

## UWAGA !!!

w prenumeracie *Delta* tańsza

## SPIS TREŚCI

### NUMERU 11(222)

Wirusy <i>Andrzej Kadlof</i>	str. 1
Analogie <i>Jan Kalinowski</i>	str. 1
Tycho Brahe (1546 – 1601)	str. 2
Patrz w niebo	str. 3
Drobiazgi	str. 4
Promieniotwórczość naturalna <i>Ryszard Wojtkiewicz</i>	str. 5
Mała Delta	str. 8
Wędrowki <i>Małgorzata Mikołajczyk, Krzysztof Omiljanowski</i>	str.10
Zadania	str.15
Klub 44	str.16
Epsilon	str.17

### W następnym numerze:

#### Odkrycie Ameryki

Pan Zbigniew Banaszak  
Słupia Wielka 6/22  
63-022 Słupia Wielka  
poszukuje  
archiwalnych numerów *Delty*:  
8 z 1976r., 2 z 1978r., 2 – 6 z 1979r.  
Oferuje na zamianę:  
8, 10 – 12 z 1974r., 7 z 1977r.,  
1,3 z 1986r. i 9 z 1988r.

Okładkę zaprojektowała  
*Monika WALCZYK*

„Delta”  
matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego, Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
Towarzystwa Astronomicznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Edukacji Narodowej

#### Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula  
Bogdan Cichocki  
Roman Duda  
Jan A. Gaj  
Tomasz Hofmokl – wiceprzewodniczący  
Tadeusz Jarzębowski  
Małgorzata Kubiak  
Andrzej Makowski  
Andrzej Pelczar  
Zbigniew Płochocki  
Zdzisław Pogoda  
Konrad Rudnicki  
Zbigniew Semadeni  
Grzegorz Sitarski  
Józef I. Smak  
Kazimierz Stępień  
Mieczysław Subotowicz  
Andrzej Szymacha  
Andrzej Woszczyk  
Wojciech Żakowski – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:  
Krzysztof Biesaga  
Piotr Hajłasz  
Jan Kalinowski – z-ca red. naczk.  
Krystyna Kordos – sekr. red.  
Marek Kordos – red. naczk.  
Tomasz Kwast  
Stanisław Mrówczyński  
Anna Rudnik  
Joanna Udalska

#### Adres Redakcji:

ul. Smyczkowa 5/7  
02-678 Warszawa  
tel. 43-02-43 wewn. 21

#### Adres poczty komputerowej (E-mail address):

DELTA@PLEARN.BITNET

#### Wydawca:

Uniwersytet Warszawski  
Krakowskie Przedmieście 26/28  
00-927 Warszawa

Nakład 8 000 egz.  
Wydrukowano  
w Zakładach Graficznych  
w Warszawie, ul. Srebrna 16

Skład systemem  $\text{\TeX}$   
wykonała redakcja.

#### WARUNKI PRENUMERATY

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na II kwartał 1993 r. wynosi 18 000,- zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumeratę.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
  - na teren kraju
    - jednostki kolportażowe „Ruch” właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób,
    - urzędy pocztowe na terenie wiejskim i w miejscowościach, w których nie ma jednostek kolportażowych „Ruch” – poczta zapewnia dostawę zamówionych egzemplarzy pocztą zwykłą pod wskazanym adresem w ramach opłaconej prenumeraty,
  - na zagranicę
    - Zakład Kolportażu Prasy i Wydawnictw, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – dostawa odbywa się pocztą swykiem w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia dostawy pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni pokrywa prenumeratę.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
  - na kraj i zagranicę – do 20 XI na I kwartał roku następnego  
do 20 II na II kwartał  
do 20 V na III kwartał  
do 20 VIII na IV kwartał.

Cena 1 egzemplarsza 8 000,- zł

# Analogie

Jan KALINOWSKI

Szukanie analogii między różnymi zjawiskami może być bardzo użyteczne. Hasło „te same równania mają te same rozwiązania” pozwala tanim kosztem rozwiązywać nowe zagadnienia, o ile znamy już rozwiązania ich analogonów. Często analogie nie są ścisłe i wówczas warto dobrze zdać sobie sprawę, które aspekty zjawiska są, a które nie są analogiczne. Analogie pozwalają też wyobrazić sobie, o co chodzi w danym przypadku przez porównanie do czegoś, co już dobrze znamy i rozumiemy.

Rozpatrzmy bardzo prosty przypadek jednowymiarowego ruchu prostoliniowego ciała o masie  $m$  w polu potencjalnym. Energia tego ciała jest stałą ruchu i możemy napisać

$$(1) \quad E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x),$$

gdzie  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  jest prędkością, a  $V(x)$  – energią potencjalną. Podczas dyskusji tego przypadku wykładowcy i nauczyciele zwracają często uwagę na analogię między tym ruchem a ruchem koralika poruszającego się bez tarcia po drucie wygiętym w kształcie wykresu funkcji  $y(x) \sim V(x)$ , w jednorodnym polu grawitacyjnym. Pamiętam, jak na wykładzie z fizyki na pierwszym roku studiów wykładowca przy omawianiu ruchu ciała w potencjale kulombowskim  $V(r) = \frac{\alpha}{r}$  (a więc ruchu w trzech wymiarach), demonstrował ruch kulki toczącej się po lejkowatej powierzchni, której wysokość zmieniała się jak  $\frac{1}{r}$ .

Czy analogia między ruchem opisanym równaniem (1) a koralikiem na drucie jest pełna? Koralik porusza się w płaszczyźnie  $xy$ , więc odpowiadające równanie dla koralika ma postać

$$(2) \quad E = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy(x).$$

Wybierając kształt drutu w postaci

$$y(x) = \frac{V(x)}{mg}$$

otrzymujemy

$$(3) \quad E = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + V(x).$$

Ale  $\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$ , możemy więc napisać

$$(4) \quad E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \left( 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right) + V(x).$$

Oczywiście, równania (1) i (4) są różne, więc i ich rozwiązania też są różne. Warto sobie zdawać z tego sprawę! Na przykład, jeśli  $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ , to zgodnie z równaniem (1) ciało będzie wykonywało drgania harmoniczne, natomiast koralik nanizany na drut wygięty w parabolę – nie! Są jednak pewne aspekty obu ruchów, dla których zachodzi analogia ścisła. Równania (1) i (3) różnią się członem  $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$  i tam, gdzie prędkość pionowa koralika wynosi zero, tam można mówić o analogii. Zachodzi to w dwóch przypadkach: w punktach powrotu (bo tam prędkość chwilowa ciała znika) i w punktach równowagi, gdzie styczna do drutu jest pozioma. A więc dla obu zagadnień punkty powrotu wypadają w tych samych miejscach i prędkości chwilowe w punktach równowagi są takie same.

# Wirusy

Andrzej KADLOF

Wszyscy pamiętamy falę paniki, jaka przeleżała się przez świat na wieść o mającym nastąpić 6 marca 1992 r. ataku wirusa *Michał Anioł*. Do końca świata nie doszło, ale gdyby nie popierana przez środki masowego przekazu kampania ostrzegawcza, straty byłyby wielokrotnie większe od faktycznie zanotowanych.

Co to takiego jest ten wirus komputerowy, że potrafi siać przerażenie na całym globie i paraliżować działalność setek tysięcy instytucji i przedsiębiorstw? Już sama nazwa budzi nieprzyjemne skojarzenia, a została wybrana wyjątkowo trafnie. Analogie między wirusami biologicznymi i komputerowymi są wręcz uderzające.

Wirus komputerowy jest to niewielki program, którego głównym celem jest przeżycie w środowisku komputerów. Natura już dawno odkryła, że najskuteczniejszą metodą przetrwania gatunku jest intensywne rozmnażanie się. To, co wyróżnia wirusy komputerowe wśród innych programów, to właśnie zdolność do rozmnażania się. Polega to na tym, że wirusy potrafią kopiować swój kod i chować kolejne swoje kopie w różnych zakamarkach systemu. Robią to tak szybko, że przeciętny użytkownik nie zauważa, iż w jego komputerze dzieje się coś, nad czym nie ma kontroli.

Historia wirusów komputerowych liczy sobie zaledwie sześć lat. Do roku 1986 była to raczej ciekawostka teoretyczna, którą zajmowali się nieliczni badacze. Były to czasy, kiedy maszyny były wielkie, odizolowane od siebie, a programiści byli adeptami sztuki tajemnej, niepojętej dla zwykłego człowieka. Dopiero komputery osobiste stworzyły wirusom odpowiednie środowisko naturalne. Jest ich bardzo dużo, często przenosi się między nimi programy i dane; obsługiwane są przez ludzi o niewielkim doświadczeniu i wiedzy o systemie operacyjnym. Szczególnie podatny na wirusowe infekcje okazał się krąg użytkowników komputerów IBM PC. Jest ich najwięcej, stosowany system operacyjny jest dość dobrze znany i, co ważniejsze, nie zawiera praktycznie żadnych mechanizmów obronnych.

Wbrew rozpowszechnionym mitom napisanie wirusa nie jest żadną sztuką. Może to zrobić każdy początkujący programista posługując się dowolnym językiem programowania. Wszystkie niezbędne informacje znajdują się w dokumentacji języka programowania.

Najczęściej wirusy pisane są w języku maszynowym. Pozwala to im zachować niewielkie rozmiary. Język maszynowy, jako najmniej wygodny do stosowania, jest najmniej znany i może to właśnie sprawia wrażenie, że pisanie wirusów wymaga specjalnego talentu.

Ogólnosiwiatowe statystyki mówią, że powstało już ponad 1300 wirusów. Na terenie Polski schwymano dotychczas około 130, z czego prawdopodobnie 45 zostało napisanych lub zmodyfikowanych przez naszych programistów. Niepokojące jest to, że od pojawienia się pierwszych okazów krzywa przyrostu nowych wirusów jest ciągle jeszcze wykładnicza. Mniej więcej co pół roku liczba zidentyfikowanych okazów podwaja się. Na szczęście statystyki te uwzględniają wszystkie wirusy, sygnalizowane na całym świecie. Tylko niewielka ich liczba, rzędu kilkudziesięciu, rozprzestrzeniła się na cały świat. Spora liczba wirusów znana jest tylko kolekcjonerom i prawdopodobnie nigdy nie była wypuszczona na wolność lub zasięg infekcji był bardzo ograniczony.

Żeby zrozumieć, jakim sposobem mały programik napisany przez początkującego programistę może dostać się do setek tysięcy komputerów rozsianych po całym świecie, trzeba poznać strukturę wirusa komputerowego. Generalnie wirusy dzielą się na dwie grupy: wirusy plikowe i wirusy dyskowe. Nie jest to kompletna klasyfikacja, ale dla uproszczenia pominiemy inne rodzaje.

Wirusy plikowe atakują jedynie programy. Nie mogą one istnieć samodzielnie. Muszą mieć swojego nosiciela. Rolę takiego nosiciela pełnią inne programy. Autor wirusa przygotowuje jakiś swój program i idzie z nim do znajomego lub jakiegokolwiek dostępnego sobie cudzego komputera i tam uruchamia swojego nosiciela. Jako pierwszy dochodzi do głosu wirus. Zależnie od typu, albo od razu wyszukuje sobie ofiarę, czyli inny program, albo przyczaja się i czeka na nieświadomego użytkownika. W każdym przypadku polega to na tym, że kolejne programy zostają zmodyfikowane przez wirusa. Po takiej modyfikacji zainfekowany program zanim przystąpi do swojego normalnego działania, najpierw szuka w systemie programów, które jeszcze są zdrowe, dopisuje do nich kod wirusa i tak je modyfikuje, by ten kod był wykonywany w chwili uruchamiania programu. Zazwyczaj w krótkim czasie wszystkie programy w danym komputerze stają się nosicielami wirusa. Przy okazji w międzyczasie infekowane są programy na dyskietkach użytkowników, którzy pracowali na danym komputerze. Te z kolei są przenoszone na inne systemy i tam uruchamiane. Tak zazwyczaj rozpoczyna się lokalna epidemia.

W tym miejscu warto zapytać, czy można tak wygiąć drut, aby ruchy  $x(t)$  były rzeczywiście takie same? Eliminując  $\dot{x}$  z równań (1) i (2) otrzymujemy następujący warunek na kształt drutu

$$(5) \quad (E - V(x)) \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + mgy(x) - V(x) = 0.$$

Rozwiązując to równanie różniczkowe dla  $y(x)$  znajdziemy kształt drutu. Zauważmy przy tym, że w równaniu (5) występuje  $E$ , więc dla tego samego potencjału  $V(x)$  kształt drutu będzie zależał od zadanej energii  $E$  ciała. Rozwiązanie nieliniowego równania (5) może okazać się bardzo trudne. Dużo łatwiej jest rozwiązać zagadnienie odwrotne, tzn. mając kształt drutu  $y(x)$  znaleźć odpowiadający mu potencjał  $V(x)$ .

