

SPIS TREŚCI

NUMERU 8(219)

Jak obliczyć elementarnie pochodną $\arctg x$?	str. 1
Wbrew zdrowemu rozsądkowi (IV) <i>Tomasz Hofmokl</i>	str. 1
Teoria spadania <i>Andrzej Majhofer</i>	str. 2
Dyfuzja <i>Jan Kalinowski</i>	str. 4
Różnymi sposobami	str. 6
Skąd się bierze matematyka?	str. 7
Jeszcze raz o teorii względności <i>Andrzej Szymacha</i>	str. 8
Zadania	str.12
Żeglowanie pod wiatr	str.13
Kto to rozwiąże?	str.13
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Epsilon	str.17

W następnym numerze:

Mnóstwo zadań dla każdego

Okladkę zaprojektowała
Monika WALCZYK

UWAGA !!!

w prenumeracie *Delta* tańsza

„Delta”
matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Edukacji Narodowej

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichocki
Roman Duda
Jan A. Gaj
Tomasz Hofmokl – wiceprzewodniczący
Tadeusz Jarzębowski
Marcin Kubiak
Andrzej Makowski
Andrzej Pelczar
Zbigniew Płochocki
Zdzisław Pogoda
Konrad Rudnicki
Zbigniew Semadeni
Grzegorz Sitarski
Józef I. Smak
Kazimierz Stępień
Mieczysław Subotowicz
Andrzej Szymacha
Andrzej Woszczyk
Wojciech Żakowski – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:
Krzysztof Biesaga
Piotr Hajłasz
Jan Kalinowski – z-ca red. nacz.
Krystyna Kordos – sekr. red.
Marek Kordos – red. nacz.
Tomasz Kwast
Stanisław Mrówczyński
Anna Rudnik
Joanna Udalska

Adres Redakcji:

ul. Smyczkowa 5/7
02-678 Warszawa
tel. 43-02-43 wewn. 21

Adres poczty komputerowej
(E-mail address):

DELTA@PLEARN.BITNET

Wydawca:

Uniwersytet Warszawski
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa

Nakład 8 500 egz.
Wydrukowano
w Zakładach Graficznych
w Warszawie, ul. Srebrna 16

Skład systemem $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$
wykonała redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na I kwartał 1993 r. wynosi 18 000,- zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
 - na teren kraju
 - jednostki kolportażowe „Ruch” właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób,
 - urzędy pocztowe na terenie wiejskim i w miejscowościach, w których nie ma jednostek kolportażowych „Ruch” – poczta zapewnia dostawę zamówionych egzemplarzy pocztą zwykłą pod wskazanym adresem w ramach opłaconej prenumeraty,
 - na zagranicę
 - Zakład Kolportażu Prasy i Wydawnictw, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia dostawy pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni pokrywa prenumerator.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
 - na kraj i zagranicę – do 20 XI na I kwartał roku następnego
do 20 II na II kwartał
do 20 V na III kwartał
do 20 VIII na IV kwartał.

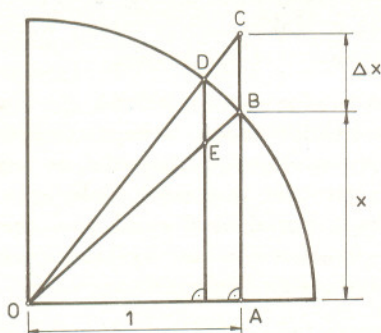
Cena 1 egzemplarza 8 000,- zł

Jak obliczyć elementarnie pochodną $\arctg x$?

Zacznijmy od przypomnienia, co to jest $\arctg x$. Otóż dla każdej liczby rzeczywistej x istnieje dokładnie jeden taki kąt $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, że $\operatorname{tg} \alpha = x$. Ten właśnie kąt oznaczamy przez $\arctg x$. Czyli, innymi słowy, $\arctg x$ jest funkcją odwrotną do funkcji $\operatorname{tg} x$ określonej na przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Przypomnijmy, jak się zwykle oblicza pochodną funkcji $\arctg x$. Najpierw obliczamy pochodną funkcji $\sin x$, potem $\cos x$, dalej pochodną ilorazu $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ i w końcu pochodną $\arctg x$ jako pochodną funkcji odwrotnej. Okropność! Jakże to długie i skomplikowane.

Pokażemy, jak można obliczyć tę pochodną bezpośrednio geometrycznie. Poniższa metoda została podana przez Normana Schaumbergera. Przyjmijmy oznaczenia takie, jak na rysunku.



Zakładamy, że $x > 0$. Zauważmy, że z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta OAB wynika, że promień okręgu jest równy $\sqrt{1+x^2}$.

Otóż

(♣) Pole $\triangle ODE <$ Pole wycinka $ODB <$ Pole $\triangle OCB$.

Oczywiście,

$$\text{Pole } \triangle OCB = \text{Pole } \triangle OCA - \text{Pole } \triangle OBA = \frac{\Delta x}{2}.$$

Trójkąty OCB i ODE są podobne, więc

$$\text{Pole } \triangle ODE = \left(\frac{OD}{OC}\right)^2 \cdot \text{Pole } \triangle OCB = \frac{1+x^2}{1+(x+\Delta x)^2}.$$

Ponadto bezpośrednio z definicji \arctg wynika, że $\angle BOA = \arctg x$ i $\angle COA = \arctg(x + \Delta x)$. Skąd

$$\text{Pole wycinka } ODB = \frac{1}{2}(1+x^2)(\arctg(x + \Delta x) - \arctg x).$$

Korzystając z (♣) otrzymamy

$$\frac{1}{1+(x+\Delta x)^2} < \frac{\arctg(x + \Delta x) - \arctg x}{\Delta x} < \frac{1}{1+x^2}.$$

Przechodząc do granicy przy $\Delta x \rightarrow 0$ uzyskujemy wzór na pochodną

$$(\arctg x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\arctg(x + \Delta x) - \arctg x}{\Delta x} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Łatwo zauważyć, że dla $x < 0$ pochodną wyraża się tym samym wzorem. Wynika to z zauważenia, że $\arctg(-x) = -\arctg x$. A teraz zadanie dla Czytelników. Jak geometrycznie wyprowadzić wzory na pochodne innych funkcji cyklometrycznych?

Opracował Piotr HAJŁASZ

Wbrew zdrowemu rozsądkowi (IV)

(Według wykładów radiowych z audycji IV programu – *Widnokrąg*)

Czy długość jednego metra może wynosić pół metra?

Tomasz HOFMOKL

W moim cyklu artykułów opowiadam o doświadczeniach, których wyniki są na tyle zaskakujące, że zdają się przeczytać zdrowemu rozsądkowi. W tej konfrontacji przegrywa na ogół zdrowy rozsądek i jesteśmy zmuszeni do zmiany naszych poglądów na naturę zjawisk przyrodniczych.

Przypomnę, że w poprzednich opowieściach mówiłem o doświadczeniach wykazujących, że w układzie poruszającym się, na przykład w samolocie, czas płynie wolniej niż w układzie nieruchomym – na przykład na lotnisku. Okazało się również, że w próżni światło, a mówiąc ogólniej, fala elektromagnetyczna, porusza się ze stałą prędkością niezależną od prędkości źródła lub obserwatora. Mówiliśmy, że ta prędkość, równa w przybliżeniu trzystu tysiącom kilometrów na sekundę, jest największą prędkością, z jaką można przesyłać sygnał, informację.

Dzisiaj w tytule artykułu mamy również prowokujący bezsens: czy metr może równać się połowie metra? I znowu okazuje się, że tak.

Rozpocznijmy naszą opowieść od początku bieżącego stulecia. Już w roku 1900 wiadano, że atmosfera ziemską jest ośrodkiem przewodzącym ładunki elektryczne. Między innymi zauważono, że naładowany elektroskop (w najprostszej postaci są to dwa listki cynfolii na izolowanej pałeczce) po pewnym czasie rozładowuje się. W roku 1912 V. F. Hess wykazał obserwacyjnie, że przewodnictwo atmosfery wzrasta wraz z wysokością. Im wyżej umieścimy naładowany elektroskop, tym szybciej się rozładowuje. Przewodnictwo atmosfery zależy od stopnia zjonizowania jej atomów. Znacząco to, że im wyżej, tym częściej spotykamy atomy pozbawione jednego lub kilku elektronów, a tym samym naładowane elektrycznie. Przyczyną może być jakiś czynnik zewnętrzny, który obdziera atomy z elektronów. Hess wysunął hipotezę, że istnieje jakieś pozaziemskie

promieniowanie przychodzące do nas z głębin Wszechświata, które obdiera atomy z elektronów, a mówiąc bardziej fachowym językiem, jonizuje atomy. Promieniowanie to nazwano promieniowaniem kosmicznym. Dziś wiemy, że w pobliżu Ziemi ponad atmosferą promieniowanie to składa się w 86% z protonów, czyli jąder wodoru, a w 13% z jąder helu, pozostały 1% to elektrony i jądra cięższych pierwiastków. Jest to tak zwane promieniowanie pierwotne. Strumienie bardzo szybkich cząstek nadlatujące z głębin kosmosu wpadają w atmosferę ziemską i zderzają się z jej atomami. Każde zderzenie to mikrowybuch, w którym powstają różne cząstki, z których część ma stosunkowo bardzo krótki żywot. Strumienie powstałych cząstek, czyli tzw. wtórne promieniowanie kosmiczne, dociera do powierzchni Ziemi, a nawet wnika dość głęboko pod powierzchnię. Tak, tak, w każdej sekundzie przez nasze ciało przenikają niewidzialne cząstki powstałe w górnych warstwach atmosfery.

