowane, dlatego jakże często trzeba było siedzieć całą noc w kącie wagonu kolejowego trzeciej klasy. Ale kiedy otrzymałem zaproszenie na zjazd Towarzystwa Fizycznego w Odessie, to wtedy, przynajmniej w granicach ZSRR, jeździłem w komfortowych warunkach jako gość. Zaprosił mnie tam Jakow Iljicz Frenkel, który przeczytał moje prace.

Jednym z ulubionych miejsc, do których się jeździło, była Kopenhaga, gdzie pracował Niels Bohr. Był to nadzwyczajny człowiek. Bohr nie chciał obrażać ludzi, ale jednocześnie nie mógł pozwolić, by mówiono cokolwiek, co przeczyłoby prawdzie. I z tych dwu cech otrzymywało się osobliwe połączenie. Oto pewnego razu Bohr powiedział: „Nie mówię tego, by krytykować, ale to zupełne brednie". Innym razem powiedział jeszcze, że jasność i prawda to dopełniające się pojęcia i rzeczywiście w swoich pracach najbardziej zbliżył się do skraju prawdy.

Proces pisania prac u Bohra był dość skomplikowany. Zaczynał się od tego, że Bohr dyktował, a ktoś z gości był zobowiązany wszystko zapisywać. Potem zaczynało się poprawianie, zmieniano zwroty, tak by wszystko, co napisano, było bezwarunkowo prawdziwe. Zmian było sporo, strony przepisywano wpierw ręcznie, potem na maszynie, po czym znów następowało poprawianie, itd. W końcu pracę wysyłano do publikacji w piśmie Duńskiej Akademii Nauk, gdzie prace Bohra, z oczywistych względów, były bardzo cenione. Po czym znów zaczynała się praca nad korektami, których liczba niekiedy dochodziła do szesnastu.

Naturalnie, Bohr miał taki stosunek nie tylko do słów. Kiedyś przyszedł obejrzeć nowy budynek, budowany dla instytutu. Mistrz, który go świetnie znał, mówi: „Profesorze Bohr, widzi Pan tę ścianę? Jeśli chce Pan ją znowu przesunąć, to niech się Pan szybko decyduje, bo za trzy godziny beton zastygnie".

Bohr, jak należało się tego spodziewać po profesorze, był dość roztargniony. Pamiętam, że w czasie dyskusji przez cały czas palił cygara. Pali – i nagle pyta, czy ktoś ma zapałki. Dają mu zapałki. Usiłuje zapalić cygaro nie przerywając rozmowy, co jest dość trudne. Potem chował zapałki do kieszeni, a po pięciu minutach znowu zadawał to samo pytanie i wszystko zaczynało się od początku. Długo przechowywałem okopcony kawałek kredy: on w jakiś sobie tylko właściwy sposób trzymał cygaro i kredę w jednej ręce.

W tym czasie zaczęły się nieprzyjemności w Niemczech i w Kopenhadze dyskutowano nie tylko o fizyce, ale i o tym, jak znaleźć pracę dla uczonych z Niemiec i Austrii. Dla uczonych w ogóle był to czas niełatwy. Trwał kryzys ekonomiczny, uniwersytety nie powiększały się i miejsce zwalniało się, gdy ktoś odchodził na emeryturę albo umierał. Rozprawa doktorska zupełnie nie zapewniała miejsca pracy w badaniach naukowych. Byłem wtedy przez rok stypendystą fundacji Rockefellera i mogłem, wyjeżdżając z Zurychu, połowę czasu spędzić w Rzymie, a drugą połowę w Cambridge. Przede mną uczynił tak Hans Bethe, który zimę spędził w Cambridge, a lato w Rzymie. Postąpiłem na odwrót i do dzisiaj uważam, że znalazłem lepsze rozwiązanie.

W Rzymie miałem okazję spotkać się z Enrico Fermim, który również był wybitnym fizykiem. Pytany o jakiś problem prawie zawsze zdejmował z półki książkę, gdzie problem ten był już rozwiązany. Przeważnie były to proste sprawy – Fermi nie lubił skomplikowanych zadań. Ale tu powstaje pytanie: co nazywać prostymi zadaniami? Czy nie stawały się one proste dopiero wtedy, gdy Fermi je rozwiązał?

Największe wrażenie zrobił na mnie Fermi później, już w Los Alamos, w czasie prac nad bombą atomową. Wszyscy, naturalnie, chcieli wiedzieć, jaka jest moc bomby. Aby ją wyznaczyć, mieliśmy mnóstwo aparatury, ale potrzebny był również i pewien czas. A Fermi przygotował małe kawałeczki papieru i, kiedy dotarła do nas fala uderzeniowa, wypuścił te kawałki. Z odległości, na jaką poleciały, potrafił dość szybko wyznaczyć moc wybuchu. Nie wiem, co wtedy bardziej mnie zdumiało: idea metody czy to, że dokładnie określił moment, kiedy trzeba było puścić papierki. Jestem pewien, że na jego miejscu albo wypuściłbym je zbyt wcześnie, albo w ogóle zapomniałbym je wypuścić.

Po Rzymie, jak już powiedziałem, pojechaliśmy z żoną do Cambridge, gdzie najbardziej interesujący był kontakt z Paulem Dirakiem. Dirac był bardzo uprzejmy i odniósł się do nas z wyjątkową gościnnością. Nie mieliśmy samochodu i on, wiedząc o tym, woził nas swoim, z którego był bardzo dumny. Żartowano, że Dirac-kierowca ma szczególną cechę: prędkość jego samochodu przyjmowała tylko dwie wartości – zerową i maksymalną.

Dirac zawsze dziwił swoimi osobliwymi reakcjami. Jednakże jeśli potem się je

jest liczbą wymierną, którą można zapisać w postaci $S_k = a_k/2^{k!}$, przy czym a_k jest dodatnią liczbą całkowitą. Mamy przy tym

$$|S - S_k| = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^{i!}} \le \frac{1}{2^{(k+1)!}} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\right),$$

a zatem

$$(1) \qquad |S - S_k| \le \frac{2}{2^{(k+1)!}}.$$

Korzystając z twierdzenia Liouville'a otrzymujemy natomiast

$$(2) \qquad |S - S_k| \ge \frac{C}{2^{nk!}},$$

gdzie C jest pewną stałą dodatnią i z porównania wzorów (1) i (2) wynika nierówność

$$\frac{2}{2^{(k+1)!}} \ge \frac{C}{2^{nk!}},$$

prowadząca do

$$2^{k!(k+1-n)} \le \frac{2}{C},$$

która dla dostatecznie dużych k jest fałszywa, gdyż jej lewa strona dąży do nieskończoności przy wzroście k. Otrzymana sprzeczność pokazuje, że liczba S jest przestępna.

Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

M 655. Niech n będzie liczbą naturalną, d zaś – dzielnikiem liczby $2n^2$. Udowodnić, że $n^2 + d$ nie może być kwadratem liczby naturalnej.
Rozwiązanie na str. 10

M 656. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych T_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) zachodzi nierówność

$$\sum_{j,k=1}^{n} \cos(T_k - T_j) \ge 0.$$

Rozwiązanie na str. 16

M 657. Pewien profesor matematyki napisał na tablicy wielomian $f(x)$ o współczynnikach całkowitych i powiedział: „Jeśli do f podstawimy w miejsce x wiek mojego syna, który właśnie skończył a lat, to otrzymamy równość $f(a) = a$. Ponadto $f(0) = p$ jest liczbą pierwszą większą od a". Ile lat ma syn profesora?
Rozwiązanie na str. 12

Redaguje Jarosław KULPA

F 349. Stalową igłę można położyć na powierzchni wody w taki sposób, aby nie tonęła. Obliczyć maksymalną średnicę igły, dla której możliwy jest jeszcze ten efekt. Napięcie powierzchniowe wody wynosi $\sigma = 0{,}072$ N/m, gęstość stali $\rho = 7900$ kg/m^3, gęstość wody $\rho_w = 1000$ kg/m^3.
Rozwiązanie na str. 10

F 350. Ocenić szerokość dysku planetarnego, z którego mógł powstać układ Ziemia–Księżyc. Założyć, że rzut własnego momentu pędu układu Ziemia–Księżyc na oś prostopadłą do płaszczyzny ekliptyki nie zmienił się w czasie istnienia układu. Masa Ziemi $M = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg, promień Ziemi $R = 6{,}4 \cdot 10^6$ m, masa Księżyca $m = 7{,}4 \cdot 10^{22}$ kg, średnia odległość Ziemia–Księżyc $r = 384$ tys. km, nachylenie osi ziemskiej do płaszczyzny ekliptyki $\phi_Z = 23°$, nachylenie orbity Księżyca do płaszczyzny ekliptyki $\phi_K = 5°$.
Rozwiązanie na str. 11

przemyślało jak należy, to okazywało się, że jego słowa albo postępowanie absolutnie logicznie wynikały z tego, co je poprzedzało. Oto jeden z przykładów. Swego czasu do Cambridge przyjechał pewien historyk nauki i zapragnął poznać Diraca. Przywieziono go do college'u. Dirac jadł obiad, powstało milczenie, które należało jakoś rozładować. Historyk rozpoczął rozmowę o pogodzie, zauważając, że na dworze jest dość wietrznie. Dirac nic nie odpowiedział, po chwili wstał, podszedł do drzwi, otworzył je i zaczął nasłuchiwać. Dopiero przekonawszy się, że rozmówca mówi prawdę, potwierdził opinię krótkim „tak".

