

UWAGA!!!

w prenumeracie *Delta* tańsza

SPIS TREŚCI

NUMERU 10(221)

Stefan Banach o swoim ojcu	str. 1
Indukcja matematyczna <i>Sławomir Tomaszewski</i>	str. 1
Rozmyślania podczas zmywania naczyń <i>Jan Kalinowski</i>	str. 4
Punkty libracji <i>Tomasz Kwast</i>	str. 6
Zadania	str. 7
Mała Delta	str. 8
O dwóch modelach <i>Zdzisław Pogoda</i>	str.10
Kącik uczniowskich prac z matematyki	str.12
Klub 44	str.13
Reguła przekory <i>Krzysztof A. Meissner</i>	str.14
Łamane spiralne	str.15
Patrz w niebo	str.16
Epsilon	str.17

„Delta”
matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Edukacji Narodowej

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichoński
Roman Duda
Jan A. Gaj
Tomasz Hofmokr – wiceprzewodniczący
Tadeusz Jarzębowski
Marcin Kubiak
Andrzej Mąkowski
Andrzej Pelczar
Zbigniew Płochocki
Zdzisław Pogoda
Konrad Rudnicki
Zbigniew Semadeni
Grzegorz Sitarski
Józef I. Smak
Kazimierz Stępień
Mieczysław Subotowicz
Andrzej Szymacha
Andrzej Woszczyk
Wojciech Żakowski – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:
Krzysztof Biesaga
Piotr Hajlasz
Jan Kalinowski – z-ca red. nac.
Krzysztof Kordos – sekr. red.
Marek Kordos – red. nac.
Tomasz Kwast
Stanisław Mrówczyński
Anna Rudnik
Joanna Udalska

Adres Redakcji:

ul. Smyczkowa 5/7
02-678 Warszawa
tel. 43-02-43 wewn. 21

Adres poczty komputerowej (E-mail address):

DELTA@PLEARN.BITNET

Wydawca:

Uniwersytet Warszawski
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa

Nakład 8 000 egz.
Wydrukowano
w Zakładach Graficznych
w Warszawie, ul. Srebrna 16

Skład systemem $\text{T}_{\text{p}}\text{X}$
wykonała redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na I kwartał 1993 r. wynosi 18 000,- zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
 - na teren kraju
 - jednostki kolportażowe „Ruch” właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób,
 - urzędy pocztowe na terenie wiejskim i w miejscowościach, w których nie ma jednostek kolportażowych „Ruch” – poczta zapewnia dostawę zamówionych egzemplarzy pocztą zwykłą pod wskazanym adresem w ramach opłaconej prenumeraty,
 - na zagranicę
 - Zakład Kolportażu Prasy i Wydawnictw, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia dostawy pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni pokrywa prenumerator.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
 - na kraj i zagranicę – do 20 XI na I kwartał roku następnego
do 20 II na II kwartał
do 20 V na III kwartał
do 20 VIII na IV kwartał.

Cena 1 egzemplarza 8 000,- zł

W następnym numerze:

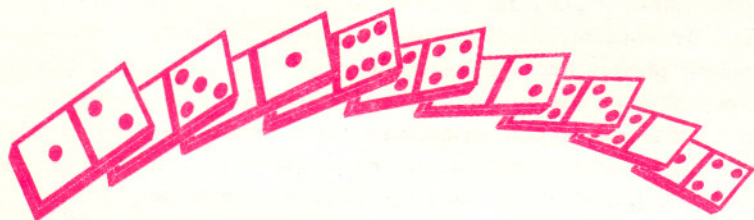
Wędrowki po wyższych wymiarach

Indukcja matematyczna

Sławomir TOMASZEWSKI

Zasada indukcji ma dwie cechy, które stanowią o jej atrakcyjności: jasne, klarowne sformułowanie oraz dużą różnorodność zastosowań.

Jej najbardziej przemawiającą do wyobraźni formą jest „zasada domina”: gdy ustawimy kostki domina w rząd tak, że przewrócona poprzednia potrąca następną, to wystarczy popchnąć pierwszą, a przewrócą się wszystkie.



W matematyce jednak bardziej użyteczne jest następujące sformułowanie:

Jeśli dany jest ciąg zdań $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, o którym wiemy, że:

- 1) φ_1 jest prawdziwe,
 - 2) prawdziwość φ_n pociąga prawdziwość φ_{n+1} (dla dowolnego n),
- to wszystkie zdania w ciągu są prawdziwe.

Najczęściej zasadę indukcji stosujemy do dowodzenia wzorów (równań, nierówności) dotyczących liczb naturalnych.

Przykład 1.

Niech $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11$ itd., tzn. p_n jest n -tą liczbą pierwszą. Wtedy $p_n > 3n$, dla $n \geq 12$.

Dowód. Wypiszmy dalsze liczby pierwsze: $p_6 = 13, p_7 = 17, p_8 = 19, p_9 = 23, p_{10} = 29, p_{11} = 31, p_{12} = 37$. A więc zdanie φ_{12} oznacza, że $p_{12} = 37 > 3 \cdot 12 = 36$, co jest prawdą. Załóżmy więc, że zachodzi zdanie φ_{n-11} , tzn. $p_n > 3n$. Z tego wynika, że $p_n \geq 3n + 1$. Musi być $p_{n+1} \geq p_n + 2$, bo $p_n + 1$ jest parzyste (a więc nie może być pierwsze, bo $p_n > 2$), a więc $p_{n+1} \geq (3n + 1) + 2 = 3n + 3 = 3(n + 1)$. Ale ta liczba jest z kolei podzielna przez 3 (i różna od 3), a więc nie może być pierwsza. Stąd wynika, że $p_{n+1} > 3(n + 1)$, a więc zdanie φ_{n-10} . Zasada indukcji gwarantuje więc prawdziwość nierówności dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 12$. ■

Dowodzony wzór może dotyczyć również innych obiektów, o ile występują w nim liczby naturalne (w roli parametrów).

Przykład 2.

Znając wzór na pochodną funkcji identycznościowej $f(x) = x$ oraz wzór na pochodną iloczynu wykazemy, że $(x^n)' = nx^{n-1}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Dowód. Dla $n = 1$ mamy $(x)' = 1$, co stanowi wiedzę wyjściową.

Dalej:

$$(x^{n+1})' = (x^n x)' = (x^n)'x + x^n(x)' = nx^{n-1}x + x^n = (n+1)x^n.$$

Stefan Banach o swoim ojcu

Stefan Banach (jr) jest doktorem medycyny, specjalistą neurochirurgiem. W związku z obchodami setnej rocznicy urodzin jego ojca poprosiliśmy go o udzielenie wywiadu *Delcie*.

– Przeglądając różne opracowania biograficzne Pana ojca można się doszukać pewnych nieścisłości...

– Większość danych biograficznych dotyczących mojego ojca, które można gdzieś znaleźć, pochodzi ode mnie, lecz zanim zostały one zapisane, to niejednokrotnie ktoś coś zmienił, coś od siebie dodał i skutek jest taki, że w wielu miejscach są napisane po prostu fałszywe informacje. I tak na przykład mój ojciec urodził się 30 marca 1892 roku, a nie 20, jak jest w wielu miejscach podawane. Skąd się wziął ten błąd? Steinhaus kiedyś podczas przemówienia ku czci mojego ojca podał tę błędną datę, a inni za nim powtórzyli. Steinhaus podał też, że mój ojciec po urodzeniu został oddany na wychowanie do praczki nazwiskiem Banachowa, od której jakoby miał przez wdzięczność przybrać nazwisko. Jest to nieprawda. Owa praczka, do której został oddany na wychowanie, nazywała się Maria Płowa, natomiast nazwisko Banach jest nazwiskiem jego matki.

– Powiedział Pan, że pisze wspomnienia o ojcu. Czy mógłby Pan podać jakieś szczegóły?

– Owe wspomnienia są dopiero w stadium pisania. Chciałbym je ukończyć w ciągu roku, a jeśli chodzi o ich wydanie, to jak Bóg da.

– Znany jest fakt, że Pana ojciec będąc małym dzieckiem biegle władał językiem francuskim. Steinhaus pisze, że nie wiadomo, gdzie się go nauczył.

– Ależ wiadomo. Jak już zostało tutaj wspomniane, mój ojciec został oddany na wychowanie do Marii Płowej. Jej córka – starsza o 15 lat przybrana siostra Banacha – miała przyjaciela. Był nim krakowski fotograf Ludwik Mien. Był on Francuzem i rozmawiał z ojcem po francusku. Stąd owa biegła znajomość francuskiego. Na marginesie, Ludwik Mien specjalizował się w fotografowaniu dzieci i prawie wszystkie zachowane zdjęcia mojego ojca z dzieciństwa są jego autorstwa.

- Jakie warunki materialne miał Pana ojciec w dzieciństwie?

- Aby pomóc przybranej matce, zaczął udzielać korepetycji. Początkowo z różnych przedmiotów, potem ograniczył się do matematyki, a w końcu zaczął wyłącznie przygotowywać do matury. Z czasem przybrana matka i siostra – obie były praczkami – dorobiły się i otworzyły zakład pralniczy zatrudniający 15-20 osób. Oczywiście, poprawiły się wtedy warunki materialne mego ojca.

- Kiedyś, przy jakiejś okazji wspomniał Pan, że Pana ojciec tańczył jako student w operze.

- Będąc studentem dorabiał tańcząc za 20 halerzy mazura w drugiej parze w operze *Halka*. W innej natomiast operze niósł byka jako jeden z sześciu tragarzy.

- Czy interesował się sportem?

- Jako chłopak namiętnie grywał w piłkę nożną na Błoniach w Krakowie. W czasach studenckich bardzo chętnie grywał w bilard i był w tym bardzo dobry. Ale bilard był wówczas inny niż teraz. Nazywał się karambol, a czasami karambolka. Były tam tylko trzy bile. Teraz jest modny bilard amerykański. To coś zupełnie innego. Bardzo dobrze grał też w tenisa. A że był mańkutom, więc stanowiło to dodatkowe utrudnienie dla przeciwnika. Z mańkutom trudniej się gra, bo ma on inne zagrywki, niż te, do których jesteśmy przyzwyczajeni. Od niego nauczyłem się grać w tenisa.

Na marginesie, mimo że był mańkutom, to jednak pisał prawą ręką – wówczas wymagano w szkole, aby wszyscy pisali prawą ręką. Pisał prawą, ale kamieniami rzucał lewą – po tym zawsze można poznać mańkuta.

- Czy interesował się polityką? Jakie miał poglądy?