Bohaterem naszego opowiadania będzie cząstka około dwustu razy cięższa od elektronu, która może być naładowana albo dodatnio, albo ujemnie. Nosi ona nazwę mionu dodatniego lub mionu ujemnego. Odznacza się dużą nietrwałością, bo – jak wykazały badania – żyje w spoczynku tylko dwie milionowe części sekundy. Zauważyli Państwo, że powiedziałem, iż żyje w spoczynku dwie milionowe części sekundy. Wiemy już bowiem, że w szybkim ruchu może żyć dłużej. Chwaliłem się poprzednim razem, że ja w układzie odległego kwazara, od którego Ziemia oddala się z ogromną prędkością, liczę sobie prawie sto pięćdziesiąt lat. Otóż przesłędźmy dzieje mionu od powstania do rozpadu z dwóch punktów widzenia: raz patrząc na mion z pozycji eksperymentatora na Ziemi, a drugi raz, i to jest trudniejsze do zrealizowania, z pozycji obserwatora lecącego razem z mionem w kierunku Ziemi.

Najpierw rozważmy pierwszy punkt widzenia. To, co opowiadam, jest wynikiem szeregu doświadczeń. Stwierdzono ponad wszelką wątpliwość, że miony powstają w górnych warstwach atmosfery, gdzieś na wysokości 15 km. Mogą one mieć bardzo dużą energię i w pierwszym przybliżeniu możemy przyjąć, że poruszają się z prędkością bliską prędkości światła. Czas życia każdej cząstki ma sens tylko statystyczny. Nie umiemy przewidzieć, że ten konkretny mion będzie żył właśnie dwie milionowe części sekundy. Może właśnie rozpadnie się po milionowej części sekundy, a może będzie żył dwa razy dłużej. Jedyne,

Pierwsza podróż Kolumba „do Ameryki” w 1492 roku uważana jest za wydarzenie zamykające średniowiecze. Po tej dacie nastąpiła epoka nowożytna. Data jest, oczywiście, przyjęta dosyć umownie, trudno jednak nie zauważyć, że w wieku XVI i następnym dokonuje się bardzo dynamiczny rozwój cywilizacji – pojawiają się nowe idee, całkowicie odmienne od przekonań powszechnie przyjmowanych przez całe poprzednie tysiąclecie, a z nimi i nowożytna nauka.

Fizycy tradycyjnie przyjmują, że w ich dziedzinie przełom nastąpił dzięki działalności Galileusza. Zdecydowały o tym nie tyle jego liczne szczegółowe odkrycia, ile zastosowana metoda. Galileusz odwołuje się w swoich pracach do wyników doświadczeń, a swoje obserwacje i wnioski wyraża stosując pojęcia matematyczne. Matematyka nie jest jednak dla niego jedynie językiem zapisywania wyników, ale przede wszystkim metodą analizy doświadczeń. Galileusz jako pierwszy zdał sobie sprawę, że nie ma sensu teoria fizyczna nie odwołująca się do doświadczenia, a także, że praca doświadczalna nie poddawana analizie teoretycznej jest całkowicie bezwartościowa – tak, jak najdokładniejsze tablice wartości funkcji nie zastąpią twierdzeń analizy matematycznej.

Dobrym przykładem jest tu sformułowanie praw spadku swobodnego. Wielu historyków zarzuca Galileuszowi, że zapewne nie wykonał doświadczeń, na które się powołuje, gdy twierdzi, że wszystkie ciała spadają jednakowo. Istotnie, w czasach Galileusza każde bezpośrednie doświadczenie musiało dać wynik sprzeczny z tym twierdzeniem – nie było przecież wówczas wystarczająco wydajnych pomp próżniowych.

A jednak wniosek Galileusza był wnioskiem „doświadczalnym”. Rozumowanie jego przebiegało mniej więcej tak (podaję „wersję współczesną”; proszę więc wybaczyć, jeśli zdarzy mi się użyć pojęć, które pojawiły się o wiele później). Najpierw wykazuje wewnętrzną sprzeczność poglądu głoszonego za Arystotelesem przez ówczesnych filozofów, że ciało większe spada szybciej niż ciało mniejsze. Zaczyna od ciał z tego samego materiału. Załóżmy, że, istotnie, duży kamień spada szybciej niż mały. Jeśli tak, to po ich połączeniu powinny spadać z prędkością pośrednią, mniejszą niż prędkość dużego i większą niż małego – wszak ciało szybsze „pociągałoby” wolniejsze, a wolniejsze „hamowało” szybsze. Połączone kamienie są jednak razem większe niż większy z nich, a więc zgodnie z założeniem spadają szybciej niż każdy oddzielnie. Otrzymujemy sprzeczność, a więc twierdzenie Arystotelesa jest błędne. Obserwowane różnice w szybkości spadania różnych ciał nie mogą wynikać z „natury” spadania, a spowodowane są innymi przyczynami – np. oporem powietrza. Porównanie spadania ciał z różnych materiałów wymaga „wylimitowania” oporu powietrza.

Dodatkowo, ponieważ obserwowane różnice czasów mogą być bardzo małe, Galileusz proponuje używanie równi pochyłej dla „rozciągnięcia” doświadczeń w czasie. Równia wprowadza jednak dodatkowe opory: tarcie o deskę. Jako dalsze ulepszenie Galileusz proponuje zastosowanie wahadła, w którym „spadające ciało” zawieszono jest na długiej nici. Teraz rozumowanie jest już proste: porównujemy ruch wahadeł o identycznej długości z „ciężarkami” wykonanymi z różnych materiałów. Opór powietrza będzie powodował różne tempo zanikania amplitudy, natomiast „czas spadania” będziemy obserwowali jako okres wahań. Uruchamiając jednocześnie dwa takie wahadła możemy bardzo precyzyjnie porównać ich okresy obserwując różnice faz po kilkudziesięciu lub nawet kilkuset wahaniciach – by, jak stwierdza Galileusz, nie

zaobserwować najmniejszej między nimi różnicy. Jak bowiem zauważył Galileusz, okres drgań wahadła zależy jedynie od jego długości (nie jest to stwierdzenie całkiem ścisłe).

Wniosek: po wyeliminowaniu oporów ruchu wszystkie ciała spadają z jednakową szybkością.

Sformułowane przez Galileusza twierdzenie dotyczące spadania ciał było tym samym jednym z pierwszych przewidywań teoretycznych w pełni później potwierdzonym w niezliczonych doświadczeniach wykonywanych na tysiącach lekcji fizyki.

Sens przełomu dokonanego przez Galileusza polegał na dostrzeżeniu głębokiego związku między poznaniem „bezpośrednim”, tj. doświadczalnym a teoretycznym, dodatkową zaś korzyścią było wynalezienie zegara wahadłowego (skonstruowanego nieco później przez Christiana Huygensa) – do początków XX wieku najprecyzyjniejszego przyrządu do pomiaru czasu. Wróćmy jednak do problemu spadku swobodnego. Czy rzeczywiście „różne ciała spadają jednakowo”? Wiele lat po śmierci Galileusza, po sformułowaniu przez Newtona praw dynamiki i prawa powszechnego ciężenia i tym samym ogromnym udoskonaleniu „aparatury pojęciowej” zdano sobie sprawę, że w rozumowaniu Galileusza, w części dotyczącej „ciał z różnych materiałów” ukryte jest założenie (przyjęte również przez Newtona i jego następców), iż „masa bezwładna” i „masa grawitacyjna” ciała są równe. Jeśli jednak dokładniej przeanalizować te pojęcia i „przepisy” na mierzenie obu mas, to okazuje się, że w zasadzie mogłyby to być wielkości zupełnie niezależne. „Masę bezwładną” moglibyśmy wyznaczać badając stosunek prędkości po zderzeniu z pewnym ciałem wzorcowym; „masa grawitacyjna” natomiast jest proporcjonalna do siły, z jaką Ziemia przyciąga dane ciało – są to więc wielkości istotnie różne. Zdawał sobie z tego sprawę już Newton i próbował wykazać, że bezwładność jest wynikiem przyciągania grawitacyjnego przez „resztę Wszechświata”. Albert Einstein natomiast przyjął, że równość obu mas jest ogólnie prawdziwym prawem Przyrody i zbadał dokładnie konsekwencje takiego założenia. Posłużył się przy tym metodą identyczną, jak Galileusz niemal trzysta lat wcześniej: dokonał szczegółowej analizy możliwych wyników doświadczeń przeprowadzonych w „spadającej windzie”. Doszedł przy tym do wniosku, że żadne doświadczenia w „zamkniętej windzie” nie pozwoliłyby odróżnić, czy nieruchoma winda znajduje się w zewnętrznym, jednorodnym polu grawitacyjnym, czy też porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym. Twierdzenie to stoi u podstaw ogólnej teorii względności, a z nią i całej współczesnej kosmologii. Nic dziwnego, że równość masy bezwładnej i grawitacyjnej jest też coraz dokładniej sprawdzana doświadczalnie – jak dotąd nie ma wystarczających podstaw, aby w nią wątpić. Badania rozpoczęte przez Galileusza nie są zakończone: ogólna teoria względności ma zupełnie inną postać niż teorie pozostałych oddziaływań elementarnych. Wiadomo, że uwzględnienie zjawisk kwantowych wymaga daleko idącej zmiany teorii – jak jednak ma ona wyglądać – nie udaje się ustalić już od lat kilkudziesięciu.