Kończąc swoje wystąpienie pragnę zwrócić uwagę, że mówiłem nie jako historyk nauki, dokładnie ważący słowa i prawidłowo rozkładający akcenty. Były to wrażenia świadka słynnego okresu tworzenia jednej z największych teorii fizycznych – mechaniki kwantowej i wspomnienia o jej twórcach, z którymi miałem szczęście spotkać się i pracować.

przetłumaczył i opracował
Waldemar PUSZKARZ

Skażenia promieniotwórcze środowiska

Ryszard WOJTKIEWICZ

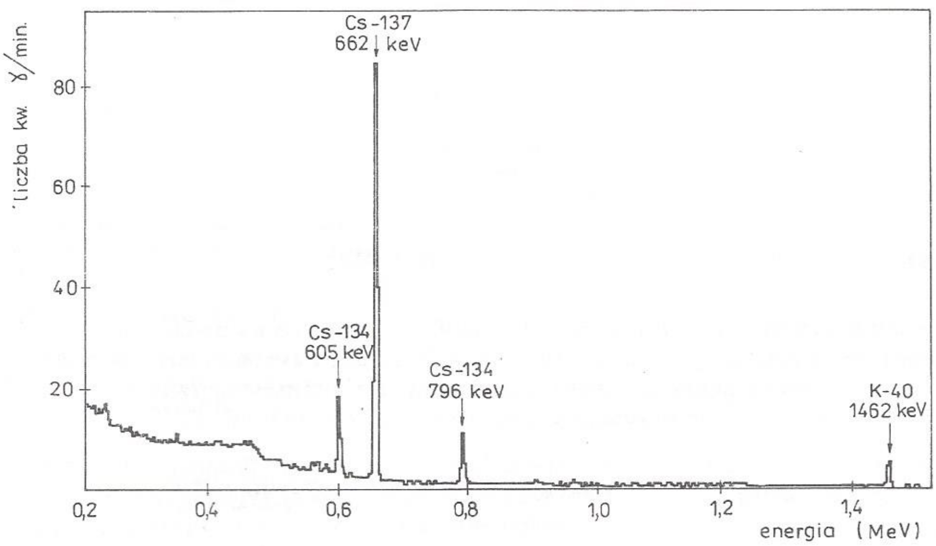
W artykule *Promieniotwórczość naturalna* (*Delta* 11/1992) przedstawione było widmo promieniowania naturalnego γ pochodzącego od ścian budynków. Na ogół tak samo od strony jakościowej wygląda widmo zarejestrowane w innych miejscach naszego środowiska. Takie widmo promieniowania otoczenia, w którym dokonywany jest pomiar, w dalszej części będzie nazywane widmem tła lub po prostu tłem.

Jednakże niekiedy mamy do czynienia ze skażeniem promieniotwórczym mogącym wystąpić np. podczas awarii elektrowni jądrowej. Wówczas niektóre miejsca naszego środowiska wykazują promieniotwórczość inną od opisanej, zarówno pod względem jakościowym, jak i ilościowym. Niektóre tego przykłady przedstawione są poniżej.

Radioaktywne grzyby

Widmo promieniowania γ próbki 250 g suszonych grzybów zebranych latem 1988 roku w województwie olsztyńskim odbiega od widma promieniowania tła. Rysunek 1 przedstawia je wraz z tłem.

Dominuje tu nie tak, jak poprzednio, linia pochodząca od izotopu potasu K–40, lecz grupa linii odpowiadających promieniowaniu γ, którego emiterami są izotopy cezu: Cs–137 i Cs–134. Najintensywniejsza linia o energii 662 keV odpowiada rozpadowi jąder Cs–137, natomiast pozostałe odpowiadają rozpadom jąder Cs–134. Jak widać, wysokość linii o energii 662 keV jest około dwudziestokrotnie większa od wysokości linii o energii 1461 keV (K–40).



Rys. 1. Widmo promieniowania γ grzybów zebranych latem 1988 r. w województwie olsztyńskim. Podobnie wygląda widmo pochodzące od grzybów zebranych w innych rejonach Polski.

Uważa się, że skażenie promieniotwórcze grzybów jest skutkiem opadów chmury radioaktywnej związanej z awarią elektrowni w Czernobylu w dniu 26 IV 1986 r. Dwa izotopy cezu: Cs–137 i Cs–134, których okresy połowicznego zaniku wynoszą odpowiednio 30,2 lat i 2,1 lat, z łatwością przetrwały w odpowiedniej ilości do dnia dzisiejszego. Opady promieniotwórcze cezu z 1986 r. prawdopodobnie znajdowały się w gruncie, na którym wyrosły grzyby w roku 1988. Pomiaru dokonano 12 IV 1990 r.

Rozwiązanie zadania F 349.
Niech R oznacza promień igły, l zaś jej długość. Dodatkowe ciśnienie, jakie wywiera zakrzywiona powierzchnia wody na igłę, zgodnie z prawem Laplace'a, wynosi $p = \frac{\sigma}{R}$. W przypadku ekstremalnym igła będzie zanurzona do połowy. Robiąc bilans siły ciężkości, siły wyporu oraz siły związanej z napięciem powierzchniowym otrzymujemy

$$\rho\pi R^2 lg = \rho_w \cdot \frac{1}{2}\pi R^2 lg + \frac{\sigma}{R}\cdot 2R\cdot l.$$

Stąd

$$R = \sqrt{\frac{2\sigma}{\pi g(\rho - 0,5\rho_w)}}$$

i ostatecznie $d = 2R = 1,6$ mm.

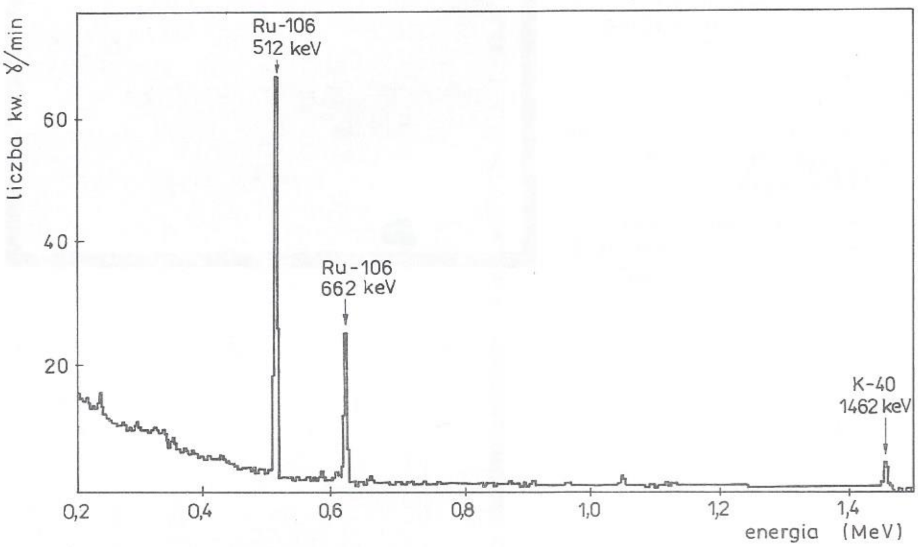
Dokonano także pomiarów z próbkami grzybów zebranych w tym samym czasie w pięciu różnych rejonach Polski oraz z jedną próbką grzybów zebranych rok wcześniej. Wszystkie one wykazywały taką samą promieniotwórczość γ pod względem jakościowym i niewiele różniły się pod względem ilościowym od opisanej poprzednio.