- Tak, interesował się. Gdybym jednak chciał dać panu krótką odpowiedź na drugie pytanie, to na pewno miałby pan błędne wyobrażenie o poglądach mego ojca. Sytuacja polityczna była wówczas na tyle złożona, że danie krótkiej odpowiedzi na to pytanie jest po prostu niemożliwe. Jedno mogę natomiast powiedzieć. Absolutnie nie był komunista.

- Czy Pana ojciec odpowiadał powszechnym wyobrażeniom co do tego, jaki powinien być profesor uniwersytetu?

- Pamiętam, jak kiedyś przyszedł do gimnazjum na wywiadówkę. Moi koledzy byli zdziwieni, że nie ma on brody do pasa

Druga równość wynika ze wzoru na pochodną iloczynu, a trzecia – z założenia indukcyjnego. Powołanie się na zasadę indukcji kończy dowód. ■

Szczególnie ciekawe zastosowania indukcji to dowody twierdzeń, które nie mają postaci wzorów, a liczby naturalne nie występują w nich jawnie.

Przykład 3 – tym razem zadanie z geometrii.

Wykazać, że jeśli płaszczyznę podzielimy na części za pomocą prostych i okręgów, to można uzyskane obszary tak pomalować dwoma kolorami, by każde dwa z nich, graniczące ze sobą wzdłuż łuku bądź odcinka, miały różne kolory.

Dowód. „Ukrytym” parametrem naturalnym jest tutaj liczba prostych i okręgów tworzących podział. Gdy na płaszczyźnie dany jest jeden okrąg (bądź jedna prosta), to żądane pomalowanie łatwo uzyskać. Przypuśćmy, że dla danego n umiemy to zadanie rozwiązać i rozważmy płaszczyznę podzieloną przez $n + 1$ linii (prostych lub okręgów). Gdy na chwilę „zapomnimy” o jednej z nich, uzyskamy n linii – tak uzyskany podział umiemy pomalować. Dokładając ostatnią linię wystarczy zmienić kolory obszarów po jednej jej stronie (na przeciwnie), a zachować kolory po drugiej – i uzyskamy żądany efekt. ■

Teraz podamy przykład rozumowania indukcyjnego o szczególnie ciekawej strukturze: tutaj „kostka domina” wcale nie „potrąca” bezpośrednio następnej.

Przykład 4.

Wykażemy twierdzenie Cauchy’ego o średnich

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}, \quad \text{dla } a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0.$$

Dowód. Dla $n = 1$ twierdzenie orzeka, że $a_1 \geq a_1$, w co można uwierzyć. Przypuśćmy, że nierówność Cauchy’ego jest prawdziwa dla pewnego n i dowolnego układu liczb a_1, \dots, a_n . Wywnioskować stąd, że jest ona prawdziwa dla $n + 1$, jest jednak dość trudno (proszę popробować!). Zamiast tego zrobimy rzecz łatwiejszą: udowodnimy ją dla $2n$. W tym celu wykorzystamy znany przypadek szczególny ($n = 2$). Jeśli $a, b \geq 0$, to

$$(*) \quad \frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

(kto go nie zna, może udowodnić samodzielnie). Niech dane teraz będą liczby $a_1, a_2, \dots, a_{2n} \geq 0$. Wykażemy, że dla nich również zachodzi nierówność Cauchy’ego. Niech $a = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$,

$b = \frac{a_{n+1} + \dots + a_{2n}}{n}$. Na mocy założenia indukcyjnego

$a \geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$, $b \geq \sqrt[n]{a_{n+1} \dots a_{2n}}$. Na mocy (*):

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + \dots + a_{2n}}{2n} &= \frac{\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} + \frac{a_{n+1} + \dots + a_{2n}}{n}}{2} = \frac{a + b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b} \geq \\ &\geq \sqrt{\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \sqrt[n]{a_{n+1} \dots a_{2n}}} = \sqrt[2n]{a_1 \dots a_{2n}}, \end{aligned}$$

co należało wykazać. Na mocy zasady indukcji udowodniliśmy nasze twierdzenie dla $n = 1, 2, 4, 8, \dots, 2^k, \dots$. A co z pozostałymi wartościami? Okazuje się, że można się do nich cofnąć stosując specyficzną „indukcję wsteczną” (zwolennik postępu może powiedzieć „reakcyjną”). A więc, tym razem zakładamy naszą nierówność dla $n + 1$ i udowodnimy ją dla n . W tym celu ustalmy

dowolne n liczb nieujemnych: a_1, \dots, a_n . Niech

$a_{n+1} = \frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n)$. Na mocy założenia

$$\left(\frac{a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} \geq a_1 \cdot \dots \cdot a_n \cdot a_{n+1}.$$

Stosując określenie a_{n+1} , po prostych przekształceniach, otrzymujemy

$$\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right)^{n+1} \geq a_1 \cdot \dots \cdot a_n \cdot \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right).$$

Po podzieleniu stronami przez $\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$ mamy

$$\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right)^n \geq a_1 \cdot \dots \cdot a_n,$$

co kończy dowód nierówności Cauchy'ego w tym przypadku, a więc i we wszystkich (indukcja). ■

Na zakończenie przedstawimy zastosowanie indukcji do dowodu pewnego bardzo zaskakującego twierdzenia. Pewni barbarzyńcy (tzn. ludzie nie znający zasady indukcji) mogą w nie nawet nie uwierzyć!

Przykład 5.

Wszystkie koty są tego samego koloru!

Dowód. Dla $n = 1$ kotów twierdzenie orzeka, że każdy kot jest takiego samego koloru jak on sam, co jest oczywiste. Zakładając teraz, że każdy n -elementowy zbiór kotów składa się z kotów o tym samym kolorze, weźmy pewien ich zbiór $n + 1$ -elementowy. Usuając z tego zbioru pewnego kota przekonamy się, że wszystkie pozostałe są tego samego koloru (jest ich n , a więc pracuje założenie indukcyjne). Wystarczy się tylko przekonać, że ten usunięty jest również tego koloru. W tym celu dołączamy go z powrotem do zbioru, a usuwamy innego. Znowu mamy n -elementowy zbiór, a więc znowu na mocy założenia indukcyjnego widzimy, że poprzednio usunięty kot jest koloru pozostałych, bo razem utworzyły zbiór jednokolorowy. To kończy indukcję. A nasze twierdzenie wynika teraz z faktu, że liczba kotów na świecie jest skończona (choćby dlatego, że masa Ziemi jest skończona), a więc wyraża się pewną liczbą naturalną, do której dojdziemy w procesie indukcji. ■

Myślę, że powyższe przykłady przekonały Czytelnika do płodności zasady indukcji jako metody poznawczej i środka do rozwiązywania zadań, co skłoni Go do zastanowienia się nad następującymi zadaniami.

- 1) Na płaszczyźnie danych jest n prostych, z których każde dwie przecinają się, ale żadne trzy nie przechodzą przez jeden punkt. Wykazać, że dzielą one płaszczyznę na $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ części.
- 2) Wykazać, że jeśli na płaszczyźnie danych jest n punktów nie leżących na jednej prostej, to wśród prostych łączących je jest co najmniej n różnych.
- 3) Udowodnić, że szachownicę o wymiarach $(4k + 1) \times (4k + 1)$ można obejść ruchem konika szachowego przechodząc przez każde pole jeden raz.
- 4) Na dworze króla Artura zebrało się $2n$ rycerzy, przy czym żaden z nich nie ma więcej niż $n - 1$ wrogów. Udowodnić, że Merlin – doradca Artura – może tak rozsadzić rycerzy przy Okrągłym Stole, by żaden z nich nie siedział obok swojego wroga.

i że nie jest trzęsącym się staruszkciem. Takie były wówczas wyobrażenia o tym, jak powinien wyglądać profesor uniwersytetu. A on przeciwnie, był młodym człowiekiem łamiącym różne przyjęte formy. W latach 30. było nie do pomyślenia, aby wyjść na ulicę w koszuli à la Słowacki, to znaczy rozpiętej pod szyją i z szeroko rozłożonym kołnierzykiem. Trzeba było mieć koszulę zapiętą pod szyją i mocno zaciągnięty krawat. Pod marynarką obowiązkowo musiała być kamizelka. Trzeba było też mieć rękawiczki, jeśli nie założone, to przynajmniej należało trzymać je w ręku. Ojciec złamał tę modę. Pamiętam, jak na przykład kiedyś wyszedł na ulicę w niemodnej wówczas koszuli z krótkim rękawem i z laską w ręku. Zaczęto później powoli odstępować od tych sztywnych rygorów odnośnie ubioru.

– Jak Państwo spędzali wakacje?

– Wakacje trwały dwa miesiące. Lipiec spędzałem na obozie harcerskim, sierpień zaś z rodzicami w Karpatach Wschodnich.

– Czy Pana ojciec zajmował się matematyką w czasie okupacji?

– Zajmował się matematyką codziennie prawie bez przerwy aż do końca życia. Także podczas okupacji. Miał olbrzymią podzielność uwagi. Mógł pracować w każdych warunkach. Bardzo chętnie w zgiełku kawiarnianym.

– Czy dużo mówił w domu o matematyce?

– Nie, nie mówił. Kiedy ja i mama kładliśmy się spać i był już spokój, to wtedy zabierał się do pracy i pracował do bardzo późna. Mniej więcej do trzeciej nad ranem.

Chciałbym jednak zaznaczyć, że miał zawsze dla mnie dużo czasu. Niedziele należały do mnie. W co drugą niedzielę chodziliśmy na mecze Pogoni lwowskiej, a gdy ta drużyna miała mecze wyjazdowe, to chodziliśmy do kina na filmy kowbojskie.

– Czy namawiał Pana do zajęcia się matematyką?

– Tak, namawiał, ale bardziej interesowała mnie humanistyka i nauki przyrodnicze. Zresztą, gdy z czasem w gimnazjum coraz lepiej poznawałem i rozumiałem matematykę, to w coraz większym stopniu zdawałem sobie sprawę, że nigdy nie osiągnę poziomu mojego ojca. Tak więc dosyć wcześniej wykrystalizowała się we mnie chęć pójścia na medycynę, a ojciec tego nie hamował. Uważał, że każdy powinien żyć z hobby.