Twierdzenie Galileusza, że okres drgań wahadła nie zależy od amplitudy ruchu, nie jest ścisłe. Okres wahań rośnie wraz z amplitudą. Dla małych wychyleń poprawki do „szkolnego wzoru” $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ są jednak bardzo małe i przy stosowaniu wahadła o długości kilku metrów i niewielkich wychyleń byłyby (w czasach Galileusza) całkowicie pomijalne (okres wydłuża się o mniej niż 0,2%, gdy amplituda wynosi 10°). Ścisłe biorąc, stosując wahadło Galileusz nie wyeliminowałby również całkiem wpływu oporu powietrza. Występowanie siły oporu (np. proporcjonalnej do prędkości) zmienia bowiem okres drgań w stosunku do ruchu bez oporu. Poprawki te, w przypadku ruchu w powietrzu są tak małe, że można je pominąć w porównaniu z poprawkami związanymi z zależnością od amplitudy drgań.

co możemy twierdzić, to to, że średnio miony żyją dwie milionowe części sekundy. Dla uproszczenia rozważajmy więc taki średni mion. Patrząc z Ziemi i rozumując zgodnie z fizyką Newtona, czyli zgodnie ze zdrowym rozsądkiem, możemy przeprowadzić następujące obliczenie. Mion, ten nasz średni, przez czas swego życia przeleci, nawet z prędkością światła, dwie milionowe części sekundy razy trzysta tysięcy kilometrów na sekundę, czyli sześćset metrów. Nasuwa się nieodparcie wniosek: miony powstające piętnaście kilometrów nad powierzchnią Ziemi nie mają żadnej szansy na dotarcie do poziomu morza, bo przedtem rozpadną się. Przeprowadzamy doświadczenie z licznikami umieszczonymi na poziomie morza i stwierdzamy, że mnóstwo mionów jednak dociera do powierzchni Ziemi. Wynik zaskakujący, czyżby znowu sprzeczny ze zdrowym rozsądkiem? Dla nas już nie – wiemy bowiem, że czas w szybkim ruchu płynie wolniej. Zakładając dość rozsądną wartość prędkości mionu równą 0,99876 prędkości światła okaże się, że przy tej prędkości mion żyje dwadzieścia osiem razy dłużej niż mion w spoczynku, a więc będzie mógł przebyć nawet 18 km. Nie ma więc żadnego problemu? Czy aby na pewno?

Popatrzmy teraz na ten sam proces powstania, lotu i rozpadu mionu z punktu widzenia obserwatora, który leci razem z mionem. Względem obserwatora mion jest teraz w spoczynku. Żyje więc tylko dwie milionowe części sekundy. Może więc przebyć w czasie swego życia co najwyżej 600 metrów. Czyli nie może dotrzeć do naszej aparatury badawczej na powierzchni morza, do której, jak przypominam, ma 15 km. A jednak dociera do aparatury, bo na to wskazuje doświadczenie. Co więcej, dopiero co zrozumieliśmy, że powinien tam dotrzeć z punktu widzenia obserwatora na Ziemi. Obserwator pędzący razem z mionem zdaje się twierdzić co innego. Znowu sprzeczność ze zdrowym rozsądkiem. Tak, ale tylko dopóty, dopóki nie wyjawimy jeszcze jednego przewidywania szczególnej teorii względności. Twierdzi ona mianowicie, że długość poruszającego się przedmiotu ulega skróceniu w kierunku ruchu. Obserwator związany z mionem widzi pędzącą naprzeciw Ziemi. Odległość do Ziemi będzie więc mniejsza, bo Ziemia jest w ruchu. Dokładne obliczenia w naszym przypadku mówią, że ta odległość wynosi tylko 528 metrów zamiast 15 kilometrów. Mion tę odległość przebędzie bez trudu. Sprzeczność jest usunięta. Zdrowy rozsądek uratowany, ale za cenę przyjęcia szczególnej teorii względności.

Dla niektórych z nas cena to duża. Musieliśmy bowiem zgodzić się, że czas nie ma znaczenia absolutnego, że to samo dotyczy długości: pręt o długości metra widziany z bardzo szybko poruszającego się obiektu może mieć długość tylko pół metra. Taki efekt zauważymy pędząc już z prędkością równą 0,865 prędkości światła.

Nasuwa się pytanie, czy jest coś, co nie zmienia się z prędkością. Może masa albo ładunek elektryczny? Okazuje się, że ten ostatni nie zależy od prędkości i bardzo łatwo to wykazać doświadczalnie. Otóż dowodem na to jest doskonała obojętność elektryczna zwykłej materii. Elektrony są bardziej ruchliwe niż protony. W każdym pierwiastku inny jest ruch elektronów. Gdyby ładunek zależał od prędkości, materia nie mogłaby być obojętna elektrycznie. Uff, przynajmniej ładunek nie zależy od prędkości, mówimy, że jest niezmiennikiem. A może i masa ciała nie zależy od prędkości? Znowu trzeba „zapytać się” doświadczenia. Użyjemy do tego wiązki elektronów. Są one naładowane ujemnie i w ruchu mogą się odchylić zarówno pod wpływem pola elektrycznego, jak i pola magnetycznego. Pola te działają w różny sposób na poruszający się elektron. Okazało się, że porównując odchylenia w jednym i drugim polu można wyznaczyć stosunek ładunku cząstki do jej masy. Wiemy już, że ładunek cząstki nie zależy od prędkości, łatwo więc sprawdzimy, czy masa zależy od prędkości poruszania się. Przyznają Państwo, że zaskakuje sama możliwość takiej zależności, ale lepiej sprawdzić.

Pierwszy takie doświadczenie wykonał w 1901 roku W. Kaufman, ale opowiem o znacznie dokładniejszych pomiarach z 1908 roku wykonanych przez A. H. Bucherera. Zmieniał on prędkość wiązki elektronów od 0,3 prędkości światła do 0,69 prędkości światła i za każdym razem z odchylenia w polu elektrycznym i magnetycznym wyznaczał stosunek ładunku do masy elektronu. Stosunek ten nawet w żargonie fizycznym nazywa się „e do em”. Przypominam: ładunek elektryczny nie zależy od prędkości ruchu. Jeżeli więc masa jest stała, to i cały stosunek nie powinien zależeć od prędkości. Tymczasem okazało się, że ten stosunek maleje wraz ze wzrostem prędkości elektronów. Przy najmniejszej prędkości 0,32c wynosił 1,66, a przy prędkości 0,69c już tylko 1,28. Co to znaczy? A tylko tyle, że masa elektronu rośnie wraz ze wzrostem prędkości. Oczywiście, nie tylko elektronu. Doświadczeń takich wykonano później wiele i wszystkie potwierdzają ten wynik.

Dyfuzja

Jan KALINOWSKI

Zapach perfum z otwartej buteleczki po pewnym czasie rozejdzie się po pokoju. Dym z papierosa w powietrzu rozmywa się, a kropla atramentu wpuszczona do wody zabarwi ją. Teoria kinetyczna tłumaczy te zjawiska w następujący sposób. Cząsteczki gazów, cieczy i ciał stałych są w ciągłym ruchu i zderzają się. Rozpatrzmy na przykład dym w powietrzu. Żadna cząsteczka dymu (albo ich grupa) nie porusza się szybko w pewnym ustalonym kierunku, gdyż na skutek zderzeń kierunek jej ruchu ulega ciągłym zmianom. Cząsteczki dymu będą się stopniowo rozchodziły w powietrzu na skutek beładnej ich wędrówki. Proces tego typu nazywamy dyfuzją. Dyfuzja będzie zachodzić dopóty, dopóki koncentracja cząsteczek jest nierównomierna. To samo dotyczy autodyfuzji – wyrównywania się gęstości cząsteczek w układach jednoskładnikowych. Po dostatecznie długim czasie nastąpi wyrównanie się koncentracji i dyfuzja ustanie.

Proces dyfuzji jest podobny do procesu przewodnictwa cieplnego, które zachodzi, jeśli jest różnica temperatur. Jeśli różnica koncentracji w punktach oddalonych o Δx wynosi $\Delta \rho$, to molekuly z obszaru o większej koncentracji dyfundują do obszaru o mniejszej z szybkością proporcjonalną do $\Delta \rho / \Delta x$. Zmiana liczby molekuł w jednostce czasu będzie też proporcjonalna do powierzchni A , przez którą dyfundują molekuly, tzn.