Gorące cząstki

Innym przykładem skażenia promieniotwórczego środowiska, którego rodowód jest ten sam, są tzw. gorące cząstki (z angielskiego hot spots). Nazwano tak miejsca o wysokiej aktywności promieniotwórczej; wykryto takie np. w Mikołajkach we wrześniu 1986 r.

Po kilkugodzinnym poszukiwaniu radiometrem przesuwanym na wysokości kilku centymetrów nad ziemią znajdowano od kilku do kilkunastu sztuk grudek ziemi szczególnie aktywnych promieniotwórczo. Kolejne dzielenie wyizolowanej promieniotwórczej grudki ziemi pod kontrolą radiometru wykazało, że cała promieniotwórczość skupiona jest w znikomo małym okruchu, mniejszym od ziarnka maku. Tak wydzielone okruchy to właśnie „gorące cząstki".

Widmo promieniowania γ emitowanego przez jedną ze znalezionych w dniu 5 IX 1986 r. „gorących cząstek" (łącznie z tłem), pokazane jest na rysunku 2. Pomiaru dokonano 11 IV 1990 r.



Rys.2. Widmo promieniowania γ jednej z „gorących cząstek" znalezionej we wrześniu 1986 r. w Mikołajkach.

Rozwiązanie zadania M 655.
Przypuśćmy przeciwnie, że dla pewnego $x \in \mathbb{N}$ zachodzi $x^2 = n^2 + d$ i niech $k \cdot d = 2n^2$. Wtedy

$$\frac{x^2}{n^2} = \frac{2n^2 + 2d}{2n^2} = \frac{k+2}{k}.$$

Jeśli sprowadzimy do postaci nieskracalnej ułamek po prawej stronie, to różnica między jego licznikiem i mianownikiem może się co najwyżej zmniejszyć i będzie nie większa niż 2. Sprowadźmy do postaci nieskracalnej ułamek po lewej stronie. Z zasadniczego twierdzenia arytmetyki wynika, że otrzymamy ułamek postaci p^2/q^2 dla pewnych $p, q \in \mathbb{N}$ $(p > q)$. Ponieważ różnica między licznikiem i mianownikiem jest nie większa niż 2, więc

$$2 \geq p^2 - q^2 = (p - q)\cdot(p + q) \geq 1 \cdot 3 = 3.$$

Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Dominują tu dwie linie o energiach 512 keV i 622 keV, co na podstawie ich względnych natężeń pozwala sądzić, że pochodzą one z rozpadu izotopu rutenu Ru–106 o okresie połowicznego zaniku 372 dni. Najintensywniejsza linia jest około osiemnastokrotnie wyższa od linii o energii 1461 keV (K–40).

Wcześniejsze pomiary pozwoliły stwierdzić, że początkowo promieniotwórczość „gorących cząstek" składała się również z innego – krócej żyjącego (okres połowicznego zaniku 39 dni) – izotopu rutenu Ru–103. Oszacowana aktywność omawianych źródeł promieniowania γ w chwili znalezienia była równa setkom Bq (1 Bq odpowiada rozpadowi jednego jądra w czasie jednej sekundy), czyli podobna do tej, jakie mają niektóre źródła używane w pracach laboratoryjnych.

Gęstość występowania „gorących cząstek" we wrześniu 1986 r., oszacowana na podstawie próby statystycznej w liczbie dwudziestu kilku sztuk, jest równa jednej „gorącej cząstce" przypadającej na 56 m^2 powierzchni ziemi.

Podobne źródła promieniowania γ znajdowano też w Lublinie. Wydaje się więc mało prawdopodobne, aby wszystkie inne obszary Polski były pod tym względem uprzywilejowane.

Spośród emiterów promieniowania γ, które pojawiły się w naszym środowisku po awarii elektrowni w Czernobylu, obecnie można zaobserwować jedynie izotopy

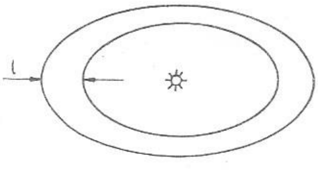
Rozwiązanie zadania F 850.
Rzut momentu pędu układu Ziemia – Księżyc w układzie środka Ziemi jest sumą rzutu orbitalnego momentu pędu Księżyca i własnego obrotowego momentu pędu Ziemi na płaszczyznę ekliptyki

$$L = \frac{2}{5}MR^2\omega\cos\phi_Z + mvr\cos\phi_K,$$

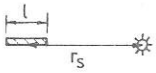
gdzie $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $T = 24$ h, $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$, a $\frac{2}{5}MR^2$ jest momentem bezwładności Ziemi. Stąd otrzymujemy

$$L = 3,52 \cdot 10^{34}\ \mathrm{kg \cdot m^2/s}.$$

Rozważmy dysk pramaterii o szerokości l wirujacy wokół Słońca.



Dla uproszczenia rachunków możemy go „zwinąć” do odcinka o długości l.



Ta operacja, schematycznie obrazująca skupianie się pramaterii, posłuży nam do obliczenia własnego momentu pędu odcinka, który będziemy utożsamiać z wcześniej obliczoną wartością L.

Załóżmy dalej, że tak powstały odcinek ma stałą gęstość liniową $\rho = (M+m)/L$. Niech x oznacza odległość od środka odcinka do danego punktu, r_S zaś odległość Ziemi od Słońca. Prędkość, z jaką poruszają się poszczególne partie materii, zależy od x:

$$v(x) = \sqrt{\frac{GM_S}{r_S + x}} \approx \sqrt{\frac{GM_S}{r_S}}\left(1 - \frac{x}{2r_S}\right),$$

gdzie M_S oznacza masę Słońca. W stosunku do środka ciężkości odcinka będziemy mieli

$$u(x) = v_0\frac{x}{2r_S},$$

gdzie v_0 jest prędkością Ziemi w ruchu wokół Słońca. Własny moment pędu układu wynosi więc

$$L = \int_{-l/2}^{l/2} \rho u(x) x\,dx = \frac{(M+m)l^2 v_0}{24 r_S}.$$

Podstawiając $v_0 = \frac{2\pi r_S}{t}$, gdzie $t = 1$ rok, otrzymujemy

$$L = \frac{\pi}{12}\frac{(M+m)l^2}{t},$$

skąd

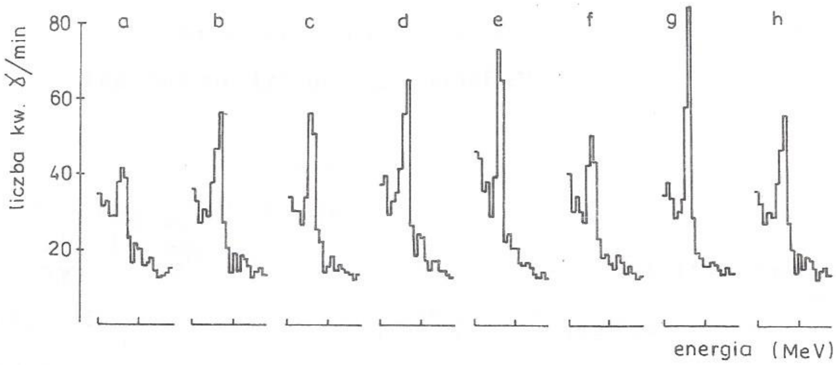
$$l = \sqrt{\frac{12Lt}{\pi(M+m)}} \doteq 837\ 000\ \mathrm{km}.$$

cezu i rutenu, które ze względu na stosunkowo długi czas życia przetrwały do dnia dzisiejszego.

Promieniowanie tarczycy

Sytuacja była jednak inna w maju 1986 r., kiedy to można było doszukać się w widmach wielu krócej żyjących emiterów promieniowania γ, wśród których dominującą rolę odgrywał izotop jodu J–131 o okresie połowicznego zaniku 8,04 dni. Skażenie nim nastąpiło w wielu miejscach naszego środowiska, lecz najciekawsze wydaje się przedstawienie rezultatów pomiarów dotyczących występowania radioaktywnego jodu w tarczycy ludzkiej, gdyż, jak wiadomo, jod jest wybiórczo wchłaniany przez ten gruczoł.

