UWAGA !!!

w prenumeracie *Delta* tańsza

SPIS TREŚCI

NUMERU 9(220)

W następnym numerze:

Stefan Banach o swoim ojcu

„Delta"
matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej

Adres Redakcji:

ul. Smyczkowa 5/7
02-678 Warszawa
tel. 43-02-43 wewn. 21

Adres poczty komputerowej (E-mail address):
DELTA@PLEARN.BITNET

Wydawca:

Uniwersytet Warszawski
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa

Nakład 8 500 egz.
Wydrukowano w Zakładach Graficznych w Warszawie, ul. Srebrna 16

Skład systemem TEX wykonała redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na I kwartał 1993 r. wynosi 18 000,– zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
   - na teren kraju
     - jednostki kolportażowe „Ruch" właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób,
     - urzędy pocztowe na terenie wiejskim i w miejscowościach, w których nie ma jednostek kolportażowych „Ruch" – poczta zapewnia dostawę zamówionych egzemplarzy pocztą zwykłą pod wskazanym adresem **w ramach opłaconej prenumeraty,**
   - na zagranicę
     - Zakład Kolportażu Prasy i Wydawnictw, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – **dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty**, z wyjątkiem zlecenia dostawy pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni pokrywa prenumerator.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
   - na kraj i zagranicę – do 20 XI na I kwartał roku następnego
     do 20 II na II kwartał
     do 20 V na III kwartał
     do 20 VIII na IV kwartał.

Cena 1 egzemplarza 8 000,– zł

The David Hilbert Medal for Marcin E. Kuczma

W poprzednim numerze wspomnieliśmy o przyznaniu Marcinowi Kuczmie Medalu Hilberta. A oto bardziej szczegółowa informacja. Medale te przyznaje

World Federation of National Mathematics Competitions

z siedzibą w Canberze (Australia). Na czele Federacji stoi prezes Prof. Peter O'Halloran. Federacja ta zajmuje się gromadzeniem informacji o wszelkiego rodzaju konkursach matematycznych na całym świecie. Z polskich imprez zarejestrowane w *W.F.N.M.C.* są: Olimpiada Matematyczna, Austriacko–Polskie Zawody Matematyczne oraz nasza Liga Zadaniowa.

Pełna nazwa odznaczenia, jakie uzyskał Marcin E. Kuczma, brzmi *David Hilbert International Award for the Enrichment of Mathematics Using the Stimulus of Mathematics Challenges* (medal and certificate).

Jury nagrody stanowi *The Federation Awards Committee*, trzyosobowe ciało złożone z przedstawicieli trzech różnych krajów, któremu przewodniczy Harold Reiter (USA). Nagroda jest przyznawana za działalność określoną jako „outstanding international contribution to the learning of mathematics by the use mathematics challenges". Prezes O'Halloran określa sens nagrody szerzej: „Federacja dokonale zdaje sobie sprawę z tego, że wielu matematyków i nauczycieli matematyki, zaangażowanych w prowadzenie konkursów matematycznych, nie znajduje w swoich krajach należytego uznania za swoje osiągnięcia; to syndrom znany pod nazwą *nikt nie jest prorokiem we własnym kraju.* Wszelako ta właśnie działalność często daje uczniom i ich nauczycielom jedyną sposobność wypróbowania sił w zetknięciu z matematyką uprawianą w sposób odmienny niż w programie szkolnym, twórczy i ciekawy". Wypowiedź ta wzięta jest z wydawanego przez *W.F.N.M.C.* czasopisma *Mathematics Competitions.*

W ubiegłym roku laureatami Medalu Hilberta byli: Prof. Arthur Engel (Frankfurt), Dr Graham Pollard (Canberra), Prof. Edward Barbeau (Toronto).

W tym roku zostali nimi:
Prof. **Murray Klamkin** (Edmonton): „for his numerous stimulating articles on mathematical challenges and, in particular, for his inspiring papers in *Mathematics Competitions.*"
Mr **Martin Gardner** (North Carolina): „for his outstanding series of books and articles making mathematical recreations and challenge accessible and exciting to the scientific and general community."
Dr **Marcin E. Kuczma** (Warszawa): „for his contribution to mathematical challenges as well as for his inspiring paper in *Mathematics Competitions.*"
Artykuł, o którym mowa, to *The „Delta" Problem Contest Club 44*, zamieszczony w *MC, Vol. 3, No. 3, December 1990.*

W Polsce najbardziej znany spośród zagranicznych laureatów Medalu Hilberta jest niewątpliwie Martin Gardner, redaktor działu matematyki *Scientific American*, autor wielu rzeczywiście wspaniałych książek.

Medale zostały wręczone podczas
7th International Congress on Mathematical Education, Québec, August 16–23.
Wręczał je Prof. Miguel de Guzmán, stojący na czele wpływowej organizacji *International Commission on Mathematics Instruction.*

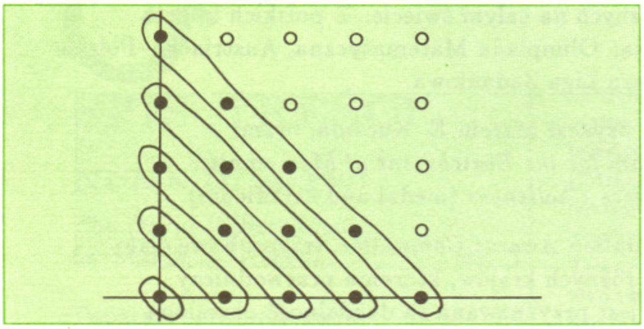
Jeszcze raz składamy serdeczne gratulacje Laureatowi i wszystkim uczestnikom Ligi Matematycznej.

Redakcja

Popatrzeć geometrycznie

Edmund PUCZYŁOWSKI

Spójrzmy w ten sposób na sumę $1+2+\ldots+n$. Otrzymamy ją zliczając czarne punkty kolejno w „ukośnych" grupach na rysunku 1 (tutaj $n=5$).



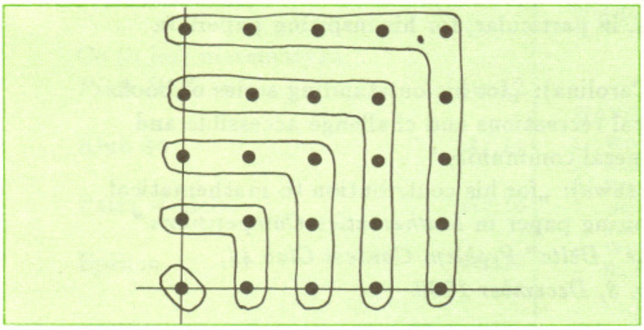
Rys. 1

Dopełniających do kwadratu $n \times n$ kółek jest o n mniej. W efekcie

$$(1+2+\ldots+n)+[(1+2+\ldots+n)-n]=n^2\,,$$

skąd natychmiast wynika dobrze znany wzór
$1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

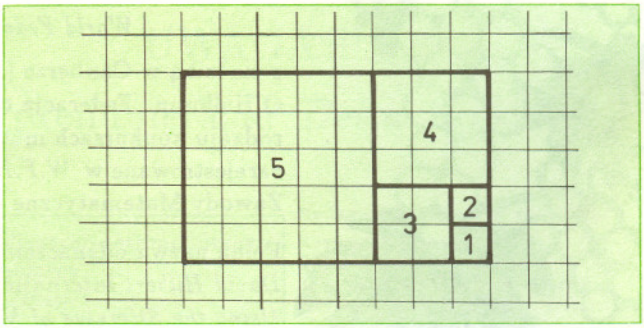
Jeszcze prościej oblicza się „geometrycznie" sumę $1+3+5+\ldots+(2n+1)$. Wystarczy tylko zauważyć, że sumę tę otrzymuje się licząc po kolei od kierunku południowo-zachodniego do pólnocno-wschodniego punkty w paczkach zaznaczonych na rysunku 2 (tutaj też $n=5$) i że punkty te wypełniają kwadrat $n \times n$. Otrzymujemy $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.



Rys. 2

Ciąg $1,1,2,3,5,8,\ldots$ jest zbudowany w ten sposób, że – poczynając od miejsca trzeciego – każdy jego wyraz jest sumą dwóch bezpośrednio go poprzedzających, czyli $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$, $n=1,2,\ldots$. Ciąg ten nazywa się ciągiem Fibonacciego i ma wiele interesujących własności. Jedną z nich odkryjemy.

Zauważmy, że sumę $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$ możemy zinterpretować geometrycznie jako sumę pól kwadracików o bokach a_i ułożonych według schematu pokazanego na rysunku 3 (dla $n=5$ bok i-tego kwadracika jest równy a_i).



Rys. 3

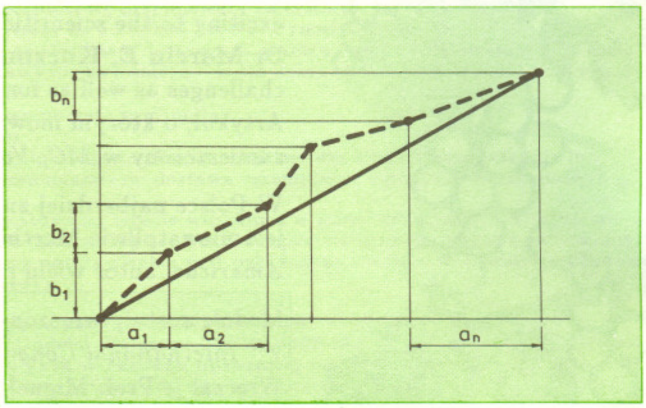
Kwadraciki te składają się na prostokąt o bokach a_n i $a_{n-1}+a_n=a_{n+1}$. Wynika stąd, że $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=a_n\cdot a_{n+1}$.

Wykażemy teraz, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1,\ldots,a_n$ $b_1,\ldots,b_n$

$$(i)\qquad \sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\ldots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}\geq$$
$$\geq\sqrt{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2+(b_1+b_2+\ldots+b_n)^2},$$

$$\sqrt{(1-a_1)^2+a_2^2}+\sqrt{(1-a_2)^2+a_3^2}+\ldots+$$
$$(ii)\qquad +\sqrt{(1-a_{n-1})^2+a_n^2}+\sqrt{(1-a_n)^2+a_1^2}\geq$$
$$\geq\frac{n\sqrt{2}}{2}\,.$$

By wykazać nierówność (i), wystarczy zauważyć najpierw, że można założyć, iż wszystkie a_i, b_i są nieujemne, a następnie spojrzeć na rysunek 4 i przypomnieć sobie twierdzenie Pitagorasa oraz fakt, że łamana ma długość nie mniejszą niż odcinek łączący jej końce.