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -AD \frac{\Delta \rho}{\Delta x},$$

gdzie znak minus oznacza, że dyfuzja zachodzi w kierunku przeciwnym do tego, w którym wzrasta ρ . Stała D nosi nazwę współczynnika dyfuzji. Powyższe prawo dyfuzji podał w 1855 r. niemiecki fizjolog Adolf Fick. Równanie przewodnictwa cieplnego ma formalnie taką samą postać, przy podstawieniu $\Delta N \rightarrow \Delta Q$ (zmiana ciepła) i $\Delta \rho \rightarrow \Delta T$ (różnica temperatur).

Zwróćmy uwagę, że prawo to zostało sformułowane przez fizjologa, a nie fizyka. Dyfuzja substancji odżywczych w wodzie czy też tlenu do krwi w płucach ma przecież podstawowe znaczenie dla organizmów żywych.

Badając procesy dyfuzji można uzyskać ciekawe informacje o dyfundujących molekułach. Rozpatrzmy oddzielnie dyfuzję w gazach i cieczach.

W przypadku gazów rozpatrzmy najprostszy przypadek – autodyfuzję. Zauważmy, że współczynnik dyfuzji ma wymiar L^2/T , tzn. jest mierzony w m^2/s . Jest naturalne oczekiwać, że D będzie zależał od prędkości v dyfundujących cząsteczek. Mamy więc już m/s , potrzebujemy jeszcze czegoś o wymiarze długości. W gazach rozrzedzonych dyfuzja zachodzi szybciej. W rozrzedzonym gazie cząsteczki znajdują się średnio dalej od siebie, tzn. droga między kolejnymi zderzeniami wydłuża się. D może więc zależeć też od długości drogi swobodnej λ . Faktycznie, okazuje się, że $D = \frac{1}{3} v \lambda$. Z kolei według teorii kinetycznej gazów $v \sim \sqrt{T/m}$, więc pomiar D może dostarczyć informacji o masie molekuł. Z tabelki widać, że zależność $D \sim m^{-1/2}$ jest dość dobrze spełniona.

substancja	masa molekularna	temperatura (°C)	D (m^2/s)
H ₂	2	0	$6,34 \times 10^{-5}$
H ₂ O	18	8	$2,39 \times 10^{-5}$
O ₂	32	0	$1,78 \times 10^{-5}$
CO ₂	44	0	$1,39 \times 10^{-5}$
CS ₂	76	20	$1,02 \times 10^{-5}$

Dla dyfuzji w układach wieloskładnikowych zależność D od parametrów jest bardziej skomplikowana.

Dla dyfuzji w cieczach prosta analiza wymiarowa zawodzi, gdyż jest więcej czynników wpływających na D . W przypadku dużych molekuł kulistych (przypadek interesujący biologów) mechanizm dyfuzji przypomina mechanizm przemieszczania się kuli w cieczy lepkiej. Z doświadczenia otrzymujemy

$$D = \frac{kT}{6\pi a\eta},$$

gdzie k – stała Boltzmanna, a – rozmiar dyfundujących molekuł i η – lepkość cieczy. Tym razem $D \sim m^{-1/3}$; gdyż $m \sim a^3$, tzn. współczynnik dyfuzji jest niezbyt czuły na masę molekuł.

Potwierdzają to dane z tabelki dla współczynników dyfuzji w wodzie w temperaturze $t = 20^\circ\text{C}$.

molekuła	masa molekularna	D (m^2/s)
H_2O	18	2×10^{-9}
O_2	32	1×10^{-9}
$\text{CO}(\text{NH}_2)_2$ mocznik	60	$1,1 \times 10^{-9}$
$\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$ glukoza	180	$6,7 \times 10^{-10}$
$\text{C}_{12}\text{H}_{22}\text{O}_{11}$ sacharoza	342	$5,2 \times 10^{-10}$
kwas rybonukleinowy	13 683	$1,2 \times 10^{-10}$
hemoglobina	68 000	$6,9 \times 10^{-11}$
enzym ureaza	480 000	$3,5 \times 10^{-11}$

Zauważmy, że ze znajomości D możemy otrzymać bezpośrednio rozmiary dyfundującej molekuły. Masę molekuły możemy oszacować ze wzoru

$$m = \frac{4}{3}\pi\rho a^3,$$

gdzie ρ – gęstość suchej substancji, której molekuły dyfundują w cieczy. Gdy molekuły znajdują się w cieczy (wodzie), molekuły cieczy przyklejają się do powierzchni dyfundującej molekuły powiększając efektywnie jej rozmiary. Dla molekuł substancji biologicznych w wodzie doświadczenie mówi, że wynik trzeba poprawić o czynnik $\sim 1,5$, tzn. masa molekuły wyniesie

$$m = \frac{4}{3}\pi\rho a^3 / 1,5.$$

Dyfuzja zachodzi też w ciałach stałych. Jest to bardzo powolny proces wywołany ruchami cieplnymi atomów. Najlepiej zbadana jest dyfuzja w germanie i krzemie, gdyż dyfuzję wykorzystuje się tutaj do domieszkowania półprzewodników. Aby przyspieszyć proces dyfuzji, przeprowadza się go w wysokiej temperaturze. W tabelce poniżej podane są współczynniki dyfuzji dla niektórych pierwiastków.

pierwiastek	D (cm^2/s)	
	german w 800°C	krzem w 1300°C
B	4×10^{-13}	2×10^{-11}
Al	–	8×10^{-11}
Ga	1×10^{-13}	$2,5 \times 10^{-11}$
In	2×10^{-13}	$6,5 \times 10^{-12}$
Ge	8×10^{-14}	5×10^{-4}
P	$6,5 \times 10^{-12}$	2×10^{-4}
As	4×10^{-11}	$1,5 \times 10^{-12}$
Sb	2×10^{-11}	2×10^{-12}
Bi	–	$16,3 \times 10^{-12}$

Dane w tabelkach pochodzą z *Encyklopedii Fizyki*, PWN 1972 i książki J.B. Mariona, *General Physics with Bioscience Essays*, John Wiley & Sons 1979.

Wspominałem, że względem obserwatora na odległym, szybko poruszającym się kwazarze, przeżyłem już sto pięćdziesiąt lat. Teraz zaś okazuje się, że waży tam ponad dwieście kilogramów. Nie jest to ponętny obraz, ale na szczęście nie zależy mi aż tak bardzo na opinii odległego kwazarowca.

Przypomnijmy sobie, do jakich to wniosków doprowadziły nas doświadczenia omawiane w ostatnich trzech artykułach. Oto one:

1. Prędkość światła nie zależy od prędkości źródła lub obserwatora.
2. Czas w układzie poruszającym się płynie wolniej niż w spoczynku.
3. Długość obiektu poruszającego się względem obserwatora jest mniejsza niż w układzie, w którym ten obiekt spoczywa.
4. Masa ciała poruszającego się względem obserwatora jest większa niż wtedy, gdy ciało spoczywa.

Wszystko to razem doprowadziło fizyków do wniosku, że żyjemy nie w przestrzeni trójwymiarowej, lecz w czterowymiarowej czasoprzestrzeni. Tu jednak kończą się doświadczenia, a zaczynają rozważania teoretyczne, których obiecałem unikać.

Unikam rozważań teoretycznych i podawania wzorów. Te każdy zainteresowany Czytelnik może znaleźć w dowolnym podręczniku fizyki, który zajmuje się tymi zagadnieniami. Moim celem nie było, oczywiście, nauczenie Państwa szczególnej teorii względności, ale pokazanie, ile materiałów do przemysłów dostarczają nam doświadczenia, które możemy wyjaśnić na jej podstawie. Takich doświadczeń można by wyliczyć jeszcze wiele. Nie są to doświadczenia z życia codziennego, ale nie są to też czysto akademickie doświadczenia nikomu do niczego nieprzydatne. Bez szczególnej, a również ogólnej teorii względności trudno by zrozumieć ruch ciał niebieskich, szczególnie przy osiąganych dokładnościach pomiarów. A to już ma praktyczne znaczenie dla astronautów.

Chciałbym Państwu polecić coś z lektury. Osobiście bardzo cenię wydaną w serii *Biblioteczka Delt* broszurę Andrzeja Szymachy i Piotra Lasoty *Teoria względnosci*. Książeczka jest dawno wyczerpana, ale na pewno można ją znaleźć w niejednej bibliotece. Kto bardziej dociekliwy, może zajrzeć do uniwersyteckiego podręcznika napisanego przez A. K. Wróblewskiego i J. Zakrzewskiego *Wstęp do fizyki*. Znajdzie tam wiele opisów doświadczeń, o których mówiłem.

Następnym razem wrócimy do bardziej przyziemnych spraw i zaproponuję Państwu zamrażanie wody w lodówce.