Przebadano kilkanaście osób w różnym wieku. Fragmenty widm promieniowania γ tarczycy pięciu osób przedstawia rysunek 3.



Rys. 3. Fragmenty widm promieniowania γ tarczycy ludzkiej. Przypadki a,b,c,d odpowiadają osobom w różnym wieku – od najstarszej do najmłodszej: Przypadek e odpowiada osobie, która w dniu 30 IV 1986 r. zażyła płyn Lugola. Przypadki f,g,h przedstawiają fragmenty widm promieniowania γ tarczycy tej samej osoby w sześciodniowych odstępach (14, 20 i 26 maja 1986 r.).

Rejestracji widm dokonano w dniu 26 V 1986 r. Na wszystkich z nich widoczna jest główna (najintensywniejsza) linia pochodząca z rozpadu J–131, o energii 364 keV. Pierwsze cztery (rys. 3a,b,c,d) zostały uszeregowane według wieku badanych osób, w ten sposób, że przypadek pierwszy odpowiada najstarszej. Fragment widma na rysunku 3e odpowiada osobie, która w cztery dni po awarii (30 kwietnia) zażyła płyn Lugola. Chociaż zabieg ten powinien znacznie ograniczyć wchłanianie promieniotwórczego izotopu jodu, to, jak widać, nie spełnił on swojej roli. Ostatnie trzy przypadki (rys. 3f,g,h) dotyczą jednej osoby i zarejestrowane zostały w sześciodniowych odstępach czasu (14, 20 i 26 maja). Łatwo zauważyć, że nie wskazują one na zmniejszanie się ilości promieniotwórczego jodu z szybkością uwarunkowaną okresem połowicznego zaniku równym około 8 dni. I nic dziwnego, bo przecież poza rozpadem promieniotwórczym wchodzą tu w grę jeszcze dwa procesy: wydalanie wchłoniętej przez tarczycę porcji jodu i wchłanianie nowych porcji.

W tym artykule zostały przedstawione tylko wybrane przykłady emiterów promieniowania γ, stanowiących skażenie promieniotwórcze środowiska spowodowane awarią elektrowni jądrowej. Mimo że minęło siedem lat od tej dramatycznej katastrofy, wciąż jeszcze obserwujemy jej konsekwencje. Ocena skutków wynikających z tego skażenia środowiska nie jest prosta. Należy jednak zauważyć, że ludzkość od niepamiętnych czasów żyje i rozwija się w środowisku słabo promieniotwórczym, co prawdopodobnie nie pozostało bez wpływu zarówno na jej rozwój, jak i rozwój innych form biologicznych na Ziemi. Dwudziesty wiek wraz z rozwojem technik jądrowych wniósł pewne zakłócenie do istniejącego stanu naturalnego, co może w jakimś stopniu wpłynąć także na sferę biologiczną.

Istotne jest, że uświadamiamy to sobie i dysponujemy niezwykle czułą aparaturą, która pozwala na wykrywanie i identyfikację nawet bardzo niewielkich skażeń promieniotwórczych, porównywalnych z naturalną zawartością promieniotwórczych nuklidów w naszym otoczeniu.

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1992.

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 IV 1993

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 239 (WT=2,40) i 240 (WT=1,43) z numeru 4/1992

Marek Prauza	– Poraj	42,43
Mikołaj Rotkiewicz	– Warszawa	40,17
Leszek Gasiński	– Stalowa Wola	35,52
Marcin Kasperski	– Warszawa	35,28

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Zadania z matematyki nr 253, 254

253. Dane są liczby całkowite $a \geq 1$, $k \geq 0$, $m \geq 3$, przy czym m jest dzielnikiem liczby $a^{2^k}+1$. Dowieść, że $m > 2^{k+1}$.

254. Wyznaczyć wszystkie funkcje ciągłe $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełniające równanie

$$f(x+y) = f(x)f(y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \qquad \text{dla} \quad x, y \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Zadanie **254** zaproponował pan Henryk Kornacki z Augustowa.

Rozwiązanie zadania M 657.
Zauważmy, że

$$f(x) = x \cdot g(x) + f(0) = x \cdot g(x) + p,$$

czyli

$$a = f(a) = a \cdot g(a) + p.$$

Stąd wynika, że liczba pierwsza p dzieli się bez reszty przez a, zatem, zgodnie z warunkiem $p > a$, mamy $a = 1$.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/1992

Przypominamy treść zadań:

245. Dla dowolnego zbioru $H = \{P_1, \ldots, P_7\}$ złożonego z siedmiu różnych punktów płaszczyzny oznaczmy przez $\alpha(H)$ miarę największego kąta wypukłego $\sphericalangle P_iP_jP_k$ ($i, j, k \in \{1, \ldots, 7\}$). Obliczyć kres dolny wartości $\alpha(H)$, gdy H przebiega rodzinę wszystkich siedmiopunktowych podzbiorów płaszczyzny.

246. Wyznaczyć w zależności od stałych rzeczywistych a, b liczbę różnych pierwiastków rzeczywistych równania

$$x^4 - 2ax^2 + b^3x + a(a-b^2) = 0.$$

245. Wykażemy, że dla każdego zbioru $H = \{P_1, \ldots, P_7\}$ zachodzi nierówność $\alpha(H) \geq 120°$. Jeśli punkty $P_1, \ldots, P_7$ są wierzchołkami siedmiokąta wypukłego, to maksymalny kąt wewnętrzny ma miarę nie mniejszą niż 1/7 sumy miar wszystkich kątów wewnętrznych. Suma ta wynosi $5 \cdot 180°$, więc w tym przypadku $\alpha(H) \geq (5/7) \cdot 180° > 120°$. Jeśli punkty $P_1, \ldots, P_7$ nie są wierzchołkami siedmiokąta wypukłego, to pewne k punktów ($3 \leq k \leq 6$) są wierzchołkami k-kąta wypukłego, zawierającego pozostałe $7-k$ punktów w swoim wnętrzu. Dzielimy ten k-kąt na trójkąty przekątnymi wychodzącymi z jednego wierzchołka. W którymś z otrzymanych trójkątów (wewnątrz lub na brzegu) znajdzie się pewien punkt P_j; jeden z boków tego trójkąta jest widoczny z punktu P_j pod kątem $\geq 120°$. Zatem i w tym przypadku $\alpha(H) \geq 120°$. (Prowadząc nieco staranniejszą analizę można wykazać, że zawsze zachodzi ostra nierówność $\alpha(H) > 120°$.) Rozważmy teraz taką konfigurację: $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ jest sześciokątem wypukłym o wszystkich kątach wewnętrznych równych 120° i takim, że $|P_1P_2| = |P_3P_4| = |P_5P_6| = a$, $|P_2P_3| = |P_4P_5| = |P_6P_1| = b < a$; punkt P_7 leży na przecięciu osi symetrii sześciokąta. Dla zbioru $H = \{P_1, \ldots, P_7\}$ miara $\alpha(H) = |\sphericalangle P_1P_7P_4| = |\sphericalangle P_2P_7P_5| = |\sphericalangle P_3P_7P_6|$ będzie dowolnie bliska 120°, jeśli stosunek a/b będzie dostatecznie duży. Stąd wynika, że szukany kres dolny wynosi 120°.

246. Dany wielomian jest iloczynem trójmianów kwadratowych

$$P(x) = x^2 + bx - a \qquad \text{i} \qquad Q(x) = x^2 - bx + b^2 - a$$

o wyróżnikach

$$(1) \qquad \Delta_P = 4a + b^2, \qquad \Delta_Q = 4a - 3b^2;$$

znaki wyrażeń (1) determinują liczbę pierwiastków rzeczywistych każdego z tych trójmianów. Przypuśćmy teraz, że P i Q mają wspólny pierwiastek x_0. Wówczas $x_0^2 + bx_0 = a$, $x_0^2 - bx_0 = a - b^2$, skąd przez odjęcie oraz dodanie stronami:

$$2bx_0 = b^2, \qquad 2x_0^2 = 2a - b^2.$$

Dostajemy alternatywę

$$(2) \qquad (b = 0,\ a = x_0^2 \geq 0) \quad \text{lub} \quad (x_0 = b/2,\ 4a = 3b^2).$$

W przypadku, gdy parametry a i b nie spełniają żadnego ze związków figurujących w (2), odpowiedź na postawione w zadaniu pytanie wynika wprost z analizy znaków wyrażeń (1). Gdy natomiast liczby a, b spełniają pierwszy lub drugi związek (2), równanie przybiera odpowiednio postać

$$(x^2 - a)^2 = 0 \quad \text{lub} \quad \big((x + (b/2))^2 - b^2\big)(x - (b/2))^2 = 0.$$

W każdym przypadku dalsza analiza jest oczywista.