## Tycho Brahe (1546–1601)

Podróżując z Lund lub Malmö do Kopenhagi można wybrać kilka dróg. Jeśli pojedziemy na północ do Hälsingborg, gdzie cieśnina Sund jest najwęższa, to przepłynąwszy na drugą stronę zobaczymy zamek Hamleta – Helsingør. (Podobieństwo nazw ma zapewne zmylić cudzoziemców.)

Na prom do Kopenhagi można również wsiąść w Landskronie, wtedy przepłyniemy w pobliżu niewielkiej wyspy Hveen. Tutaj Tycho Brahe, duński szlachcic ze Skanii, zbudował w 1576 roku największe, a zarazem ostatnie obserwatorium astronomiczne, gdzie obserwacje dokonywano gołym okiem. Na wynalezienie teleskopu przez Galileusza trzeba było jeszcze poczekać ponad 30 lat. Gdy na wyspie powstawał zamek Uraniborg, Galileusz nie rozpoczął jeszcze również swych studiów nad ruchem wahadła, które w wiele lat później doprowadziły Huygensa do skonstruowania zegara wahadłowego, więc Tycho Brahe musiał się posługiwać przy pomiarach nieporęcznym zegarem, którego główne koło było blisko metrowej średnicy.

Swe obserwacje prowadził w Uraniborgu przez 21 lat, aż kolejnemu duńskiemu królowi znudziło się utrzymywać ekscentrycznego astronoma. Tycho Brahe był zaiste człowiekiem dość oryginalnym. Pojedynkował się ze swym rywalem, nie mogąc rozstrzygnąć, który z nich jest lepszym matematykiem. W pojedynku stracił kawałek nosa i do końca życia nosił srebrno-złotą protezę. Ożenił się z wiejską dziewczyną, czym nadweryżył stosunki ze swą szlachecką rodziną.

W badaniach natomiast wykazał wprost benedyktyńską cierpliwość. Sporządził katalog 777 gwiazd, dokonał niebywale dokładnych, jak na owe czasy, pomiarów ruchu planet. Próbował usystematyzować swe obserwacje podając model układu planetarnego będący połączeniem modeli helio- i geocentrycznego. Ziemia, jak u Ptolemeusza, okrążana była przez Słońce, pięć zaś znanych wówczas planet krążyło wokół Słońca.

Opuściwszy Uraniborg podróżował nieco po Niemczech, by osiąść w Pradze jako nadworny astronom i matematyk imperatora Świętego Cesarstwa Rzymskiego Rudolfa II. Tutaj po dwóch latach zmarł, lecz jeszcze przed śmiercią krótko pracował z Johannesem Keplerem. Ten odziedziczył tytuł nadwornego astronoma oraz księgi z wynikami prowadzonych przez Tychona Brahego w ciągu ćwierćwiecza pomiarów ruchu planet.

Gdy w 1609 roku Kepler opublikował *Nową Astronomię* zawierającą pierwsze dwa prawa ruchu planet, opatrzył dzieło podtytułem: „Według obserwacji najszlachetniejszego męża Tychona Brahego”.

Wielki Duńczyk w młodości dokonał jeszcze jednego, bardzo ważnego odkrycia – zaobserwował w 1572 roku to, co byśmy dzisiaj nazwali wybuchem supernowej, lecz to wydarzenie zasługuje na oddzielną opowieść.

Stanisław MRÓWCZYŃSKI

O występowaniu licznych związków Ziemi ze Słońcem nikogo w dzisiejszych czasach przekonywać nie trzeba. Nie chodzi tu, oczywiście, o tak banalny fakt, że Słońce Ziemię oświetla i ogrzewa, i właściwie rządzi życiem na naszej planecie. Przedmiotem systematycznych badań są problemy subtelniejsze, jak np: czy stała słoneczna (ilość energii jaką metr kwadratowy powierzchni Ziemi otrzymuje od Słońca w ciągu sekundy) jest rzeczywiście stała, a jeśli nie, to w jakim tempie się zmienia; jak wiatr słoneczny oddziałuje na ziemską magnetosferę i atmosferę i jakie to ma znaczenie dla ludzi; czy stan aktywności Słońca ma wpływ na pogodę, klimat lub może na stan zdrowia Ziemi i in.

Wpływ Księżyca na Ziemię jest również nieustannie śledzony. Księżyc bowiem z racji swojej bliskości wywiera na Ziemię największe działanie pływowe powodując nie tylko ruchy wód oceanicznych, ale i samej skorupy ziemskiej. Księżyc jest też z tego samego powodu najważniejszą przyczyną precesji Ziemi.

A czy Ziemia wywiera jakiś wpływ na otaczające ją ciała? Słońce najprawdopodobniej bez Ziemi mogłoby się obyć, Księżyc jednak nie – ale to też jest stwierdzenie banalne. Niebanalne jest natomiast znaczenie pływowego oddziaływania Ziemi na Księżyc. W odległej przeszłości spowodowało ono przecież wyhamowanie ruchu obrotowego Księżyca do tego stopnia, że teraz jest on zwrócony ku Ziemi stale jedną stroną.

Próbowano też dociekać, czy inne planety oddziałują w zauważalnym stopniu na to, co dzieje się na Ziemi. Wszelkie statystyki można zestawiać właściwie dowolnie, statystyka jest cierpliwa i może podać współczynnik korelacji wszystkiego ze wszystkim. Tylko że z tego nic nie musi wynikać. Tak, na przykład, doszukiwanie się wpływu konfiguracji planet w chwili narodzin człowieka na jego charakter lub losy to wdzięczne pole do popisu – ale nie dla nauki. Bardzo nieraz poważnie brzmią też rewelacje, że jakoby trzęsienia Ziemi występują chętniej, gdy jakieś planety są akurat w jakiejś konfiguracji na niebie. Nie bardzo wiadomo tylko, dlaczego planety mają tu grać większą rolę niż najbliższy Ziemi Księżyc.

Niewątpliwie różnego rodzaju więzi łączą też inne planety z ich satelitami – trochę wiemy o takim związku Jowisza z Io, jego pierwszym galileuszowym satelitą. Otóż satelita ten jest zwrócony do Jowisza też stale jedną stroną, jak Księżyc ku Ziemi, z tego samego powodu. Wskutek eliptyczności orbity deformacja pływowa Io zmienia się w czasie, co – jak się okazuje – powoduje takie rozgrzewanie się wnętrza satelity, że do dziś jest ono gorące i satelita przejawia bardzo silną działalność wulkaniczną.

Ten aktywny do dziś satelita jest ponadto stale otoczony rojem zjonizowanych atomów – musi zatem na niego działać silne pole magnetyczne pobliskiego Jowisza. Planeta wiruje szybciej, niż Io ją obiega, w rezultacie Jowisz za pośrednictwem swojej magnetosfery i chmury plazmy rozpędza satelitę na jego orbicie. Tempo systematycznego oddalania się satelity od Jowisza, wywołane przez ten mechanizm, ocenia się na kilkaset kilometrów na miliard lat.

Jonizacja górnych warstw atmosfery Io jest nienuklniona, bowiem satelita jest nieustannie bombardowany przez inne cząstki schwyte przez pole magnetyczne Jowisza i rozpędzone jego obrotem. To samo pole magnetyczne porywa ze sobą zjonizowane atomy siarki, tlenu, sodu i in. i rozprasza je wzdłuż orbity Io. Słabe jarzenie się torusa zjonizowanych atomów jest dostrzegalne nawet przy obserwacjach prowadzonych z powierzchni Ziemi.

Niewiele wiemy obecnie o związkach tego typu między innymi parami obiektów. Jednak choćby na tym jednym przykładzie widać, że nawet na wielkich odległościach międzyplanetarnych mogą przejawiać się siły nie tylko grawitacyjne.

*Tomasz KWAST*

Wirusy dyskowe działają na odmienniej zasadzie. Te z kolei infekują jedynie dyskietki i dyski twarde. Nie zmieniają żadnych programów użytkownika i mogą być uznawane za samodzielne programy. Tajemnica ich sukcesów tkwi w systemie operacyjnym komputerów IBM PC. Na każdym dysku i dyskietce, w stałym miejscu, na samym początku jest zawsze zapisany niewielki program. Jego celem jest ładowanie systemu operacyjnego lub informowanie użytkownika, że na danej dyskietce systemu nie ma i że musi użyć innej. Ten programik jest zawsze uruchamiany natychmiast po włączeniu komputera. Dla wirusa jest to wręcz fantastyczna okazja. Wpisuje on swój kod w miejsce takiego programiku, a oryginał przenosi gdzieś indziej. Dzięki temu wirus jest pierwszym programem, jaki jest uruchamiany w zainfekowanym komputerze. Dzięki temu ma on ułatwiony dostęp do wszystkich zasobów i, co więcej, ma czas, by się dobrze schować, zanim użytkownik wprowadzi inne programy, w tym również antywirusowe. W takim komputerze infekowane będą wszystkie dyskietki, jakie się w nim znajdują. Na każdej z nich będzie kopia wirusa przyczajona w oczekiwaniu na moment, gdy w jakimś innym komputerze ktoś zechce z niej załadować system operacyjny.

Wydawać by się mogło, że przy takich mechanizmach rozchodzenia się wirusy mogą co najwyżej powodować lokalne epidemie, w zakresie pojedynczych instytucji lub miast. Tak dobrze jednak nie jest. Jeden z popularniejszych ostatnio wirusów miał wbudowany w siebie licznik generacji. Napisany został w Bułgarii i do Polski dotarł po mniej więcej dwóch miesiącach. Z wewnętrznego licznika wynikało, że po drodze przewinął się przez około 45 komputerów. Najbardziej jednak zdumiewające jest to, że dotarł do nas nie bezpośrednio z Bułgarii, ale przez Tajwan!

Od czasu do czasu poszczególnym wirusom udaje się wtargnąć na dyskietki dystrybucyjne różnych firm. Są wtedy rozsyłane po całym świecie, dopóki dystrybutor nie zorientuje się, w czym nieświadomie uczestniczy. Znanych jest wiele takich przypadków, ale w ogólnej liczbie sprzedawanych czy rozsyłanych dyskietek jest to raczej margines.

Czasem autorzy wirusów usiłują do ich rozpowszechnienia wykorzystywać sieci komputerowe. Obecnie wirusy nie mogą same wędrować po sieciach. Odbywa się to w ten sposób, że do węzła sieci wprowadza się jakiś program, który każdy może

sobie wziąć i wypróbować na swoim komputerze. Jest to jednak droga mało efektywna, bo administratorzy węzłów zazwyczaj sumiennie sprawdzają programy, zanim je dopuszczają do rozpowszechnienia. Ponadto, jeśli nawet któryś umknie uwadze, to natychmiast po wykryciu w tej samej sieci pojawia się informacja o zagrożeniu i zazwyczaj jakiś program niszczy wirusa.

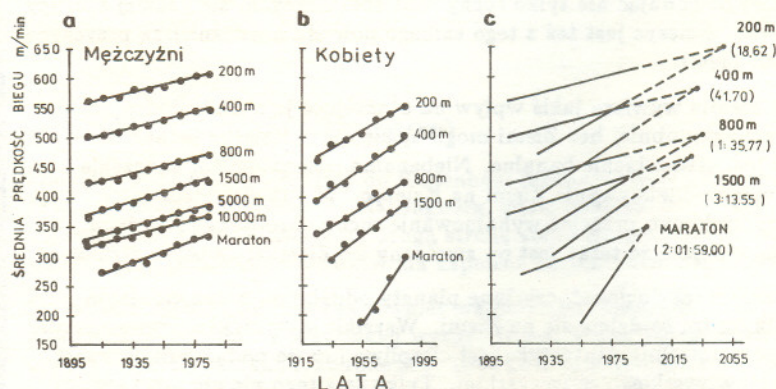
Najdalej posunął się Joseph Popp z Wielkiej Brytanii. Do kilkunastu tysięcy klinik w całej Europie Zachodniej rozesłał program, który miał być bazą danych na temat choroby AIDS. Program był zainfekowany i niedługo potem J. Popp zażądał okupu za udostępnienie odpowiedniej szczepionki. Zamiast okupu władze wypuściły za nim list gończy. Schwymano go dopiero w dwa lata później. Proces sądowy wykazał jednak, że J. Popp jest chory psychicznie i nie może odpowiadać za swój czyn.