Rozwiązanie zadania M 640.
Rozpatrzmy trójkąt, którego jeden bok ma długość $a \in [0, 1]$, drugi zaś $b \in [1, 2]$. Pole takiego trójkąta jest największe, gdy oba boki są prostopadłe, $a = 1$ i $b = 2$. Trzeci bok ma wtedy długość $\sqrt{5} \in [2, 3]$. Zatem poszukiwany trójkąt to trójkąt prostokątny o bokach $1, 2, \sqrt{5}$.



Rozwiązanie zadania M 641.
Popatrzmy na k -tego z kolei siódmoklasistę (po przestawieniu): ma on w swojej klasie $(k-1)$ wyższych kolegów. Za każdym z nich pierwotnie stał wyższy ośmioklasista, zatem ośmioklasistów wyższych od naszego wybranego siódmoklasisty jest (co najmniej!) k . Wynika stąd, że po przestawieniu stojący za nim ośmioklasista będzie wyższy.



Rozwiązanie zadania M 642. Teza tego zadania wynika bezpośrednio z zadania 641. Jeśli bowiem popatrzmy tylko na dwie kolumny (przed przestawieniem), i -tą i j -tą, $j < i$, to żołnierz stojący w j -tej kolumnie jest wyższy od swojego kolegi stojącego w tym samym szeregu, ale w i -tej kolumnie – bo szeregi są ustawione według wzrostu. Jeśli teraz ustawimy kolumny według wzrostu, to – jak wynika z zadania 641 – żołnierz stojący w j -tej kolumnie nadal będzie wyższy od swojego kolegi stojącego w tym samym szeregu, ale w i -tej kolumnie. Tak więc szeregi pozostaną uporządkowane według wzrostu.

Tożsamość $1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$ wynika bezpośrednio ze wzoru dwumianowego Newtona zastosowanego do wyrażenia $(1+1)^n$. Można ją też uzyskać obliczając na dwa różne sposoby liczbę podzbiorów zbioru $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Pierwszy sposób: mamy 1 zbiór pusty, $\binom{n}{1}$ podzbiorów jednoelementowych, $\binom{n}{2}$ dwuelementowych itd. Łącznie mamy $1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$ podzbiorów. Drugi sposób: Każdemu podzbirowi A możemy przyporządkować jednoznacznie n elementowy ciąg zerowyjedynekowy. Mianowicie, jeśli $x_i \in A$, to na i -tym miejscu piszemy 1, a jeśli nie, to piszemy 0. Takich ciągów jest 2^n .

Trudniejsze jest obliczenie sumy

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \dots + n\binom{n}{n},$$

choć, jak się okazuje, jest na to wiele sposobów. My pokażemy trzy bardzo różne.

1. Zauważmy, że dla dowolnej liczby naturalnej $1 \leq k \leq n$

$$k \binom{n}{k} = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

W efekcie

$$\begin{aligned} \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \dots + n\binom{n}{n} &= \\ &= n \left(1 + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \dots + \binom{n-1}{n-1} \right) = n2^{n-1}. \end{aligned}$$

2. Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona otrzymujemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n.$$

Różniczkując obie strony tej równości względem x dostajemy

$$n(1+x)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + \dots + n\binom{n}{n}x^{n-1}.$$

Stąd, po podstawieniu $x = 1$, wynika, że

$$n2^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \dots + n\binom{n}{n}.$$

3. Niech X będzie zmienną losową określającą liczbę sukcesów w schemacie n prób Bernoulliego, w którym prawdopodobieństwo sukcesu jest równe $1/2$. Wartość oczekiwana EX zmiennej X wynosi

$$\binom{n}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\binom{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots + n\binom{n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Zmienną X można przedstawić w postaci sumy zmiennych losowych X_1, \dots, X_n , z których k -ta przyjmuje wartość 1, jeśli w k -tej próbie zanotowaliśmy sukces, i 0, gdy porażkę. Wartość oczekiwana sumy zmiennych jest równa sumie wartości oczekiwanych tych zmiennych. Zatem

$$EX = EX_1 + EX_2 + \dots + EX_n.$$

Zauważmy jednak, że $EX_1 = \dots = EX_n = \frac{1}{2}$. W efekcie

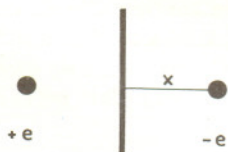
$$\binom{n}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\binom{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots + n\binom{n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n = n \frac{1}{2},$$

a więc

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \dots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}.$$



Rozwiązanie zadania F 389.
Niech m oznacza masę elektronu. Korzystając z metody obrazu stwierdzamy, że lustrzany obraz ładunku pojawi się po przeciwnej stronie płaszczyzny.



Płaszczyzna będzie przyciągać elektron z siłą $F = \frac{ke^2}{4x^2}$. W polu siłowym typu

$F = \frac{A}{r^2}$ ciała poruszają się po elipsach i spełnione jest trzecie prawo Keplera

$\frac{a^3}{T^2} = \frac{A}{m_4\pi^2}$, gdzie a jest wielką półosią elipsy, a T czasem obiegu.

W naszym przypadku tor elektronu jest odcinkiem, który jest szczególnym przypadkiem elipsy, gdzie $a = \frac{x}{2}$, zaś czas spadku na płaszczyznę jest równy

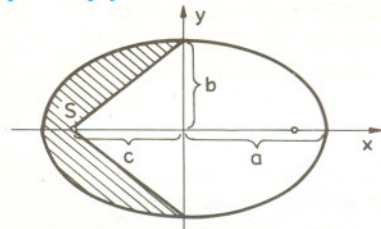
$t = \frac{T}{2}$. Podstawiając r, T oraz $A = \frac{ke^2}{4}$ do prawa Keplera wyznaczamy

ostatecznie czas $t = \pi\sqrt{\frac{mx^3}{2ke^2}} = 140$ s.



Rozwiązanie zadania F 840.

Korzystamy z drugiego prawa Keplera, które mówi, że prędkość połowa komety jest stała. Pole całej elipsy jest równe πab , gdzie a, b oznaczają wielką i małą półoś elipsy.



Czas pokonywania połowy trajektorii bliższej Słońcu jest proporcjonalny do pola zakreślonego przez promień wodzący komety i jest on równy

$$t = \frac{S}{\pi ab} T = \frac{\frac{1}{2}\pi ab - bc}{\pi ab} T = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi e}\right) T,$$

gdzie $e = \frac{c}{a}$ jest mimośrodem elipsy. Ostatecznie $t = 14,5$ roku.

Latem 1900 roku odbyła się w Paryżu Wystawa Światowa. Z tej okazji odbył się też II Międzynarodowy Kongres Matematyków. Uczestniczyło w nim 226 matematyków z 23 krajów. W dniu 8 sierpnia na wspólnym posiedzeniu sekcji V (historii i bibliografii) oraz VI (dydaktyki i metodologii) tego kongresu odczyt wygłosił David Hilbert. Odczyt nosił tytuł „Problemy matematyczne”.

Hilbert rozpoczął wykład od zademonstrowania, jak rozwiązywanie konkretnych zadań stawało się źródłem powstawania nowych dyscyplin matematycznych, tworzenia nowych pojęć, stawiania nowych pytań. Wymienia problem brachistochrony (krzywej najszybszego spadku) i pokazuje, jak z rozwiązywania tego zadania narodził się rachunek wariacyjny. Przypomina, jak rozwiązywanie Wielkiego Twierdzenia Fermata (nie udowodnionego po dzień dzisiejszy) stworzyło całą nowoczesną algebrę, a w szczególności teorię pierścieni. Przytacza problem trzech ciał (pytanie o ich ruch pod wpływem wzajemnego przyciągania) i wskazuje, jak z prób rozwiązywania tego zadania narodziło się szereg metod w teorii równań różniczkowych. Wspomina o tym, jak poszukiwania geodezyjnych („najprostszyc” linii na powierzchni) dały początek geometrii różniczkowej. Wskazuje, jak badania symetrii wielościanów dały początek tak teorii grup i teorii niezmienników, jak też krystalografii.

I tu stawia tezę, że rozwiązywanie konkretnych zadań jest najważniejszym źródłem energii matematyków, stanowi najgłębszy i najskuteczniejszy bodziec do podejmowania przez nich badań. Tak jego zdaniem powstaje matematyka.

Następnie stawia konkretne problemy, których rozwiązanie (jego zdaniem) powinno popchnąć matematykę naprzód, dać jej nowy zastrzyk energii, spowodować stworzenie nowych metod, uproszczenie starych, wywołać narodziny nowych jej gałęzi. Wymienia blisko trzydzieści konkretnych zadań (ciekawe, że nie wiadomo, ile ich było) – na część z nich obecni na sali matematycy znają odpowiedź. Pozostają 23 problemy do rozwiązania.