Reasumując, uzyskujemy odpowiedź: liczba różnych pierwiastków rzeczywistych równania $P(x)Q(x) = 0$ wynosi:

$$\begin{cases} 4 & \text{gdy } 4a > 3b^2 > 0, \\ 2 & \text{gdy } -b^2 < 4a \leq 3b^2 \text{ lub } b = 0 < a, \\ 1 & \text{gdy } 4a + b^2 = 0, \\ 0 & \text{gdy } 4a + b^2 < 0. \end{cases}$$

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 137 (WT=3,33) i 138 (WT=2,50) z numeru 4/1992

Paweł Perkowski	– Szczecin	41,86
Tomasz Wietecha	– Tarnów	22,47
Przemysław Gworys	– Częstochowa	21,48
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	19,01
Dariusz Wilk	– Rzeszów	17,76

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Zadania z fizyki nr 151, 152

151. W obwodzie LC (bez oporu) występują drgania elektromagnetyczne. Czy można zwiększyć ich amplitudę:
a) zbliżając i oddalając w odpowiednich momentach okładki kondensatora?
b) wsuwając między okładki i wysuwając płytkę z dielektryka?
c) zbliżając i oddalając zwoje cewki?
d) wsuwając do wnętrza cewki i wysuwając magnes stały?
Jeśli tak, to w jakich momentach trzeba wykonywać opisane wyżej ruchy, aby wzrost amplitudy był największy?

152. Przednia i tylna oś motocykla są odległe o $d = 1{,}4$ m, promień kół wynosi $r = 0{,}4$ m, a współczynnik tarcia opon o jezdnię jest równy $f = 1$. Środek masy motocykla wraz z motocyklistą znajduje się w jednakowej odległości od obu osi na wysokości $h = 0{,}8$ m nad ziemią. Obliczyć minimalną drogę hamowania motocykla jadącego z prędkością początkową $v = 60$ km/h, jeśli
a) używać tylko tylnego hamulca,
b) używać tylko przedniego hamulca,
c) używać obu hamulców.
Masę kół pominąć. Przedyskutować optymalną (i bezpieczną!) metodę użycia hamulców, w zależności od wartości danych.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/1992

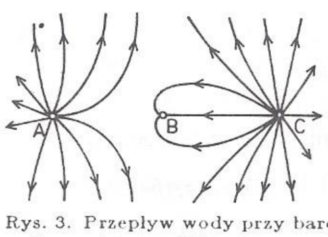
Przypominamy treść zadań:

143. W dużym zbiorniku z wodą na dużej głębokości wzdłuż linii prostej w jednakowych odstępach umieszczono końcówki trzech rurek doprowadzających lub odprowadzających wodę. Wydajność źródła A wynosi +1, a wydajność źródła C wynosi +2. Jaka jest maksymalna wartość poboru wody przez rurkę B, przy której czerpana woda będzie w całości pochodzić z C, bez domieszki z A? Przyjąć, że przepływ jest stacjonarny i laminarny.

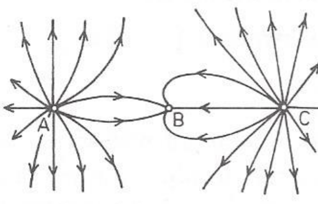
144. Kołysząc się na huśtawce dziecko może:
1. siedząc wysuwać nogi do przodu odchylając jednocześnie do tyłu górną część ciała, lub na odwrót – podkurczać nogi i pochylać tułów do przodu (rys. 1).
2. stojąc przykucać (rys. 2) lub podnosić się do góry.
W których momentach dziecko powinno wykonywać opisane wyżej ruchy, aby rozkołysać się mocniej? Czy ruchy te mogą wzbudzić kołysanie, gdy huśtawka początkowo spoczywała, czy tylko zwiększyć amplitudę wahań pchniętej huśtawki?


Rys. 1


Rys. 2



Rys. 3. Przepływ wody przy bardzo małym poborze w B.



Rys. 4. Przepływ wody przy większym poborze w B.

143. Prawa przepływu cieczy mają identyczną postać matematyczną, jak prawa elektrostatyki – por. np. równanie ciągłości i prawo Gaussa. Wynika stąd, że w każdym punkcie wektor prędkości wody jest wypadkową (sumą wektorową) trzech prędkości, jakie wystąpiły dla dopływu lub odpływu przez tylko jedną z trzech rurek. Z kolei każdy ze składników sumy można obliczyć ze wzoru

$$\vec{v} = \frac{Q}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3},$$

gdzie Q – wydajność źródła (w m^3/s), a $\vec{r}$ – wektor poprowadzony od źródła do danego punktu. Nietrudno przekonać się (zob. rys. 3 i 4), że jeśli woda nie dopływa z A do B wzdłuż odcinka AB, to tym bardziej nie dopływa okrężną drogą. Należy więc zbadać prędkość przepływu jako funkcję położenia wzdłuż odcinka AB

$$v(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{p}{(1-x)^2} - \frac{2}{(2-x)^2},$$

gdzie x jest współrzędną położenia (równą 0 w punkcie A, 1 w B i 2 w C), p jest szukanym poborem wody w B, a czynnik 4π dla uproszczenia pominięto. Woda z A dopływa do B wtedy, gdy funkcja $v(x)$ jest dodatnia na całym odcinku $[0,1]$. Analiza numeryczna wskazuje, że jest tak dla $p > 0{,}0044$ – przy poborze mniejszym czerpana woda nie zawiera domieszki z A.

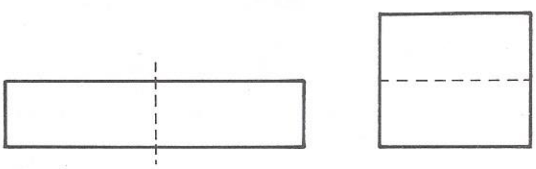
144. Rozpatrując ruch przedstawiony na rysunku 1 najlepiej jest dla uproszczenia przyjąć, że nie występuje przy tym przemieszczenie środka masy ciała (nogi „równoważą się” z górną częścią tułowia). Przy takim założeniu ruch ciała wynika z oddziaływania „skrętnego” między ciałem a huśtawką – tzn. wystąpi **moment** siły, podczas gdy całkowita siła oddziaływania ciała na huśtawkę będzie taka, jak w przypadku ciała nieruchomego. Pod wpływem tego oddziaływania huśtawka cofnie się, gdy wyprostujemy nogi i odchylimy tułów do tyłu, a przesunie się dą przodu przy ruchu odwrotnym (w tym punkcie można też powołać się na zasadę zachowania momentu pędu względem punktu zawieszenia huśtawki). Należy więc prostować nogi i odchylać do tyłu tułów w fazie, gdy huśtawka odchylona jest do tyłu (najlepiej w okolicy maksymalnego wychylenia), a podkurczać nogi i pochylać się do przodu podczas wychylenia huśtawki do przodu. Widzimy też, że tą drogą można rozkołysać huśtawkę nawet wtedy, gdy początkowo była nieruchoma.

Alternatywną metodą rozwiązania jest zwrócenie uwagi na bilans energii, gdyż wzrost energii wahań może nastąpić tylko dzięki pracy dziecka. W drugim sposród rozpatrywanych ruchów należy podnosić się wtedy, gdy nacisk stóp na huśtawkę jest największy – czyli w punkcie przejścia przez położenie pionowe, gdy do ciężaru dodaje się siła odśrodkowa (oczywiście, ma to sens tylko wtedy, gdy huśtawka już się kołysze). Opuszczać się należy zaś wtedy, gdy nacisk jest najmniejszy, czyli najmniejsza jest odebrana tą drogą energia – zatem w położeniach skrajnych. Stosując podobne rozumowanie do ruchu na rysunku 1 można dojść do identycznych wyników jak poprzednio.