Z tego, co dotąd powiedziano, nie jest jeszcze do końca jasne, dlaczego trzeba się bać wirusów komputerowych. Jest po temu, niestety, co najmniej kilka powodów. Po pierwsze, autorzy większości wirusów wykazali się zamiłowaniem do wandalizmu i wyposażyli swoje programy w funkcje destrukcyjne. Niemal każdy wirus, oprócz mnożenia się, ma jeszcze jedno zadanie do spełnienia. Czasem jest to odegranie melodyjki lub wyświetlenie jakiegoś komunikatu na ekranie, o ile zostaną spełnione przewidziane przez autora warunki. Takie wirusy możemy zaliczyć do irytujących. Pozostałe mają na celu mniej lub bardziej złośliwe szkodenie nieznanemu użytkownikowi. Pole do popisu jest tutaj nieograniczone. Wspomniany na wstępie Michał Anioł, raz do roku, 6 marca zamazuje całą informację zawartą na dysku użytkownika. Klasyczny wirus jerozolimski każdego trzynastego, który wypada w piątek, kasuje każdy uruchamiany program. Anti Telephonica po każdym dwustu uruchomieniach zamazuje fragmenty dysku. Dark Avenger zamazuje losowo wybierane obszary dysku. Falszery idzie jeszcze dalej. Od czasu do czasu zmienia jeden losowo wybrany bajt na dysku. W efekcie po dłuższym czasie system zaczyna szwankować, dane stają się zafałszowane i niewiarygodne. Wyniki pracy komputera zainfekowanego przez tego wirusa są bezwartościowe.

Po drugie, wirusy rozprzestrzeniają się bez wiedzy i zgody posiadaczy komputerów. Piractwo komputerowe, co prawda, ułatwia wirusom przenoszenie się z systemu na system, ale nie jest to jedyna droga.

Pulsary są wspaniałymi zegarami. Na przykład okres pulsara PSR 1257 wynosi 0,00621853193177 s z dokładnością  $\pm 1$  na ostatnim miejscu. Tak wysoka dokładność pozwala na odkrycie planet okrążających pulsary.

Czy kobiety prześcigną mężczyzn? Na wykresach przedstawione są prędkości osiągane w czasie zawodów lekkoatletycznych kobiet i mężczyzn w XX w.



Jak widać, wzrost średnich prędkości można dobrze opisać funkcjami liniowymi czasu. Uderzające jest to, że nachylenia wykreślonych prostych nie zależą istotnie od dystansu, natomiast nachylenia dla kobiet są wyraźnie większe niż dla mężczyzn. Jeżeli się zabawić i ekstrapolować proste w przyszłość, to już wkrótce rekordy kobiet powinny być lepsze niż mężczyzn.

Najnowsze obliczenia wskazują, że emisja tlenków azotu przez wysoko latające samoloty jest 30 razy bardziej szkodliwa dla klimatu ziemskiego niż emisja na powierzchni Ziemi.

Ciśnienie atmosferyczne na powierzchni Marsa wynosi pół procenta tego, co na powierzchni Ziemi, niemniej jednak atmosfera Marsa stale bierze czynny udział w zjawiskach na powierzchni planety. Sezonowe przenoszenie wielkich mas piasku było kiedyś nawet interpretowane jako rozwój i zamieranie szaty roślinnej; wiadomo, że atmosfera przenosi budulec czap polarnych z jednej półkuli na drugą; eroduje powierzchnię planety. Kamery Vikingów zarejestrowały również liczne dość regularne linie ciągnące się „jak strzelił” bez względu na przeszkody terenowe. Przypuszcza się, że są to ślady po przejściu cyklonów. Niektóre z tych śladów przekraczają 100 km długości.

Przewiduje się, że w ciągu najbliższych 15 lat zatrudnienie w amerykańskich fabrykach broni atomowej spadnie o połowę (z 30 000 do 14 500). Natomiast liczba osób zatrudnionych przez Departament Energii USA do usuwania odpadów promieniotwórczych wzrośnie z 10 000 do 30 000 do roku 1998.

# Promieniotwórczość naturalna

Ryszard WOJTKIEWICZ

## Wprowadzenie

Otoczający nas świat składa się z atomów, których właściwości chemiczne i fizyczne zależą od składu centralnej części atomu, zwanej jądrem atomowym. O przynależności atomu do określonego pierwiastka decyduje liczba protonów w jądrze –  $Z$ , zwana liczbą atomową. Łączna liczba protonów –  $Z$  i neutronów –  $N$  określa masę jądra i nazywa się liczbą masową –  $A$ . Zatem  $A = Z + N$ . Rodzaj atomów o zadanych liczbach  $Z$  i  $N$  nazywa się nuklidem. Zwykle nuklid oznacza się za pomocą symbolu chemicznego pierwiastka (co jest jednoznaczne z określeniem jego liczby atomowej) oraz liczby masowej. Na przykład, U-238 oznacza uran,  $Z = 92$ ,  $A = 238$  i  $N = A - Z = 146$ . Nuklidy należące do tego samego pierwiastka, lecz różniące się liczbą neutronów nazywa się izotopami tego samego pierwiastka. Na przykład, U-238 i U-235.

Do podstawowych własności fizycznych nuklidu zalicza się jego trwałość. Trwałość izotopów danego pierwiastka zależy od stosunku liczb  $N$  do  $Z$ . Izotopy nietrwałe podlegają samorzutnym przemianom, które nazywa się rozpadami promieniotwórczymi. Znane są trzy podstawowe rodzaje rozpadów promieniotwórczych klasyfikowane według rodzaju cząstek wysyłanych z jądra podczas jego rozpadu; są to rozpady  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$ . W przypadku pierwszych dwu rozpadów z jądra są emitowane cząstki elektrycznie naładowane, co powoduje, że liczba atomowa zmienia się o 2 (rozpad  $\alpha$ ) lub o 1 (rozpad  $\beta$ ), w trzecim zaś rodzaju rozpadu z jądra wysyłany jest jeden lub kilka fotonów (kwantów) promieniowania elektromagnetycznego.

Według ogólnie przyjętego poglądu jądra atomowe zostały utworzone z „pyłu kosmicznego” protonów w wyniku złożonego procesu wywołanego przez oddziaływania grawitacyjne i przemiany jądrowe. Ocenia się, że miało to miejsce przed około 15 miliardami lat. Powstały wtedy nuklidy trwałe i promieniotwórcze. Te ostatnie uległy rozpadowi promieniotwórczym przekształcając się w nuklidy trwałe. Rozpady nuklidów promieniotwórczych zachodzą z różną szybkością.

Każdy z nuklidów charakteryzuje się określonym dla niego okresem połowicznego zaniku, który jest równy odstępowi czasu potrzebnemu na to, by połowa jąder atomowych z dużego ich zbioru uległa rozpadowi. Dlatego do dnia dzisiejszego na Ziemi przetrwały w dostrzegalnych ilościach tylko te nuklidy promieniotwórcze, których okresy połowicznego zaniku są tego samego rzędu lub dłuższe niż wiek Wszechświata. Takie nuklidy są przedstawione w tabeli.

Nuklidy o względnie długich okresach życia

Nuklid	Czas połowicznego zaniku w latach
K-40	$1,2 \times 10^9$
V-50	$4,0 \times 10^{14}$
Rb-87	$6,2 \times 10^{10}$
In-115	$6,0 \times 10^{14}$
La-138	$1,0 \times 10^{11}$
Ce-142	$5,0 \times 10^{15}$
Nb-144	$3,0 \times 10^{15}$
Sm-147	$1,2 \times 10^{11}$
Lu-176	$5,0 \times 10^{10}$
Re-187	$4,0 \times 10^{12}$
Pt-192	$1,0 \times 10^{15}$
Th-232	$1,4 \times 10^{10}$
U-235	$7,1 \times 10^8$
U-238	$4,5 \times 10^9$

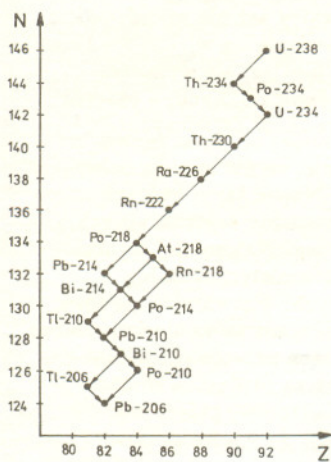
Uczciwi użytkownicy też nie są całkowicie bezpieczni. Pojawienie się wirusa nie tylko wywołuje stresy u ofiar, ale wymusza podejmowanie czasochłonnych, a czasem i kosztownych środków zaradczych.

Praktyka pokazuje, że nie ma wirusów nieszkodliwych. Nawet te, w których kodzie nie ma procedur destrukcyjnych, okazują się złośliwe. Najczęściej wynika to z błędów programistycznych lub skutków ubocznych. Potwierdza się teza, że autorzy wirusów nie są wcale żadnymi geniuszami, a wręcz przeciwnie. Kody wirusów najeżone są błędami. W wielu widać naiwność autorów, którzy nie umieli przewidzieć, że ich programy będą uruchamiane na innym sprzęcie i będą musiały współpracować z innymi programami. Efekty są nieprzewidywalne i wcześniej czy później prowadzą do strat na poszczególnych komputerach.

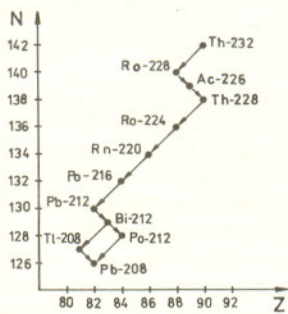
Nie ma potwierdzonych danych świadczących o stratach materialnych spowodowanych przez wirusy. W świecie coraz bardziej zależnym od poprawnej pracy komputerów łatwo można sobie je wyobrazić. Znane są dwa przypadki wtargnięcia wirusów do komputerów szpitalnych. Jeden z tych przypadków miał miejsce w Warszawie i dotyczył komputerów obsługujących aparaturę oddziału intensywnej terapii. Tym razem nie było tragicznych następstw, ale co będzie następnym razem?

Straty powodowane przez wirusy są bardzo trudne do oszacowania. Zależą one w dużej mierze od podejścia samych użytkowników. Odpowiednia profilaktyka i stosowanie programów antywirusowych zmniejszają ryzyko, ale pochłaniają czas i środki, które można by z pożytkiem wykorzystać na inne cele. Bagatelizowanie zjawiska wcześniej czy później doprowadzi do utraty danych, blokady całych systemów i wszystkich wynikających stąd konsekwencji.

W niektórych krajach problem wirusów doczekał się już kwalifikacji prawnych. Ich pisanie, a zwłaszcza świadome rozpowszechnianie jest ścigane przez prawo. Poszkodowani są traktowani jako ofiary przestępstwa i policja prowadzi odpowiednie statystyki oraz poszukuje sprawców. W Polsce jesteśmy w przededniu nowelizacji prawa karnego, które ma również uwzględniać wandalizm komputerowy. Owe przeszło 1300 wirusów w środowisku MS DOS nie zniknie jednak wraz z wprowadzeniem przepisów. Michał Anioł zyskał sobie niezасłużoną sławę. Nie jest on ani najbardziej wyrafinowanym, ani najgroźniejszym wirusem komputerowym. Posłużył jako pretekst do przypomnienia opinii publicznej, że wirusy istnieją, stale powstają nowe i że trzeba nauczyć się z nimi żyć.



Rys. 1. Szereg uranowy.



Rys. 2. Szereg torowy.



**Rozwiązanie zadania F 346.**  
 Niech  $R$  i  $\omega$  oznaczają promień i prędkość kątową Ziemi,  $m$  zaś masę przemieszczającego się powietrza. Z zasady zachowania momentu pędu mamy

$$m\omega R^2 \cos^2 \alpha_1 = m\omega R \cos \alpha_2 + m\omega R^2 \cos^2 \alpha_2,$$

gdzie  $\alpha_1, \alpha_2$  oznaczają szerokości geograficzne ( $\alpha_1 = 52^\circ, \alpha_2 = 53^\circ$ ). Stąd największa wartość składowej zachodniej prędkości wiatru może wynosić

$$v = \frac{\omega R (\cos^2 \alpha_1 - \cos^2 \alpha_2)}{\cos \alpha_2} \approx 13 \text{ m/s}.$$

Należy dodać, że spotykamy w przyrodzie także nuklidy o znacznie krótszym okresie połowicznego zaniku, jak np. izotop węgla C-14 (okres połowicznego zaniku równy 5730 lat). Jego pochodzenie jest jednak inne od opisanego. Tworzony jest on ciągle z zawartego w otoczeniu azotu w wyniku reakcji jądrowych wywoływanych przez promieniowanie kosmiczne.

### Szeregi promieniotwórcze

Wśród wchodzących w skład Ziemi pierwiastków promieniotwórczych o długim okresie połowicznego zaniku występują w znacznych ilościach takie nuklidy, jak: izotop uranu U-238 i izotop toru Th-232.

Produkty ich rozpadu nie są trwałe, lecz tworzą cały ciąg nuklidów powstających w wyniku kolejnych przemian  $\alpha$  i  $\beta$ , kończący się odpowiednimi trwałymi nuklidami ołowiu Pb-206 i Pb-208. Te łańcuchy kolejnych przemian promieniotwórczych tworzą tzw. szeregi promieniotwórcze nuklidów: szereg uranowy – zapoczątkowany przez U-238 i szereg torowy – zapoczątkowany przez Th-232. Schematy rozpadów tworzących te szeregi przedstawione są na rysunkach 1 i 2.