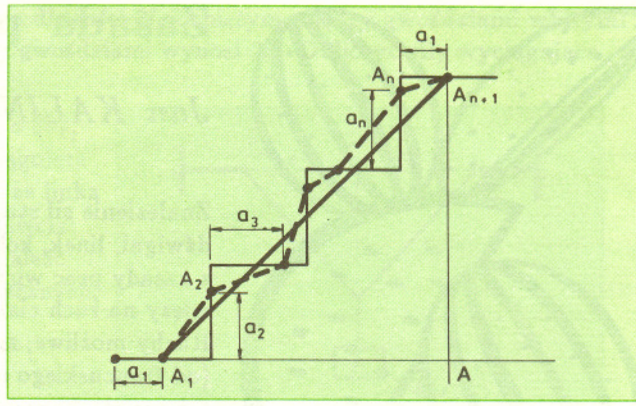


Rys. 4

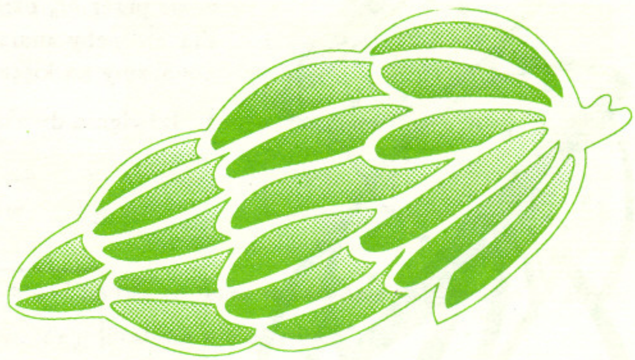
Drugą nierówność uzyskać jest trudniej. Wygodnie jest zauważyć, że można ograniczyć rozważania do przypadku, gdy $0\leq a_i\leq 1$. Wymaga to nieco więcej wysiłku niż redukcja w poprzednim przypadku. Można by też nie wykonywać redukcji, a uogólnić nieco dalsze rozumowanie oraz rozważyć oddzielnie przypadek n nieparzystego i parzystego. My założymy, że n jest parzyste podpowiadając, że drugi przypadek można, wykazując nieco sprytu, łatwo do tego sprowadzić.

Narysujmy łamaną (rys. 5) o $n+1$ bokach długości 1 i kolejno prostopadłych. Na bokach tej łamanej odłóżmy kolejno odcinki o długościach $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_1$. Łącząc końce tych odcinków tak jak na rysunku 5 otrzymamy łamaną $A_1 A_2 \ldots A_n A_{n+1}$, której długość jest równa lewej stronie nierówności (ii). Łamana ta ma długość nie mniejszą niż długość odcinka $A_1 A_{n+1}$. Ta z kolei jest równa $\sqrt{(A_1 A)^2 + (AA_{n+1})^2}$. Zauważmy jednak, że odcinki $A_1 A$ i AA_{n+1} są oba równe $\frac{n}{2}$. W efekcie

$$\sqrt{(1-a_1)^2 + a_2^2} + \sqrt{(1-a_2)^2 + a_3^2} + \ldots +$$
$$+ \sqrt{(1-a_{n-1})^2 + a_n^2} + \sqrt{(1-a_n)^2 + a_1^2} \geq$$
$$\geq \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{4}} = \frac{n\sqrt{2}}{2}.$$



Rys. 5



Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

M 643. Na polach szachownicy 111×111 wpisujemy w dowolny sposób jedynki i minus jedynki, po jednej liczbie na każdym polu. Pod każdą kolumną zapisujemy iloczyn liczb stojących w kolumnie, obok każdego wiersza – iloczyn liczb stojących w tym wierszu. Otrzymane w ten sposób 222 liczby dodajemy. Udowodnić, że uzyskana suma jest niezerowa.
Rozwiązanie na str. 16

M 644. Na polach szachownicy 6×6 leży 18 nie zachodzących na siebie kostek domina (o wymiarach 2×1 każda). Wykazać, że niezależnie od sposobu ich ułożenia można jedną z poziomych lub pionowych linii oddzielających pola przeciąć szachownicę na dwie części tak, by nie przeciąć na pół żadnej kostki domina.
Rozwiązanie na str. 16

M 645. Mamy pewną liczbę 1992-cyfrową podzielną przez 9. Niech k oznacza sumę cyfr tej liczby, m niech będzie sumą cyfr liczby k, l zaś – sumą cyfr liczby m. Jakie wartości może przybierać l?
Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Jarosław KULPA

F 341. Pod jakim kątem w stosunku do pionu byłby widoczny z Warszawy satelita geostacjonarny nadający polskie programy i zawieszony nad równikiem na tej samej długości geograficznej co Warszawa. Promień Ziemi wynosi $R \approx 6400$ km.
Rozwiązanie na str. 12

F342. Do sprężynki przyłożono zmienne napięcie o częstotliwości ν. Obliczyć częstotliwość dźwięku, jaki zaczęła wydawać drgająca sprężynka.
Rozwiązanie na str. 12

Zasada prac wirtualnych

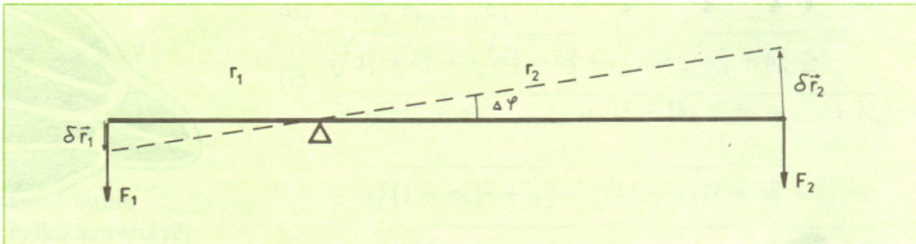
Jan KALINOWSKI

Znalezienie sił statycznych działających w skomplikowanym układzie bloczków, dźwigni, linek, kołowrotów, kratownic itp. znakomicie ułatwia skorzystanie z zasady prac wirtualnych. Układy linek, bloczków itp. nakładają pewne więzy na ruch ciał, tzn. pewne ruchy są możliwe, inne zabronione przez więzy. Ruchy możliwe, zgodne z więzami, będziemy nazywać ruchami wirtualnymi (od francuskiego słowa *virtuel* – możliwy). Zasada prac wirtualnych (zwana też zasadą Lagrange'a lub zasadą prac przygotowanych) mówi, że dla położenia równowagi praca wirtualna danych sił $\vec{F}_i$ musi być równa zeru, tzn.

$$0 = \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i\,,$$

gdzie przez $\delta\vec{r}_i$ oznaczyliśmy przesunięcie wirtualne punktu i, na który działa siła $\vec{F}_i$. Żeby znaleźć siły, trzeba wyobrazić sobie przesunięcie wirtualne układu. Zobaczmy na kilku przykładach, jak korzystać z tej zasady.

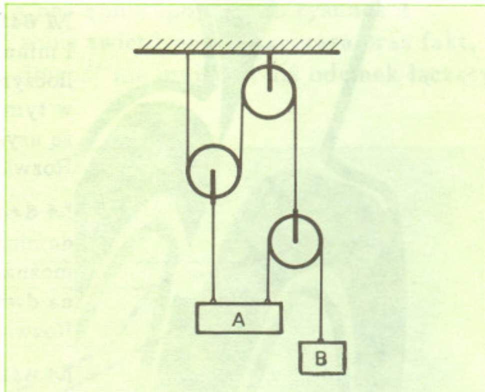
1. Dźwignia dwustronna. Znaleźć zależność między siłami F_1 i F_2.



Przesunięciem zgodnym z więzami jest obrót dźwigni o kąt $\delta\varphi$. Wówczas $\delta r_1 = r_1\delta\varphi$, $\delta r_2 = r_2\delta\varphi$. Mamy więc

$$0 = F_1 r_1 \delta\varphi - F_2 r_2 \delta\varphi \implies \frac{F_1}{F_2} = \frac{r_2}{r_1}\,.$$

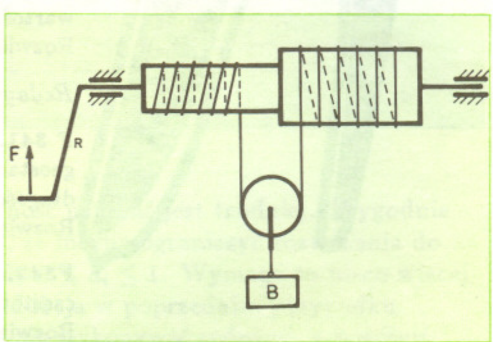
2. Znaleźć zależność między ciężarami ciał A i B w układzie przedstawionym na rysunku. Masy linek i bloczków pominąć. Linki są nierozciągliwe.



Jeśli podniesiemy ciało A o δr, to łatwo przekonać się, że ciało B opuści się w dół o $5\delta r$. Stąd

$$P_B = 5P_A\,.$$

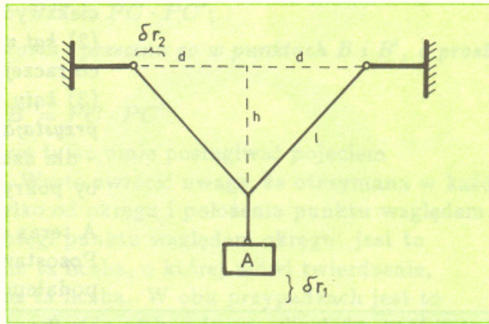
3. Kołowrót różnicowy. Linka nawinięta jest na kołowroty o promieniach r_1 i r_2 w przeciwne strony. Jaką siłę należy przyłożyć prostopadle do korby o ramieniu R, aby zrównoważyć ciało B?



Jeśli obrócimy kołowrót o kąt $\delta\varphi$, to koniec korby przesunie się o $R\delta\varphi$, a ciało B o $\frac{1}{2}(r_2\delta\varphi - r_1\delta\varphi)$. Stąd

$$F = P_B\frac{r_2 - r_1}{2R}\,.$$

4. Ciało A wisi na sznurze o długości $2l$ rozpiętym między gwoździami wbitymi w ściany. Odległość między gwoździami wynosi $2d$. Obliczyć siły wyciągające gwoździe ze ścian.

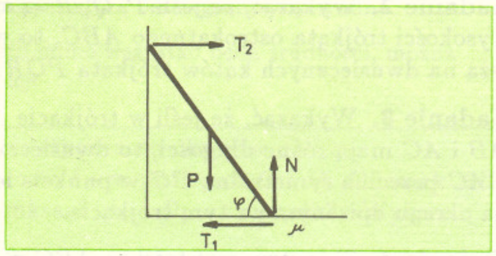


Jeśli ciało A opuściłoby się o δr_1, to gwoździe zostałyby wyciągnięte ze ścian o δr_2. Zakładając, że linka jest nierozciągliwa i przesunięcia wirtualne są małe, łatwo znaleźć z rozważań czysto geometrycznych, że $\delta r_2 = \frac{h}{d}\delta r_1$. Stąd

$$F = \frac{1}{2}P_A \cdot \frac{h}{d}.$$

Zauważmy, że F nie jest równe napięciu linki, tylko jest jej składową poziomą wyciągającą gwóźdź ze ściany.

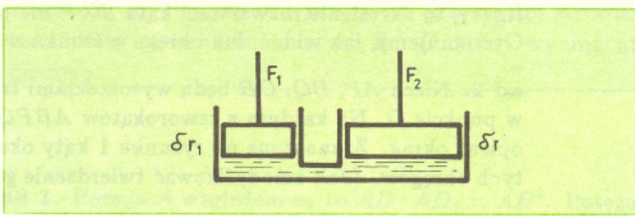
5. Drabina oparta o gładką ścianę. Współczynnik tarcia drabiny o podłogę wynosi μ, a środek ciężkości drabiny znajduje się w połowie jej długości. Określić najmniejszy kąt φ, jaki może utworzyć drabina z poziomem, aby nie upaść.