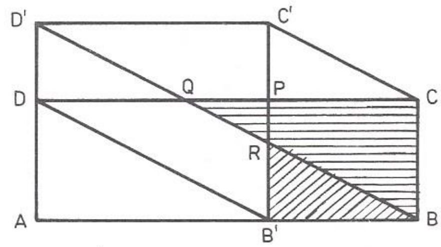
mała delta

Klocki

Jeśli dwa prostokąty mają jednakowe pola, to można jeden z nich pociąć na skończoną liczbę wielokątnych kawałków, z których da się ułożyć drugi. Krok pierwszy (często niepotrzebny) to doprowadzenie do sytuacji, gdy stosunek ich dłuższych boków jest mniejszy niż 2 – robi się to przecinając zbyt długi prostokąt na pół (i składając – rys. 1). Krok zasadniczy opiera się na sprawdzeniu, że jeśli prostokąty $ABCD$ i $AB'C'D'$ mają jednakowe pola i leżą tak jak na rysunku 2, to $DB' \parallel D'B \parallel CC'$.



Rys. 1



Rys. 2

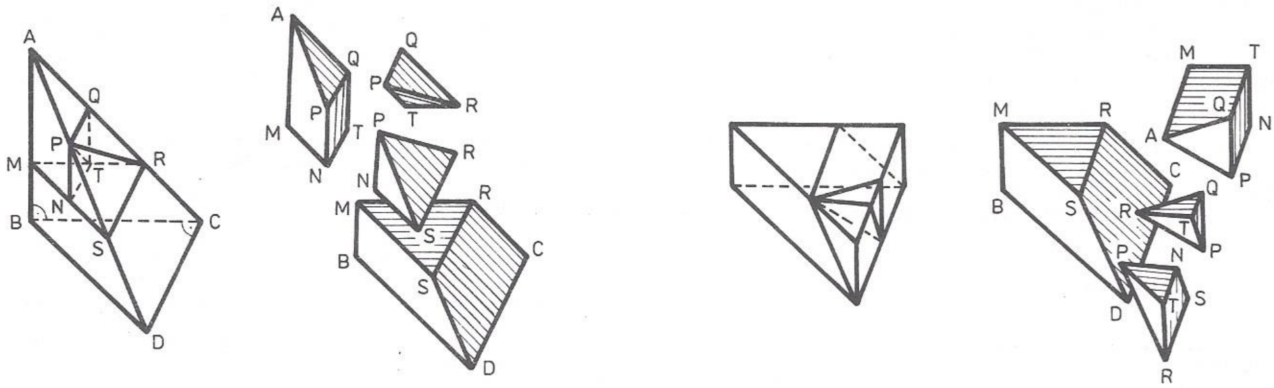
Wynika to z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa. Skoro bowiem $AD \cdot AB = AD' \cdot AB'$, to $\frac{AD}{AB'} = \frac{AD'}{AB}$, a więc $DB' \parallel D'B$ (patrzyliśmy na kąt o wierzchołku A). Z tejże równości wynika, że $AD \cdot AB - AD \cdot AB' = AD' \cdot AB' - AD \cdot AB'$, czyli $AD \cdot BB' = DD' \cdot AB'$, albo $\frac{AD}{AB'} = \frac{DD'}{BB'}$.

Zapisując tę równość za pomocą innych odcinków mamy $\frac{B'P}{DP} = \frac{C'P}{CP}$, a więc $DB' \parallel CC'$ (patrzyliśmy tym razem na kąt o wierzchołku P).

Skoro tak, to odcinając trójkąty $BB'R$ i BCQ oraz przesuwając pierwszy o wektor $\overrightarrow{B'D}$, a drugi o wektor $\overrightarrow{CC'}$ otrzymujemy z prostokąta $ABCD$ prostokąt $AB'C'D'$.

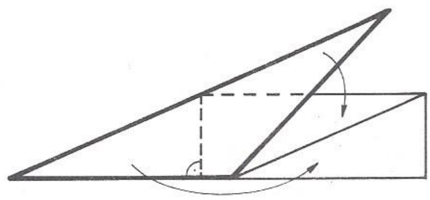
Uzyskany rezultat pozwala stwierdzić, że każdy prostopadłościan można pociąć na klocki wielościenne, z których da się ułożyć sześcian. Niech bowiem wyjściowy prostopadłościan ma krawędzie a, b i c. Metodą zastosowaną dla prostokąta można z niego zrobić prostopadłościan o krawędziach $\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$, $\frac{a \cdot b}{\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}}$ i c – po prostu tniemy zawsze płaszczyznami równoległymi do krawędzi o długościach c. I dalej tak samo: tniemy równolegle do krawędzi o długościach $\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$ w ten sposób, by prostokąt $\frac{a \cdot b}{\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}} \times c$ zamienił się na kwadrat (o boku $\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$). I koniec.

Powstaje pytanie, czy każdy wielościan można tak pociąć na wielościenne klocki, by dało się ułożyć z nich sześcian. Okazuje się, że nie – udowodnił to Dehn w 1900 roku. Niektóre jednak wielościany można. Na rysunku 3 pokazany jest jeden z tzw. czworościanów Hilla oraz sposób jego pocięcia na cztery klocki, z których składa się graniastosłup o podstawie trójkątnej – w czworościanie tym krawędzie AB, BC i CD są równe i mają trzy wzajemnie prostopadłe kierunki; pocięcie zrobione zostało tak, że $BM = MN = \frac{1}{3}AB$ – resztę widać.



Rys. 3

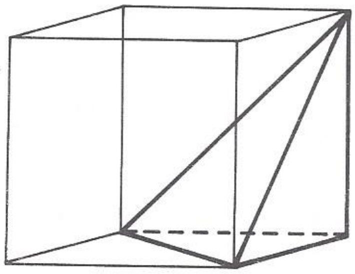
Ale gdzie jest obiecany sześcian? Co robić dalej, poucza nas rysunek 4, który wskazuje, jak trójkąt przez pocięcie zamienia się na równoległobok, a ten na prostokąt – w ten sposób nasz graniastosłup zamienić można na prostopadłościan – prawda? A co zrobić z prostopadłościanem, już wiemy.



Rys. 4

Na koniec przykład czworościanu, którego nie można pociąć na wielościenne klocki, z których dałoby się ułożyć sześcian – rysunek 5. Bardzo podobny do czworościanu Hilla, nieprawdaż?

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS



Rys. 5. Tym, którzy chcą wiedzieć, dlaczego się nie da, polecamy *Deltę* 11/1984.

Odcinek dla poczty

Zł ....

słownie złotych

Dokładny adres ....

wpłacający

na r-k **AMOS**

Dokładna nazwa 01-506 Warszawa

ul. Szenwalda 1

nazwa banku PKO VIII O/W-wa

Nr r-ku 1586-77578-136

stempel

podpis przyjmującego

Pobrano opłatę

zł ....

Odcinek dla posiadacza rachunku

Zł ....

słownie złotych

Dokładny adres ....

wpłacający

na r-k **AMOS**

Dokładna nazwa 01-506 Warszawa

ul. Szenwalda 1

nazwa banku PKO VIII O/W-wa

Nr r-ku 1586-77578-136

stempel

podpis przyjmującego

Pobrano opłatę

zł ....

Potwierdzenie dla wpłacającego

Zł ....

słownie złotych

Dokładny adres ....

wpłacający

na r-k **AMOS**

Dokładna nazwa 01-506 Warszawa

ul. Szenwalda 1

nazwa banku PKO VIII O/W-wa

Nr r-ku 1586-77578-136

stempel

podpis przyjmującego

Pobrano opłatę

zł ....

Protokół z posiedzenia Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki, obradując w składzie:
dr Jerzy Bednarczuk – przedstawiciel MEN, dr Antoni Dawidowicz w zastępstwie przewodniczącego Jury, mgr Piotr Hajłasz, prof. dr hab. Marek Kordos, mgr Andrzej Mąkowski, biorąc pod uwagę dobór tematu pracy, pracę i przebieg obrony, postanowiło, że:

1. Złoty medal i nagrodę w wysokości 600 000,-zł otrzymuje Marek Pycia z I LO im. Mikołaja Kopernika w Bielsku Białej za pracę *Pewne nierówności funkcyjne.*
2. Brązowy medal i nagrodę w wysokości 300 000,-zł otrzymuje Krystian Witkowski z V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie za pracę *O pewnych ciągach rekurencyjnych.*
3. Nagrody pieniężne otrzymują opiekunowie prac: prof. dr hab. Janusz Matkowski – 300 000,-zł, dr Zdzisława Dybiec – 150 000,-zł, dr Bohdan Grell – 150 000,-zł.