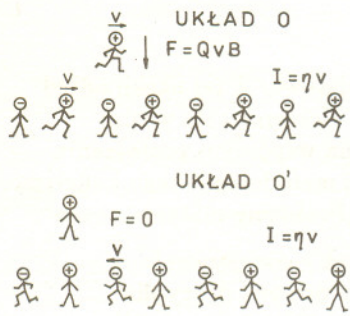
Ci, którzy utrzymują bliższe kontakty z matematyką-nauką, wiedzą, że cała właściwie dwudziestowieczna matematyka to rozwiązywanie problemów Hilberta. Pierwszy z nich został rozwiązany jeszcze w 1900 roku. Kiedy został rozwiązany ostatni, powiedzieć nie można, bo w trakcie rozwiązywania problematyka rozrastała się i rozrasta nadal. W ramach np. VI problemu Hilberta zyskał aksjomatykę rachunku prawdopodobieństwa (Kolmogorow, 1933) i przesunięcie go z fizyki do matematyki. W ramach tegoż problemu Emma Noether udowodniła twierdzenie wiążące symetrie z prawami zachowania, czyniąc z grup Liego podstawowe narzędzie fizyki. Rozwiązaniem I problemu Hilberta jest wykazanie niezależności hipotezy continuum od aksjomatów teorii mnogości (Cohen, 1963). Rozwiązaniem z kolei X problemu jest wykazanie, że nie istnieje algorytm badający istnienie rozwiązań choćby tylko wielomianowych równań diofantycznych (w liczbach całkowitych). Nie sposób zresztą wymienić sensownej, krótkiej listy takich rezultatów – takie krótkie listy mają postać grubych książek. Nic dziwnego: mówią o całej dwudziestowiecznej matematyce.

Stosunek Hilberta do roli rozwiązywania zadań w rozwoju matematyki nie był, rzecz jasna, podzielany przez wszystkich (korzystających przecież z jego, zadaniami wyznaczanej, drogi badawczej). Jednak ci, którzy poszukiwali patrona międzynarodowej nagrody dla organizatorów konkursów zadaniowych, nie mieli wątpliwości – to powinien być David Hilbert. I najwyższe odznaczenie przyznawane przez *World Federation of National Mathematical Competitions* to medal Hilberta. Odznaczony został nim w tym roku prowadzący Ligę – Klub 44M – Marcin Kuczma. To wielki sukces naszego kolegi i wielki zaszczyt dla *Delt*, że nasze zadania ligowe (choć pisane w mało znanym narzeczu), a przede wszystkim liczne grono uczestników Ligi, znalazły tak wielkie uznanie.

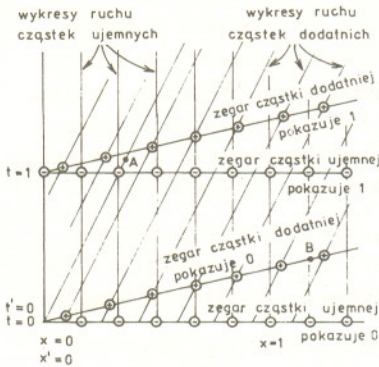
Gratulujemy!

Jeszcze raz o teorii względności

Andrzej SZYMACHA



Rys. 1



Rys. 2

Śmieszne byłoby wyobrazić sobie, że do pojedynczego zjonizowanego atomu przyczepiony jest... budzik. Ale to sam jon jest zegarem; kręca się w nim elektrony, precesuje spin, coś się dzieje i to wystarcza, by o każdym okrucieństwie materii myśleć jako o pewnym zegarze. Konsystencja pojęcia czasu mierzzonego przez tak szeroko rozumianą klasę wzajemnie nieruchomych swobodnych zegarów jest niebagatelnym faktem przyrodniczym, stanowiącym, jak się wydaje, podstawę fizyki i nie dającym się wywieść z niczego innego jak tylko wprost z doświadczenia. Bez niej o czasie jako takim nie dałoby się w ogóle mówić. To, że konsystencja ta ma miejsce w każdym układzie inercjalnym, jest najważniejszym aspektem zasady względności.

Synchronizacja nieruchomych swobodnych zegarów nie sprawia żadnych trudności i nie wymaga żadnej pogłębionej dyskusji. Każda, najmniej wymyślna, próba sprawdzenia, czy wzajemnie nieruchome zegary „idą” jednakowo, o ile tylko respektuje się ich równouprawnienie, da zawsze ten sam rezultat – nie ma w każdym razie żadnych przesłanek, by sądzić inaczej. Nie powinniśmy natomiast w naszym układzie odniesienia próbować synchronizować „cudzych” zegarów, tj. zegarów w ruchu. Ich sytuacja dla nas jest nierówna – jeden biegnie z przodu, drugi za nim; jeden może się do nas zbliżać, a drugi oddalać. Niech zegary te synchronizuje „ich” obserwator.

Dwa równoległe prądy przyciągają się. W szczególności wynika z tego, że i pojedynczy ładunek poruszający się równoległe do pewnego prądu jest też przyciągany z siłą zależną od prędkości tego ładunku. Założmy, tak jak to ma miejsce w większości przypadków, że prąd spowodowany jest wzajemnym ruchem tylko dwóch rodzajów ładunków (przeciwnego znaku). Przyjmiemy także, dla prostoty, że ładunki jednego znaku mają jedną wspólną prędkość. Niech wspomniany dodatkowy ładunek, tzw. *próbny*, który z prądem oddziałuje, będzie równy $Q > 0$ i niech jego prędkość będzie taka jak prędkość dodatnich ładunków w przewodniku. Chcielibyśmy także, by na jednostkę długości przypadało tyle samo (co do wartości bezwzględnej) ładunku jonów dodatnich η , co ujemnych $-\eta$. Aby omawianą konfigurację narysować i zaznaczyć strzałkami konkretne wartości prędkości cząstek, trzeba zdecydować się na jakiś konkretny układ odniesienia. W naszym przypadku nasuwają się dwa wygodne układy: jeden związany z obserwatorem nieruchomym względem ładunków ujemnych O , drugi nieruchomy względem cząstek dodatnich O' .

W sytuacji przedstawionej na pierwszym rysunku na cząstkę próbną działa w kierunku przewodu siła o wartości QvB ($B = \mu_0 I / 2\pi r$, $I = \eta V$), a według obserwatora, który posłuży się drugim układem, na cząstkę tę... nie działa żadna siła. Pierwszy obserwator będzie przewidywał, że cząstka zacznie się zbliżać do przewodnika, drugi będzie twierdził, że jest ona nieruchoma i nigdy do przewodu nie dotrze. Ich przewidywania dotyczą tego samego obiektu. ALE TO JEST ABSURDALNE. Tylko jeden z nich może mieć rację! Ale który?!

Skoro w omawianej sytuacji tylko jeden z obserwatorów może mieć rację, **tylko jeden z rysunków może odpowiadać rzeczywistości**. Ponieważ na każdym z rysunków część cząstek jest w ciągłym ruchu, rysunki te rejestrują jakby zamrożone położenia ładunków w określonej *tej samej chwili*. Ale co to jest czas? Jak mierzy się czas i jak się ustala w różnych punktach przestrzeni, że jest właśnie ta sama chwila? Czy dwaj obserwatorzy zawsze zgodzą się co do tego, że jakies dwa zdarzenia dokonują się w tej samej chwili? Nieprawdziwe przypuszczenie, wyznawane przez pokolenia fizyków ubiegłych stuleci, że odpowiedzi na powyższe pytania są oczywiste, w szczególności, że odpowiedzi na ostatnie pytanie jest pozytywna, prowadzi nieuchronnie do sprzeczności.

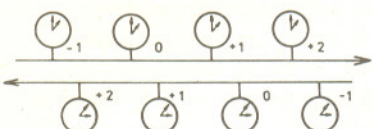
Zamiast „zamrożonej” konfiguracji chwilowej przedstawmy los grupy ładunków obu znaków w pewnym przedziale ich historii. Na osiach wykresu odkładać będziemy położenie i czas mierzone przez zegary nieruchome w układzie O .

Wykresy ruchu ładunków ujemnych (tzw. *linie świata* tych ładunków) są liniami prostymi, równoległymi do osi czasu, ale linie ładunków dodatnich są pochylone, tym bardziej, im większa jest ich prędkość. Wyobraźmy sobie, że każdy ładunek ma przyczepiony zegar. Wskazania zegarów przyczepionych do ładunków ujemnych pokazują w różnych miejscach na płaszczyźnie, oczywiście, zawsze współrzedną t stosownego punktu. *Czasem* w układzie inercjalnym nazywamy w istocie wskazanie najbliższego zegara nieruchomego w tym układzie, zegara *zsynchronizowanego ze wszystkimi innymi zegarami nieruchomymi w tym układzie*. Na wykresie mamy jednak także linie świata zegarów (na grzbietach ładunków dodatnich) ruchomych w tym układzie odniesienia. Jakie są wskazania tych zegarów w różnych miejscach na diagramie?