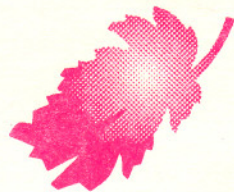
- *Pański ojciec otrzymał kolejną nagrodę w bieżącym roku...*

W bieżącym roku w czasie uroczystości 200-lecia Uniwersytetu Andyjskiego (UNIVERSIDAD de LOS ANDES) w Republice Wenezueli, obecnemu tam panu prof. A. Pełczyńskiemu (jako przedstawicielowi Polski) wręczono swego rodzaju Doktorat Honorowy przyznany pośmiertnie dla Stefana Banacha wraz z połączonym medalem. Doktorat ten wydany jest w formie 40 × 30 cm na czerpanym papierze z herbami Uniwersytetu i Republiki Wenezueli w dwuskładzie, włożony w twardą płócienną oprawę z herbem Uniwersytetu. Ozdobny ten dokument wraz z medalem w specjalnym etui pan prof. Pełczyński wręczył mnie. Ja z kolei ofiaruję go Międzynarodowemu Centrum im. S. Banacha w Warszawie.

- *Dziękuję za rozmowę.*

Rozmawiał Piotr HAJŁASZ

Rozmyślania podczas zmywania naczyń

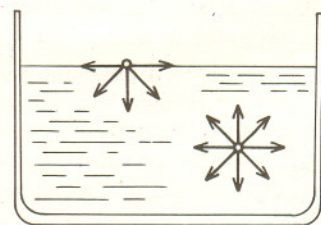


Jan KALINOWSKI

Czy zdarza Wam się zmywać brudne naczynia? Jeśli tak, to może zwróciliście uwagę na ciekawe zjawisko. Gdy do brudnego naczynia (które właśnie mamy umyć) nalejemy wody, a następnie wpuścimy kroplę płynu do mycia naczyń, np. *Ludwika*, to powierzchnia wody nagle „rozstępuje się”. Widać to wyraźnie, gdy na powierzchni wody pływają jakieś drobne okruchy. Można przed wpuszczeniem kropli *Ludwika* posypać powierzchnię wody drobno zmieloną przyprawą, aby lepiej zauważyć to zjawisko. Powierzchnia wody zachowuje się podobnie do napiętej błony gumowej przekłutej szpilką. Z kolei, gdy solimy lub pieprzymy zupę na talerzu, często można zauważyć zjawisko odwrotne: powierzchnia zupy „ściąga się” wokół soli czy pieprzu. Jak możemy wytłumaczyć te zjawiska?

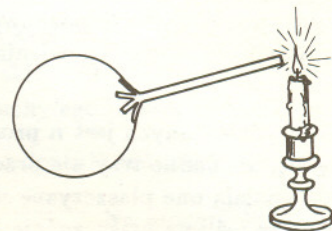
Molekuły w cieczy utrzymywane są przez przyciągające siły międzycząsteczkowe. Zauważmy, że sytuacja molekuł w głębi cieczy i na powierzchni jest inna. Te w głębi są przyciągane przez sąsiadów ze wszystkich stron i siła wypadkowa wynosi zero.

Molekuła na powierzchni nie ma sąsiadów z jednej strony i działa na nią siła wypadkowa skierowana w głąb cieczy. Molekuły „nie chcą” być na powierzchni. To tak, jak grupa uczniów, którzy coś zbroili. Nikt nie chce wtedy stać na brzegu, wszyscy chcą być w środku grupy.

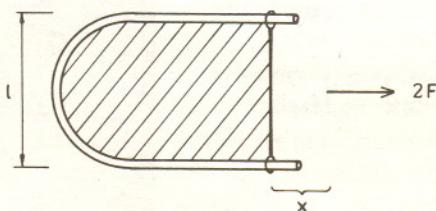


Ciecz dąży więc do zminimalizowania swojej powierzchni. Wyciągnięcie molekuły na powierzchnię, tzn. powiększenie powierzchni cieczy wymaga wykonania pracy. Energia potrzebna do zwiększenia powierzchni cieczy o jedną jednostkę nosi nazwę napięcia powierzchniowego.

Właśnie napięcie powierzchniowe powoduje, że powierzchnia cieczy zachowuje się jak elastyczna błonka. Łatwo się o tym przekonać dmuchając bańki mydlane. Błonka bańki jest napięta i wywiera ciśnienie na znajdujące się wewnątrz powietrze. Kierując koniec słomki (od której jeszcze nie oderwała się bańka) na płomień świecy możemy się przekonać, że ciśnienie nie jest wcale tak małe; płomień świecy odchylił się w bok.



Idea pomiaru napięcia powierzchniowego jest bardzo prosta, chociaż wykonanie precyzyjnych pomiarów w domu może być trudne. Aby zmierzyć napięcie powierzchniowe, na przykład roztworu mydlanego, wystarczy rozpiąć błonkę mydlaną na drucie wygiętym w kształt litery U z ruchomą poprzeczką.





Jeśli ciągnąc poprzeczkę z siłą $2F$ (są dwie powierzchnie błonki, a więc na każdą działa siła F) przesuniemy ją o odcinek x , to wykonana praca wynosi $\Delta W = 2Fx$, a powierzchnia zmieni się o $\Delta S = 2lx$ (pamiętajmy, że są dwie strony!). Stąd napięcie powierzchniowe wynosi

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta S} = \frac{F}{l}.$$

Jest więc liczbowo równe sile na jednostkę długości brzegu potrzebnej, aby rozciągnąć błonkę. Mierzy się je w N/m, co tłumaczy do pewnego stopnia, dlaczego wielkość ta nazywana jest napięciem.

Napięcie powierzchniowe zależy od rodzaju cieczy. W tabelce podajemy wartość σ dla niektórych cieczy.

ciecz	t(°C)	σ (N/m)
aceton	20	0,0237
alkohol metylowy	20	0,0226
benzen	20	0,0288
rtęć	15	0,487
roztwór mydła	20	0,025
woda	0	0,0756
woda	20	0,0728
woda	100	0,0589



Rozwiązanie zadania F 343.

Na samochód będzie działała składowa siła ciężkości $F = mg \sin \alpha$ oraz siła oporu powietrza Cv^2 . Po pewnym czasie siły te zrównoważą się, tzn. $mg \sin \alpha = Cv^2$. Współczynnik C możemy wyznaczyć z danych odnoszących się do pojazdu:

$$P = F_{max} \cdot v_{max} = Cv_{max}^3, \text{ gdzie}$$

$F_{max} = Cv_{max}^2$ jest maksymalną siłą oporów powietrza na poziomej nawierzchni. Ostatecznie

$$v = \sqrt{\frac{mg \sin \alpha \cdot v_{max}^3}{P}} \approx 170 \text{ km/h}.$$



Rozwiązanie zadania F 344.

Niech h_n oznacza wysokość, na jaką wzniesie się piłeczka po n -tym odbiciu, a t_n oznacza czas wzbijania się na wysokość h_n . Po każdym odbiciu piłeczka traci tę samą część swojej energii. Stąd $h_1 = \eta h$, $h_2 = \eta h_1$, itd., $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, $t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = \sqrt{\eta} t$, $t_2 = (\sqrt{\eta})^2 t, \dots$ Całkowity czas ruchu wyniesie

$$T = t + 2t_1 + 2t_2 + \dots = 2t(1 + \sqrt{\eta} + (\sqrt{\eta})^2 + \dots) - t.$$

Sumując szereg otrzymujemy

$$T = t \frac{1 + \sqrt{\eta}}{1 - \sqrt{\eta}} \approx 19 \text{ sekund}.$$

Teraz możemy już wytłumaczyć zaobserwowane zjawiska. Dodanie środka do mycia naczyń powoduje lokalne zmniejszenie napięcia powierzchniowego. Dlatego miejsce to zostaje rozciągnięte przez obszar sąsiedni, gdzie napięcie powierzchniowe pozostaje duże. Dodając trochę soli zwiększamy σ i efekt jest odwrotny. To właśnie chęć zmniejszenia napięcia powierzchniowego wody jest głównym powodem dodawania środka zmywającego lub piorącego. Gdy woda ma bardzo duże napięcie powierzchniowe, tzn. jest bardzo twarda, trzeba dodać więcej proszku do prania, aby ją zmiękczyć. Woda wnika wtedy we wszystkie szpary (bo z tym wiąże się przecież powiększenie powierzchni), powoduje rozbitcie tłuszczów na drobnutkie kuleczki, które później łatwo wypłukać. Oczywiście, zachodzą też wtedy różne reakcje chemiczne ułatwiające pranie, ale one nas tutaj nie interesują.

Napięcie powierzchniowe jest odpowiedzialne za wiele zjawisk w przyrodzie. W naczyniu znajdującym się w ziemskim polu grawitacyjnym energia cieczy jest minimalna, gdy powierzchnia cieczy jest płaska. Natomiast spadająca swobodnie kropla cieczy przybiera kształt kulisty, gdyż w swoim układzie odniesienia jest nieważka. Działa wtedy jedynie sprężysta błonka powierzchniowa, która nadaje cieczy formę o minimalnej powierzchni, tzn. formę kulistą. Jest to wykorzystywane przy produkcji śrutu. Roztopiony ołów spada kroplami z dużej wysokości do naczynia z wodą, gdzie krzepnie w postaci równych kulek. Krople deszczu spadają swobodnie jedynie na początku spadania. Pod koniec pierwszej sekundy spadania, pod wpływem rosnącego oporu powietrza ruch staje się jednostajny i krople deszczu nie mają kształtu kulistego. W sosie octowo-olejowym do sałatek możemy po wstrząśnięciu zauważyć idealnie kuliste kropelki oliwy zawieszony w occie, gdyż ciężar oliwy jest równoważony przez siłę wyporu. Dobierając odpowiednio gęstość mieszaniny wody i octu lub spirytusu możemy łatwo zawiesić w niej naprawdę dużą kroplę oliwy. Z taką kroplą w stanie nieważkości można robić ciekawe doświadczenia: pobudzać ją do drgań, wprawiać w ruch obrotowy za pomocą patyczka i obserwować, jak na skutek siły odśrodkowej ulega deformacji, aż w końcu rozpadnie się na mniejsze krople.

Niestety, po tych doświadczeniach trzeba znowu zmyć naczynia.



Punkty libracji

Tomasz KWAST



Modelem bardzo często spotykanej w przyrodzie sytuacji jest ruch umownie nieważkiej cząstki („ciała znikomego”) w polu grawitacyjnym dwóch ciał o konkretnych niezerowych masach („ciał ciężkich”) obiegających po orbitach kołowych wspólny środek masy. Chodzi o to, że w tym modelu ciało znikome nie wpływa na zadany z góry ruch ciał ciężkich. Widać, że model ten w przybliżeniu powinien opisywać np. ruch pocisku lecącego z Ziemi na Księżyc lub cząstki gazu przelatującej z jednej gwiazdy na drugą. Badanie tego modelu nazywane jest ograniczonym zagadnieniem trzech ciał.