Zauważmy, że $T_1 = T_2$, $N = P$ i że jest to teraz w zasadzie poprzednie zadanie. Otrzymujemy $T_1 = \frac{P}{2}\operatorname{ctg}\varphi$. Żeby drabina nie upadła,

$$T_1 \le \mu P \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi \ge \frac{1}{2\mu}.$$

6. Na koniec rozważmy prasę hydrauliczną o powierzchni tłoków S_1 i S_2.



Jeśli ciecz w prasie jest nieściśliwa, to $S_1\delta r_1 = S_2\delta r_2$. Stąd

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{S_1}{S_2}.$$

Znowu zaczął się ukazywać miesięcznik *Komputer*. Byliśmy przy jego narodzinach w 1986 roku i przy jego upadku w 1990 roku. Teraz wydaje go IDG Poland SA, czyli oddział amerykańskiego koncernu IDG (radzie nadzorczej przewodniczy Patrick J. McGovern). Pod amerykańską opieką i w oparciu o amerykańskie pieniądze *Komputer* zyskał atrakcyjniejszą formę graficzną i ma szanse na sukces rynkowy, czego mu życzymy.

Redakcja

Najbardziej spektakularnymi osiągnięciami astronomicznymi uzyskanymi za pomocą sztucznych obiektów kosmicznych były, oczywiście, badania otoczenia i powierzchni planet naszego Układu Słonecznego. Warto więc może przypomnieć (bo mamy jakby okres zastoju w astronautyce), że urządzenia te prowadziły również badania komet. I tak 25 IV 1983 satelita podczerwieni IRAS nawet odkrył kometę. Kilka dni później niezależnie odkryli ją George Alcock z Anglii i Genichi Araki z Japonii, w rezultacie kometa nazywa się IRAS-Araki-Alcock. Pierwszą kometą badaną z bliska przez sondę – 1 IX 1985 – była kometa Giacobiniego–Zinnera, a tą sondą był amerykański International Cometary Explorer (ICE). Wreszcie, jak może pamiętamy, kometa Halleya podczas swojego ostatniego zbliżenia do Słońca (1985/1986) badana była z bliska przez wiele sond. Brały w tym udział radzieckie Vega 1 i Vega 2, zachodnioeuropejska Giotto, japońskie Sakigake i Suisei oraz wspomniany amerykański ICE.

Kąty w okręgu

Każdy, kto choć trochę interesuje się geometrią, wie, że
(1) *kąt wpisany w okrąg jest równy połowie kąta środkowego opartego na tym samym łuku.*

Dwa proste wnioski z tego twierdzenia pozwalają na szybkie rozwiązanie wielu ciekawych zadań geometrycznych. Pierwszy z nich to
(2) *kąt wpisany jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy jest oparty na półokręgu,*
co raczej dowodu nie wymaga. Kolejny to
(3) *kąty wpisane w ten sam okrąg przystają wtedy i tylko wtedy, gdy są oparte na przystających łukach*
– dla uzasadnienia należy tak obrócić jeden z łuków względem środka okręgu, by pokrył się z drugim.

A teraz siedem zadań demonstrujących przydatność powyższych spostrzeżeń. Pozostawiam Czytelnikom przyjemność ich rozwiązywania. Dla mających trudności podałem na końcu wskazówki.

Zadanie 1. Dany jest punkt P oraz okrąg o. Jaką figurę tworzą środki cięciw wyznaczonych na o przez proste przechodzące przez P ?

Zadanie 2. Wykazać, że jeśli P, Q, R są spodkami wysokości trójkąta ostrokątnego ABC, to wysokości te leżą na dwusiecznych kątów trójkąta PQR.

Zadanie 3. Wykazać, że jeśli w trójkącie ABC boki AB i AC mają różne długości, to dwusieczna kąta BAC przecina symetralną BC w punkcie leżącym na okręgu opisanym na tym trójkącie.

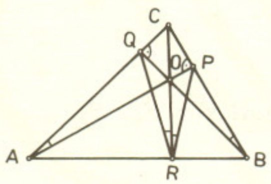
Zadanie 4. Skonstruować trójkąt ABC mając dane długości wysokości, środkowej i dwusiecznej poprowadzonych z wierzchołka A.

Zadanie 5. Prosta łącząca wierzchołek C trójkąta ABC ze środkiem S okręgu wpisanego w ten trójkąt przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punkcie M ($M \neq C$). Wykazać, że $MS = MA$.

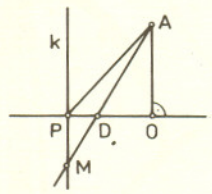
Zadanie 6. Punkty A i B leżą na okręgu o. Jaką figurę utworzą środki okręgów wpisanych w trójkąt ABC, gdy punkt C będzie „biegał" po okręgu o ?

Zadanie 7. Niech A, B i C będą punktami okręgu o i niech M będzie środkiem łuku AB tego okręgu, a N – środkiem łuku BC. Prosta MN przecina AB w punkcie P, a BC w punkcie Q. Wykazać, że $BP = BQ$.

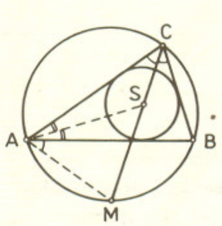
Jerzy BEDNARCZUK



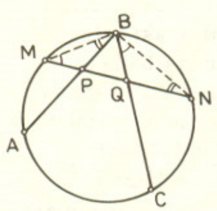
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

ad 1. Jeśli oznaczymy przez S środek okręgu, a przez X dowolny punkt szukanej figury, to określenie rozwartości kąta SXP nie powinno nastręczyć trudności. Otrzymujemy, jak widać, łuk okręgu o środku w połowie odcinka PS.

ad 2. Niech AP, BQ, CR będą wysokościami trójkąta ABC i niech się przecinają w punkcie O. Na każdym z czworokątów $ABPQ$, $AQOR$, $BPOR$ można (wobec (2)) opisać okrąg. Zaznaczone na rysunku 1 kąty okażą sie równe na mocy (1) w każdym z tych okręgów. (Jak zmodyfikować twierdzenie gdy trójkąt ABC nie jest ostrokątny?)

ad 3. Wystarczy zauważyć, że zarówno symetralna BC, jak i dwusieczna kąta BAC – tu korzystamy z (3) – dzielą łuk BC okręgu opisanego na trójkącie ABC – ten nie zawierający A – na połowy.

ad 4. Niech wysokość ma długość h, dwusieczna – d, a środkowa – s. Rysujemy trójkąt prostokątny AOD o przyprostokątnej $AO = h$ i przeciwprostokątnej $AD = d$ oraz trójkąt prostokątny AOP o przeciwprostokątnej $AP = s$ – oba po tej samej stronie prostej AO. Przedłużamy AD do przecięcia z prostą k równoległą do AO poprowadzoną przez punkt P – rysunek 2. Oznaczmy ten punkt przecięcia przez M, a przecięcie prostej k z symetralną odcinka AM przez Q. Okrąg o środku Q i promieniu QA przecina prostą OP w szukanych punktach B i C. Łatwo się o tym przekonać przyglądając się poprzedniemu zadaniu.

ad 5. Punkt S jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów trójkąta ABC. Wobec tego $\angle CAS = \angle BAS$ oraz $\angle ACM = \angle BCM = \angle BAM$ – ostatnia równość wynika z (2). Wobec tego $\angle ASM = \angle CAS + \angle ACS = \angle BAS + \angle BAM = \angle SAM$ – rysunek 3.

ad 6. Będą to zawarte wewnątrz o łuki okręgów przechodzących przez A i mające, odpowiednio, środki w środkach łuków, na które dzielą o punkty A i B – wystarczy spojrzeć na poprzednie zadanie.

ad 7. Wobec (3) $\angle BMN = \angle CBN$ oraz $\angle ABM = \angle BNM$ – rysunek 4. Stąd $\angle BPM = \angle BQN$, a więc $\angle BPQ = \angle BQP$.

Potęga punktu względem okręgu

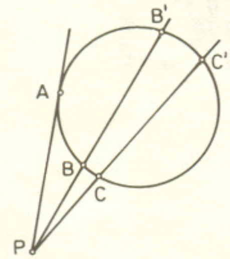
Kiedyś w programie szkoły podstawowej mieściły się następujące dwa twierdzenia: ***jeżeli punkt P leży na zewnątrz okręgu o i prosta k jest do niego styczna w punkcie A, prosta l przecina go w punktach B i B', a prosta m przecina go w punktach C i C', to***

$$PA^2 = PB \cdot PB' = PC \cdot PC';$$

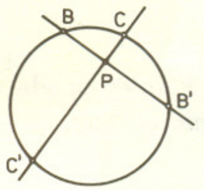
jeżeli punkt P leży wewnątrz okręgu o i prosta l przecina go w punktach B i B', a prosta m przecina go w punktach C i C', to

$$PB \cdot PB' = PC \cdot PC'.$$

Dowieść tych twierdzeń jest łatwo, jeśli się tylko umie posługiwać pojęciem podobieństwa trójkątów (rysunki 1 i 2). Warto zwrócić uwagę, że otrzymana w każdym z tych przypadków liczba jest zależna tylko od okręgu i położenia punktu względem niego. Dlatego wprowadza się pojęcie potęgi punktu względem okręgu: jest to w przypadku punktu na zewnątrz właśnie ta liczba, o której mówi twierdzenie, a w przypadku punktu wewnątrz – minus ta liczba. W obu przypadkach jest to (jak łatwo obliczyć z twierdzenia Pitagorasa) różnica kwadratu odległości punktu od środka okręgu i kwadratu promienia okręgu. O potędze udowodniono wiele twierdzeń, wprowadzono pojęcia osi potęgowej i środka potęgowego, ale nawet nie wiedząc o potędze nic, poza tym, że istnieje, można – pamiętając o wspomnianych wyżej twierdzeniach – rozwiązać wiele zadań, które bez tego byłyby trudne.



Rys. 1



Rys. 2

Proponuję rozwiązanie pięciu zadań. Jeśli mimo wszystko będą trudności, można zajrzeć do wskazówek umieszczonych dalej.

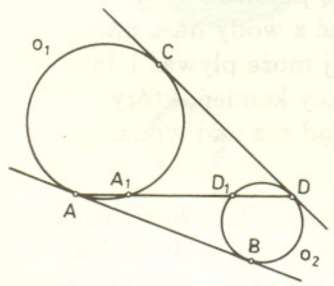
Zadanie 1. Prosta k jest zewnętrznie styczna do okręgów o_1 i o_2 odpowiednio w punktach A i B, a prosta l – w punktach C i D. Odcinek AD przecina te okręgi odpowiednio w punktach A_1 i D_1 – rysunek 3. Wykazać, że $AA_1 = DD_1$.

Zadanie 2. Na boku AC trójkąta ABC skonstruować taki punkt P, by było $PA \cdot PC = PB^2$.

Zadanie 3. Dana jest prosta k i dwa punkty A i B po jej jednej stronie. Skonstruować okrąg styczny do k i przechodzący przez A i B.

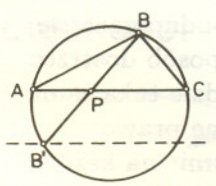
Zadanie 4. Dany jest okrąg o i dwa leżące na zewnątrz niego punkty A i B. Skonstruować okrąg styczny do o i przechodzący przez A i B.

Zadanie 5. Punkty A i B leżą po przeciwnej stronie prostej k. Poprowadzić taki okrąg przechodzący przez A i B, który wycina na prostej k najkrótszą cięciwę.