Zacząć trzeba od tego, że te ruchome zegary, same dla siebie są **nieruchome!** Jako nieruchome prowadzą one samoistną procedurę synchronizacji nie oglądając się na żadne inne zegary świata. No, mogą sobie pozwolić na jedno. Mogą cały ten wspólny zsynchronizowany czas tak przesunąć trochę w przód czy w tył, by zegar, od którego odmierzone jest położenie pozostałych (zegar z początku układu O'), pokazał zero nie byle kiedy, lecz dokładnie wtedy, gdy mijają zegar pozostający w początku tego pierwszego układu. Zakłada się, że mijany właśnie zegar też akurat pokazuje zero. To ustalenie to jedyna możliwość w naszych rękach na drodze do uzgodnienia wskazań zegarów z dwóch rodzin. Gdzie jednak na przedstawionym wykresie wypadnie punkt A , w którym centralny zegar z O' odmierzy 1 s (w oparciu o samoistne, autonomiczne procesy fizyczne definiujące sekundę), a gdzie wypadnie punkt B , w którym zegar z rodziny zsynchronizowanych zegarów, odległy w O' o 1 m (metr mierzony samoistnie w O' pomiędzy nieruchomymi zegarami za pomocą wzorca

metrowego zbudowanego na podstawie encyklopedycznej definicji metra) pokaże 0 s, są najważniejszymi pytaniami z pogranicza fizyki i geometrii, jakie postawiono w drugiej połowie XIX w. Odpowiedzi szukać trzeba w rzetelnej analizie rzeczywistości, a nie w intuicji czy w wypowiedziach filozofów. Pełną odpowiedź znalazł Einstein w 1905 r. Znając jego rozwiązanie łatwo jest podać inną niż oryginalna drogę rozumowania, być może przystępniejszą dla początkujących adeptów teorii względności. Mam zresztą nadzieję, że i Czytelnik znający już teorię Einsteina pogłębi swoje zrozumienie tej teorii zapoznając się z podejściem tu prezentowanym.

Jeśli tylko dopuścimy myśl, że punkt B mógłby mieć położenie inne niż $x = 1, t = 0$, to rysują się możliwości wyjścia z impasu. Dla usunięcia paradoksu musiałyby się okazać, że odległości między jednoimiennymi ładunkami, które są równe dla plusów i minusów w pierwszym układzie odniesienia (co oznacza, że przewód jest elektrycznie obojętny w tym układzie – taką sytuację możemy stworzyć świadomym działaniem i taką sytuację rozpatrujemy), stałyby się nierówne w drugim. Takie coś oznaczałoby, że dla drugiego obserwatora przewód byłby **naładowany**, a w konsekwencji ładunek próbny, początkowo nieruchomy, na który nie działa siła magnetyczna, **też przyciągany byłby** przez przewód, tyle że przez siłę elektryczną. To byłoby rozwiązanie paradoksu. Na rysunku 2 zaznaczona jest linia od centrum do takiego hipotetycznego punktu B . Czytelnik zechce łaskawie policzyć, że na odcinku od centrum do B (czyli w chwili $t' = 0$) znajduje się, nie licząc brzegów, 14 plusów i 16 minusów, podczas gdy w chwili $t = 0$ wewnątrz odcinka jednostkowego znajduje się 15 plusów i 15 minusów! To nie trick, to geometryczny banał. Proszę policzyć jeszcze raz. Ale jak od tych uwag o konieczności rewizji poglądów na czas i odległość dojść do wyników ilościowych?



Rys. 3

Przyjmijmy, że mamy do czynienia z dwiema identycznymi grupami zegarów zsynchronizowanych w ich układach spoczynkowych, rozmieszczonymi w jednostkowych odstępach (przy wykorzystaniu takiej samej definicji metra przez każdego z obserwatorów). W każdej z rodzin wyróżniamy po jednym zegarze, od którego mierzy się odległości. Zegary te stanowią początki swoich układów. Przyjmujemy, że zegary w początkach swoich układów pokazują zero wtedy, gdy właśnie się mijają. Zwroty określające znaki współrzędnych wybieramy (na razie) przeciwnie w obu układach. Każdy z układów porusza się z prędkością $-V$ względem tego drugiego.

Jeśli współrzędne punktu A na rysunku 2 oznaczyć (b, d) , a punktu $B - (a, c)$, to jasne jest, że w ogólności związek między współrzędnymi czasoprzestrzennymi będzie

$$(1) \quad x = ax' + bt',$$

$$(2) \quad t = cx' + dt'.$$

Zadanie nasze polega na wyznaczeniu tych czterech współczynników jako funkcji prędkości. Ponieważ sytuacja wzajemna obu układów jest absolutnie identyczna, obowiązywać musi również

$$(3) \quad x' = ax + bt,$$

$$(4) \quad t' = cx + dt.$$

Podstawiając (3) i (4) do (1) dostajemy

$$(5) \quad \begin{aligned} x &= a(ax + bt) + b(cx + dt) = \\ &= (a^2 + bc)x + b(a + d)t = \\ &= 1x + 0t, \end{aligned}$$

co prowadzi do pierwszych dwóch równań na a, b, c, d

$$(6) \quad a = -d,$$

$$(7) \quad a^2 + bc = 1.$$

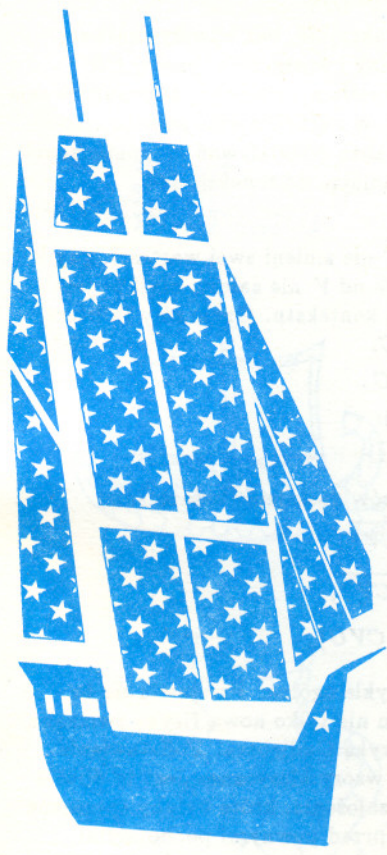
Dla zegara w początku układu O' mamy stale $x' = 0$; podstawiając $x' = 0$ do (1) i (2) i dzieląc stronami powinniśmy dostać jego prędkość $-V$, więc

$$(8) \quad b/d = -V.$$

Równania (6), (7) i (8) pozwalają wyrazić trzy niewiadome funkcje prędkości a, b i c przez jedną już tylko funkcję $d(V)$ i zapisać podstawową transformację (1) i (2) w postaci:

$$(9) \quad x = -d(x' + Vt'),$$

$$(10) \quad t = d(t' + x'V(1 - d^{-2})/V^2).$$



Teraz możemy zmienić zwrot na osi x , bo tak jest na ogół wygodniej:

$$(11) \quad x = d(x' + vt'),$$

$$(12) \quad t = d(t' + x'V(1 - d^{-2})/V^2).$$

Rozpatrzmy także trzeci układ O'' , który porusza się z prędkością U względem układu O' . Oznacza to, że dla zegara z początku O'' zachodzi $x' = Ut'$. Podstawiając te wartości do (11) i (12), a potem dzieląc stronami otrzymamy prędkość układu O'' względem układu O . Oznaczmy ją „ $U + V$ ” dla przypomnienia, że według Galileusza prędkość ta byłaby zwykłą sumą. Otrzymujemy więc

$$(13) \quad "U + V" = (U + V) / \{1 + UV[(1 - d^{-2}(V))/V^2]\}.$$

Wielowiekowe przesady na temat zachowania się ruchomych zegarów sprowadzają się w świetle naszych dotychczasowych wyników zawartych we wzorach (11), (12), (13) do postulowania, iż, nieoznaczona na razie, funkcja $d(V)$ jest tożsamościowo równa 1. Wzory (11) i (12) po wstawieniu tam $d = 1$ opisują tzw. transformację Galileusza, będącą podstawą klasycznej fizyki aż do końca XIX w. Nie istnieje jednak żaden argument logiczny, który by zmuszał do przyjęcia $d = 1$. Czytelnik ma prawo się spodziewać, że wyznaczymy funkcję $d(V)$ dobierając ją tak, by zlikwidować paradoks, od którego zaczęliśmy. Do pewnego stopnia tak będzie. Żeby postawić kropkę nad i w wyznaczaniu $d(V)$, ostatecznie powrócimy do naszych ładunków. Jest jednak rzeczą interesującą, że pełny matematyczny kształt funkcji $d(V)$ udaje się wyznaczyć na drodze czystej dedukcji będącej kontynuacją rozważań prowadzących od wzorów (1) i (2) do wzorów (11) i (12).