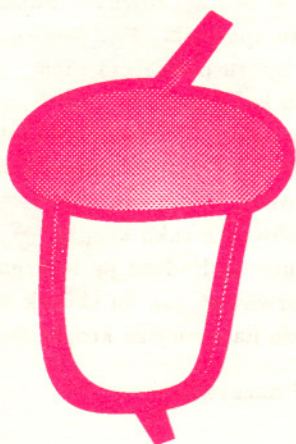
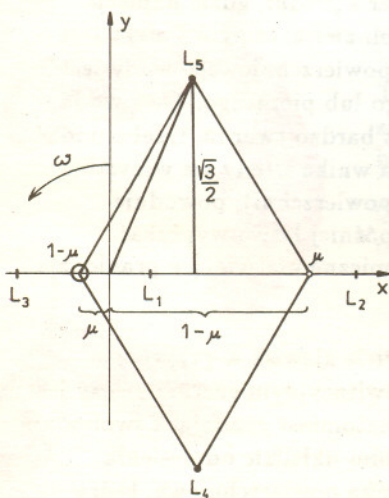
Ruch ciała znikomego wygodnie jest opisywać w układzie współrzędnych zaczepionym w środku masy ciał ciężkich i obracającym się wraz z nimi. Ponadto, dla prostoty rachunków, wygodnie jest za jednostkę masy przyjąć sumę mas ciał ciężkich ($M_1 + M_2 = M = 1$), za jednostkę długości ich odległość ($R = 1$) i taką jednostkę czasu, by okres ich obiegu ($T = 2\pi\sqrt{R^3/GM}$) wynosił 2π . G oznacza tu stałą grawitacji, która w tych jednostkach musi być równa 1. Łatwo zauważyć, że w tych jednostkach również prędkość kątową obiegu, a więc i prędkość kątową naszego układu współrzędnych ($\omega = \sqrt{GM/R^3}$), wynosi też 1. Masę lżejszego z ciał o niezerowych masach można teraz oznaczyć przez μ , cięższe musi mieć zatem masę równą $1 - \mu$, a ich odległości od środka masy, jako odwrotnie proporcjonalne do tych mas, wynoszą odpowiednio $1 - \mu$ i μ (rysunek).

Ruch ciała znikomego w tym wirującym układzie będzie się odbywać, oczywiście, pod wpływem przyspieszeń grawitacyjnych ze strony obu mas ciężkich oraz przyspieszenia odśrodkowego. Ruchem akurat zajmować się nie będziemy, stawiamy tylko akademickie pytanie: czy możliwy jest w tym układzie bezruch, tzn. czy istnieją w nim punkty, w których umieszczone ciało znikome pozostanie tam na zawsze? Warunkiem koniecznym bezruchu jest zerowanie się przyspieszenia ciała, zatem by odpowiedzieć na postawione pytanie, należy sprawdzić, czy istnieją takie punkty, w których wspomniane trzy przyspieszenia równoważą się.

Na odcinku między masami ciężkimi zawsze działają następujące przyspieszenia: ku masie cięższej równe $-(1 - \mu)/(\mu + x)^2$, ku lżejszej równe $\mu/(1 - \mu - x)^2$ i odśrodkowe $\omega^2 x$ równe w naszych jednostkach x . Czy ich suma

$$f(x) = -\frac{1 - \mu}{(\mu + x)^2} + \frac{\mu}{(1 - \mu - x)^2} + x$$

może gdziekolwiek być równa zero? Otóż widać, że całkowite przyspieszenie w punktach bliskich ciału cięższemu może być dowolnie ujemne (bo skierowane jest w lewo, a pierwszy mianownik może być dowolnie bliski zera). Podobnie rozumując zauważamy, że w punktach bliskich ciału lżejszemu całkowite przyspieszenie może być dowolnie dodatnie (bo jest skierowane w prawo, a drugi mianownik może być dowolnie bliski zera). Funkcja $f(x)$ na tym odcinku jest niewątpliwie ciągła, zatem gdzieś między masami ciężkimi musi być punkt, w którym $f(x) = 0$. Po sprowadzeniu do wspólnego mianownika i uporządkowaniu dostajemy równanie algebraiczne piątego stopnia na niewiadomą x określającą położenie interesującego nas punktu. Nie potrafimy, co prawda, rozwiązania jawnie napisać, ale ono istnieje i można go szukać np. numerycznie. Tak znaleźliśmy (prawie) jeden punkt, w którym równoważą się trzy przyspieszenia; nazywa się on dlatego (od łac. *libra* – waga) punktem libracji (albo punktem Lagrange’a, ponieważ on pierwszy wskazał pięć takich punktów). W ramach ćwiczeń Czytelnik może sam udowodnić, że w prawo od masy μ i w lewo od $1 - \mu$ na osi x istnieje jeszcze po jednym takim osobliwym punkcie, których położenia określone są również przez równania piątego stopnia. Jest to zresztą dość rzadki przypadek, by równanie piątego stopnia opisywało coś sensownego przyrodniczo. Te trzy tzw. liniowe punkty libracji oznaczane są tradycyjnie odpowiednio przez L_1 , L_2 i L_3 .





To nie wszystko. Otóż w płaszczyźnie orbit ciał ciężkich istnieją jeszcze dwa punkty libracji, mianowicie w wierzchołkach trójkątów równobocznych rozpiętych na odcinku łączącym ciała ciężkie. Zgadnąć tego chyba się nie da, ale sprawdzić jest bardzo łatwo. Ku masie cięższej działa przyspieszenie o wartości bezwzględnej $1 - \mu$ i o składowych $(1 - \mu)[- \cos 60^\circ, - \sin 60^\circ] = (1 - \mu)[-1/2, -\sqrt{3}/2]$. Ku masie lżejszej działa przyspieszenie μ o składowych $\mu[\cos 60^\circ, - \sin 60^\circ] = \mu[1/2, -\sqrt{3}/2]$. Wreszcie przyspieszenie odśrodkowe ma taką wartość liczbową, ile wynosi (w naszych zmodyfikowanych jednostkach) odległość wierzchołka trójkąta od środka masy układu, zatem jego składowe to po prostu długości przyprostokątnych trójkąta, którego ta odległość jest przeciwprostokątną: $[1/2 - \mu, \sqrt{3}/2]$. Suma tych trzech przyspieszeń rzeczywiście jest równa zeru. Tak sprawdziliśmy istnienie tzw. trójkątnych punktów libracji L_4 i L_5 .

Czy przyroda wykorzystuje istnienie punktów libracji? Pisaliśmy już o tym w *Delcie*, co prawda dość dawno (*Delta* 7/1982), więc przypomnieć chyba można. Otóż każdy z liniowych punktów libracji ma tę własność, że dowolnie małe zaburzenie bezruchu spoczywającej w nim cząstki powoduje natychmiastowe i bezpowrotne oddalenie się jej z miejsca startu – mówimy, że liniowe punkty libracji są niestabilne. Tu więc natura nie jest w stanie niczego na stałe umieścić. Inaczej jest w punktach trójkątnych: cząstka lekko wytracona z punktu trójkątnego ma szansę przez pewien czas wykonywać wokół niego ruch okresowy, jeżeli $\mu < 0,0385\dots$ Warunek ten jest spełniony np. dla układu Słońce-Jowisz, dlatego w pobliżu jego trójkątnych punktów libracji przebywa kilkanaście tzw. planetoid trojańskich, tj. nazwanych imionami bohaterów wojny trojańskiej. Podobnie podejrzewa się obecności tzw. pyłowych satelitów Ziemi w trójkątnych punktach libracji układu Ziemia-Księżyc. Wskutek nieuniknionych w rzeczywistej sytuacji zaburzeń ruchu ciała znikomego cząstki takie muszą wcześniej czy później opuścić sąsiedztwo swojego punktu libracji, za to na ich miejsce mogą przylecieć inne; w rezultacie w punktach trójkątnych ma prawo utrzymywać się stałe zgęszczenie drobnych cząstek, składające się z cząstek coraz to innych. Wprawdzie planetoidy trojańskie jeszcze nie puciekwały z miejsc stałego pobytu, ale cierpliwości...

Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

M 646. W przestrzeni trójwymiarowej dane są cztery punkty nie leżące w jednej płaszczyźnie. Ile istnieje różnych równoległościanów, dla których każdy z tych punktów jest jednym z wierzchołków?

Rozwiązanie na str. 16

M 647. O dwóch liczbach rzeczywistych a, b wiadomo tyle, że nierówność $a \cos x + b \cos 3x > 1$ nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych. Wykażać, że $|b| \leq 1$.

Rozwiązanie na str. 16

M 648. Nauczyciel napisał na tablicy trójmian kwadratowy $x^2 + 3x + 15$. Następnie wszyscy uczniowie w klasie podchodzili kolejno do tablicy; każdy z nich zmniejszał albo zwiększał o jeden współczynnik przy x albo wyraz wolny trójmianu. Na koniec okazało się, że na tablicy widnieje trójmian $x^2 + 13x + 5$. Czy jest prawda, że w pewnym momencie na tablicy był napisany trójmian o pierwiastkach całkowitych?

Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Jarosław KULPA

F 343. Kierowca nieopatrznie zapomniał zaciągnąć hamulec swojego poloneza pozostawionego na stoku góry o kącie nachylenia $\alpha = 10^\circ$. Jaka największa prędkość będzie mógł rozwinąć staczający się samochód?

Dane dotyczące poloneza: masa $m = 1200$ kg, moc silnika $P = 55$ kW, maksymalna prędkość na poziomej nawierzchni $v_{max} = 140$ km/h.

Rozwiązanie na str. 5

F 344. Piłeczka kauczukowa po czasie $t = 0,5$ sekundy spadła na podłogę. Odbiła się na wysokość $\eta = 0,9$ pierwotnej wysokości. Ile trwał cały ruch piłeczki aż do momentu zatrzymania?