Pierwiastki promieniotwórcze tych szeregów można wykryć w glebie, ścianach budynków, powietrzu (gazowy radon), roślinach i produktach spożywczych, a także w organizmach żywych, a więc i w ciele ludzkim. Wysyłane przez nie promieniowanie  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$  stanowi naturalne promieniowanie, w którym żyjemy, lecz nie odczuwamy go za pomocą zmysłów.

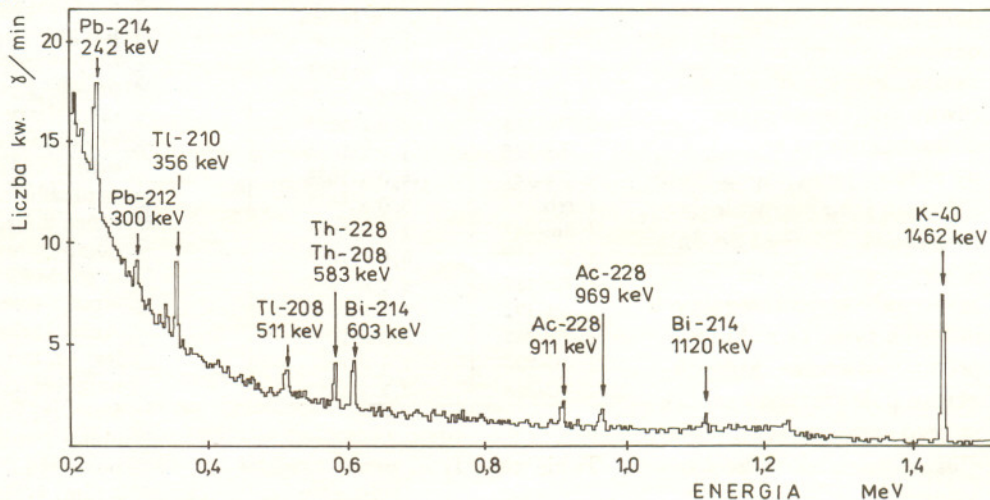
### Promieniowanie $\gamma$ jąder

Występowanie promieniowania  $\gamma$  jest najczęściej następstwem rozpadu  $\alpha$  lub  $\beta$ . Dzieje się tak wtedy, gdy przemiany te prowadzą nie do stanu podstawowego jądra (o najniższej możliwej energii), lecz do stanu wzbudzonego, czyli stanu o energii wyższej niż najmniejsza możliwa energia dla jąder danego nuklidu.

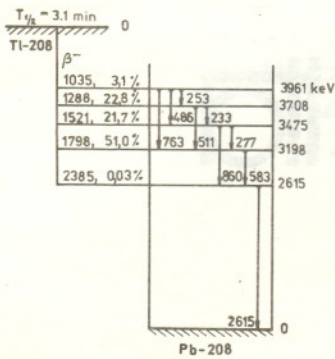
Na rysunku 3 pokazany jest schemat ostatniej przemiany promieniotwórczej w szeregu torowym – jądra izotopu talu Tl-208 w stabilne jądro izotopu ołowiu Pb-208. Jądra Tl-208 emitują cząstki  $\beta$  o różnych energiach przechodząc do różnych stanów wzbudzonych jąder Pb-208. Przejście jądra Pb-208 z tych stanów wzbudzonych do stanów o niższych energiach prowadzi do emisji kwantów  $\gamma$ .

Energia emitowanego kwantu  $\gamma$  jest równa (w dobrym przybliżeniu) różnicy skwantowanych energii poziomów w jądrze, między którymi zachodzi przejście. Energie kwantów  $\gamma$  emitowanych przez jądra danego nuklidu są więc ściśle określone i charakterystyczne dla danego nuklidu.

Jeśli więc potrafimy zmierzyć energie oraz intensywność promieniowania  $\gamma$  emitowanego przez badaną próbkę, możemy zidentyfikować pierwiastki



Rys. 4. Widmo promieniowania  $\gamma$  pochodzącego od ścian budynku.



Rys. 3. Schemat przemiany jądra Tl-208 w jądro Pb-208. Jądra Tl-208 ulegają rozpadowi  $\beta$  prowadząc do różnych stanów wzbudzonych jąder Pb-208, które przechodzą do stanu podstawowego emitując kwanty  $\gamma$  o różnych energiach. Pionowe odcinki ze strzałkami obrazują różne możliwości przejść  $\gamma$ . Wszystkie wartości energii podane są w keV.



### Rozwiązanie zadania F 345.

Przy założeniu małej prędkości  $v_0$  nurtu i małej szerokości kanału rozkład prędkości wody w zależności od odległości  $r$  od środka kanału jest taki sam jak w przepływie laminarnym

$$v = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Odległość, na którą zostanie zniesiony pajak, wynosi

$$l = \int v dt = \int_{-R}^R \frac{v}{u} dr,$$

gdzie

$$u = \frac{dr}{dt}.$$

Ostatecznie

$$l = \frac{2 v_0 R}{3 u}.$$

promieniotwórcze wchodzące w jej skład. Do tego celu służy zestaw aparatury elektronicznej zwany spektrometrem promieniowania  $\gamma$ . Posługując się nim można zarejestrować widmo promieniowania  $\gamma$ , czyli zależność natężenia promieniowania od jego energii. Przykłady takich widm omówione są niżej.

### Naturalna promieniotwórczość $\gamma$

Na rysunku 4 przedstawione jest widmo promieniowania  $\gamma$  pochodzącego od ścian pomieszczenia laboratoryjnego; podobnie wygląda widmo zarejestrowane w pomieszczeniach mieszkalnych współczesnego budownictwa.

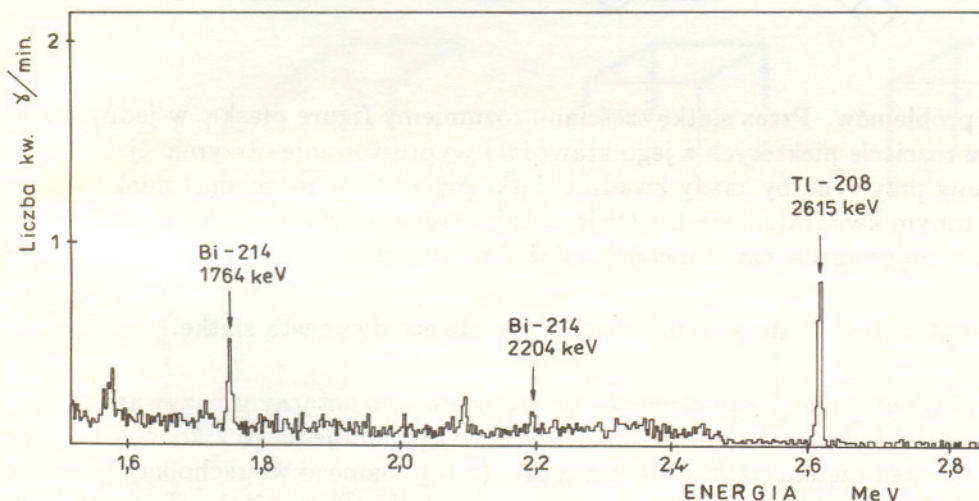
Współrzędne energetyczne widocznych na wykresie maksimów odpowiadają energiom kwantów  $\gamma$ , natomiast pola powierzchni pod krzywymi – w kształcie ostrych pików (zwanymi dalej liniami) – wyznaczającymi te maksima świadczą o natężeniu promieniowania  $\gamma$  o danej energii.

Na rysunku 4 na szczególną uwagę zasługuje linia o energii 1461 keV pochodząca z rozpadu izotopu potasu K-40, ze względu na to, iż jest ona dogodnym punktem odniesienia dla innych linii w różnych widmach promieniowania  $\gamma$ . Jak łatwo zauważyć, odpowiada ona promieniowaniu o największym natężeniu, co oznacza, że w naturalnym środowisku największą dawkę promieniowania (nie uwzględniając promieniowania kosmicznego) otrzymujemy właśnie od promieniowania  $\gamma$  potasu K-40, którego w naturalnym składzie izotopowym jest 0,012%. Dzieje się tak dlatego, iż występowanie potasu w naszym otoczeniu jest dość powszechne, występuje on przecież również w organizmach żywych, a więc i w ludzkim ciele.

Ten fakt sprawia, że nawet po wyeliminowaniu (np. z pomieszczenia) pierwiastków naturalnie promieniotwórczych i tak pozostanie główny z emiterów promieniowania  $\gamma$  w naszym ciele. Jednakże widmo zarejestrowane w oddaleniu od ścian budynków, chociaż wygląda tak samo od strony jakościowej, wykazuje znaczne zmniejszenie się wszystkich linii widocznych w widmie z rysunku 4, co oznacza, że główna część dosięgającego nas promieniowania pochodzi od ścian budynków.

W omawianym widmie widać też linie od grupy nuklidów z szeregu uranowego: Bi-214 (bismut), Pb-214, Tl-210 oraz linie pochodzące od grupy nuklidów z szeregu torowego: Th-228, Ac-228 (aktyn), Pb-212, Tl-208.

Opisane widmo pokazuje skład naturalnego promieniowania  $\gamma$ , które oddziałuje na nasz organizm stale. Zdarza się jednak, że oprócz naturalnego promieniowania występuje w naszym środowisku inne – pochodzące od skażenia promieniotwórczego spowodowanego działalnością ludzką. Z taką sytuacją mieliśmy do czynienia sześć lat temu podczas awarii elektrowni jądrowej w Czernobylu i mamy nadal, o czym będzie mowa w następnym artykule.



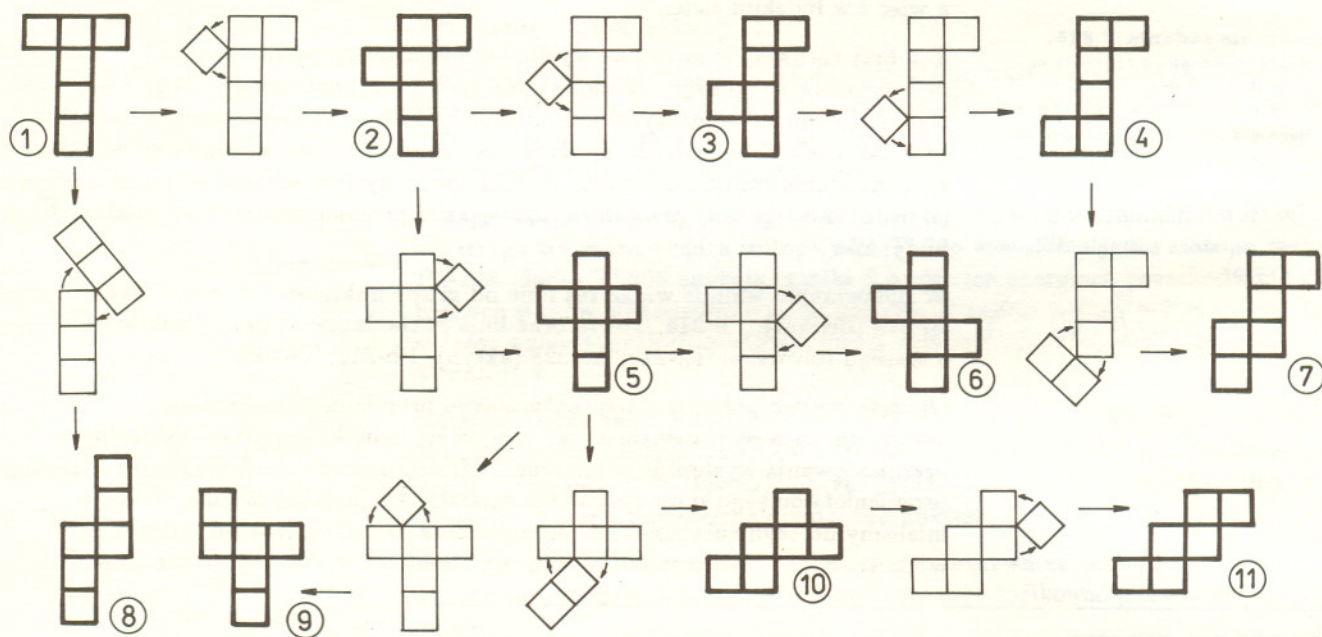




# mata delta

## Jedenaście siatek sześciianu

Na rysunku przedstawionych jest jedenaście siatek sześciianu oraz sposób, w jaki można otrzymać je wszystkie z siatki oznaczonej ①.