Rys. 3

Jerzy BEDNARCZUK

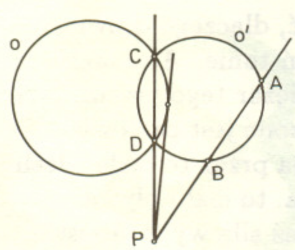


Rys. 4

ad 1. Potęga A względem o_2 to $AD \cdot AD_1 = AB^2$. Potęga D względem o_1 to $DA \cdot DA_1 = DC^2$. Ponieważ $AB = CD$, więc $AD_1 = DA_1$, skąd mamy tezę.

ad 2. Odbijamy symetrycznie punkt B względem prostej AC i prowadzimy przez obraz prostą równoległą do AC. Jej przecięcie (obojętnie które) z okręgiem opisanym na ABC oznaczmy B'. Odcinek BB' przecina AC w poszukiwanym punkcie (rys. 4).

ad 3. Oznaczmy przez P punkt przecięcia prostej AB z k. Punkt styczności k z szukanym okręgiem jest odległy od P o $\sqrt{PA \cdot PB}$. Gdy prosta AB jest równoległa do k, łatwo jest wskazać rozwiązanie.

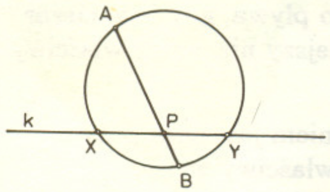


Rys. 5

ad 4. Narysujmy jakiś okrąg o' przechodzący przez A i B oraz przecinający o. Oznaczmy punkty przecięcia o i o' przez C i D. Z punktu P przecięcia prostych AB i CD rysujemy styczną do o. Jej punkt Q styczności to trzeci (poza A i B) punkt szukanego okręgu. Jeśli ktoś ma wątpliwości, niech sprawdzi, że (rys. 5)

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = PQ^2,$$

co dowodzi, że Q jest punktem styczności szukanego okręgu i o. A gdy P nie istnieje ?



Rys. 6

ad 5. Najkrótsza cięciwa to taka, że punkt P przecięcia AB z prostą k jest jej środkiem. Istotnie, dla dowolnego okręgu mamy (rys. 6)

$$\frac{1}{2}XY = \frac{1}{2}(PX + PY) \geq \sqrt{PX \cdot PY} = \sqrt{PA \cdot PB}$$

i równość ma miejsce tylko dla $PX = PY$. Okrąg taki ma środek w przecięciu symetralnej AB z prostopadłą do k w przechodzącą przez P.

mała delta

Pływanie

Duży Jan umie pływać, a Mały Jaś nie. Rzucony do wody kamień opada na dno, a najzwyklejszy kawałek drewna, pływać przecież nie uczony, unosi się na powierzchni. Dlaczego tak się dzieje?

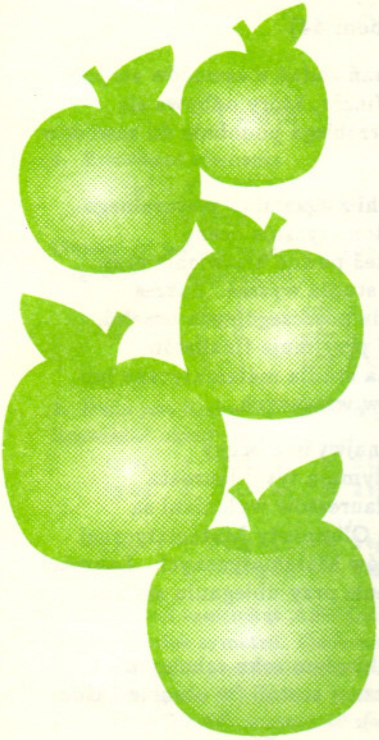
Zacznijmy od prostego doświadczenia. Wkładamy palec do szklanki z wodą i widzimy, że poziom wody w szklance się podnosi. Podniesiona warstwa wody stara się swym ciężarem wypchnąć z wody nasz palec. Działa tutaj siła zwana siłą wyporu, dzięki której może pływać i Jan, i kawałek drewna. Siła ta działa również na tonący kamień, który (co pewnie zauważyliście) zdaje się być lżejszy pod niż nad wodą.

Jak duża jest siła wyporu?
Ilość wody, która została podniesiona (czyli wyparta), gdy włożyliśmy palec do szklanki, jest równa, jak łatwo zauważyć, ilości wody, która zapełniłaby miejsce zajmowane w wodzie przez nasz palec. Siła wyporu działająca na palec jest równa ciężarowi tej właśnie wypartej wody.

W doświadczeniu ze szklanką i palcem łatwo zauważyć podnoszącą się powierzchnię wody. Gdy zanurzamy się w jeziorze, nie sposób dostrzec wznoszenia się lustra wody. Sytuacja jest jednak w zasadzie taka sama, jak w przypadku szklanki i palca i opisywana przez słynne prawo Archimedesa. Prawo to, w postaci szkolnej formułki, brzmi: na każde ciało zanurzone w cieczy działa siła wyporu skierowana ku górze i równa ciężarowi wypartej przez to ciało cieczy. Formułkę znają prawie wszyscy, choć z jej zrozumieniem już nie jest tak dobrze.

Znamy prawo Archimedesa, możemy więc wyjaśnić, dlaczego drewno unosi się na powierzchni wody, podczas gdy kamień tonie. Aby jakiś przedmiot pływał, siła wyporu musi równoważyć ciężar tego przedmiotu. Siła wyporu jest największa, gdy dane ciało zanurzone jest całkowicie, gdyż wówczas największa ilość wody jest wypierana przez to ciało. Jeśli największa siła wyporu jest większa niż ciężar ciała, to ciało pływa. W przeciwnym przypadku – idzie na dno. Ponieważ siła wyporu jest równa ciężarowi wypieranej wody, więc maksymalna siła wyporu jest równa ciężarowi wody wypełniającej objętość taką, jak objętość całego ciała. Stąd dochodzimy do wniosku, że dane ciało pływa, gdy jego ciężar właściwy, tzn. ciężar jednostki objętości, jest mniejszy niż ciężar właściwy wody.

Sprawa z pływającym drewnem i tonącym kamieniem jest więc prosta. Ciężar właściwy drewna jest mniejszy niż ciężar właściwy wody, a kamienia większy. A jak jest z Dużym Janem i Małym Jasiem?

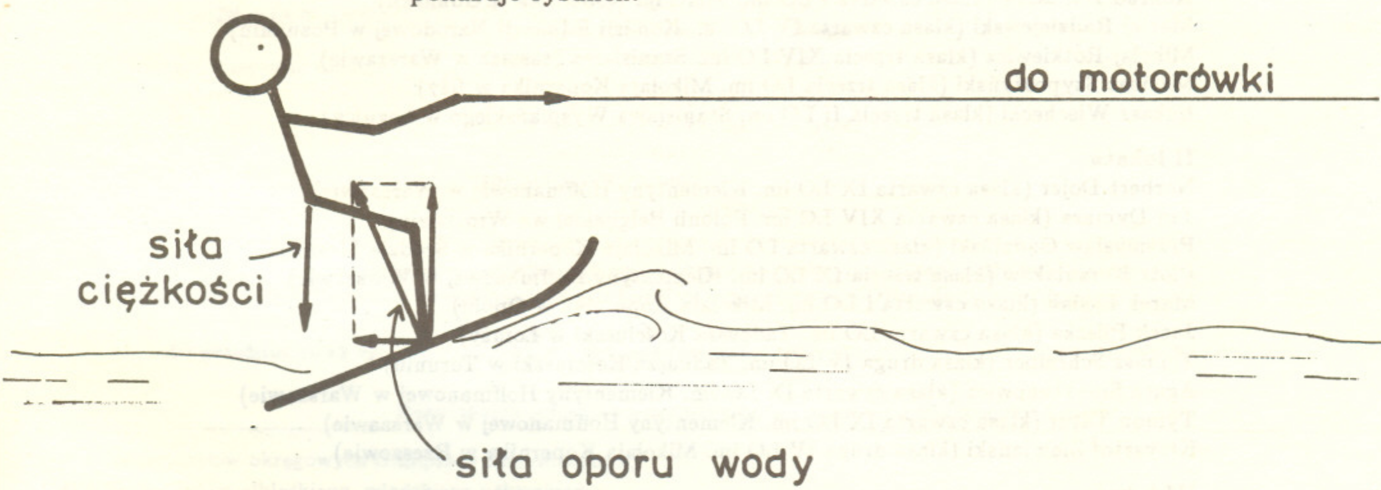


Natura tak nas stworzyła, że ciężar właściwy ciała ludzkiego jest bardzo zbliżony do ciężaru właściwego wody. Gdy mamy do czynienia z silnie zasoloną wodą, jak w Morzu Martwym, to jej ciężar właściwy jest wyraźnie większy niż ciężar właściwy ciała ludzkiego i nie potrzebujemy żadnych umiejętności, by pływać. Ze zwykłą wodą bywają natomiast problemy.

Jeśli zanurzymy się całkowicie z głową, jak w „strzałce", siła wyporu jest dostatecznie duża, byśmy bez trudu utrzymywali się przy powierzchni. Kiedy jednak podnosimy głowę, by zaczerpnąć powietrza, zmniejsza się ilość wypieranej wody, a zatem i siła wyporu, która już nie może nas utrzymać w tej pozycji. Umiejętność pływania polega więc na wytworzeniu szczególnej siły wyporu, zwanej dynamiczną, wspomagającej statyczną siłę wyporu, o której mówi prawo Archimedesa. Dynamiczną siłę wyporu można uzyskać odbijając się jakby od wody, jak to czynią gracze w piłkę wodną, gdy chodzi im nie o przemieszczanie się, lecz jedynie o utrzymanie głowy nad wodą.

Podczas pływania dynamiczna siła wyporu pojawia się jako rezultat działania siły oporu wody przy poruszaniu się do przodu.

Najłatwiej zrozumieć, o co tutaj chodzi, rozważając przypadek narciarza wodnego, który może płynąć po powierzchni wody, jeśli motorówka ciągnie go dostatecznie szybko. Rozkład sił działających na narciarza pokazuje rysunek.



Siła oporu wody jest skierowana prostopadle do powierzchni nart. Jej składowa równoległa do lustra wody równoważy siłę, z którą motorówka ciągnie narciarza, składowa zaś pionowa – dynamiczna siła wyporu – utrzymuje narciarza na powierzchni wody. Po zrozumieniu tego przykładu problem pływania powinien być jasny.

A czy z tych wywodów wynika coś dla Jasia, który nie umie pływać? Raczej niewiele. Po pierwsze, przy próbach pływania powinien zupełnie się zanurzyć, a głowę podnosić nisko nad wodę i na możliwie krótki czas. Wtedy uzyska największą wartość statycznej siły wyporu. Po drugie, musi nauczyć się tak pracować nogami i rękoma, by posuwać się do przodu. Dzięki temu może powstać potrzebna do utrzymania jego głowy nad wodą dynamiczna siła wyporu. Można jeszcze Jasia pocieszyć, że nauka pływania jest bardzo przyjemna, przyjemniejsza nawet niż czytanie *Małej Delty*.

Małą Deltę przygotował Stanisław MRÓWCZYŃSKI

A imię jej czterdzieści i cztery (nic wspólnego z Klubem 44)

Rozpoczynamy XLIV Olimpiadę Matematyczną. Najpierw zawody stopnia pierwszego. Prezentujemy dwanaście zadań, po cztery na każdy miesiąc. Uczestnikiem Olimpiady może być każdy uczeń szkoły średniej. Wystarczy rozwiązać choć jedno z tych zadań i rozwiązanie przesłać w oznaczonym terminie do **właściwego komitetu okręgowego**. Zwracamy uwagę na terminy, ze względów organizacyjnych nie będą oceniane zadania przesłane z opóźnieniem. Nie jest konieczne rozwiązanie wszystkich zadań, ale im więcej rozwiązanych zadań, tym większa szansa awansowania do zawodów stopnia drugiego. Zadania z zawodów stopnia pierwszego rozwiązuje się w domu, można szukać natchnienia lub pomocy w książkach, można pytać o radę rodziców, kolegów, nauczycieli. Na pewno nie warto ściągać rozwiązań od kolegi, przecież satysfakcję może dać tylko samodzielne pokonanie trudności.