Rozwiązanie na str. 5



mała delta

Jak Hooke objaśnił prawo Archimedesesa

Jeśli mamy w dużym naczyniu wodę i położymy na niej kawałek drewna, to drewno zanurzy się trochę i tak będzie sobie pływać. To, ile się zanurzy, opisuje prawo Archimedesesa. Mówi ono, że zanurzanie trwa dopóki wyrażenie

$$V \cdot \rho_c - x \cdot V \cdot \rho_p$$

jest dodatnie – V oznacza objętość ciała, ρ_c jego ciężar właściwy, ρ_p ciężar właściwy płynu, w którym ciało zanurzamy, a x mówi, jaka część ciała już się zanurzyła. Odjemna to ciężar ciała, a odjemnik to ciężar wypartego przez to ciało płynu. Łatwo zauważyć, że V nie ma tu nic do rzeczy – zanurzanie trwa, dopóki

$$\rho_c - x \cdot \rho_p > 0.$$

Jeśli spojrzeć na ten wzór bezmyślnie, to wyniknie z niego, że każde ciało w pewnym momencie przestanie się zanurzać. Można nawet obliczyć, w jakiej sytuacji tak się stanie:

$$x = \frac{\rho_c}{\rho_p}.$$

Sprawdźmy, jaka część klocka drewnianego (powiedzmy sosnowego) musi znaleźć się pod wodą, by zanurzanie się zakończyło.

$$x = \frac{0,55}{1} = 0,55.$$

Zatem klocek przestanie się zanurzać, gdy nieco więcej niż jego połowa znajdzie się pod powierzchnią wody. Obliczmy to samo dla żelaznego klucza ostrożnie położonego na powierzchni wody. Otrzymujemy

$$x = 7,8.$$

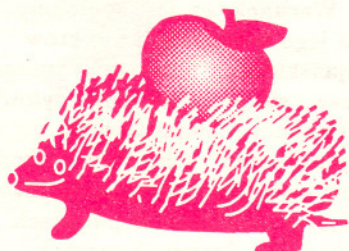
I teraz widać, że wynik jest bez sensu – przecież x to część zanurzona, a nie można zanurzyć niczego bardziej niż w całości, czyli

$$\text{zawsze } x \leq 1.$$

Gdy jest inaczej, zanurzanie nie może się zakończyć. Dlatego żelazny klucz będzie się zanurzał, aż się zatrzyma na dnie naczynia.

No dobrze, to każdy wie i bez naszych obliczeń. O tym też była poprzednia *Mała Delta*. Zadajmy jednak dwa pytania.

Pierwsze bardzo głupie: jak jest możliwe wobec tego, by po morzach pływały żelazne statki? Odpowiedź jest oczywista – ciężar właściwy to stosunek ciężaru do objętości; ciężar właściwy statku jest nawet mniejszy niż drewna. Przecież, aby go obliczyć, należy podzielić ciężar statku przez całą jego objętość, a nie tylko przez objętość żelaza, z którego jest zbudowany.



Pytanie drugie wiąże się z eksperymentem. Do takiego samego naczynia jak poprzednio nie nalewamy wody, lecz nasypujemy drobnego suchego piasku. Na jego powierzchni kładziemy żelazny klucz. Zgodnie z naszymi obliczeniami powinien on natychmiast utonąć w piasku, gdyż końcowi zanurzenia odpowiada

$$x = \frac{7,8}{1,6} \approx 4,9 > 1.$$

Klucz jednak nie tonie. Każdy z oburzeniem powie: *przecież piasek nie jest płynem*. Prawda, ale na czym polega różnica? Co takiego różni sypki, drobny piasek od płynu? Przecież łatwiej jest np. „nalać” go do szklanki, niż, powiedzmy, miód.

Pytanie to zadał sobie (i innym) angielski fizyk Robert Hooke. Było to ponad trzysta lat temu. Hooke nie tylko zadał to pytanie, ale też odpowiedział na nie – wskazał mianowicie sposób, by skłonić piasek do zachowywania się jak woda. Wprawmy bowiem naczynie z piaskiem i leżącym na nim kluczem w drgania (można postawić go na masce traktora z włączonym silnikiem albo na pokrywie pracującej pralki, można wreszcie potrząsać delikatnie naczyniem trzymanym w ręku) – klucz utonie. Spróbujmy teraz sprawdzić, czy przedmioty o mniejszym niż piasek ciężarze właściwym będą się wynurzać – wepchnijmy głęboko w piasek kawałek drewnianki, wprawmy naczynie w drgania i zobaczymy, że drewnianka wypłynie na powierzchnię.

Hooke wyciągnął stąd wniosek, że woda to właściwie taki piasek, tylko odpowiednio energicznie drgający. Tak, jego zdaniem, zbudowane są wszystkie płyny (ciecze i gazy). Z tego pomyslowego doświadczenia narodziła się koncepcja zwana kinetyczno-molekularną teorią budowy ciał. Każda substancja, w myśl tej teorii, jest w swej budowie podobna do piasku, a jej zachowanie zależy od tego, jak bardzo intensywne są drgania jego ziarenek.

Każda substancja, bo rozciągnięto tę teorię również i na ciała stałe. Sprawdzone, że energia drgań cząsteczek danej substancji zależy od jej temperatury. A ponieważ ciała stałe można stopić, więc wymyślono, że jest to złamanie struktury krystalicznej (lub podobnej do niej), która nie pozwala ciału stałemu zmieniać kształtu. To zresztą dało się potem również sprawdzić. A na pomysł, że tak jest, można było wpaść również z tego powodu, iż ochłodzona woda przecież zmienia się w ciało stałe – lód.

Najciekawsze w tym wszystkim jest to, że poszczególnych „ziarenek” wody nie mógł Hooke zobaczyć żadnym sposobem. My dziś umiemy je obejrzeć też tylko pośrednio. Są one zbyt małe, by dały się oglądać choćby najlepiej uzbrojonym okiem – mają rozmiar 0,000 000 01 cm. Mimo że nigdy ich nie widział, umiał Hooke jednak odtworzyć ich zachowanie metodą zręcznie pomyslanej analogii.

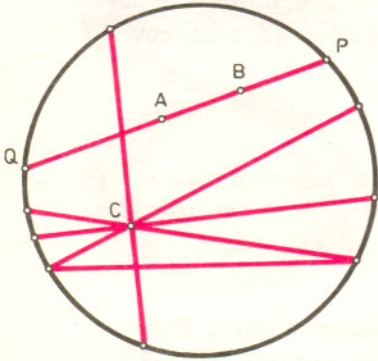
Jeśli ktoś ma do dyspozycji drobny groszek styropianowy i drobny ołowiany śrut, może przeprowadzić następujące pouczające doświadczenia:

- w „styropianowej wodzie” drewno tonie,
 - w „śrutowej wodzie” żelazo pływa,
 - „piaskowa oliwa” wypływa na wierzch „śrutowej wody”
- i wiele innych, które na tych motywach można obmyślić. Można też budować okręty i łodzie podwodne dostosowane do każdej z tych „wód”.

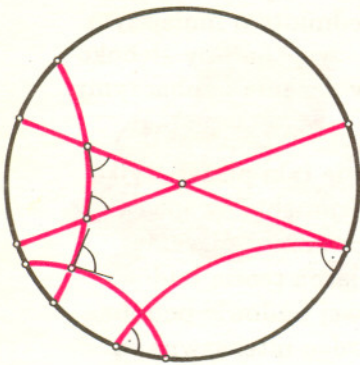
Małą Deltę przygotował Marek KORDOS

O dwóch modelach

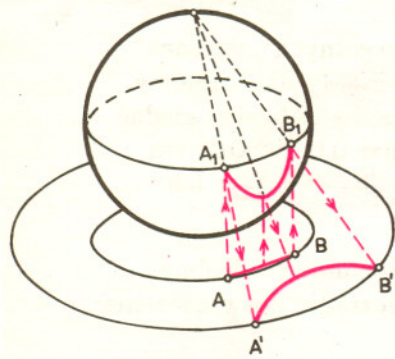
Zdzisław POGODA



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Gdy Janos Bolyai i Nikołaj Łobaczewski (którego 200. rocznicę urodzin właśnie obchodzimy) budowali podstawy geometrii nieeuklidesowej, jednym z najważniejszych zadań, z którym próbowali się uporać, było wykazanie niesprzeczności nowej teorii. Należało wykazać, że w geometrii nieeuklidesowej nie można znaleźć dwóch zdań wzajemnie sprzecznych. Niestety, ani Łobaczewski, ani Bolyai nie byli w stanie w pełni rozstrzygnąć tego problemu.

Zagadnienie mogło być rozwiązane dopiero przez wskazanie odpowiedniego modelu geometrii nieeuklidesowej. Pierwszy taki model zaproponował w 1868 roku Beltrami. Jednakże najbardziej znane (i poglądowe) są dwa inne modele: model kołowy Kleina i, również w kole, model Poincarégo. Każdy z nich ma swoje wady, lecz także każdy ma szereg zalet. Przyjrzyjmy się im.

W modelu Kleina płaszczyznę stanowi wnętrze koła, a prostymi są cięciwy okręgu tegoż koła (rys. 1). Proste wyglądają euklidesowo, ale nic nie jest za darmo. Za ich euklidesowy kształt należy między innymi zapłacić w ten sposób, że euklidesowe, widziane przez nas, kąty między prostymi nie są kątami w geometrii nieeuklidesowej. Na przykład, dwie proste prostopadłe w tym modelu zazwyczaj nie będą reprezentowane przez prostopadłe cięciwy. Również, aby proste (a tym samym i płaszczyzna) były nieograniczone, odległość musi być określona w inny, bardziej specyficzny sposób. Przypomnijmy to określenie.

Wyberzmy dwa punkty A i B , poprowadźmy cięciwę o końcach P , Q (przypominamy, nie należących do modelu) przechodzącą przez te punkty (porównaj rys. 1); odległość obliczamy według wzoru

$$d(A, B) = \ln \left(\frac{AP}{BP} : \frac{AQ}{BQ} \right).$$

Analizując tę formułę można się przekonać, że spełnia ona własności, których zazwyczaj oczekujemy od odległości. Jest to jednak odległość nieeuklidesowa. Na przykład dwie cięciwy o wspólnym końcu są w modelu prostymi równoległymi. Ponadto obliczana w ten sposób długość odcinka AP jest nieograniczona (wystarczy przeanalizować wzór, gdy B zbliża się do P); AP jest półprostą. Studiując własności modelu Kleina można wykazać, jak pewne zależności, które mają miejsce w geometrii euklidesowej, nie będą prawdziwe w przypadku nieeuklidesowym (np. pewnik o równoległych, porównaj rys. 1).

Drugi model, model Poincarégo, budowany jest podobnie. Płaszczyznę stanowi wnętrze koła, ale prostymi nie będą już cięciwy, tylko łuki okręgów prostopadłe do brzegu naszego koła oraz jego średnice. Tracąc euklidesowość prostych zyskujemy „wiernokątność”; kąty, jakie tworzą łuki modelujące proste, są kątami w geometrii nieeuklidesowej. W tym przypadku możemy zobaczyć i mierzyć zwykłym kątomierzem kąty nieeuklidesowe (rys. 2). Odległość określana jest podobnie jak w poprzednim modelu.

Można wykazać, że jeden model da się otrzymać z drugiego wykorzystując odpowiednie rzutowania półsfery: prostokątne w przypadku modelu Kleina i stereograficzne w przypadku modelu Poincarégo. Idea przejścia od jednego modelu do drugiego przedstawiona jest na rysunku 3.