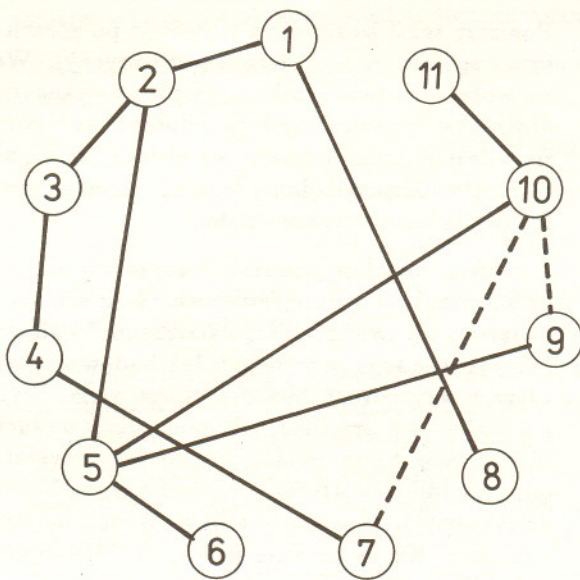


W związku z tym otwiera się kilka problemów. Przez siatkę sześciianu rozumiemy figurę płaską, w jednym kawałku, powstałą z sześciianu przez rozcięcie niektórych z jego krawędzi i wyprostowanie otrzymanej powierzchni na płaszczyźnie – żądamy przy tym, by każdy kwadrat siatki (była ściana sześciianu) miał wspólny bok z co najmniej jednym innym kwadratem siatki. Dwie siatki sześciianu uważamy za jednakowe, gdy można jedną z nich (przez obrót, przesunięcie czy symetrię) nałożyć na drugą.

**Problem 1.** Czy sześciian ma tylko 11 siatek? Należy to udowodnić lub znaleźć dwunastą siatkę.

Wszystkie siatki uzyskaliśmy z siatki ① stosując *ruchy elementarne*. Ruchem elementarnym nazywamy przecięcie siatki wzdłuż jednej z krawędzi i obrócenie jednej z części siatki względem jednego z końców tej krawędzi tak, by sklepiła się ona z drugą częścią siatki inną krawędzią (z tego samego wierzchołka). Łatwo zauważyć, że jeśli siatkę  $(n)$  można uzyskać przez ruch elementarny z siatki  $(k)$ , to siatkę  $(k)$  można uzyskać przez ruch elementarny z siatki  $(n)$ . Pozwala to mówić o siatkach *sąsiednich*, to znaczy takich, że jedną z nich można otrzymać z drugiej przez jeden ruch elementarny.

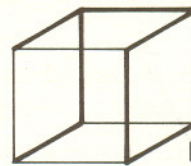
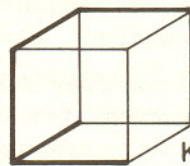
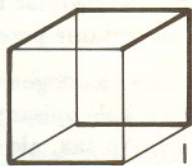
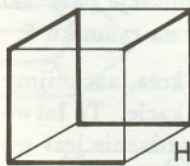
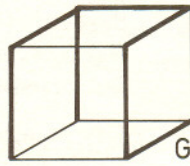
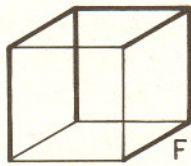
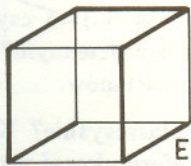
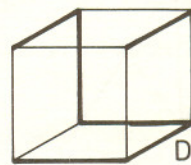
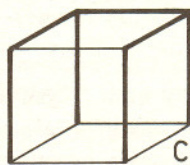
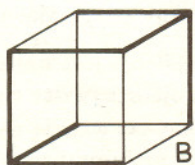
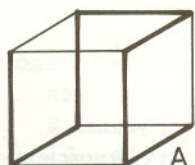
**Problem 2.** Na diagramie zaznaczone są ciągłymi liniami wskazane poprzednio sąsiedztwa siatek. Można wykazać, że nie są to wszystkie sąsiedztwa – są jeszcze i te, które zostały zaznaczone liniami przerywanymi. Znaleźć wszystkie możliwe sąsiedztwa siatek.



Każda z narysowanych siatek ma 5 nie rozciętych krawędzi. Oznacza to, że rozcięto 7 krawędzi.

**Problem 3.** Czy każda siatka musi mieć akurat 5 nie rozciętych krawędzi?

Rozcięte krawędzie tworzą na sześcianie siedmioodcinkowe *drzewko*. Drzewko to układ odcinków w jednym kawałku – taki, że dwa odcinki mogą mieć wspólny co najwyżej koniec. Rysunek przedstawia 11 takich drzewek utworzonych z krawędzi sześcianu. Ponieważ drzewko dociera do każdego wierzchołka i nie tworzy żadnej łamanej zamkniętej, więc po ich rozcięciu otrzymamy siatki.

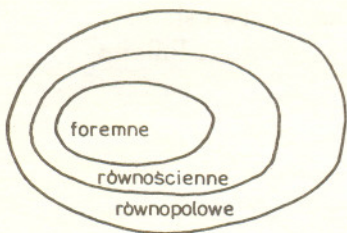


**Problem 4 – quiz.** Zidentyfikować, które drzewko odpowiada której siatce. Rozwiązanie w numerze.

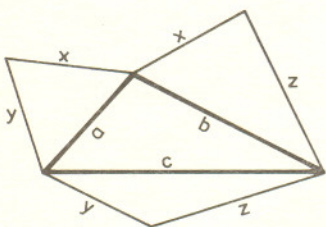
Małą Deltę przygotował Marek KORDOS

# Wędrowki

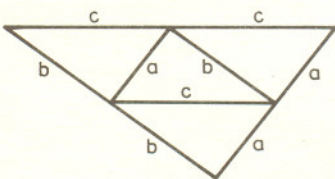
Małgorzata MIKOŁAJCZYK,  
Krzysztof OMILJANOWSKI



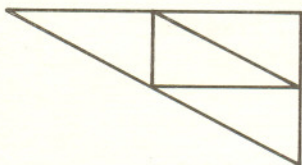
Rys. 1



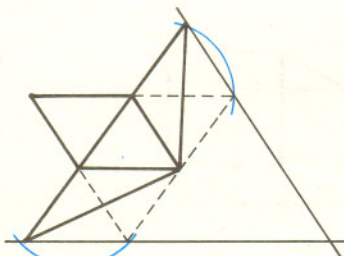
Rys. 2.  $a \leq b \leq c$ ,  $a \neq c$ .



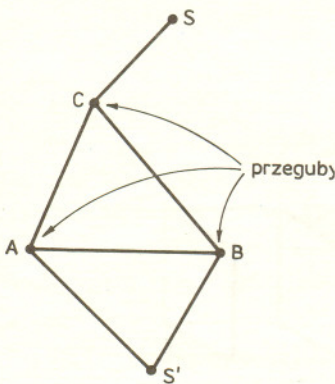
Rys. 3



Rys. 3a. Ten „czworościan” skleja się na płasko.



Rys. 4



Rys. 5. Punkty  $A, B, C$  tworzą trójkąt. Pozostałe odcinki poruszają się w przegubach. Kiedy uda się połączyć punkty  $S$  i  $S'$ ?

Poniższy tekst to relacja z wędrowki po górach (świecie trójwymiarowym) typowego człowieka z równin (płaszczyzny). Wciąż zdziwiony rozgląda się wokół; to bywa zaskoczony nie spotykanym dotąd widokiem, to znów dostrzega swojskie krajobrazy, dobrze mu z równin znane. Nie wszędzie potrafi się wdrapać, czasem zawraca z obranej drogi, ale nie tyle zdobyte szczyty, co możliwość podglądania tego nie znanego mu świata i trud wspinaczki sprawiają mu prawdziwą radość.

A mówiąc zupełnie poważnie – zajmiemy się poszukiwaniem analogii między geometrią dwu- i trójwymiarową. Twierdzenia geometrii „płaskiej” przekładac będziemy na twierdzenia „przestrzenne” i zbadamy, czy są prawdziwe. Tylko jak dokonać tego przekładu? Jak budować analogie między światem dwóch i trzech wymiarów? Możliwości jest wiele. Wybierzemy te, które są najbardziej naturalne. Na przykład, gdy pomyślimy o rzucie przestrzeni na ustaloną płaszczyznę, to na ustalony punkt jest przekształcana prosta, podobnie odpowiednikiem prostej jest płaszczyzna. No tak, ale w ten sposób dla koła otrzymamy w przestrzeni taki nieskończony walec, który trudno uznać za dobry analogon. Każdy przecież powie, że trójwymiarowym odpowiednikiem koła jest kula. W sposób równie oczywisty sześcian uznany zostanie za odpowiednik kwadratu, objętość za odpowiednik pola, trójkątowi zaś zapewne przypisany zostanie czworościan.

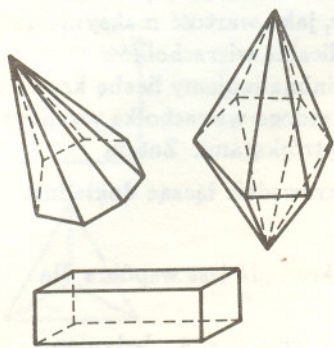
Czy zawsze jest tak łatwo? Co, na przykład, jest analogonem trójkąta równobocznego? Wszak trójkąt równoboczny można definiować przez równość długości boków lub ich przystawanie, lub można powiedzieć po prostu, że każde dwa jego wierzchołki są w jednakowej odległości. Zatem, czy odpowiednikiem trójkąta równobocznego jest:

- czworościan foremny* – krawędzie jednakowej długości;
- a może
- czworościan równopolowy* – ściany o tym samym polu;
- lub też
- czworościan równościenny* – ściany przystające?

Zamiast dyskutować, które określenie jest najlepsze – zbadajmy zależności między nimi. Rysunek 1 pokazuje oczywiste zawierania zbiorów tych czworościanów, ale czy wszystkie zawierania są właściwe? Rysunek 2 przedstawia poszukiwaną siatkę nieforemnego czworościanu równościennego. Drobną dyskusja daje  $x = c$ ,  $y = b$ ,  $z = a$ , a twierdzenie Talesa pozwala poprawić rysunek (rys. 3). Ale czy z tego zawsze da się skleić czworościan? Spróbuj! (Uwaga: czasem to bywa kłopotliwe – rys. 3a). A czy potrafisz wskazać czworościan równopolowy nie będący równościennym? Na rysunku 4 jest przedstawiona siatka jednego z takich czworościanów.

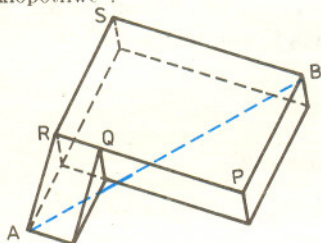
Czy pamiętasz zadanie o trzech patyczkach na płaszczyźnie? Kiedy można z nich ułożyć trójkąt? Spróbujmy analogicznie sformułować problem sześciu patyczków: kiedy można z nich zbudować szkielet czworościanu? To jest chyba dość kłopotliwe, bo trzeba uwzględnić różne permutacje patyczków. Wystarczająco ciekawe wydaje się pytanie przedstawione na rysunku 5.

Skoro potrafimy podać przestrzenny analogon trójkąta i koła, zacznijmy „tłumaczenie” twierdzeń od tego o kole opisanym na trójkącie. To łatwe: „Na każdym czworościanie...” itd. No tak, ale czy to twierdzenie jest prawdziwe? Tak, to nietrudne; przypomnijmy sobie dowód tego twierdzenia dla trójkąta. Kluczem było tam pojęcie symetralnej pary punktów  $A, B$  – zbioru punktów, których odległości od  $A$  i  $B$  są równe. Takie samo określenie symetralnej w przestrzeni daje płaszczyznę prostopadłą do odcinka  $AB$ , przechodzącą przez jego środek. Wystarczy tylko wiedzieć, że trzy parami nierównoległe

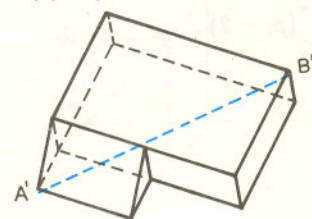


Rys. 6  $n = 8$

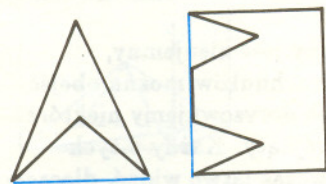
Jeśli rozważamy nie tylko wielościany wypukłe, to mogą pojawić się sytuacje „kłopotliwe”.



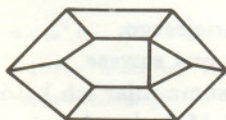
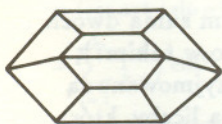
- Czy  $Q$  jest wierzchołkiem?
- Czy  $PR$  jest krawędzią?
- Czy  $PQRST$  jest ścianą pięciokątną czy czworokątną?
- Czy  $AB$  jest przekątną?
- A czy jest przekątną  $A'B'$ ?



Zresztą te same kłopoty znamy już dobrze z płaszczyzny:



Rys. 7



Rys. 8

płaszczyzny mają dokładnie jeden punkt wspólny. To było właściwie nie tylko „tłumaczenie” twierdzenia, ale także jego dowodu. Czy podobnie możemy postąpić z twierdzeniem o kole wpisanym w trójkąt? Czy w każdy czworościan można wpisać kulę? I to dokładnie jedną? Tak. Znowu daje się „przetłumaczyć” dowód z przypadku płaskiego. Dwusieczna będzie teraz półpłaszczyzną połowiącą kąt dwusieczny między dwiema ścianami czworościanu.