Komitet okręgowy oceni nadesłane rozwiązania i zaprosi do udziału w zawodach stopnia drugiego tych kilkudziesięciu zawodników, którzy uzyskali najlepsze wyniki w zawodach stopnia pierwszego. Etap drugi odbywa się w końcu lutego i polega na samodzielnym rozwiązywaniu zadań. Każdego z dwóch kolejnych dni odbywa się pięciogodzinny egzamin, w trakcie którego zawodnicy dostają trzy zadania.

Autorzy najlepszych rozwiązań zadań z zawodów stopnia drugiego są powoływani do finału, który odbywa się w kwietniu w Warszawie i przebiega podobnie do zawodów stopnia drugiego.

Uczestnicy finału są zwolnieni z egzaminu maturalnego z matematyki i uzyskują automatycznie ocenę najwyższą. Przysługują im też pewne ułatwienia przy ubieganiu się o przyjęcia na studia wyższe. Zakres tych ułatwień zależy od władz poszczególnych uczelni, np. Uniwersytet Warszawski przyjmuje finalistów Olimpiady Matematycznej na studia matematyczne lub informatyczne bez egzaminów wstępnych.

Zawodnicy, którzy uzyskają najwyższe oceny w zawodach finałowych, otrzymują tytuł laureata lub wyróżnionego. Spośród laureatów wyłaniani są uczestnicy Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej i Austriacko-Polskich Zawodów Matematycznych. Laureaci otrzymują też dalsze ułatwienia przy ubieganiu się na studia.

Laureatami zakończonej w ubiegłym roku szkolnym XLIII Olimpiady Matematycznej zostali (w obrębie każdej lokaty porządek alfabetyczny):

I lokata
Konrad Banaszek (klasa czwarta I LO im. Mikołaja Kopernika w Gdańsku)
Maciej Radziejewski (klasa czwarta IV LO im. Komisji Edukacji Narodowej w Poznaniu)
Mikołaj Rotkiewicz (klasa trzecia XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie)
Mariusz Szyposzyński (klasa trzecia LO im. Mikołaja Kopernika w Iłży)
Łukasz Wiechecki (klasa trzecia II LO im. Stanisława Wyspiańskiego w Legnicy)

II lokata
Norbert Dojer (klasa czwarta IX LO im. Klementyny Hoffmanowej w Warszawie)
Jan Dymara (klasa czwarta XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu)
Przemysław Gadziński (klasa czwarta LO im. Mikołaja Kopernika w Środzie Śląskiej)
Piotr Korzniakow (klasa trzecia IX LO im. Klementyny Hoffmanowej w Warszawie)
Marek Łysiak (klasa czwarta I LO im. Mikołaja Kopernika w Opolu)
Jacek Pliszka (klasa czwarta LO im. Tadeusza Kościuszki w Łomży)
Tomasz Schreiber (klasa druga IV LO im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu)
Agata Smoktunowicz (klasa czwarta IX LO im. Klementyny Hoffmanowej w Warszawie)
Tymon Tatur (klasa czwarta IX LO im. Klementyny Hoffmanowej w Warszawie)
Krzysztof Ziemiański (klasa druga IV LO im. Mikołaja Kopernika w Rzeszowie)

III lokata
Marcin Ciura (klasa czwarta I LO im. Edwarda Dembowskiego w Gliwicach)
Rafał Łochowski (klasa druga Technikum Elektronicznego im. Bohaterów Westerplatte w Radomiu)
Piotr Bogusław Mucha (klasa czwarta IX LO im. Klementyny Hoffmanowej w Warszawie)
Waldemar Pompe (klasa trzecia IX LO im. Klementyny Hoffmanowej w Warszawie)
Maciej Smoczyński (klasa czwarta IV LO im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu)
Piotr Wojciech Śniady (klasa druga XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu)
Jacek Tabor (klasa trzecia I LO im. Bartłomieja Nowodworskiego w Krakowie)
Jerzy Wigura (klasa czwarta IV LO im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu)
Janusz Zieliński (klasa czwarta IV LO im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu)

Wyróżnienia otrzymali
Barbara Bień (klasa trzecia IX LO im. Klementyny Hoffmanowej w Warszawie)
Marcin Bortnik (klasa pierwsza IV LO im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu)
Jacek Chrząszcz (klasa czwarta XXVII LO im. Tadeusza Czackiego w Warszawie)
Światosław Gal (klasa pierwsza XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu)
Krzysztof Giaro (klasa czwarta I LO im. Mikołaja Kopernika w Gdańsku)
Jakub Kałużny (klasa trzecia XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu)
Katarzyna Kożuch (klasa trzecia XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu)
Andrzej Kwasowiec (klasa czwarta XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie)
Krzysztof Walkowiak (klasa czwarta XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu)
Rafał Wojtczuk (klasa druga XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie)

XLIV OLIMPIADA MATEMATYCZNA

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria

1. Rozwiązać równanie
$$\frac{(x^2-1)(|x|+1)}{x+\operatorname{sgn} x}=[x+1].$$
Uwaga. $[t]$ jest największą liczbą całkowitą nie większą od t,
$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & \text{gdy } x>0\\ 0, & \text{gdy } x=0\\ -1, & \text{gdy } x<0\end{cases}$$

2. Dana jest liczba naturalna $n\geq 3$. Rozwiązać układ równań
$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} x_1 &+ 3\operatorname{ctg} x_1 = 2\operatorname{tg} x_2,\\
\operatorname{tg} x_2 &+ 3\operatorname{ctg} x_2 = 2\operatorname{tg} x_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\operatorname{tg} x_{n-1} &+ 3\operatorname{ctg} x_{n-1} = 2\operatorname{tg} x_n,\\
\operatorname{tg} x_n &+ 3\operatorname{ctg} x_n = 2\operatorname{tg} x_1.
\end{aligned}$$

3. Dany jest sześciokąt $ABCDEF$ mający środek symetrii. Oznaczamy przez A' punkt przecięcia prostych AB i EF, przez B' – punkt przecięcia prostych BC i AF, a przez C' punkt przecięcia prostych AB i CD. Dowieść, że
$$|AB|\cdot|BC|\cdot|CD|=|AA'|\cdot|BB'|\cdot|CC'|.$$

4. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ takie, że
$$f(x+y)-f(x-y)=f(x)\cdot f(y)$$
dla $x,y\in\mathbf{R}$.

II seria

5. Dana jest półpłaszczyzna oraz punkty A i C na jej krawędzi. Dla każdego punktu B tej półpłaszczyzny rozważamy kwadraty $ABKL$ i $BCMN$ leżące na zewnątrz trójkąta ABC. Wyznaczają one odpowiadającą punktowi B prostą LM. Udowodnić, że wszystkie proste odpowiadające różnym położeniom punktu B przechodzą przez jeden punkt.

6. Ciąg (x_n) określony jest następująco:
$$x_0=1992,$$
$$x_n=-\frac{1992}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}x_k \text{ dla } n\geq 1.$$
Obliczyć sumę $\sum_{n=0}^{1992}2^n x_n$.

7. W przestrzeni dane są punkty $A_0=(0,0,0)$, $A_1=(1,0,0)$, $A_2=(0,1,0)$, $A_3=(0,0,1)$. Niech P_{ij} $(i,j\in\{0,1,2,3\})$ będą punktami wyznaczonymi przez równość $\overrightarrow{A_0P_{ij}}=\overrightarrow{A_iA_j}$. Obliczyć objętość najmniejszego wielościanu wypukłego zawierającego wszystkie punkty P_{ij}.

8. Dla ustalonej liczby naturalnej $n\geq 2$ wyznaczyć maksymalną wartość sumy liczb naturalnych $k_1,k_2,\ldots,k_n$ spełniających warunek
$$k_1^3+k_2^3+\ldots+k_n^3\leq 7n.$$

III seria

9. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a,b,c zachodzi nierówność
$$(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)\leq$$
$$\leq(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2.$$

10. Funkcja f przekształcająca sześcian C na C spełnia warunek $|PQ|\geq|f(P)f(Q)|$ dla $P,Q\in C$. Wykazać, że f jest izometrią.

11. W sześciu różnych okienkach tabeli o wymiarach $n\times n$ stawiamy krzyżyk; wszystkie układy krzyżyków są jednakowo prawdopodobne. Niech p_n będzie prawdopodobieństwem tego, że w pewnym rzędzie poziomym lub pionowym znajdą się co najmniej dwa krzyżyki. Obliczyć granicę ciągu (np_n), gdy $n\to\infty$.

12. Udowodnić, że wielomian x^n+4 jest iloczynem dwóch wielomianów stopnia niższego o współczynnikach całkowitych wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą podzielną przez 4.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu) mają być wysłane pod adresem **właściwego komitetu okręgowego Olimpiady** najpóźniej dnia

I seria	II seria	III seria
10 grudnia 1992 r.	**12 października 1992 r.**	**10 listopada 1992 r.**

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Adresy komitetów okręgowych Olimpiady Matematycznej

Dla województwa elbląskiego, gdańskiego i słupskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny PAN, Oddział w Gdańsku, ul. Abrahama 18, 81-825 Sopot.

Dla województwa bielskiego, częstochowskiego i katowickiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.

Dla województwa krakowskiego, krośnieńskiego, nowosądeckiego i tarnowskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków.

Dla województwa bialskopodlaskiego, chełmskiego, lubelskiego, przemyskiego, rzeszowskiego, siedleckiego, tarnobrzeskiego i zamojskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Oddział Lubelski Polskiego Towarzystwa Matematycznego, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, pok. 310, 20-031 Lublin.

Dla województwa kieleckiego, łódzkiego, piotrkowskiego, radomskiego, sieradzkiego i skierniewickiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

Dla województwa konińskiego, leszczyńskiego, pilskiego, poznańskiego i zielonogórskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, ul. Matejki 48/49, pok. 24, 60-769 Poznań.

Dla województwa gorzowskiego, koszalińskiego i szczecińskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, ul. Wielkopolska 15, 70-251 Szczecin.

Dla województwa bydgoskiego, ciechanowskiego, olsztyńskiego, płockiego, toruńskiego i włocławskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

Dla województwa białostockiego, łomżyńskiego, ostrołęckiego, suwalskiego i warszawskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny PAN, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.

Dla województwa jeleniogórskiego, kaliskiego, legnickiego, opolskiego, wałbrzyskiego i wrocławskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

Co to jest matematyka, czyli młotkiem w łeb

Piotr HAJŁASZ

W powszechnym mniemaniu dobrym matematykiem jest ten, kto potrafi szybko liczyć. A ci, którzy potrafią w pamięci mnożyć liczby dziesięciocyfrowe, uchodzą za geniuszy matematycznych.

W rzeczywistości jednak wielu matematyków myli się w rachunkach chcąc, na przykład, sprawdzić, czy ekspedientka ich nie oszukała. Wybucha awantura i pozostaje tylko modlić się w duchu, aby nie wyszła na jaw nasza matematyczna profesja, bo wtedy będzie wstyd i hańba.