Lublin 09 IX 1992

Tradycyjnym zwyczajem redakcja *Delty* ogłasza Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki. Zachęcamy uczniów zainteresowanych matematyką do opracowywania swoich matematycznych rozważań i nadsyłania rezultatów do redakcji *Delty*. Poniżej przypominamy szczegółowy regulamin konkursu.

Regulamin Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

1. Konkurs organizowany jest corocznie przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i redakcję miesięcznika *Delta*, przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
2. W konkursie mogą brać udział uczniowie wszystkich typów szkół.
3. Konkurs składa się z eliminacji i finału.
4. W eliminacjach bierze udział każdy uczeń, który w terminie do dnia 1 maja prześle pod adresem redakcji *Delty* jeden egzemplarz swojej pracy matematycznej. Do pracy należy dołączyć następujące informacje: adres prywatny autora, klasa, nazwa i adres szkoły; imię, nazwisko i adres opiekuna pracy.
5. Praca powinna zawierać samodzielny wkład ucznia i pełną informację o źródłach, z których korzystał jej autor. Prace czysto kompilacyjne nie będą dopuszczone do finału konkursu.
6. Prace nadesłane na eliminacje zostaną ocenione przez Jury Konkursu i kompetentnych recenzentów. Te spośród prac, które spełniają warunki konkursu, zostaną zakwalifikowane przez Jury do finału. Finał odbędzie się w trakcie dorocznej Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego.
7. Zawiadomienia o zakwalifikowaniu do finału zostaną przesłane autorom prac i ich opiekunom przed końcem roku szkolnego.
8. Finaliści i opiekunowie ich prac otrzymają od Zarządu Głównego PTM zaproszenia do udziału w Sesji na koszt Towarzystwa.
9. Finał polega na wygłoszeniu (nie odczytaniu) przez ucznia, podczas specjalnego otwartego posiedzenia sesji, referatu (trwającego nie dłużej niż 15 minut) i wzięciu udziału w dyskusji na temat, któremu poświęcona była praca.
10. Rezultaty finału oceni Jury Konkursu. Jury będzie brało pod uwagę, oprócz merytorycznej wartości pracy, również samodzielność i oryginalność ujęcia tematu oraz przebieg referatu i dyskusji. Jury przyznaje medale: złoty, srebrny i brązowy, wyróżnienia oraz nagrody pieniężne ufundowane przez Ministerstwo Edukacji Narodowej.
11. Ogłoszenie wyników finału następuje w trakcie Walnego Zgromadzenia Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Medale wręcza Prezes Towarzystwa. Wszyscy uczestnicy finału otrzymują dyplomy.
12. Wyniki konkursu i skrót zwycięskiej pracy będą opublikowane w miesięczniku *Delta*.
13. Jury Konkursu jest powoływane przez Zarząd Główny PTM na wniosek Komitetu Redakcyjnego *Delty*.

Rozwiązanie zadania M 656. Udowodnimy nieco więcej. Niech a_j oraz T_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Wtedy

$$\sum_{k,j=1}^{n} a_k a_j \cos(T_k - T_j) = \sum_{k,j=1}^{n} a_k a_j (\cos T_k \cos T_j + \sin T_k \sin T_j) =$$

$$= \sum_{k,j=1}^{n} a_k \cos T_k \cdot a_j \cos T_j + \sum_{k,j=1}^{n} a_k \sin T_k \cdot a_j \sin T_j = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \cos T_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \sin T_k\right)^2 \geq 0\,.$$

Biorąc $a_k = 1$ dla wszystkich k, otrzymujemy tezę zadania.

1/93
(23)

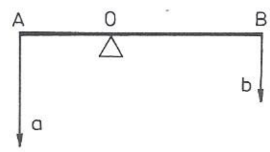
Środek ciężkości w nieskończoności

Niektóre zadania geometryczne można szybko rozwiązać stosując pojęcie środka ciężkości układu punktów. Oto przykład:

Zadanie 1. *Na bokach AB, BC, CA trójkąta ABC obrano punkty C', A', B' różne od wierzchołków. Niech $k_C = AC'/C'B$, $k_A = BA'/A'C$, $k_B = CB'/B'A$. Wykazać, że jeśli $k_A k_B k_C = 1$, to proste AA', BB', CC' przecinają się w jednym punkcie.*

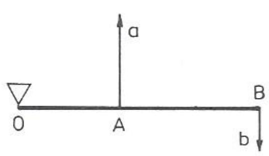
Rozwiązanie. Przywiążmy w wierzchołkach A, B, C trójkąta obciążniki o ciężarach k_B, $k_B k_C$, $k_B k_C k_A = 1$. Oznaczmy przez O środek ciężkości trójkąta ABC. Punkt A' jest środkiem ciężkości punktów B, C, zatem prosta AA' przechodzi przez punkt O. Podobnie proste BB' i CC' przechodzą przez punkt O, więc proste AA', BB', CC' przecinają się w jednym punkcie.

Przypomnijmy, że środek ciężkości O dwóch punktów A, B o ciężarach a, b znajdujemy z zasady dźwigni dwustronnej: $a \cdot OA = b \cdot OB$.

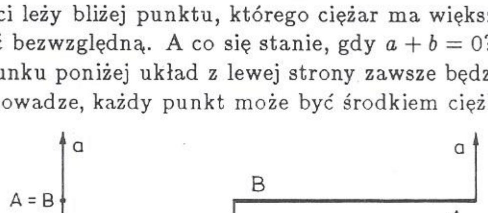


Innymi słowy, punkt O dzieli odcinek (skierowany) AB w stosunku b/a. Słowo „skierowany" jest tu potrzebne, bo kolejność punktów jest istotna: punkt O dzieli odcinek skierowany BA w stosunku a/b.

Przywiązując w punktach płaszczyzny baloniki zamiast ciężarków możemy rozważać również ciężary ujemne. Zasada dźwigni jednostronnej pokazuje, jak



znaleźć środek ciężkości, jeśli punkty mają ciężary o przeciwnych znakach. W tym przypadku punkt O dzieli odcinek skierowany AB w stosunku $b/a < 0$. Jest to zgodne z konwencją, że stosunek podziału odcinka jest ujemny, jeżeli punkt podziału leży na zewnątrz odcinka. Dla celów praktycznych dobrze jest pamiętać, że środek ciężkości leży bliżej punktu, którego ciężar ma większą wartość bezwzględną. A co się stanie, gdy $a + b = 0$? Na rysunku poniżej układ z lewej strony zawsze będzie w równowadze, każdy punkt może być środkiem ciężkości.



Galeria Jednego Cytatu

Podejście Leibniza zostało skutecznie wyeliminowane przez dwóch osobników, z których jeden nazywał się *EPSILON*, a drugi *DELTA*.

(z wykładu o analizie niestandardowej)

W tym przypadku uznajemy, że środek ciężkości jest nieokreślony. Z kolei układ z prawej strony nigdy nie będzie w równowadze, zatem środek ciężkości nie istnieje. Zauważmy jednak, że jeśli $a \neq -b$, $b \neq 0$ i a dąży do $-b$, to środek ciężkości leży na prostej AB i oddala się do nieskończoności. Dlatego przyjmiemy, że w przypadku, gdy $a + b = 0$ i $b \neq 0$, środek ciężkości leży w punkcie w nieskończoności, wyznaczonym przez kierunek prostej AB.

Przypadek, gdy środek ciężkości leży w nieskończoności, również może być pożyteczny. Zilustrujemy to na przykładzie zadania z XXII Olimpiady Matematycznej.