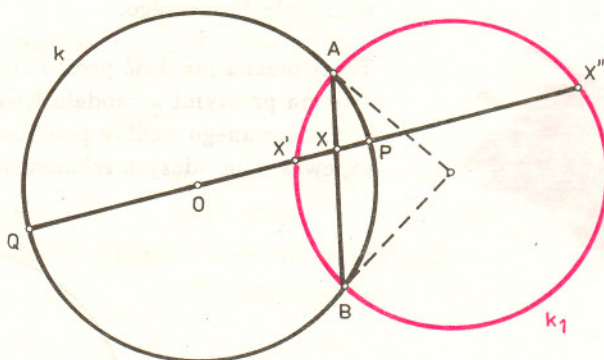
Odpowiednie własności tych rzutów pozwalają na formułowanie wniosków dotyczących obu modeli i geometrii nieeuklidesowej. Przy okazji dostajemy jeszcze jeden model geometrii Bolyaia-Łobaczewskiego, na półsferze.

Istnieje inny ciekawy związek modelu Poincarégo z modelem Kleina, tym razem bez odwoływania się do przekształceń w przestrzeni. Związek ten jest prosty i ma jeszcze jedną zaletę: daje pewien przepis na mierzenie kątów w modelu Kleina przy wykorzystaniu modelu Poincarégo.

Niech k oznacza koło, wewnątrz którego służy za model Kleina, punkt O niech będzie jego środkiem. Możemy zapisać w skrócie $k(O, r)$, gdzie r jest długością promienia. Każdemu punktowi X z modelu (czyli z wnętrza k) przyporządkujemy taki punkt X' leżący na promieniu wyznaczonym przez O i X , by

$$d(O, X') = \frac{1}{2}d(O, X),$$

gdzie $d(O, X')$ i $d(O, X)$ są nieeuklidesowymi długościami odcinków OX' i OX (rys. 4). Tak określone przekształcenie będzie przeprowadzało proste w modelu Kleina na proste w modelu Poincarégo zbudowanym we wnętrzu tego samego koła; model Kleina w kole $k(O, r)$ zostanie przekształcony na model Poincarégo w tym samym kole.



Rys. 4

Dla dowodu wybierzmy cięciwę AB reprezentującą prostą w modelu Kleina. Przetnijmy ją średnicą PQ . Punkt przecięcia tych odcinków oznaczmy przez X . Następnie przez punkty A i B poprowadźmy okrąg k_1 prostopadły do brzegu k . Środek tego okręgu znajdziemy prowadząc styczne do k w punktach A i B ; punkt przecięcia tych stycznych będzie środkiem szukanego okręgu. Niech X' oznacza punkt otrzymany w wyniku przecięcia nowego okręgu ze średnicą PQ . Jak łatwo zauważyć, tak otrzymany punkt X' odpowiada punktowi X przy przejściu od modelu Kleina do modelu Poincarégo pokazanemu na rysunku 3 (z jedną drobną różnicą: koło z modelu Poincarégo zmniejszyliśmy tak, aby było tej samej wielkości co koło z modelu Kleina).

Wystarczy teraz wykazać, że właśnie dla tego punktu zachodzi równość

$$d(O, X') = \frac{1}{2}d(O, X).$$

Z definicji odległości d mamy

$$d(O, X) = \ln \left(\frac{OP}{OQ} : \frac{XP}{XQ} \right) = \ln \frac{XQ}{XP} = \ln \frac{r + OX}{r - OX}$$

oraz

$$d(O, X') = \ln \left(\frac{OP}{OQ} : \frac{X'P}{X'Q} \right) = \ln \frac{X'Q}{X'P} = \log \frac{r + OX'}{r - OX'}.$$

Przedłużmy jeszcze średnicę PQ tak, by otrzymać drugi punkt X'' na okręgu k_1 . Nietrudno zauważyć, że

$$OX' \cdot OX'' = r^2$$

oraz z własności cięciw

$$QX \cdot XP = AX \cdot XB = X'X \cdot XX''$$

albo inaczej

$$(r + OX)(r - OX) = QX \cdot XP = X'X \cdot XX'' = (OX - OX')(OX'' - OX).$$

I dalej

$$r^2 - OX^2 = (OX - OX') \left(\frac{r^2}{OX'} - OX \right) = OX \cdot \frac{r^2}{OX'} - r^2 - OX^2 + OX \cdot OX',$$

skąd

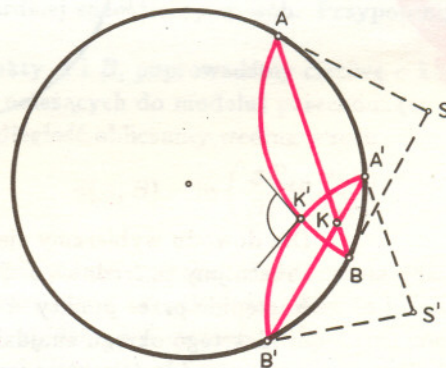
$$OX = 2r^2 : \left(\frac{r^2}{OX'} + OX' \right) = \frac{2r^2 OX'}{r^2 + OX'^2}.$$

Ze związków tych dostaniemy

$$\begin{aligned} d(O, X) &= \ln \frac{r + OX}{r - OX} = \ln \left[\left(r + \frac{2r^2 OX'}{r^2 + OX'^2} \right) : \left(r - \frac{2r^2 OX'}{r^2 + OX'^2} \right) \right] = \\ &= \ln \frac{(r + OX')^2}{(r - OX')^2} = 2 \ln \frac{r + OX'}{r - OX'} = 2d(O, X'), \end{aligned}$$

a o to nam chodziło. Prosta z modelu Kleina przekształcana jest na prostą w modelu Poincarégo.

Teraz można już dość prosto otrzymać przepis na zmierzenie kąta między dwiema prostymi w modelu Kleina przechodząc do modelu Poincarégo konstruowanego według powyższego schematu w tym samym kole. Czytelnik zapewne sam odczyta schemat postępowania z przedstawionego rysunku.



Rys. 5

Funkcje wielokrotne

W 1985 roku Janusz Murakowski zdobył wyróżnienie w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki za pracę pt. *Funkcje wielokrotne*. Pomysł tej pracy jest bardzo ciekawy i nie został on do końca wyczerpany (praca liczyła kilka stron), więc przytoczymy go ponownie licząc na to, że jego autor będzie miał godnych następców. A oto ów pomysł.

Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie jakąś funkcją. Oczywiście, wiadomo, co to jest jej n -krotne złożenie $f^{(n)} = f \circ f \circ \dots \circ f$. Można jednak wprowadzić też ułamkowe wielokrotności funkcji. Przez $f^{(1/n)}$ będziemy rozumieli taką funkcję, że jej n -krotne złożenie da funkcję f . Teraz już wiadomo, jak określić wymierne wielokrotności funkcji

$$f^{(m/n)} = f^{(1/n)} \circ f^{(1/n)} \circ \dots \circ f^{(1/n)} \quad (m \text{ razy}),$$

a stąd krok do określenia rzeczywistych wielokrotności $f^{(a)}$, gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą. No dobrze, ale nasuwają się od razu pytania ... My w tym momencie kończymy. Resztę pozostawiamy Czytelnikom.

Piotr HAJŁASZ



Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1992.

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 1993

Zadania z matematyki nr 247, 248

Redaguje Marcin E. KUCZMA

247. Udowodnić, że średnie: arytmetyczna, geometryczna i harmoniczna

$$A = (a + b + c)/3, \quad G = (abc)^{1/3}, \quad H = 3/(a^{-1} + b^{-1} + c^{-1})$$

dowolnych liczb dodatnich a, b, c spełniają nierówność

$$3A^2 + G^2 \geq 4G^3H^{-1}.$$

248. Wyznaczyć wszystkie pary liczb naturalnych x, y spełniające warunek

$$NWW(x, y) = \frac{xy}{\max\{x, y\} - \min\{x, y\}}.$$

Zadanie 248 zaproponował pan Piotr Jurczyszyn z Opola.

Zadania z fizyki nr 145, 146

Redaguje Jerzy B. BROJAN

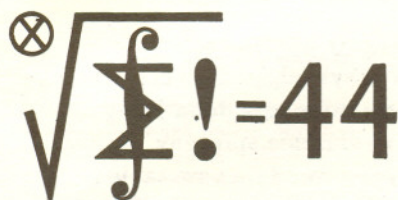
145. Rozchodzeniu się dźwięku na duże odległości (przy silnych wybuchach) towarzyszy często występowanie zewnętrznej strefy słyszalności oddzielonej strefą ciszy od bezpośredniej okolicy źródła dźwięku. Objasnić to zjawisko i obliczyć lub orientacyjnie ocenić promień zewnętrznej strefy słyszalności zakładając, że temperatura powietrza maleje od -10°C przy powierzchni do -70°C na wysokości 13 km, a następnie rośnie do 0°C na wysokości 50 km.

Wskazówka. Prędkość dźwięku w gazie dana jest wzorem

$$v = \sqrt{\frac{RT}{\mu}} \kappa,$$

gdzie μ - masa molowa, $\kappa = c_p/c_v$ (stosunek ciepła właściwego przy stałym ciśnieniu do ciepła właściwego przy stałej objętości). Zmiany składu chemicznego atmosfery oraz zakrzywienie powierzchni Ziemi zaniedbać.

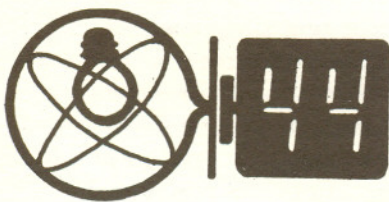
146. Dwie płaskie, równoległe i nieskończone płyty przewodzące są uziemione i odległe o d . W połowie odległości między płytami znajduje się punktowy ładunek q . Obliczyć siłę działającą na każdą z płyt.



Czołówka ligi zadaniowej Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 233 ($WT=1,47$) i 234 ($WT=2,99$)
z numeru 1/1992

Janusz Olszewski	- Suwałki	43,15
Henryk Kornacki	- Augustów	43,08
Marek Prauza	- Poraj	40,12
Piotr Kumor	- Olsztyn	39,98
Mirosław Matłega	- Skoczów	38,46
Przemysław Gadziński	- Środa Śl.	36,49



Czołówka ligi zadaniowej Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 131 ($WT=3,04$) i 132 ($WT=3,22$)
z numeru 1/1992

Dzierżysław Lipniacki	- Lublin	29,11
Tomasz Wietecha	- Tarnów	21,31
Przemysław Gworys	- Częstochowa	17,87
Andrzej Nowogrodzki	- Chocianów	15,91
Dariusz Wilk	- Rzeszów	14,87

W artykule tym chcemy omówić bardzo pożyteczną regułę wykrytą empirycznie przez Le Chateliera ponad 100 lat temu (w 1884 roku) i trzy lata później uzasadnioną teoretycznie przez Karla Brauna. Stosowana jest ona przede wszystkim w chemii do przewidywania zachowania się pod wpływem zmian temperatury czy ciśnienia układów będących w równowadze. Wyjaśnienie istnienia takiej reguły jest jednak dość ogólne, a jednocześnie proste.