Pamiętasz pewnie, że znając promień  $r$  okręgu wpisanego w trójkąt łatwo było znaleźć jego pole:

$$\text{pole} = \frac{1}{2} \cdot \text{obwód} \cdot r.$$

Dla czworościanu i wpisanej wewnątrz kuli mamy analogicznie:

$$\text{objętość} = \frac{1}{3} \cdot \text{pole ścian} \cdot r.$$

Spróbuj przetłumaczyć „płaski” dowód tego faktu. A jak przetłumaczyć wzór Herona? Czy jest prawdziwy?

Skoro była już mowa o symetralnych i dwusiecznych, zajmijmy się środkowymi. Środkowe w trójkącie to odcinki łączące wierzchołki ze środkami (ciężkościami) przeciwległych boków. Przecinają się one w środku ciężkości trójkąta dzieląc się w stosunku 2:1. Czym będą środkowe w czworościanie? To pewnie odcinki łączące wierzchołki czworościanu ze środkami ciężkości przeciwległych ścian. Czy przetną się i tym razem w jednym punkcie? (Jeśli tak, to punkt ten możemy śmiało uznać za środek ciężkości czworościanu.) Czy środkowe będą się dzieliły w jakimś stałym stosunku? 2:1? A może 3:1? Powspinaj się chwilę samotnie i spróbuj znaleźć odpowiedź.

Do tej pory było wspaniale; wszystkie nowe twierdzenia okazywały się prawdziwe. Śmiało więc szukajmy dalej. Spróbujmy obliczyć liczbę przekątnych wielościanu; czy jest to w ogóle możliwe? A może zadanie jest tak proste jak w przypadku wielokąta na płaszczyźnie, gdzie liczba przekątnych  $n$ -kąta to:  $\frac{n(n-3)}{2}$ ? W przestrzeni sprawa się trochę komplikuje. Dla tej samej liczby wierzchołków wielościanu możemy uzyskiwać różne liczby przekątnych. Niech  $P_n$  oznacza liczbę przekątnych wielościanu o  $n$  wierzchołkach. Dla każdej liczby parzystej  $n \geq 6$  możemy otrzymać:

$P_n = 0$  – w ostrosłupie o podstawie  $(n-1)$ -kątej,

$P_n = \frac{(n-2)(n-5)}{2} + 1$  – w wielościanie powstałym przez zlepienie podstawami dwóch ostrosłupów o podstawie  $(n-2)$ -kątej,

$P_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot \left(\frac{1}{2}n - 3\right)$  – w graniastosłupie o podstawie  $\frac{1}{2}n$ -kątej.

Zatem znajomość liczby wierzchołków tym razem nie wystarcza. Co jeszcze musimy wiedzieć o wielościanie, aby jednoznacznie podać liczbę jego przekątnych? Czym w ogóle jest przekątna wielościanu? (Patrz rysunek 7.) Przyjmijmy, że jest ona odcinkiem łączącym wierzchołki, nie będącym krawędzią ani przekątną ściany.

Jeśli wielościan ma  $w$  wierzchołków,  $k$  krawędzi i  $s$  ścian takich, że  $i$ -ta ściana ma  $p_i$  krawędzi, to

$$P_w = \binom{w}{2} - k - \sum_{i=1}^s \frac{p_i(p_i - 3)}{2}.$$

Jest to liczba określona jednoznacznie dla zadanych wartości  $w, k, s, p_1, p_2, \dots, p_s$ . Czy jednak musimy aż tak dokładnie znać wielościan, by policzyć jego przekątne? Przecież  $k$  i  $p_1, p_2, \dots, p_s$  są związane zależnością  $2k = \sum_{i=1}^s p_i$  – każda krawędź jest wspólna dla dokładnie dwóch ścian. Może wystarczy znać np. tylko liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian wielościanu? Odpowiedź na to pytanie jest, niestety, negatywna. Spójrz na rysunek 8 – oba wielościany mają tę samą liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian, a różną liczbę przekątnych.

**Rozwiązanie zadania M 651.**

Warunek podany w zadaniu oznacza (wobec ciągłości  $g$ ), że albo dla wszystkich  $x \in \mathbb{R}$  mamy nierówność  $g(x) > x$ , albo dla wszystkich  $x \in \mathbb{R}$  zachodzi  $g(x) < x$ . W pierwszym przypadku  $g(g(x)) > g(x) > x$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ , w drugim zaś odpowiednio  $g(g(x)) < g(x) < x$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ .

Wzór Eulera dla wielościanów:

$$w - k + s = 2.$$

Wiemy, że

$$k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s p_i$$

i

$$w - k + s = 2.$$

Stąd

$$w - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s p_i + \sum_{i=1}^s 1 = 2$$

$$w - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s (p_i - 2) = 2$$

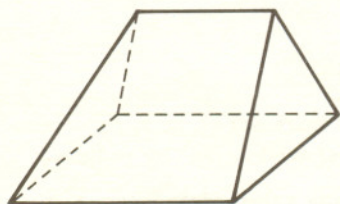
$$w = 2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s (p_i - 2).$$

**Rozwiązanie zadania M 649.**

Oznaczmy długości boków trójkąta przez  $a, b$  i  $c$ , długości zaś wysokości przez  $h(a), h(b)$  i  $h(c)$  (w zależności od tego, na który bok opuszczona jest wysokość). Z warunków zadania mamy  $a \leq h(a)$  oraz  $b \leq h(b)$ . W każdym trójkącie wysokość jest nie dłuższa od sąsiedniego boku, zatem otrzymujemy nierówności

$$a \leq h(a) \leq b \leq h(b) \leq a,$$

skąd  $a = h(b) = b = h(a)$ . Widzimy więc, że boki  $a$  i  $b$  są prostopadłe i mają równe długości, zatem trójkąt ma kąty  $45^\circ, 45^\circ$  i  $90^\circ$ .



Rys. 9. Ten wielościan też nie ma przekątnych (a nie jest ostrosłupem!).

Warto zajrzeć do *epsilon* w *Delcie* 5/1992.

Zauważyliśmy, że jeśli ustalimy liczbę  $w$  wierzchołków wielościanu, to możemy otrzymać różne liczby przekątnych  $P_w$ . Zapytajmy, jaką wartość maksymalną może przyjmować  $P_w$ . Oczywiście, przy ustalonej liczbie wierzchołków maksymalną liczbę przekątnych uzyskamy, gdy zminimalizujemy liczbę krawędzi i przekątnych ścian. Na pewno tak będzie, gdy z każdego wierzchołka wychodzą będą tylko trzy krawędzie, a wszystkie ściany będą trójkątami. Zatem

$k = \frac{3w}{2}$ , bo z każdego wierzchołka wychodzą trzy krawędzie łącząc dokładnie dwa wierzchołki,

$k = \frac{3s}{2}$ , bo wszystkie ściany są trójkątami i każda krawędź jest wspólna dla dokładnie dwóch ścian.

Stąd  $s = w$  i podstawiając do wzoru Eulera otrzymujemy  $w = 4$ . Jedynym wielościanem spełniającym zadane warunki jest więc czworościan.

A co z pozostałymi?

Zauważmy, że żądanie, by wszystkie ściany wielościanu o  $w$  wierzchołkach były trójkątami, już dokładnie wyznacza liczbę przekątnych (specyfikacja kształtów poszczególnych ścian jest do tego warunkiem wystarczającym). Mianowicie, liczba przekątnych  $P_w^*$  takiego wielościanu jest funkcją liczby wierzchołków:

$k = \frac{3s}{2}$ , zatem  $w - \frac{3s}{2} + s = 2$ , stąd  $s = 2(w - 2)$  i

$$P_w^* = \binom{w}{2} - k = \frac{w(w-1)}{2} - 3(w-2).$$

Spróbujmy uzasadnić, że żadne  $P_w$  nie przekroczy liczby  $P_w^*$ . Pytamy zatem, czy:

$$P_w = \binom{w}{2} - k - \sum_{i=1}^s \frac{p_i(p_i-3)}{2} \leq \frac{w(w-1)}{2} - 3(w-2) = P_w^*.$$

Przekształcamy:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^s p_i + \sum_{i=1}^s \frac{p_i(p_i-3)}{2} \geq 3 \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s (p_i - 2),$$

$$\sum_{i=1}^s p_i + \sum_{i=1}^s p_i(p_i-3) - 3 \sum_{i=1}^s (p_i - 2) \geq 0,$$

$$\sum_{i=1}^s (p_i^2 - 5p_i + 6) \geq 0,$$

$$\sum_{i=1}^s (p_i - 2)(p_i - 3) \geq 0.$$

Pamiętając, że  $p_i \geq 3$  widzimy, iż każdy składnik sumy jest nieujemny, co dowodzi żądanej nierówności. („Stromiznę” tych rachunków można obejść mniej więcej tak: mając wielościan o  $w$  wierzchołkach dorysowujemy niektóre przekątne ścian tak, by otrzymać podział ścian na trójkąty. Każdy z tych trójkątów traktujemy teraz jako osobną ścianę. Wówczas łatwo widać, dlaczego  $P_w \leq P_w^*$ .) Zatem znaleźliśmy ograniczenia na liczbę przekątnych wielościanu o  $w$  wierzchołkach:

$$0 \leq P_w \leq \frac{w(w-1)}{2} - 3(w-2) = \binom{w-3}{2}.$$

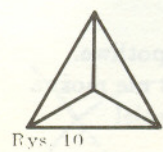
Wartość maksymalna przyjmowana jest w wielościanie będącym sumą dwóch ostrosłupów  $(w-2)$ -kątnych zlepionych podstawami (czy tylko w takim?), a wartość minimalna – w ostrosłupie  $(w-1)$ -kątnym. Czy przyjmowane są wszystkie wartości pomiędzy tymi ekstremalnymi? Czy istnieją liczby, które nigdy nie są wartościami  $P_w$ ? To kolejne szczyty dla Ciebie.

To było jednak dość trudne. Może znajdziemy coś łatwiejszego.

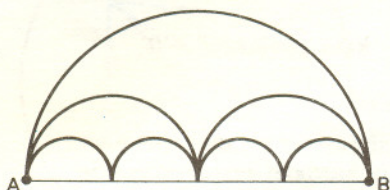
Na przykład twierdzenie o sumie kątów trójkąta – jest ona zawsze równa  $\pi$ . Czy dla czworościanów jest podobnie? Czy suma miar ich kątów dwuściennych jest stała? Niezależna od czworościanu? Może jest jakąś wielokrotnością  $\pi$ ?



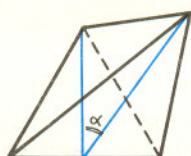
$$a) S = 3 \cdot \frac{\pi}{2} + \pi,$$



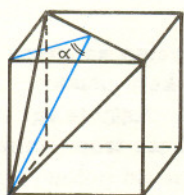
$$b) S = 3 \cdot 0 + 3\pi.$$



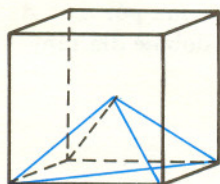
Rys. 11. Łańcuchy półokręgów o stałym promieniu coraz lepiej przybliżają odcinek  $AB = 2$ , choć ich długości są równe  $\pi$ .



Rys. 12.  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ ,  $S = 6 \arccos \frac{1}{3}$ .



Rys. 13.  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  
 $S = 3 \cdot \frac{\pi}{2} + 3 \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$ .



Rys. 14.  $S = \frac{7}{3}\pi$ .

Skorzystamy z pomocy panów de Moivre'a i Newtona:

$$\begin{aligned} \cos 6\alpha + i \sin 6\alpha &= \\ &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)^6 = \\ &= \sum_{j=1}^6 \binom{6}{j} \cos^{6-j} \alpha \cdot i^j \sin^j \alpha. \end{aligned}$$

Porównując części rzeczywiste otrzymujemy:

$$(*) \quad \begin{aligned} \cos 6\alpha &= \cos^6 \alpha - 15 \cos^4 \alpha \sin^2 \alpha + \\ &+ 15 \cos^2 \alpha \sin^4 \alpha - \sin^6 \alpha. \end{aligned}$$

Podobnie wyprowadzamy

$$\sin 3\beta = 3 \cos^2 \beta \cdot \sin \beta - \sin^3 \beta.$$

Chyba nie. Ustalmy podstawę czworoscianu i czwartym wierzchołkiem uciekajmy coraz wyżej po prostej prostopadłej do podstawy, przechodzącej przez jej środek. W granicy otrzymujemy „nieskończone pudełko” – rysunek 10a. Kąty przy podstawie staną się proste, a suma trzech pozostałych wyniesie  $\pi$ . Natomiast, gdy ten czwarty wierzchołek spadnie na podstawę (rys. 10b), to kąty przy podstawie są zerowe, a pozostałe półpełne.

Więc nie udało się! Czyżby twierdzenie było fałszywe? Ale przecież w żadnym przypadku nie mieliśmy do czynienia z *prawdziwym* czworoscianem!