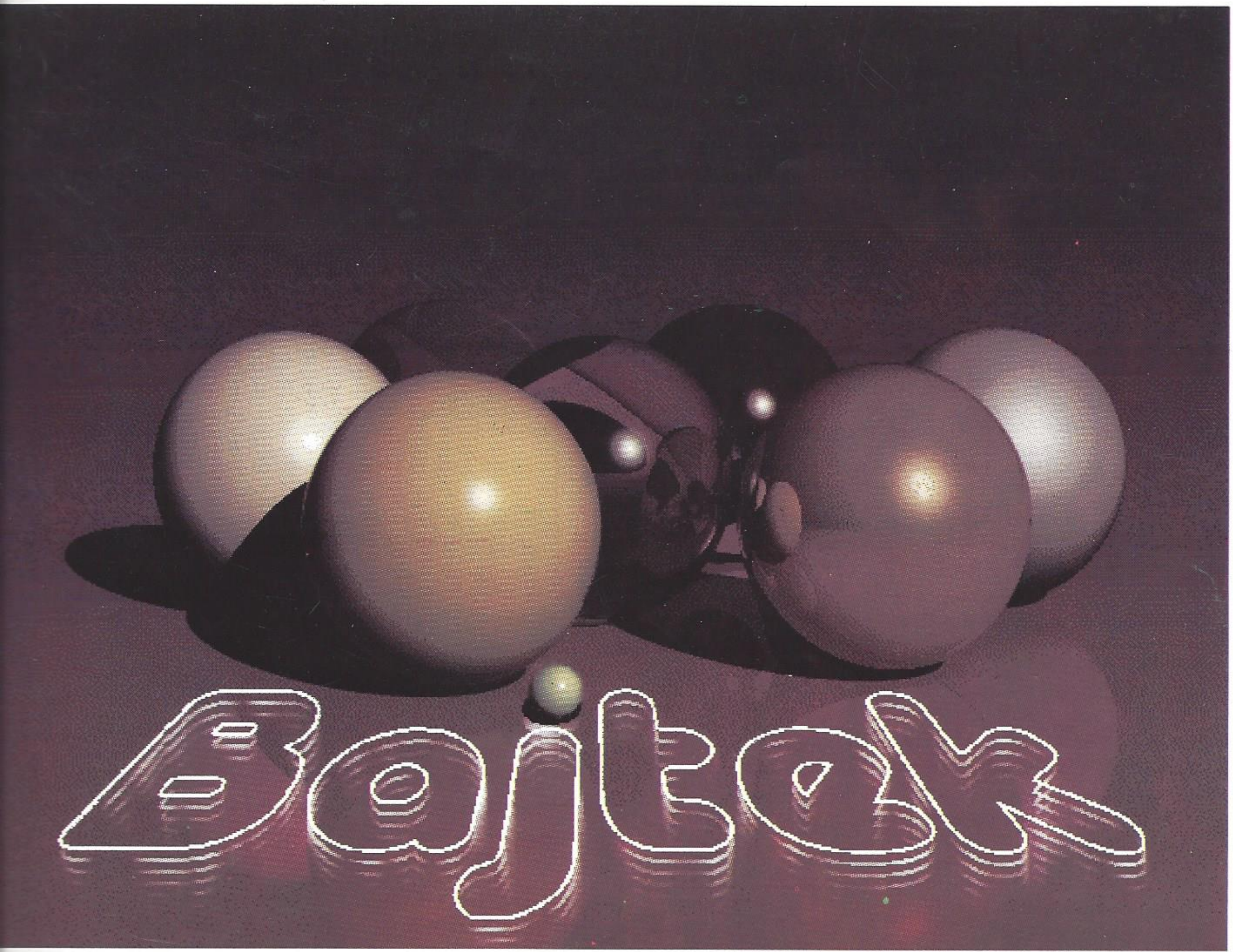
Zadanie 2. *W trójkącie ABC o bokach różnej długości punkt B_A jest obrazem symetrycznym punktu B względem dwusiecznej kąta A. Podobnie definiujemy punkty A_B, A_C, C_A, B_C i C_B. Wykazać, że proste $A_B B_A$, $A_C C_A$ i $B_C C_B$ są równoległe.*

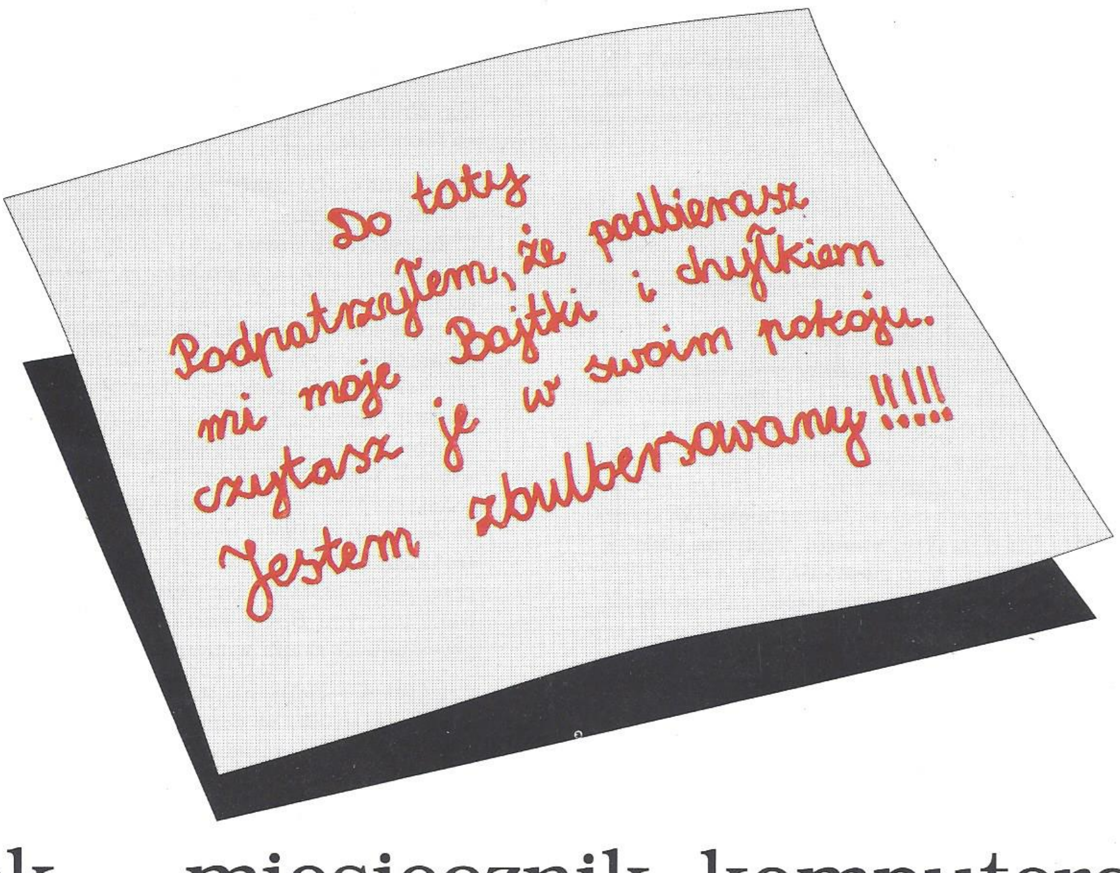
Rozwiązanie. Oznaczmy długości boków trójkąta przez $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. W wierzchołkach A, B, C umieszczamy ciężary $a(b-c)$, $b(c-a)$, $c(a-b)$. Zauważmy, że ciężary punktów są niezerowe, a ich suma wynosi zero. Środek ciężkości trójkąta leży zatem w nieskończoności (środek ciężkości trzech niewspółliniowych punktów o niezerowych ciężarach nie może być nieokreślony). Rozbijmy teraz układ na dwie części U, V: układ U składa się z punktu A o ciężarze $a(b-c)$ oraz punktu C o ciężarze ac, zaś układ V z punktu C o ciężarze $-bc$ oraz punktu B o ciężarze $b(c-a)$. Z definicji punktu B_A wynika, że jest on środkiem ciężkości układu U. Podobnie punkt A_B jest środkiem ciężkości układu V. Zatem prosta $A_B B_A$ musi przechodzić przez środek ciężkości trójkąta. Podobnie jest z prostymi $B_C C_B$ oraz $C_A A_C$. Nasze trzy proste przecinają się zatem w nieskończoności, są więc równoległe.

Czy jednak rozwiązania wykorzystujące środek ciężkości w nieskończoności są poprawne? Okazuje się, że można tę metodę łatwo uzasadnić za pomocą geometrii rzutowej – ale o tym kiedy indziej.

Piotr KOBAK

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski.
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ε.





ajtek - miesięcznik komputerowy.
Dla wszystkich.