Reguła stwierdza, że jeśli układ w stanie równowagi zostanie poddany działaniu czynnika zewnętrznego (np. ogrzaniu czy sprężeniu), to w układzie zajdą takie zmiany, które zmniejszą wpływ tego czynnika (stąd czasem spotykana nazwa: reguła przekory).

Podamy teraz kilka przykładów zastosowania tej reguły, by na końcu wyjaśnić jej pochodzenie.

Na początek najprostsze zastosowania.

Wszystkie ciała mają dodatnie ciepło właściwe, gdyż według powyższej reguły podczas ogrzania ciało musi dążyć do zmniejszenia wpływu wzrostu temperatury, czyli musi pochłaniać ciepło.

Przy zwiększaniu ciśnienia ciała zmniejszają swoją objętość, by przeciwdziałać temu wzrostowi.

Ciepło topnienia jest dodatnie, ponieważ przy podgrzewaniu mieszaniny ciała stałego i cieczy równowaga przesuwa się w stronę cieczy – oznacza to, że ciało stałe topniejąc musi pochłaniać ciepło.

Reguła ta pomaga również odpowiedzieć na mniej oczywiste pytania. Na przykład, czy rozpuszczanie dwutlenku węgla w wodzie związane jest z wydzielaniem czy pochłanianiem ciepła? Każdy wie, że ciepła woda mineralna czy *Coca-Cola* zawiera mniej dwutlenku węgla niż zimna – m.in. z tego powodu trzymamy je w lodówce. Z tego wynika, że ze wzrostem temperatury maleje rozpuszczalność dwutlenku węgla w wodzie. Reguła wskazuje, że przy rozpuszczaniu gazu musi być wydzielane ciepło, gdyż wtedy przy ochłodzeniu układu rozpuści się więcej gazu i wydzieli się ciepło przeciwdziałając w ten sposób spadkowi temperatury.

Ostatni przykład, który omówimy, zastosowania tej reguły w chemii dotyczy reakcji produkcji amoniaku z mieszaniny wodoru i azotu. Weźmy pod uwagę mieszaninę wodoru H_2 i azotu N_2 w pewnej temperaturze T i przy pewnym ciśnieniu p . W układzie takim zachodzą równocześnie reakcje tworzenia amoniaku NH_3 i rozpadu amoniaku z powrotem na wodór i azot. Jeżeli układ jest w równowadze (co zakładamy), to reakcje w obie strony zachodzą z równą szybkością i stężenia (ciśnienia parcjalne) wszystkich gazów są stałe, nie zależą od czasu.

Możemy reakcje te zapisać następująco:



Zapis $+110 \text{ kJ}$ oznacza, że powstaniu dwóch moli amoniaku towarzyszy wydzielenie 110 kJ ciepła. Reguła Le Chateliera mówi, że jeżeli taki układ podgrzejemy, to równowaga przesuwa się w stronę większego stężenia wodoru i azotu. Dzieje się tak dlatego, gdyż rozpad każdej cząsteczki amoniaku na wodór i azot powoduje pobranie z układu pewnej ilości ciepła, czyli zmniejszenie temperatury. Z kolei, jeśli zwiększymy ciśnienie w układzie, to równowaga przesuwa się w stronę większego stężenia amoniaku, ponieważ reakcja przebiegająca w prawo przekształca cztery mole gazu w dwa mole gazu, co przy tej samej objętości powoduje zmniejszenie ciśnienia.

W fizyce używamy tej reguły bardzo często nie używając jej nazwy. Na przykład, jeśli do ciężarka zawieszzonego na sprężynie dołożymy dodatkowy ciężarek, spowoduje to wydłużenie sprężyny. Oznacza to, że wydłużenie sprężyny powoduje powstanie większej siły przeciwnie skierowanej do siły ciężkości pochodzącej od dodatkowego ciężarka.

Przejdźmy do wyjaśnienia pochodzenia reguły Le Chateliera–Brauna. Wówczas jej powszechność stanie się zrozumiała.

Wyobraźmy sobie sytuację, kiedy reguła Le Chateliera–Brauna nie jest spełniona, a układ jest w równowadze (to bardzo istotne założenie, jak zaraz zobaczymy). Na przykład, założmy, że przy podwyższeniu temperatury równowaga w mieszaninie azotu, wodoru i amoniaku przesuwa się w stronę amoniaku. Jeżeli teraz w pewnym miejscu układu temperatura lokalnie podniesie się np. o $0,01^\circ\text{C}$, to powstanie w tym miejscu więcej amoniaku i jednocześnie wydzieli się trochę ciepła. To wydzielone ciepło spowodowałoby zwiększenie temperatury i równowaga przesunęłaby się jeszcze bardziej w stronę amoniaku. Jeżeli nie byłoby żadnego innego czynnika hamującego, to proces postępowałby lawinowo, aż do całkowitego przekształcenia mieszaniny w amoniak (plus nadmiar azotu lub wodoru) i wydzieleniu ogromnej ilości ciepła. Ale małe fluktuacje w układzie zawsze się zdarzają, więc układ nie mógł być w równowadze wbrew założeniu. Czyli reguła ta sprowadza się do dość zrozumiałego faktu, że na to, aby układ był w równowadze trwałej, musi mieć ujemne sprzężenie zwrotne przy wszystkich możliwych małych wytrąceniach tego układu z położenia równowagi.

Z tego widać, że o ile u ludzi przekora najczęściej wyprowadza z równowagi, to w świecie materialnym przekora jest niezbędnym warunkiem równowagi.



Rozwiązanie zadania M 646.
Aby jednoznacznie określić równoległoscian, wystarczy zadać jeden jego wierzchołek i trzy płaszczyzny „środkowe” (wszystkie wierzchołki równoległoscianu leżą w tej samej odległości od takiej płaszczyzny; jest ona równoległa do dwóch ścian równoległoscianu i przechodzi przez jego środek symetrii).

Dla czterech punktów A, B, C i D (nie leżących w jednej płaszczyźnie) znajdziemy siedem płaszczyzn równo odległych od każdego z nich (cztery z tych płaszczyzn oddzielają po jednym punkcie od pozostałych trzech, trzy zaś oddzielają od siebie skośnie krawędzie czworoscianu $ABCD$). Z siedmiu płaszczyzn można wybrać

$$\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$$

różnych trójek. Trzy płaszczyzny środkowe równoległoscianu przecinają się w jednym punkcie, zatem z 35 trójek należy odrzucić te, które składają się z trzech płaszczyzn równoległych do jednej prostej; Czytelnik łatwo zauważy, że takich trójek jest sześć – tyle, ile krawędzi ma czworoscian $ABCD$. Równoległoscianów spełniających warunki zadania jest zatem $35 - 6 = 29$.



Rozwiązanie zadania M 647.
Niech $f(x) = a \cos x + b \cos 3x$; mamy

$$f(n\pi) = (-1)^n(a + b) \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

$$f(\pi/3) = \frac{a}{2} - b,$$

$$f(2\pi/3) = -\frac{a}{2} + b.$$

Stąd, ponieważ nierówność $f(x) > 1$ nie ma rozwiązań, dostajemy $|a + b| \leq 1$ oraz $|a - 2b| \leq 2$. Zatem z nierówności trójkąta

$$3|b| = |(b + a) + (2b - a)| \leq 1 + 2 = 3,$$

czyli teza zadania jest prawdziwa.



Rozwiązanie zadania M 648.
Zauważmy, że każdy z uczniów dokonując zmiany opisanej w treści zadania – zmienia o ± 1 wartość trójmianu dla $x = -1$. Dla $x = -1$ trójmian napisany przez nauczyciela ma wartość 12, trójmian zaś końcowy ma wartość -7 . Zatem w pewnym momencie na tablicy był napisany trójmian, którego wartość dla $x = -1$ była równa 0. Trójmian o współczynnikach całkowitych i jednym pierwiastku całkowitym ma oba pierwiastki całkowite, jeśli tylko współczynnik przy x^2 jest równy 1.

W 1931 r. Karl Jansky, inżynier z Bell Telephone Laboratory, wykrył radiowe promieniowanie „z nieba” nasilające się i słabnące w okresie zbliżonym do 24 godzin. Odkrycie zostało dokonane przypadkiem, gdyż Jansky badał wtedy rozchodzenie się fal radiowych stosowanych w łączności. W ten sposób, chociaż niechcący, wykonane zostały pierwsze astronomiczne obserwacje radiowego promieniowania pochodzącego z Drogi Mlecznej, a w szczególności z centrum Galaktyki. Powstała radioastronomia.

W 1979 r. rozpoczęła się era obserwacji przeciwnego końca widma promieniowania elektromagnetycznego. W tym mianowicie roku rozpoczął prace sztuczny satelita HEAO 3 (*High Energy Astronomical Observatory*) wyposażony w detektory promieniowania gamma. Jego aparatura stwierdziła obecność w tym zakresie silnej linii widmowej odpowiadającej energii kwantów 1,809 MeV. Aparatura ta, choć najlepsza w owym czasie, była na tyle marna, że nie była w stanie określić położenia źródła tej linii. Nie dawało się to zresztą zrobić jeszcze przez dłuższy czas. O samej linii wiadomo było, że pochodzi z rozpadu radioaktywnych jąder ^{26}Al . Okres połowicznego rozpadu tego izotopu wynosi 720 000 lat, skąd wniosek, że ^{26}Al musiał w Galaktyce powstać niedawno bądź jest produkowany stale.

Wreszcie w 1987 r. trzech astronomowie z Instytutu Maxa Plancka wykonali szereg obserwacji kosmicznego promieniowania gamma za pomocą teleskopu wyniesionego w górne warstwy atmosfery... balonem. Mogąc śledzić zakres energii od 1 do 14 MeV znaleźli, oczywiście, linię pochodzącą z rozpadu ^{26}Al oraz zdołali sporządzić mapę jej natężenia na niebie. Okazało się, że źródło linii leży w kierunku centrum Galaktyki. Rozdzielczość tej mapy nie była zbyt wielka, a linię 1,809 MeV mogą produkować gwiazdy nowe, supernowe lub Wolfa-Rayeta (są to supergorące gwiazdy z rozległymi i szybko rozszerzającymi się otoczkami), które właśnie skupiają się zarówno w płaszczyźnie Drogi Mlecznej, jak i w kierunku na centrum Galaktyki. Nie można więc było od razu rozstrzygnąć, skąd właściwie linia 1,809 MeV pochodzi. Jednak gdyby była ona tworzona w tego rodzaju obiektach, to – jak stwierdzili teoretycy – powinna jej towarzyszyć np. linia 1,16 MeV pochodząca od ^{44}Ti , czego obserwacje nie potwierdziły.