A z przejściem granicznym lepiej uważać. Pamiętaj przykład okręgu, w którym średnica „jest równa” połowie obwodu (rys. 11)? Aby uzyskać absolutną pewność, można zbadać funkcję, która (przy ustalonej podstawie) dla argumentu będącego wysokością czworoscianu podaje jako wartość sumy  $S$  kątów dwuściennych tego czworoscianu. To się pewnie daje zrobić (wszystko jest przecież dla ludzi!), ale wychodzą okropnie skomplikowane wzory, jakies arcusy (brrr...), a tu jeszcze trzeba obliczać pochodną, by uzasadnić, że to nie jest funkcja stała! Spróbujmy już lepiej poszukać *porządnych* kontrprzykładów.

Dla czworoscianu foremnego obliczenie wartości  $S$  nie jest trudne (rys. 12).

Łatwo też zobaczyć trzy kąty w czworoscianie wyciętym z sześcianu płaszczyzną przechodzącą przez trzy wierzchołki łączące się krawędziami z czwartym (rys. 13). Są to kąty proste. Pozostałe są za to mniej ciekawe.

Jeśli połączymy środek sześcianu ze wszystkimi wierzchołkami, to dostaniemy sześć jednakowych piramid. Nie są to jeszcze, co prawda, czworosciany, ale łatwo temu zaradzić przecinając każdą z nich na pół płaszczyzną przechodzącą przez przekątną ściany i środek sześcianu (rys. 14). Dla tych dwunastu jednakowych czworoscianów łatwo można obliczyć sumę ich kątów dwuściennych:

$$12 \cdot S = 12 \cdot \frac{\pi}{2} + 8 \cdot 2\pi + 6\pi.$$

Otrzymaliśmy więc trzy liczby:

$$s_1 = 6 \arccos \frac{1}{3}, \quad s_2 = 3 \left( \frac{\pi}{2} + \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \right), \quad s_3 = \frac{7}{3}\pi.$$

Spróbujmy je porównać:

$$\cos s_3 = \cos \frac{7}{3}\pi = \cos \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$$

$$\cos s_1 = \cos 6\alpha, \quad \text{gdzie } \cos \alpha = \frac{1}{3} \text{ i } \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

co po podstawieniu do wzoru (\*) daje:

$$\cos s_1 = \frac{329}{729};$$

$$\begin{aligned} \cos s_2 &= \cos \left( \frac{3\pi}{2} + 3 \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \sin \left( 3 \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \\ &= \sin 3\beta, \quad \text{gdzie } \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}; \end{aligned}$$

po podstawieniu otrzymujemy

$$\cos s_2 = \frac{\sqrt{6}}{9}.$$

Zatem  $s_1 \neq s_2 \neq s_3 \neq s_1$ . Nie zachodzi więc twierdzenie o stałej sumie kątów dwuściennych czworoscianu.

Może to jednak nasza wina, może braliśmy niedobre kąty? Czworoscian ma cztery wierzchołki i przy każdym z nich pewien kąt bryłowy, może to one są analogonami kątów płaskich w wierzchołkach trójkąta? Spróbujmy zbadać sumę tych „prawdziwych” kątów w czworoscianie.

Znowu łatwo to zrobić dla czworościanu, z którego buduje się sześcián. Spójrz jeszcze raz na rysunek 14. Niech  $B$  oznacza sumę kątów bryłowych czworościanu. W tym czworościanie mamy:

$$12B = \underbrace{\text{kąt „pełny”}}_{\text{ten w środku}} + 8 \cdot \frac{1}{8} \underbrace{\text{kąta „pełnego”}}_{\text{narożnik}}.$$

Zatem  $B = \frac{1}{6}$  kąta „pełnego”.

Znalezienie innych, łatwych do obliczenia przykładów wydaje się kłopotliwe. Trudno zobaczyć od razu kąt bryłowy czworościanu foremego, gdyż nie można tymi kątami wypełnić przestrzeni wokół punktu. Sprawdź to koniecznie!

Przypadki „graniczne” są łatwe (znów rys. 10a,b):

„czworościan o nieskończonej wysokości” -  $B = \frac{1}{4}$  kąta „pełnego” + 0,

„czworościan rozplaszczony” -  $B = \frac{1}{2}$  kąta „pełnego”.

No, ale znów trudno to uznać za uzasadnienie. Odstawmy na moment nasze pytanie i spróbujmy przyjrzeć się kątom bryłowym bardziej systematycznie.

Czym są kąty bryłowe? Jak je mierzyć? Czym jest tajemniczy kąt „pełny”? Jeśli wierzchołek kąta umieścimy w środku sfery o promieniu  $R$ , to miara tego kąta (przez analogię z miarą kąta płaskiego, oczywiście) wynosi:

$$\frac{\text{pole części sfery wyciętej przez ten kąt}}{R^2}.$$

Zatem kąt „pełny” ma miarę  $\frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi$  (steradianów). Kąt dwuścienny o mierze płaskiej  $\alpha$  wycina z kuli (o środku leżącym na krawędzi tego kąta) częśćkę pomarańczy (rys. 15). Łatwo zauważyć, że dla dowolnego  $\alpha$  pole wycięte przez taki kąt ze sfery wynosi  $2\alpha R^2$ . Zatem miara bryłowa kąta dwuściennego równa się jego podwojonej mierze płaskiej.

Każdy kąt trójścienny o wierzchołku w środku kuli (rys. 16) wycina na sferze trójkąt sferyczny. Kąty w jego wierzchołkach definiujemy jako kąty płaskie między stycznymi w punkcie do odpowiednich kół wielkich kuli. Kąty te są równe kątom dwuściennym pomiędzy odpowiednimi ścianami kąta trójściennego. Rozważajmy w dalszym ciągu trójkąty, których boki są mniejsze od połowy koła wielkiego. Czy (tak jak w przypadku pomarańczy) potrafimy obliczyć ich pole? Jeśli umieścimy taki kąt w środku sfery jednostkowej, to obliczone pole będzie miarą bryłową kąta trójściennego. Popatrzmy na rysunek półsfery (rys. 17), na którym wszystkie łuki to łuki kół wielkich. Zauważmy, że suma pól  $A_1$  i  $A_2$  stanowi dokładnie pole pomarańczy wyciętej przez kąt  $A$ . Podobnie dla innych. Zatem

$$\text{Pole}(A_1 \cup A_2) = 2(\angle A),$$

$$\text{Pole}(B_1 \cup B_2) = 2(\angle B),$$

$$\text{Pole}(C_1 \cup C_2) = 2(\angle C).$$

Po zsumowaniu pól po lewej stronie otrzymamy, oczywiście, pole półsfery powiększone o dwukrotność pola trójkąta  $ABC$  (liczymy je tu trzykrotnie). Mamy więc:

$$2\pi + 2 \cdot \text{Pole}_{ABC} = 2 \cdot (\angle A + \angle B + \angle C),$$

stąd

$$\text{Pole}_{ABC} = \angle A + \angle B + \angle C - \pi \text{ (na sferze jednostkowej),}$$

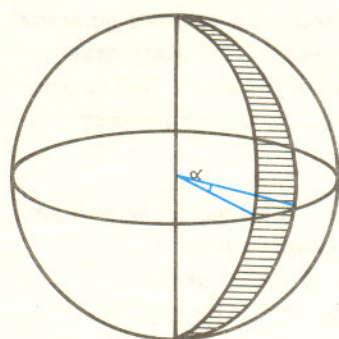
czyli pole trójkąta sferycznego to jego „przewyżka” ponad  $\pi$ .

Gdy teraz sumujemy kąty bryłowe czworościanu (pamiętając, że miara kąta trójściennego to suma miar (płaskich) kątów dwuściennych pomniejszona o  $\pi$ ), to każdy kąt dwuścienny liczymy dwukrotnie.

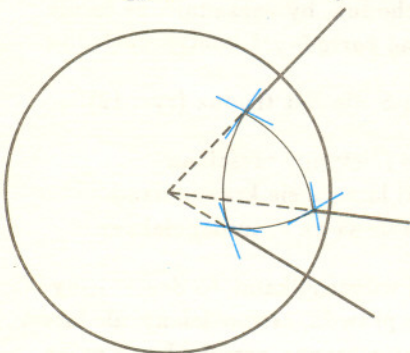
Zatem  $B = 2S - 4\pi$ .

Nasze rozważania na temat kątów dwuściennych nie były więc daremne.

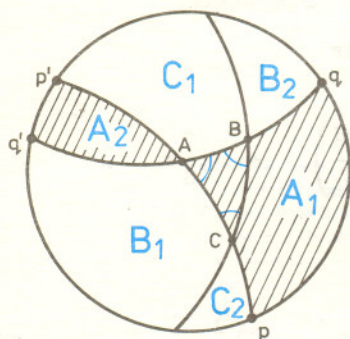
Z negatywnej odpowiedzi na pytanie o stałość sumy kątów dwuściennych wynika negatywna odpowiedź na to pytanie dla kątów bryłowych.



Rys. 15. Jeśli  $\alpha = \frac{\pi}{6}$  to, oczywiście, 12 części pomarańczy wypełni całą kulę. Skórka na naszym kawałku ma więc pole równe  $\frac{1}{12}$  części sfery, tzn.  $\frac{\pi}{3}R^2$ .

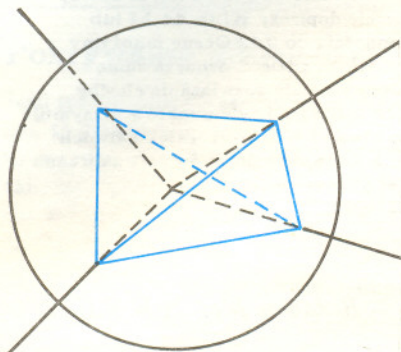


Rys. 16



Rys. 17. Zauważ, że rysunek nie jest całkiem poprawny; pomyśl o symetrii środkowej względem środka kuli; wtedy wszystkie koła wielkie są przekształcane na siebie. Łuk  $pq$  przechodzi na łuk  $p'q'$ , a  $A_2$  na tę niewidoczną część skórki pomarańczy wyciętej przez kąt  $A$ .

Nie ma więc analogii twierdzenia o sumie miar kątów trójkąta w świecie trójwymiarowym. Spróbujmy jeszcze powalczyć z twierdzeniem o kącie wpisanym i środkowym. Kąt trójścienny jest wyznaczony przez trzy półproste o wspólnym początku. Jeśli wierzchołek kąta umieścimy w środku sfery (jednostkowej), to półproste te wyznaczą punkty  $A, B, C$  na sferze. Niech kąt wpisany odpowiadający temu kątowi środkowemu będzie dowolnym kątem trójściennym o krawędziach przechodzących przez punkty  $A, B, C$  i wierzchołku leżącym na sferze (po tej samej stronie płaszczyzny  $ABC$  co środek sfery). Czy wtedy miara takiego kąta wpisanego jest połową miary kąta środkowego? A może jedną trzecią?



Rys. 18

Wpiszmy w tę sferę dowolny czworościan zawierający środek sfery w swoim wnętrzu (rys. 18). Wtedy każde trzy wierzchołki czworościanu wyznaczają środkowy kąt trójścienny. Oczywiście, te cztery kąty sumują się zawsze do kąta pełnego (niezależnie od tego, jaki to czworościan). Natomiast kąty bryłowe czworościanu są teraz kątami wpisanymi odpowiadającymi tym kątom środkowym. Ich suma – jak wykazaliśmy – jest zależna od kształtu czworościanu. Jest to sytuacja zupełnie odmienna od sytuacji na płaszczyźnie.

Może należało inaczej zdefiniować kąt (niekoniecznie trójścienny) wpisany i środkowy? Być może. I nie jest to jedyny znak zapytania, jaki zostawiliśmy po drodze, bowiem w tych wędrówkach, tak jak w prawdziwych, w góry, trudno przewidzieć, co nas spotka. Ale mamy nadzieję, że przekonałeś Cię, iż po matematyce można równie wspaniale wędrować – omijać ścieżki zbyt łagodne, zawracać ze zbyt stromych i nieustannie cieszyć się, że przed nami pojawia się wciąż świat nowy, nieznan i piękny.



## Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

**M 649.** W pewnym trójkącie dwie wysokości są nie krótsze od boków, na które je opuszczono. Jakie kąty ma ten trójkąt?

Rozwiązanie na str. 12

**M 650.** Na dwóch końcach ustalonej średnicy okręgu są ustawione dwie jedynki. W pierwszym kroku na środku każdego z dwóch łuków wpisujemy dwójkę, w drugim kroku – na środku każdego z czterech łuków wpisujemy trójkę; ogólnie, w  $n$ -tym kroku na środku każdego z  $2^n$  łuków wyznaczonych przez wpisane już na okręgu liczby wpisujemy sumę liczb stojących na końcach tego łuku. Obliczyć sumę  $S_n$  liczb zapisanych na okręgu po wykonaniu  $n$  kroków.