Podobnie w obliczaniu całek studenci politechniki są na ogół sprawniejsi od rasowych matematyków. Sam znam wielu matematyków, którzy chwalą się, że nie potrafią obliczyć całki z funkcji wymiernej (dodajmy, że umiejętność obliczania tej całki wymagana jest od wszystkich studentów matematyki).

Na czym więc polega profesja matematyczna? Czym są zdolności do matematyki? Oczywiście, nie sposób dać krótkiej odpowiedzi na tak postawione pytania. Postarajmy się jednak rzucić na nie nieco światła.

Na zarzut stawiany matematykowi, że nie umie on obliczyć całki z funkcji wymiernej, na ogół słyszy się odpowiedź: „Po co mam się tego uczyć? Jeśli kiedyś będę musiał obliczyć taką całkę, to zajrzę do książki, gdzie są gotowe wzory i po kłopocie."

Matematyka nie polega na sprawności w posługiwaniu się gotowymi wzorami (jak to jest w przypadku całek z funkcji wymiernych), lecz na umiejętności stawiania i rozwiązywania nowych problemów.

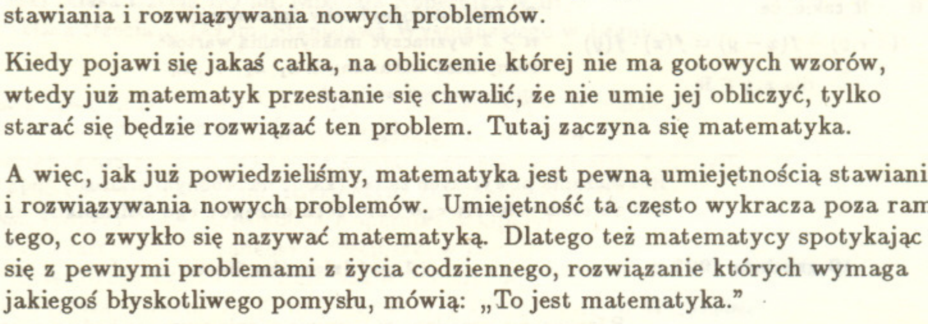
Kiedy pojawi się jakaś całka, na obliczenie której nie ma gotowych wzorów, wtedy już matematyk przestanie się chwalić, że nie umie jej obliczyć, tylko starać się będzie rozwiązać ten problem. Tutaj zaczyna się matematyka.

A więc, jak już powiedzieliśmy, matematyka jest pewną umiejętnością stawiania i rozwiązywania nowych problemów. Umiejętność ta często wykracza poza ramy tego, co zwykło się nazywać matematyką. Dlatego też matematycy spotykając się z pewnymi problemami z życia codziennego, rozwiązanie których wymaga jakiegoś błyskotliwego pomysłu, mówią: „To jest matematyka."

Nie należy jednak ulegać megalomanii, gdyż zgodnie z powszechnym przekonaniem matematycy nie zawsze należą do tych, którzy potrafią sobie najlepiej radzić z problemami swojej ziemskiej egzystencji.

Przejdźmy jednak do konkretów. Podamy dwa przykłady wzięte z życia, przy których każdy matematyk klaśnie w dłonie i zawoła: „To jest matematyka!"

Krzyś pierwszy rzucił kamieniem w szybę. Potem to samo uczyniła Ania. Nie pochwalamy tego wybryku, niemniej jednak powstały dwie interesujące nas dziury: A i B. Którą dziurę zrobił Krzyś, a którą Ania?



Otóż, Krzyś wybił dziurę B, Ania zaś A. Dlaczego?

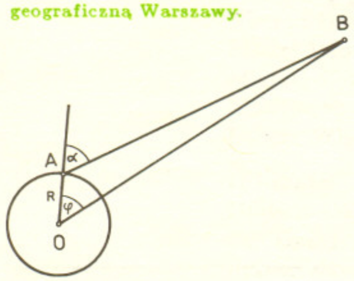
Rozwiązanie zadania F 841.
Stosując prawa dynamiki Newtona $\frac{mv^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2}$, oraz podstawiając za prędkość satelity wyrażenie $v = \frac{2\pi r}{T}$, gdzie $T = 24$ h jest czasem obiegu satelity, m jego masą a r promieniem, po którym krąży, otrzymujemy

$$r=\sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{gR^2T^2}{4\pi^2}}\approx 42\,000\ \mathrm{km}$$

($g = \frac{GM}{R^2}$ oznacza przyspieszenie ziemskie). Korzystając z twierdzenia sinusów dla trójkąta OAB wyznaczamy kąt α

$$\frac{\sin(180^\circ-\alpha)}{r} = \frac{\sin(\alpha-\phi)}{R},$$

gdzie $\phi = 52^\circ$ jest szerokością geograficzną Warszawy.



$$\frac{R}{r} = \cos\phi - \frac{\sin\phi}{\mathrm{tg}\,\alpha} \Rightarrow$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\phi}{\cos\phi - R/r}.$$

Ostatecznie $\alpha \approx 60^\circ$.

Rozwiązanie zadania F 842.
Rozważmy jedno końcowe oczko sprężynki. Działa na nie siła $F = BI\cdot 2\pi r$, gdzie B jest indukcją magnetyczną wewnątrz sprężynki, która to indukcja jest proporcjonalna do przepływającego prądu I, r zaś jest promieniem sprężynki. Siła działająca na sprężynkę będzie proporcjonalna do kwadratu prądu $F \sim I^2$. Ponieważ $I = I_0 \sin\omega t$,

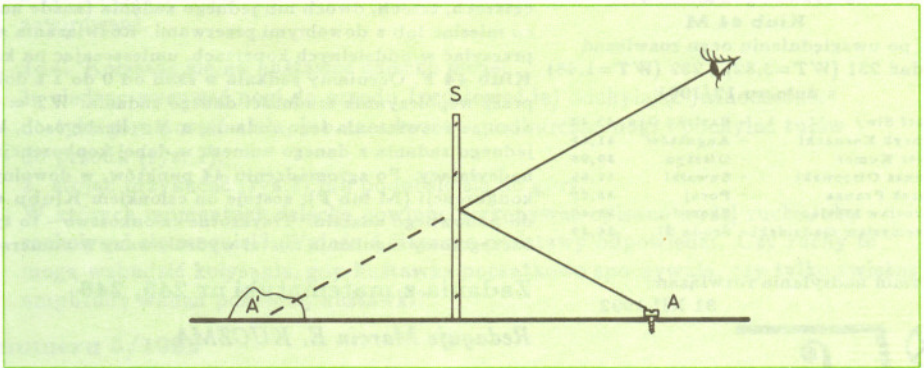
$$x = x_0 \sin^2\omega t = x_0\frac{1-\cos(2\omega t)}{2},$$

gdzie $\omega = 2\pi\nu$, x_0 jest maksymalnym skurczeniem się sprężynki. Stąd widać, że częstotliwość dźwięku będzie równa 2ν.

Zauważmy, że linie pęknięć wychodzące z A kończą się po dojściu do linii pęknięć wychodzących z B, dlatego dziura A powstała później.

Pomysł ten na określenie kolejności uderzeń znalazł praktyczne zastosowanie w ... medycynie sądowej, stąd w tytule ten młotek i łeb (okropność!).

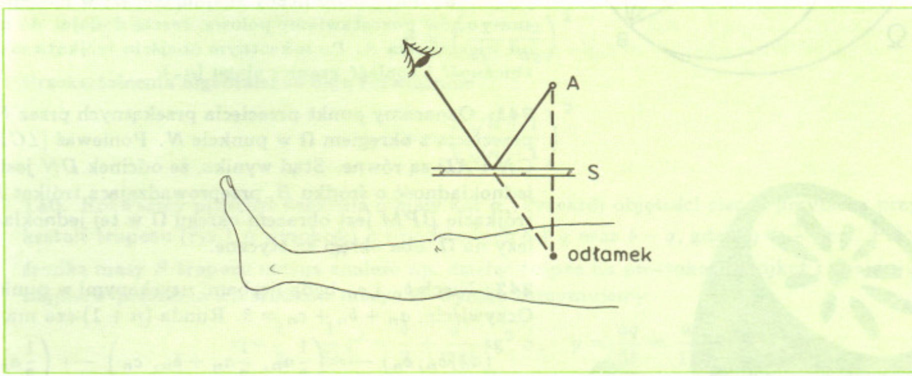
Przejdźmy teraz do drugiego przykładu. Na stole ustawiona jest pionowa szklana szyba S. W tenże stół wkręcona jest śrubka A.



Patrząc poprzez szybę widzimy jej odbicie – pozorną śrubkę A' znajdującą się po drugiej stronie szyby. Jeśli teraz w punkcie A' wkręcimy prawdziwą śrubkę i przykryjemy ją kawałkiem plasteliny, to widząc nadal odbicie śrubki A będziemy widzieli „poprzez" plastelinę, gdzie się znajduje śrubka A'. Biorąc do ręki igłę możemy bezbłędnie przebić plastelinę trafiając w główkę śrubki wkręconej w punkcie A'. Wystarczy mianowicie celować w odbicie śrubki A.

Banalne, prawda? Otóż ten banalny pomysł okazał się na tyle genialny, że znalazł praktyczne zastosowanie w medycynie.

Wyobraźmy sobie, że w nodze pacjenta utkwił mały metalowy odłamek. Jeśli chirurg ma go usunąć nie krojąc nogi na plasterki, to musi umieć go zlokalizować od pierwszego cięcia. Do tego można wykorzystać powyższy pomysł. Lokalizując odłamek za pomocą promieni Roentgena możemy tak ustawić szybę S i punkt A, że będzie on odbiciem symetrycznym odłamka względem S.



Teraz chirurg patrząc na nogę pacjenta poprzez szybę będzie widział odbicie punktu A, które znajduje się dokładnie tam, gdzie jest odłamek.

Zaletą tego pomysłu jest to, że wystarczy raz użyć promieni Roentgena do zlokalizowania odłamka. Były bowiem i inne metody, wystawiające jednak zarówno pacjenta, jak i chirurga na długotrwałe działanie promieniowania podczas operacji.

Autorem tego pomysłu i związanego z nim patentu jest wybitny polski matematyk Hugo Steinhaus. Dokładniej o tym pomyśle i jego modyfikacjach można przeczytać w znakomitej książce Hugona Steinhausa pt. *Kalejdoskop matematyczny.*

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 231 (WT=3,82) i 232 (WT=1,48)
z numeru 12/1991

Józef Siwy	– Łaziska Grn.	42,42
Henryk Kornacki	– Augustów	41,61
Piotr Kumor	– Olsztyn	39,98
Janusz Olszewski	– Suwałki	38,69
Marek Prauza	– Poraj	38,65
Mirosław Matlęga	– Skoczów	38,46
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	36,49

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 1992

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł Weterana.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1992.

Zadania z matematyki nr 245, 246

Redaguje Marcin E. KUCZMA

245. Dla dowolnego zbioru $H = \{P_1, \ldots, P_7\}$ złożonego z siedmiu różnych punktów płaszczyzny oznaczmy przez $\alpha(H)$ miarę największego kąta wypukłego $\angle P_iP_jP_k$ $(i,j,k \in \{1,\ldots,7\})$. Obliczyć kres dolny wartości $\alpha(H)$, gdy H przebiega rodzinę wszystkich siedmiopunktowych podzbiorów płaszczyzny.