Pozostał wniosek, że to samo centrum naszej Galaktyki jest istotnie na tyle aktywne, że emituje promieniowanie w każdym razie w obu skrajnych zakresach widma, a domyślnie – w całym widmie, tylko że przez materię międzygwiazdową nie wszystko może się przedostać. Do wyjaśnienia mechanizmu tej emisji jest chyba jeszcze daleko, aczkolwiek przypisuje się ją coraz chętniej czarnej dziurze tkwiącej w centrum Galaktyki. W ogóle aktywność naszej Galaktyki, na szczęście dość słaba, chyba nikogo już nie dziwi, a odkrycie aktywności u kolejnych galaktyk nie budzi sensacji. Być może wszystkie galaktyki są w jakimś stopniu aktywne – kwestia tylko w natężeniu tej aktywności.

Tomasz KWAST

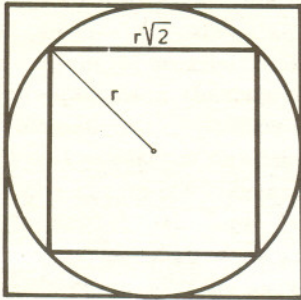
W starym doku w japońskim mieście Yokosuka powstaje nowy instytut naukowy. Przez piętnaście lat prowadzone tam będą badania biologiczne mikroorganizmów żyjących w oceanie na dużych głębokościach. Instytut będzie dysponował okrętami podwodnymi, w tym okrętem Shinkai 6500 – rekordzistą światowym pod względem głębokości zanurzenia załogowych okrętów podwodnych. Wydobycie z dużych głębokości mikroorganizmy w specjalnych ciśnieniowych pojemnikach zostaną przeniesione do zautomatyzowanych laboratoriów mikrobiologicznych. Tam pod ciśnieniem kilkuset atmosfer, w temperaturach od poniżej zera do powyżej 100°C i przy różnych kwasowościach będą hodowane i badane. Naukowcy mają nadzieję uzyskać w ten sposób informacje o wczesnym okresie rozwoju życia i ekologii dużych głębokości. Przemysł japoński czeka natomiast na odkrycie organizmów o unikalnych własnościach, które można by wykorzystać. O tym, że badania organizmów żyjących w ekstremalnych warunkach mogą przynieść wymierne korzyści, świadczy przykład uzyskania z bakterii znalezionych w gorących źródłach enzymów mogących przeprowadzać reakcję polimeryzacji.

Pokrywamy płaszczyznę kwadratami

Mamy dany taki nieskończony ciąg liczbowy $\{r_n\}$,
że $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^2 = \infty$; wykazać, że kołami o promieniach r_n można
pokryć płaszczyznę.

Zadanie to pochodzi z jednej ze studenckich olimpiad matematycznych w ZSRR; poniżej przedstawimy piękne rozwiązanie, autorem którego jest A. Bachszecjan, pracownik Uniwersytetu w Erewaniu.

Na wstępie zauważmy, że teza zadania równoważna jest możliwości pokrycia płaszczyzny kwadratami o bokach r_n .



$$(r\sqrt{2})^2 < \pi r^2 < (2r)^2 = 2(r\sqrt{2})^2$$

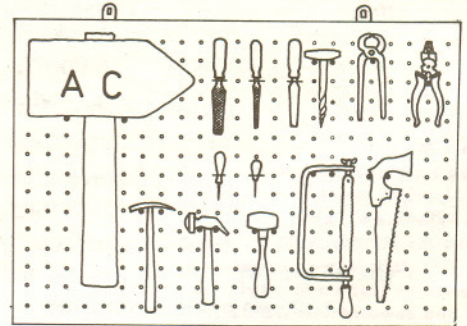
Rozpatrzmy dwa przypadki: albo istnieje takie $\varepsilon > 0$, że $r_n \geq \varepsilon$ dla nieskończonego wielu n , albo dla każdego $\varepsilon > 0$ można znaleźć tylko skończoną liczbę wskaźników n , dla których $r_n \geq \varepsilon$. W pierwszym przypadku teza jest oczywista; za pomocą nieskończonego wielu kwadratów o bokach równych ε można pokryć płaszczyznę, uda się więc to przy użyciu kwadratów większych. Zajmijmy się zatem drugim przypadkiem.

Możemy założyć, że $\{r_n\}$ jest ciągiem nierosnącym. Dlaczego? Weźmy dowolne i ; promieni większych od r_i jest skończenie wiele, możemy je więc uporządkować od największego do najmniejszego. Postępując tak dalej, możemy ustawić promienie w ciąg monotoniczny.

Będziemy rozważać koła bez brzegów; jeśli nimi da się pokryć płaszczyznę, to i kołami domkniętymi też. Wybierzmy dowolny punkt O_1 na płaszczyźnie jako środek koła o promieniu r_1 . Zbiór punktów nie należących do tego koła jest domknięty, istnieje zatem taki punkt O_2 nie należący do koła, że odległość dowolnego punktu spoza koła od O_1 jest nie mniejsza niż odległość O_1 od O_2 (oczywiście, będzie to dowolny punkt z okręgu). Po co wprowadzać punkt O_2 w taki sposób, a nie od razu brać element

W roku 1983 Międzynarodowy Kongres Matematyków odbywał się w Warszawie. Kilku matematyków zagranicznych ze zdziwieniem zauważyło nazwisko Banacha nad przednimi szybami niektórych tramwajów. Gdy poprosili gospodarzy o wyjaśnienie, dowiedzieli się, że istnieje w tym mieście ulica, nazwana imieniem Stefana Banacha. Koniecznie chcieli tę ulicę zobaczyć, udali się więc na nią odpowiednim tramwajem. Kiedy dotarli na miejsce, okazało się, że znajduje się tam sporej wielkości niezabudowany obszar. Stwierdzili wówczas zgodnie, że nie jest to „ulica Banacha”, ale raczej „przestrzeń Banacha”...

Galeria Jednego Cytatu



– Aksjomat wyboru to potężne narzędzie...
(z wykładu dla studentów matematyki)

z brzegu? Bo w analogiczny sposób można rozumowanie powtarzać, konstruując kolejne koła i korzystając z tego, że ich suma jest zbiorem otwartym. W punkcie O_2 umieszczamy koło o promieniu r_2 , a jako O_3 wybieramy któryś z punktów spoza sumy dwóch kół o minimalnej odległości od O_1 . I tak dalej...

Przypuśćmy, że po wykorzystaniu wszystkich r_n skonstruowana powyżej nieskończona suma kół nie pokryje całej płaszczyzny i weźmy punkt P nie należący do otrzymanej figury. Wówczas figura nasza zawiera się w kole o środku O_1 i promieniu $R + r_1$, gdzie R jest odległością O_1 od P . Rozważmy teraz koła o środkach w punktach O_n i promieniach $\frac{r_n}{2}$. Są one parami rozłączne; gdyby bowiem koła o numerach j i k miały punkt wspólny ($j < k$), to O_k należałoby do koła o środku O_j i promieniu r_j , co jest – na mocy konstrukcji – niemożliwe. Wobec tego suma pól mniejszych kół jest nie większa niż $\pi(R + r_1)^2$; ale z drugiej strony wynosi ona $\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n^2}{4}$, czyli nieskończoność. Uzyskana sprzeczność kończy dowód.

Wykazaliśmy, że jeśli mamy rodzinę kwadratów o nieskończonej sumie pól, to da się nimi pokryć płaszczyznę. A gdyby kwadraty zastąpić prostokątami? Odpowiemy na to w następnym *EPSILONIE*, niemniej jednak zachęcamy Czytelników do samodzielnego zmiernienia się z tym zadaniem.

Armen EDIGARIAN

Komputerowa rewelacja w matematyce i jej zastosowaniach

„*Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer*” jest wszechstronnie rozbudowanym i otwartym systemem oprogramowania komputerowego. Umożliwia wygodne i szybkie prowadzenie bardzo precyzyjnych obliczeń zarówno numerycznych, jak też symbolicznych oraz ich graficzną wizualizację. System *Mathematica* oddaje też do dyspozycji użytkownika nowoczesny, proceduralny język programowania wysokiego poziomu. Może być stosowany zarówno na poziomie edukacyjnym, jak też profesjonalnym w naukach matematyczno-przyrodniczych, politechnicznych, ekonomicznych czy też społecznych.

System można zainstalować zarówno na komputerach osobistych klasy Macintosh, IBM PC 386, 486, na stacjach roboczych, takich jak: Silicon Graphics, Evans & Shutherland, SUN, HP czy IBM/6000, jak też na komputerach linii DEC lub CONVEX.

System *Mathematica* umożliwia pracę, między innymi, w następujących działach: arytmetyka, algebra macierzowa, analiza spektralna (na przykład obliczanie transformat Fouriera i Laplace’a), analiza funkcjonalna (badanie funkcji, różniczkowanie, całkowanie, rozwiązywanie równań różniczkowych, optymalizacja), rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Oto, jak prosto całkuje się numerycznie funkcję $\sin(\sin(x))$

```
In [1] := N Integrate[sin[sin[x]], {x, 0, pi}]
```

```
Out [1] := 1.78649,
```

gdzie In [1] := to znak zachęty (prompt) systemu *Mathematica*, po którym należy wpisać polecenie; odpowiedź otrzymuje się w postaci Out [1] := ...

System *Mathematica* jest ciągle rozbudowywany, istnieje bogata literatura omawiająca zastosowania systemu *Mathematica* oraz biblioteka specjalistycznych pakietów rozszerzających jej możliwości. Wolfram Research Inc oferuje również granty umożliwiające organizację laboratoriów *Mathematica* do celów edukacyjnych. Wydział Fizyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki oraz Wydział Chemii UW otworzyły Międzywydziałowe Laboratorium *Mathematica* i tym samym weszły do Educational Grant Program.

Wszelkich informacji dotyczących systemu *Mathematica* i programu grantów udziela ShockWave, Wolfram Research, Inc, Przedstawicielstwo w Polsce, 02-936 Warszawa, ul. Bonifacego 74/94, tel. 42 59 18, tel/fax 628 72 52.

Ryszard KUTNER

Na okładkach prezentujemy grafikę wykonaną za pomocą systemu *Mathematica*.