Rozwiązanie na str. 16

**M 651.** Dany jest trójmian kwadratowy  $g(x) = ax^2 + bx + c$  o tej własności, że równanie  $g(x) = x$  nie ma rozwiązań rzeczywistych. Wykazać, że wtedy równanie czwartego stopnia  $g(g(x)) = x$  także nie ma rozwiązań rzeczywistych.

Rozwiązanie na str. 12

Redaguje Jarosław KULPA

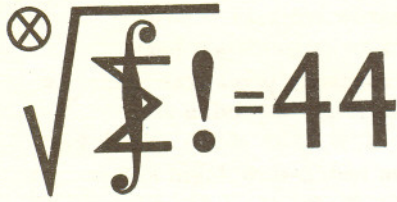
**F 345.** Pająk chcący przebyć wąski kanał z wodą o przekroju poprzecznym w kształcie półkola o promieniu  $R$  ruszył wplaw prostopadle do brzegu. Prędkość pająka względem wody wynosiła  $u$ . Oblicz, jak daleko woda zniosła pająka, jeżeli prędkość wody w nurcie kanału była niewielka i wynosiła  $v_0$ .

Rozwiązanie na str. 7

**F 346.** Masy powietrza z okolic Warszawy przesunęły się o jeden stopień na północ, gdzie uprzednio panowała bezwietrzna pogoda. Oceń największą wartość składowej równoleżnikowej prędkości wiatru na północ od Warszawy.

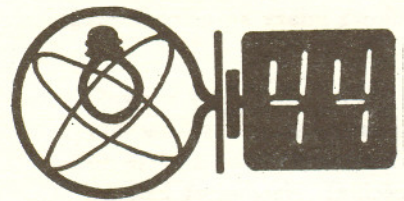
Rozwiązanie na str. 6





# Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki,  
Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*



## Czołówka ligi zadaniowej Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 235 (WT=1,51) i 236 (WT=2,44)  
z numeru 2/1992

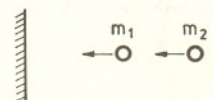
- Janusz Olszewski - Suwałki 46,36
- Henryk Kornacki - Augustów 44,59
- Marek Prausa - Poraj 40,12
- Mirosław Matłega - Skoczów 38,46

Lato - więc Jeziora... Po blisko  
półrocznym zastoju bariera 44 punktów  
znów przekroczone: pan Olszewski  
(z Suwałk) - po raz pierwszy, pan  
Kornacki (z Augustowa) - już po raz  
drugi.

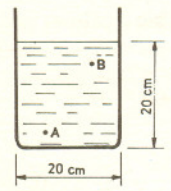
## Czołówka ligi zadaniowej Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 133 (WT=4,00) i 134 (WT=2,13)  
z numeru 2/1992

- Dzierżysław Lipniacki - Lublin 29,11
- Przemysław Gworys - Częstochowa 18,08
- Andrzej Nowogrodzki - Chocianów 18,04
- Dariusz Wilk - Rzeszów 15,51



Rys. 1



Rys. 2

### Rozwiązanie zadania M 650.

Oczywiście,  $S_0 = 2$  oraz  $S_1 = 6$ .  
Ponadto,  $S_{n+1}$  jest sumą  $S_n$   
oraz wszystkich liczb dopisanych  
w  $(n+1)$ -szym kroku. Każdej liczby  
spośród tych, które już są na okręgu po  
 $n$  krokach używamy dwukrotnie jako  
jednego ze składników pewnej liczby  
dopisywanej w  $(n+1)$ -szym kroku  
(bo każda liczba stoi na końcu dwóch  
sąsiednich luków). Oznacza to, że

$$S_{n+1} = S_n + \underbrace{S_n + S_n}_{\text{suma licz dopisanych w (n+1)-szym kroku}} = 3 \cdot S_n$$

Jest to więc ciąg geometryczny,  
a ponieważ  $S_0 = 2$ , więc  $S_n = 2 \cdot 3^n$ .

### Rozwiązanie quizu z *Malej Delty*:

- A - 4, B - 11, C - 5, D - 9, E - 1, F - 6, G - 2, H - 8, I - 7, K - 10, L - 3.

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 3$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1992.

Termin nadsyłania rozwiązań: 28 II 1993

### Zadania z matematyki nr 249, 250

Redaguje Marcin E. KUCZMA

249. Niech  $x$  będzie liczbą dodatnią. Przyjmijmy

$$a_1 = \frac{1}{x+1}, \quad a_n = \frac{n}{x+n} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{x-j}{x+j} \quad \text{dla } n = 2, 3, 4, \dots$$

Wykazać zbieżność i obliczyć sumę szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

250. Wyznaczyć wszystkie liczby  $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  spełniające warunek: dla każdej liczby naturalnej  $k \geq 4$  można umieścić w przestrzeni  $4k$  przystających kostek sześciennych tak, aby każda miała dokładnie  $n$  ścian wspólnych z innymi kostkami.

Zadanie 250 zaproponował pan Jerzy Janowicz z Bolesławca.

### Zadania z fizyki nr 147, 148

Redaguje Jerzy B. BROJAN

147. Dwie doskonale sprężyste kulki poruszają się z jednakową prędkością  $v$  po linii prostej (grawitacja nie występuje) tak, że ich tory pokrywają się. Na drodze kulek jest prostopadła doskonale sprężysta ściana (rys. 1), od której pierwsza kulka się odbija, a potem zderza z drugą.

- a) Jaką maksymalną prędkość może uzyskać druga kulka, gdy zderzą się jeden raz? Zmieniającymi parametrami są tu masy kulek.
- b) Jaką maksymalną prędkość może uzyskać druga kulka, gdy zderzą się dwa razy?
- c) W jakim przedziale musi leżeć stosunek  $\frac{m_2}{m_1}$ , aby kulki zderzyły się dwa razy i nastąpiły też dwa uderzenia o ścianę?
- d) W jakim przedziale musi leżeć stosunek  $\frac{m_2}{m_1}$ , aby kulki zderzyły się trzy razy i nastąpiły cztery uderzenia o ścianę?

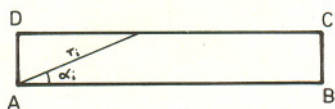
148. Dziesięć kilogramów wody nalano do prostopadłościennego naczynia - przyjmijmy rozmiary dna np.  $20 \times 25$  cm, wysokość 20 cm. W punkcie A (rys. 2) umieszczono grzałkę o mocy 100 W, a w punkcie B - chłodnicę o mocy -100 W. Ocenić orientacyjnie średnią prędkość krążenia wody w naczyniu.

Dane: współczynnik rozszerzalności objętościowej wody (dla temperatury bliskiej  $20^\circ\text{C}$ ) wynosi  $2 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ , ciepło właściwe wody  $4200 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$ , lepkość wody  $0,01 \text{ puaza} = 0,001 \text{ N}\cdot\text{s/m}^2$ .

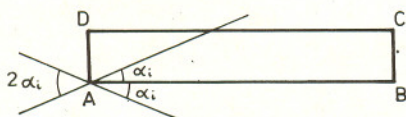
## Pokrywamy płaszczyznę prostokątami

Jeśli mamy daną rodzinę kwadratów o nieskończonej sumie pól, to można nimi pokryć płaszczyznę – wykazaliśmy to w poprzednim numerze *EPSILONA*. Jeśli jednak zamiast kwadratów będziemy rozważać prostokąty, już tak być nie musi! Oto kontrprzykład, skonstruowany przez A. Bachszecjana.

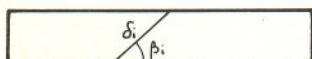
Ustalmy  $\alpha_i = r_i = 1/2^i$  i skonstruujmy prostokąt o numerze  $i$  tak, jak na rysunku; długości  $AB$  i  $CD$  są takie, by  $AB \cdot BC = 1$ .



Przypuśćmy, że prostokątami takimi da się pokryć płaszczyznę. Wówczas każdy prostokąt określa przedstawione na rysunku kąty:



Zacznijmy wszystkie te kąty (przesuwając je równolegle) w jednym punkcie płaszczyzny. Suma kątów wynosi  $\sum_{i=1}^{\infty} 4\alpha_i = 4 \sum_{i=1}^{\infty} 1/2^i = 4 < 2\pi$ . Istnieje zatem półprosta nie zawierająca się w żadnym z tych kątów; przez  $\delta_i$  oznaczmy długość przecięcia tej półprostej z  $i$ -tym prostokątem, a kąt  $\beta_i$  określmy tak, jak na poniższym rysunku.



Z konstrukcji otrzymujemy, że  $\beta_i \geq \alpha_i$ , zatem  $\delta_i \leq r_i$  i  $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} r_i = 1$ , czyli półprosta nie może być pokryta badanymi prostokątami.

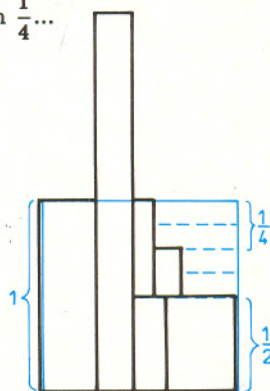
W kontrprzykładzie istotną rolę odgrywał fakt, że prostokąty mogły być bardzo długie. Co więc będzie, gdy przyjmijemy dodatkowo, że boki prostokątów są wspólnie ograniczone, czyli że wszystkie mają długość nie większą, od pewnej stałej  $M$ ?

Przy tym założeniu będziemy w stanie płaszczyznę pokryć! Oto idea uzasadnienia. Możemy założyć, że  $M \geq 1$ ; mamy zatem  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i = \infty$ ,  $a_i \leq M$ ,  $b_i \leq M$ , gdzie  $a_i$  i  $b_i$  są

Stefan Banach uzyskał doktorat na Uniwersytecie Jana Kazimierza we Lwowie w 1920 roku. Zmarły trzy lata temu krakowski matematyk, ksiądz profesor Andrzej Turowicz, przed wojną wykładający na Politechnice Lwowskiej, opowiadał, że Banach na uwagi, iż powinien już zostać doktorem, długo odpowiadał, że ma na to jeszcze czas i że może wymyślić coś ciekawszego, niż dotychczas uzyskane przez niego wyniki. Po pewnym czasie jednak władze akademickie straciły cierpliwość; ktoś spisał najnowsze rezultaty Banacha, co zostało uznane za znakomitą pracę doktorską. Przepisy jednak wymagały również egzaminu. Pewnego dnia zaczepiono Banacha na korytarzu uniwersytetu: „jacyś ludzie do nas przyjechali i mają parę matematycznych pytań, na które pan na pewno będzie umiał odpowiedzieć; czy mógłby pan pójść do dziekanatu i im pomóc?”. Banach zrobił to bardzo chętnie, nie zdając sobie sprawy, że właśnie zdaje egzamin doktorski przed specjalnie przybyłą w tym celu z Warszawy komisją. Obecnie obowiązujące w Polsce ustawodawstwo chyba takiej możliwości nie dopuszcza...

długościami boków odpowiednich prostokątów. Ponieważ dla liczby  $a_i$  istnieje takie  $k_i$  całkowite (niekoniecznie dodatnie), że  $1/2^{k_i} \leq a_i \leq 1/2^{k_i-1}$ , wystarczy rozpatrywać prostokąty o bokach długości  $1/2^{k_i}$  oraz  $b_i$  (suma ich pól też, oczywiście, wynosi nieskończoność, bo  $\sum_{i=1}^{\infty} b_i/2^{k_i} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} a_i b_i$ ). Jeżeli wykażemy, że skończoną liczbą takich prostokątów da się pokryć kwadrat o boku 1, to – na mocy prawdziwości twierdzenia dla pokrycia kwadratami – rozwiążemy zadanie.

Jeśli istnieją takie prostokąty, że  $1/2^{k_i} \geq 1$ , to zaczepiamy pierwszy z nich w lewym dolnym rogu kwadratu, następny stawiamy obok poprzedniego – i tak dalej. Jeśli prostokątów takich nie wystarcza do pokrycia kwadratu (lub nie ma ich wcale), to dzielimy to, co zostało (lub cały kwadrat), na dwie części o wysokości  $1/2$ . Pokrywamy pozostały obszar prostokątami o wysokości  $1/2$  według poprzedniego schematu dalej – najpierw dół, potem górę – a po ewentualnym wyczerpaniu prostokątów przed pokryciem kwadratu dzielimy powierzchnię nie pokrytą na części o wysokościach  $1/4, \dots$



W ten sposób pokrywamy kwadrat po skończonej liczbie kroków. Gdyby bowiem tak się nie stało, wszystkie nasze prostokąty dałoby się ustawić w prostokącie o bokach długości  $M$  i  $1 + M$ , przy czym po ustawieniu prostokąty te miałyby wspólne co najwyżej brzegi. Jest to jednak niemożliwe, gdyż suma pól prostokątów jest nieskończona – i tym samym zakończyliśmy dowód.

A co będzie, gdy rozważymy trójkąty lub jeszcze inne figury?

Armen EDIGARIAN