246. Wyznaczyć w zależności od stałych rzeczywistych a, b liczbę różnych pierwiastków rzeczywistych równania

$$x^4 - 2ax^2 + b^3x + a(a - b^2) = 0\,.$$

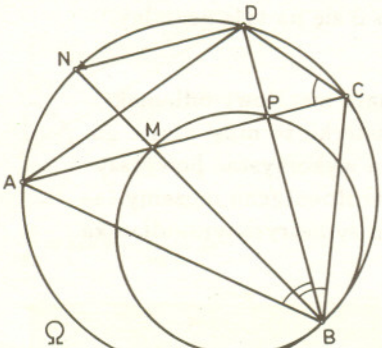
Zadanie **246** zaproponował pan Tadeusz Józefczyk z Poznania.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/1992

Przypominamy treść zadań:

241. W okrąg Ω wpisano czworokąt $ABCD$, $|AD| \neq |CD|$. Na przekątnej AC znajdujemy taki punkt M, że $|\angle CBM| = |\angle ACD|$. Przez punkty B, M oraz punkt przecięcia przekątnych czworokąta prowadzimy okrąg. Dowieść, że jest on styczny do Ω.

242. W każdym wierzchołku trójkąta ABC umieszczamy liczbę 1. Obchodzimy kolejno wierzchołki pozostawiając w danym wierzchołku połowę liczby tam się znajdującej, drugą jej połowę dodając do liczby znajdującej się w następnym wierzchołku. Z otrzymanej tam sumy znów pozostawiamy połowę, resztę dodając do następnej liczby itd. Rozpoczynamy od wierzchołka A. Po n-krotnym obejściu trójkąta mamy w punkcie A liczbę a_n. Wykazać zbieżność i znaleźć granicę ciągu (a_n).



241. Oznaczmy punkt przecięcia przekątnych przez P. Przedłużamy odcinek BM do przecięcia z okręgiem Ω w punkcie N. Ponieważ $|\angle CBN| = |\angle ACD| = |\angle ABD|$, zatem łuki CN i AD są równe. Stąd wynika, że odcinek DN jest równoległy do AC, a więc istnieje jednokładność o środku B, przeprowadzająca trójkąt BDN na BPM. Okrąg opisany na trójkącie BPM jest obrazem okręgu Ω w tej jednokładności; a skoro środek jednokładności leży na Ω, oba okręgi są styczne.

242. Niech b_n i c_n będą liczbami uzyskanymi w punktach B i C po n pełnych rundach. Oczywiście, $a_n + b_n + c_n = 3$. Runda $(n+1)$-sza ma przebieg następujący:

$$(a_n, b_n, c_n) \longrightarrow \left(\frac{1}{2}a_n,\ \frac{1}{2}a_n + b_n,\ c_n\right) \longrightarrow \left(\frac{1}{2}a_n,\ \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n,\ \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n\right) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \left(\frac{5}{8}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n,\ \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n,\ \frac{1}{8}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n\right) =$$
$$=: (a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}).$$

Widzimy, że $c_{n+1} = a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n$; w takim razie $c_n = a_n - \frac{1}{2}a_{n-1}$ (dla $n \geq 1$). Stąd

$$a_{n+1} = \frac{5}{8}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n = \frac{5}{8}a_n + \frac{1}{4}(b_n + c_n) + \frac{1}{4}c_n =$$
$$= \frac{5}{8}a_n + \frac{1}{4}(3 - a_n) + \frac{1}{4}\left(a_n - \frac{1}{2}a_{n-1}\right) = \frac{3}{4} + \frac{5}{8}a_n - \frac{1}{8}a_{n-1} \quad (\text{dla } n \geq 1).$$

Podstawiając $a_n = \frac{3}{2} + x_n$ otrzymujemy zależność rekurencyjną

$$x_{n+1} = \frac{5}{8}x_n - \frac{1}{8}x_{n-1} \quad (\text{dla } n \geq 1); \qquad x_0 = -\frac{1}{2}, \quad x_1 = -\frac{1}{8}.$$

Łatwa indukcja pokazuje, że $|x_n| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ dla każdego n. Zatem $\lim x_n = 0$, czyli $\lim a_n = \frac{3}{2}$.

Zadania z fizyki nr. 143, 144

Redaguje Jerzy B. BROJAN

143. W dużym zbiorniku z wodą na dużej głębokości wzdłuż linii prostej w jednakowych odstępach umieszczono końcówki trzech rurek doprowadzających lub odprowadzających wodę jednakowo we wszystkich kierunkach (rys.). Wydajność źródła A wynosi +1 (w ustalonych jednostkach, np. kg/s), a wydajność źródła C wynosi +2. Jaka jest maksymalna wartość poboru wody przez rurkę B (o wydajności ujemnej), przy której czerpana woda będzie w całości pochodzić z C, bez domieszki z A? Przyjąć, że przepływ jest stacjonarny (niezmienny w czasie) i laminarny (bez zawirowań).


Rys. 1


Rys. 2

144. Kołysząc się na huśtawce dziecko może:
1. siedząc wysuwać nogi do przodu (prostować je) odchylając jednocześnie do tyłu górną część ciała, lub na odwrót – podkurczać nogi i pochylać tułów do przodu (rys. 1).
2. stojąc przykucać (rys.2) lub podnosić się do góry.
W których momentach dziecko powinno wykonywać opisane wyżej ruchy, aby rozkołysać się mocniej? Wyjaśnić fizyczne podstawy odpowiedzi. Czy ruchy te mogą wzbudzić kołysanie, gdy huśtawka początkowo spoczywała, czy tylko zwiększyć amplitudę wahań pchniętej huśtawki?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/1992

Przypominamy treść zadań:

139. Na ekranie obserwujemy prążki powstałe w wyniku interferencji światła z dwóch niejednakowo silnych źródeł spójnych. Natężenie oświetlenia ekranu w środku prążków jasnych jest n razy większe niż natężenie oświetlenia w środku prążków ciemnych. Ile razy większe jest natężenie oświetlenia ekranu przez silniejsze źródło (gdy słabsze jest wyłączone) od natężenia oświetlenia przez słabsze (gdy silniejsze jest wyłączone)?

140. Prostopadłościenne naczynie ma szerokość a, a ciecz wypełnia je do wysokości b. Naczynie może się obracać swobodnie wokół osi O prostopadłej do płaszczyzny rysunku i leżącej w odległości h od dna oraz w odległości $\frac{a}{2}$ od ścianek bocznych. Jaki związek muszą spełniać wielkości a, b i h, aby przedstawione na rysunku poziome położenie naczynia było stabilne? Przyjąć, że masa samego naczynia jest pomijalnie mała w porównaniu do masy cieczy.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 129 (WT=2,08) i 130 (WT=3,40) z numeru 12/1991

Paweł Perkowski	– Szczecin	38,66
Dzierżysław Lipniacki	– Lublin	27,54
Tomasz Wietecha	– Tarnów	21,31

Po ponad rocznej przerwie powrócił do Ligi p. Lipniacki.

139. Oznaczmy natężenie oświetlenia ekranu przez silniejsze źródło jako I_1, a przez słabsze – jako I_2. Wielkości te są proporcjonalne do kwadratów amplitud fal

$$I_1 = ka_1^2\,, \quad I_2 = ka_2^2\,,$$

gdzie k – stała proporcjonalności. Szukany stosunek $x = I_1/I_2$ jest więc równy

$$x = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 .$$

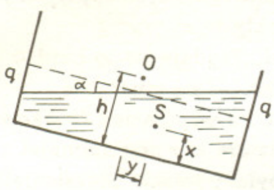
W środku prążków jasnych amplitudy się dodają (interferencja konstruktywna), a w środku prążków ciemnych – odejmują (interferencja destruktywna). Zatem dany stosunek n wyraża się przez amplitudy wzorem

$$n = \left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2}\right)^2 .$$

Przekształcenia algebraiczne dają rozwiązanie

$$x = \left(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1}\right)^2 .$$

140. Rozważmy przechył naczynia o mały kąt α. Przekrój objętości cieczy przybiera przy tym kształt trapezu (rys.) o wysokości a i podstawach $b+q$ oraz $b-q$, gdzie $q = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$. Położenie środka masy S trapezu można znaleźć np. dzieląc trapez na prostokąt i trójkąt i znajdując najpierw położenia ich środków masy. W wyniku otrzymujemy



$$x = \frac{b}{2} + \frac{1}{6b}q^2 = \frac{b}{2} + \frac{a^2}{24b}\operatorname{tg}^2\alpha\,, \quad y = \frac{aq}{6b} = \frac{a^2}{12b}\operatorname{tg}\alpha\,.$$

Z bilansu energii wynika, że położenie poziome jest stabilne, gdy środek masy cieczy ulega podwyższeniu przy przechyle. Zatem wielkość

$$\Delta h = h - \frac{b}{2} - (h-x)\cos\alpha - y\sin\alpha$$

powinna być dodatnia dla małych α (wystarczy ograniczyć się do wyrazów kwadratowych w α). Podstawiając otrzymujemy

$$\Delta h \approx \frac{1}{2}\left(h - \frac{b}{2}\right)\alpha^2 - \frac{a^2}{24b}\alpha^2 .$$

Stąd szukany warunek stabilności przybiera postać

$$h > \frac{b}{2} + \frac{a^2}{12b} .$$

Ten sam wynik uzyskamy rozpatrując przesunięcie **poziome** środka masy i moment siły ciężkości.

Patrz w niebo

W książkach zaliczanych kiedyś do typu *science fiction* można było często znaleźć mrożące krew w żyłach opisy zderzenia statku międzyplanetarnego z ciałem meteorowym, przy czym bohaterowie wychodzili z tego cało najczęściej dzięki czyjejś przytomności umysłu. Teraz czyta się takie rzeczy wprawdzie ze wzruszeniem, bo przypomina to młodość, ale na szczęście już się tak nie pisze. Szanse zderzenia z jakąś znaczniejszą bryłką są praktycznie zerowe (przestrzeń kosmiczna jest naprawdę „bardzo" pusta), a możliwość wykazania się wtedy przytomnością umysłu dokładnie zerowa. Wiemy, co prawda, że w płaszczyźnie Układu Słonecznego leży warstwa pyłu, że znajduje się tam mnóstwo drobnych bryłek (spadających nieustannie na Ziemię) i sporo planetoid, niemniej jednak – jak wykazało kilkudziesięcioletnie doświadczenie – dla astronautyki nie ma to znaczenia.

Podobnie jest w świecie gwiazd. Odległości dzielące gwiazdy wyrażają się przecież w latach świetlnych, podczas gdy rozmiary gwiazd najwyżej w minutach, a i to raczej wyjątkowo. Każda galaktyka, choć oglądana z daleka robi wrażenie dość zwartego obiektu, jest w rzeczywistości tworem bardzo „luźnym". Gwiazdy mijają się z reguły w odległościach tak ogromnych, że przeciętna gwiazda nie doznaje znaczniejszego zakłócenia ruchu przemierzywszy całą galaktykę. Uczenie mówi się, że średnia droga swobodna gwiazdy jest większa od rozmiarów galaktyki. Wskutek tego każda galaktyka przez miliardy lat zachowuje swoją skomplikowaną strukturę, nie jest w stanie się wymieszać. Efekt tego widać niemal gołym okiem, w każdym razie na zdjęciach: np. ramiona galaktyki spiralnej tworzą płaski układ młodych gwiazd na jej peryferiach, a zbliżony do kulistego system starych gwiazd tworzy jej jądro – i oba te systemy żyją jakby każdy swoim życiem.

Ale nie jest już tak w świecie galaktyk. Odległości dzielące galaktyki nie są tak drastycznie większe od ich rozmiarów, dlatego zderzenia galaktyk nie są rzadkością. Gdy zderzenie nie jest całkiem dokładne, tzn. gdy dwie galaktyki mijają się w niewielkiej odległości, następuje zniekształcenie struktury obu galaktyk, w wyniku czego mogą powstać rozmaite „mosty" między nimi (o czym pisaliśmy w *Delcie* 6/1992). A co byłoby przy zderzeniu dokładnym? Skoro gwiazdom w galaktykach jest tak luźno, to dwukrotny wzrost liczby gwiazd nie powinien nic specjalnie zmienić. Ale galaktyki składają się nie tylko z gwiazd – zawarta w nich materia międzygwiazdowa tworzy obłoki rozciągające się na wiele lat świetlnych, a zatem obłoki nie są w stanie mijać się bez żadnego efektu, tak jak mijają się gwiazdy. I wtedy dochodzi do bardzo gwałtownych zjawisk. Zderzające się obłoki zagęszczają się, ogrzewają, co prowadzi do masowego powstawania nowych gwiazd i do silnej emisji promieniowania podczerwonego. Moc tego promieniowania sięga bilionów mocy Słońca – kilka tak zachowujących się obiektów odkrył satelita podczerwieni IRAS.

Nie koniec na tym. Widma tych obiektów, zwłaszcza jaśniejszych, przypominają widma kwazarów. Stąd nasuwa się wniosek, że w centrum każdego z tych superjasnych obiektów znajduje się aktywne jądro, czyli że po prostu obiekty te są czymś pośrednim między podczerwonymi galaktykami a kwazarami. Wydaje się to bardzo prawdopodobne, gdyż obłoki materii międzygwiazdowej zderzając się muszą się częściowo łączyć, mieszać i w rezultacie materia musi opadać ku wspólnemu środkowi masy połączonych galaktyk, tworząc tam masywną czarną dziurę lub przynajmniej „żywiąc" sobą już istniejącą. Na tym etapie czarna dziura byłaby jeszcze przesłonięta przez materię międzygwiazdową obu galaktyk (stąd tyle podczerwieni w widmach tych obiektów); dopiero po zużyciu znacznej jej części aktywne jądro mogłoby się odsłonić, a cały obiekt przekształciłby się w kwazar intensywnie promieniujący w zakresie rentgenowskim i nadfioletowym.

Znalezione przez IRASa galaktyki superjasne w podczerwieni są stosunkowo niedalekie – przesunięcie ku czerwieni ich widm nie przekracza $z = \Delta\lambda/\lambda = 0,1$. I chociaż wydaje się, że rzeczywiście kwazary są galaktykami o szczególnie aktywnych jądrach, to za wcześnie jest twierdzić, czy ich ewolucja przebiega tak, jak tu przedstawiliśmy. Dla uzyskania nowych informacji należałoby zbadać odleglejsze źródła podczerwieni, a do tego potrzebny byłby satelita sprawniejszy niż IRAS.

Tomasz KWAST

Rozwiązanie zadania M 643.
Niech k_j oznacza iloczyn liczb z j-tej kolumny, w_j zaś – iloczyn liczb z j-tego wiersza. Oczywiście,

$$k_1 k_2 \ldots k_{111} = w_1 w_2 \ldots w_{111}$$

(oba wyrażenia są równe iloczynowi wszystkich liczb na szachownicy). W szczególności, znaki obu stron równania są takie same, a więc liczba minus jedynek wśród 222 liczb k_j oraz w_j jest parzysta. Parzysta jest zatem także liczba jedynek. Ale liczby plus i minus jedynek muszą być różne (bo $111 = 222 : 2$ jest liczbą nieparzystą!), czyli suma

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_{111} +$$
$$+ k_1 + k_2 + \ldots + k_{111}$$

jest różna od zera.

Rozwiązanie zadania M 644.
Przypuśćmy, że teza zadania jest fałszywa. Istnieje wtedy takie ułożenie kostek domina na szachownicy, że każda z dziesięciu linii poziomych lub pionowych oddzielających pola szachownicy dzieli pewną kostkę na pół. Popatrzmy na którąkolwiek z tych linii; po każdej stronie mamy parzystą liczbę pól szachownicy, a także parzystą liczbę pól zakrytych niepodzielonymi kostkami (każda z nich zakrywa 2 pola!), zatem po każdej stronie tej linii znajduje się parzysta liczba pól zakrytych kostkami podzielonymi. Widzimy więc, że każda linia dzieli na pół parzystą liczbę kostek (czyli co najmniej dwie). Każda kostka może być dzielona na pół przez tylko jedną linię, zatem liczba kostek dzielonych na pół przekracza $2 \cdot 10 = 20$, czyli jest większa od liczby wszystkich kostek na szachownicy!

Rozwiązanie zadania M 645.
Z warunków zadania wynika, że $l = 9$. Po pierwsze, z cechy podzielności przez 9 wnioskujemy, że wszystkie trzy liczby k, m oraz l są podzielne przez 9. Z drugiej strony

$$k \leq 1992 \cdot 9 = 17\,928 < 19\,999,$$

zatem $m \leq 1 + 4 \cdot 9 = 37$, czyli $l \leq 11$. Stąd już, oczywiście, wynika, że $l = 9$.

epsilon

9/92
(19)

Opowieść z 1001 mocy

Moc jest to klasa równoważności
Zbioru w relacji równoliczności.
Dla zbiorów, co są w tej samej klasie
Zawsze bijekcję utworzyć da się.
Funkcja ta, która ma być bijekcją
Musi injekcją być i surjekcją.
Że jest injekcją, to w innych słowach
Znaczy, że jest różnowartościowa.
Nazwa „surjekcja" oznacza zdanie
Że jest to „na" zbiór odwzorowanie.
Zbiory bywają zwykle dzielone
Na te skończone i nieskończone.
Zwłaszcza te drugie nas zadziwiają
Bo całkiem inne własności mają.
Mówimy, że zbiór jest przeliczalny
Gdy ma moc zbioru liczb naturalnych.
Te zbiory liczb są z nim równoliczne:
Wymierne oraz algebraiczne.
Tę moc przebadał Cantor dopiero
I ją oznaczył przez $\aleph_0$.
Są jeszcze inne nieskończoności
Które niezwykłe mają własności.
No, bo na przykład, kto by powiedział
Że równej mocy jest każdy przedział?
Lub czy to fakt jest dość oczywisty
Że tyleż jest też liczb rzeczywistych?
Punktów na prostej? A i do tego
Podzbiorów zbioru przeliczalnego?
Moc tę continuum nazywamy
Oraz literą „$\mathfrak{c}$" oznaczamy.
Gdy większe chcemy uzyskać moce
Musimy liczbę 2 podnieść do $\mathfrak{c}$.
Tyle podzbiorów, co każdy przyzna
Ma zbiór $\mathbf{R}^2$ – czyli płaszczyzna.
Gdy 2 do mocy tej podniesiemy –
Kolejną, większą moc dostaniemy.
Czynność tę można kontynuować
I dalsze moce tak konstruować.
Tak otrzymamy ciąg nieskończony
Z coraz to większych mocy tworzony.
Więc można podać do wiadomości:
Jest nieskończoność nieskończoności!

Ludolfina

Nota bibliograficzna.
Wiersz powyższy został przez Ludolfinę przekazany Kołu Matematyków Studentów UJ jesienią 1984 roku. Nie wiadomo, kto ukrył się pod tym pseudonimem; nie wiadomo także, czy wiersz ten został przez Ludolfinę napisany, czy jedynie odnaleziony i udostępniony szerszemu gronu.

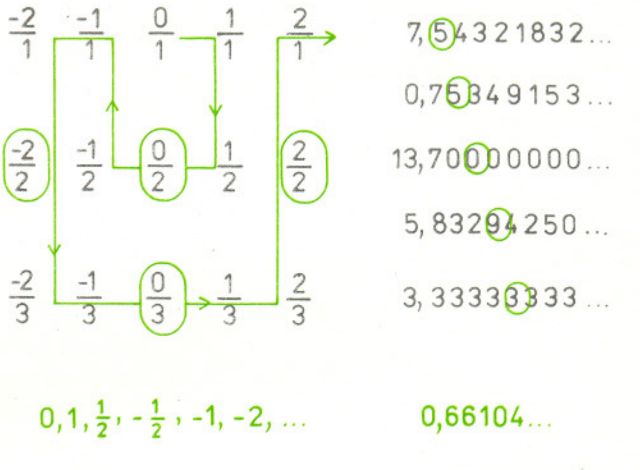
Czy istnieje łańcuch...

Zadanie:
Zbiór $P(\mathbf{N})$ wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych $\mathbf{N}$ jest częściowo uporządkowany przez relację zawierania się. Czy istnieje w $P(\mathbf{N})$ łańcuch nieprzeliczalny?

Osobie, która nie miała do czynienia z teorią mnogości, należy w tym momencie wytłumaczyć kilka pojęć.

Co to jest łańcuch w zbiorze częściowo uporządkowanym $P(\mathbf{N})$? Jeśli rozważymy np. zbiory $\{1,2\}$ i $\{1,3\}$, to żaden z nich nie zawiera się w drugim; są one nieporównywalne. Łańcuch to taka rodzina Ł podzbiorów $\mathbf{N}$, że każde dwa zbiory $A, B \in$ Ł możemy porównać: $A \subset B$ lub $B \subset A$. Przykładem łańcucha jest: $\{\emptyset, \{1\}, \{1,7\}, \{1,7,8,100,1992\}\}$. Inny przykład to $\{\{2\}, \{2,4,6,8,10,...\}, \mathbf{N}\}$.

A zbiór nieprzeliczalny? Jest to zbiór, którego elementów nie da się ustawić w ciąg (ponumerować liczbami naturalnymi). Przeliczalne są np. zbiór liczb parzystych (ustawiamy: $2,4,6,8,10,\ldots$), zbiór liczb całkowitych (ustawiamy: $0,1,-1,2,-2,\ldots$), a nawet zbiór liczb wymiernych (należy ustawić te liczby w tabelce, gdzie w rzędach liczby mają te same mianowniki, w kolumnach zaś te same liczniki, po czym numerować „wężykiem", wykreślając te, które się powtórzą). Nie jest natomiast przeliczalnym zbiór liczb rzeczywistych (prowadzi się dowód nie wprost, którego myśl polega na ustawieniu wszystkich liczb rzeczywistych, zapisanych za pomocą rozwinięć dziesiętnych, w ciąg i skonstruowaniu liczby, która od n-tego wyrazu ciągu różni się na n-tym miejscu rozwinięcia).



W tej chwili wszystkie pojęcia potrzebne do zrozumienia tematu zadania są nam znane. Oczywiście, możemy bez kłopotu skonstruować w badanym zbiorze łańcuch nieskończony, np. $\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \ldots\}$. Ale czy istnieje tu łańcuch nieprzeliczalny?

Zadanie to dawałem wielu osobom i niejednej sprawiło ono sporo kłopotów. Zachęcam więc i Czytelników *EPSILONA* do spróbowania swoich sił. Jeśli komuś się uda i zechce nam przysłać szkic rozwiązania, redakcji *EPSILONA* będzie bardzo miło.

Krzysztof CIESIELSKI

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski.
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ϵ.