Przyjrzyjmy się wzorowi (13). Podaje on prędkość początku układu O'' jako złożenie jego własnej prędkości U i prędkości unoszenia V . Gdy jednak rozważyć ruch układu O względem układu O'' , to U będzie prędkością unoszenia, a V prędkością własną (skrupulatny Czytelnik mógłby domagać się postawienia znaku „minus” przy tych prędkościach, co można zrobić, ale można też powiedzieć, że dla tej części obliczeń zmieniliśmy zwroty wszystkich trzech osi). Powinniśmy więc we wzorze (13) zamienić V na U i U na V i mimo to dostać tę samą prędkość:

$$(14) \quad (U + V) / \{1 + UV[(1 - d^{-2}(V))/V^2]\} = (V + U) / \{1 + VU[(1 - d^{-2}(U))/U^2]\}.$$

Czytelnik bez trudu odczyta z powyższego wzoru, że sprowadza się on do następującego, prostszego

$$(15) \quad (1 - d^{-2}(V))/V^2 = (1 - d^{-2}(U))/U^2.$$

Jest to fantastyczny wynik! Jako wyprowadzony dedukcyjnie, bez odwoływania się do konkretnego doświadczenia, jest on niezwykle ogólny i ścisły, co najmniej tak dokładny jak samo pojęcie układu inercjalnego. Podkreślam tu mocno, że rozumowanie prowadzące do wzorów (11), (12), (13) i (15) nie było w żadnej mierze zależne od omówionych w pierwszej części własności prądów; analiza oddziaływań magnetycznych odgrywała, jak dotąd, rolę jedynie motywacyjną, skłaniając do refleksji nad podstawami pojęcia czasu i prędkości.

Wzór (15), mówiący, że kombinacja $(1 - d^{-2}(V))/V^2$ nie zmieni swej wartości, gdy V zastąpimy przez U , oznacza, że kombinacja ta w ogóle od V nie zależy, czyli że jest to pewna uniwersalna stała, niezależna od fizycznego kontekstu. Oznaczmy ją literą, którą najczęściej wybiera się dla dowolnej stałej, tj. C .

$$(16) \quad (1 - d^{-2}(V))/V^2 = C.$$

Równanie to bez trudu rozwiązujemy względem $d(V)$:

$$(17) \quad d(V) = 1/\sqrt{1 - CV^2}.$$

Podstawiając uzyskany wynik do wcześniejszych wzorów dostajemy ostatecznie:

$$(18) \quad x = (x' + Vt')/\sqrt{1 - CV^2},$$

$$(19) \quad t = (CVx' + t')/\sqrt{1 - CV^2},$$

$$(20) \quad "V + U" = (V + U)/(1 + CVU).$$

Rozważania nasze w części kinematycznej były niezwykle ogólne. Przejawia się to w tym, że ostateczny wynik obejmuje swym zasięgiem nie tylko nową fizykę związaną z niezerową wartością C , ale w szczególności także fizykę Galileusza. Podstawienie $C = 0$ we wzorach (18), (19), (20) przekształca je we wzory klasyczne. Jest to dowód na to, że w całym rozumowaniu nie wystąpiły żadne założenia, które byłyby sprzeczne z fizyką klasyczną. Myśmy się jedynie powstrzymali przed pewnymi pochopnymi założeniami, jakie musiały być poczynione przez klasyków po to, by uzyskać $C = 0$.



Dla $C < 0$ wzory opisują związki między współrzędnymi prostokątnymi w dwóch wzajemnie obróconych układach na zwykłej płaszczyźnie. $C = -1$ pojawi się wtedy, gdy na obu osiach będą wybrane różne miary (takie same wszakże w obu układach). Niech Czytelnik spróbuje wyrazić kąt obrotu przez C i V .

Pozostaje ustalić, jaka jest liczbową wartość stałej C , gdy czas mierzymy w sekundach, a odległości w metrach. Dopiero teraz jest nam potrzebny znów kontakt z doświadczeniem. Jedno wiemy z góry, musi to być wielkość bardzo mała, skoro nie zauważono jej przez kilka stuleci!

Zanim nawiążemy do doświadczenia, ustalmy związek między odległością l dwóch zegarów spoczywających w O a różnicą l' ich położenia w ustalonej chwili, np. $t' = 0$ w układzie O' . Jeden z tych zegarów niech będzie w początku układu, drugi stałe w punkcie $x = l$. W chwili $t' = 0$ pierwszy zegar jest również w początku układu O' , a drugi w szukanym l' . Jeśli $t' = 0$, zaś $x' = l'$, to ze wzoru (18) wynika, że

$$(21) \quad l' = l\sqrt{1 - CV^2}.$$

W układzie O' , w którym rozpatrywane dwa zegary (tak samo jak i każde inne dwa ciała, np. ładunki) są w ruchu, ich chwilowe (równoczesne w tym układzie) odległości l' różnią się o czynnik $\sqrt{1 - CV^2}$ od odległości spoczynkowej l . Gdy C jest dodatnie, występuje więc skrócenie rozpatrywanej odległości. Z kolei odstęp czasu t' mierzony w O' przez jeden zegar, np. pozostający w początku O' mierzony w O przez wskazania dwóch kolejno mijanych zegarów wydłuży się o ten sam czynnik

$$(22) \quad t = t'/\sqrt{1 - CV^2}.$$

Wracamy teraz do naszych rysunków z prądami.

Zmniejszanie odległości między cząstkami naładowanymi oznacza zwiększanie gęstości ładunku o ten sam czynnik. W układzie spoczynkowym ładunków dodatnich ładunki ujemne są bliżej siebie niż w swoim własnym układzie spoczynkowym, a więc ich gęstość w O' staje się równa

$$(23) \quad -\eta/\sqrt{1 - CV^2}.$$

Ładunki dodatnie będąc w ruchu w układzie pierwszym, a więc już kinematycznie ściśnięte, miały, z założenia, gęstość η . Ich gęstość własna w O' musi zatem być równa

$$(24) \quad \eta\sqrt{1 - CV^2}.$$

Dodając powyższe gęstości uzyskujemy w układzie O' wypadkowe naelektryzowanie na jednostkę długości

$$(25) \quad \eta' = -\eta CV^2/\sqrt{1 - CV^2}.$$

Przewód z taką gęstością ładunku wytwarza w odległości r pole elektryczne

$$(26) \quad E' = \eta'/2\pi\epsilon_0 r.$$

Wykorzystując związek $\eta V = I$, możemy siłę elektryczną zapisać w postaci

$$(27) \quad F' = QE' = QVC I/2\pi\epsilon_0 r\sqrt{1 - CV^2}.$$

Cząstka próbna w układzie O' początkowo spoczywa. Można dla obliczenia niewielkiego przyrostu jej pędu skorzystać z prawa Newtona: $dp' = F'dt'$. Uwzględniając związek

$$(28) \quad dt' = dt\sqrt{1 - CV^2}$$

możemy napisać

$$(29) \quad dp' = dt QVC I/2\pi\epsilon_0 r.$$

Przyrost pędu cząstki próbnej obliczony w układzie spoczynkowym O ładunków ujemnych, spowodowany działaniem siły magnetycznej, wynosi

$$(30) \quad dp = dt QV\mu_0 I/2\pi r.$$

Porównanie wzorów (29) i (30) powinno dostarczyć nam pełnej satysfakcji! Paradoks usunięty – oba wzory przewidują taką samą zależność popędu od Q , od V , od I i od r . Ich pełna zgodność wymaga już tylko, by

$$(31) \quad C = \mu_0\epsilon_0.$$

Z faktu, że równoległe prądy akurat się przyciągają, wynika, iż $C > 0$

i że z galileuszowych wyobrażeń o czasie i przestrzeni trzeba zrezygnować. Z drugiej strony, jest niezwykle satysfakcjonujące, że argumenty o względności ruchu pozwalają wyznaczyć podstawowe cechy siły magnetycznej na drodze czysto dedukcyjnej.

Wyznaczając wartość C z jakichkolwiek innych, wystarczająco dokładnych doświadczeń kinematycznych (bez związku z elektrodynamiką) moglibyśmy przewidzieć nie tylko ogólną postać, ale i dokładną wartość siły magnetycznej na podstawie samej znajomości prawa Coulomba. Historycznie wszystko było całkowicie inaczej. Rzeczy dzisiaj oczywiste wydawały się niepojęte, za oczywiste zaś uważano hipotezy, o których

dzisiaj nie wypada mówić w towarzystwie. Większość podręczników przedstawia teorię względności usiłując wciągnąć Czytelnika w historyczne dylematy, których zrozumienie pochłania większość sił uczącego się. W efekcie często powstaje wrażenie, że jest to teoria trudna, tajemnicza, a nawet kontrowersyjna. Tymczasem stwierdzenia szczególnej teorii względności zawarte we wzorach od (18) do (22) ze stałą C o wartości danej wzorem (31) są równie pewne i równie ugruntowane jak twierdzenie Talesa czy Pitagorasa.

Stała μ_0 służy, jeśli tak wolno powiedzieć, do definicji ampera w układzie SI i wynosi, z definicji $4\pi 10^{-7}$ N/A². Stałą ϵ_0 można wyznaczyć np. mierząc w jednostkach SI (opartych na tymże amperze) pojemność kondensatora próżniowego o znanej powierzchni S płytek i ich odległości d (pojemność ta dana jest, jak wiadomo, wzorem $\epsilon_0 S/d$). Stała ta, zmierzona po raz pierwszy przez Webera i Kohlrauscha w 1856 r. bez jakiegokolwiek związku z falami elektromagnetycznymi, których istnienia nawet jeszcze nie podejrzewano, wynosi $8,85 \times 10^{-12}$ F/m. Podstawiając do (31) wartości obu stałych otrzymuje się

$$(32) \quad C = 1,1 \times 10^{-17} \text{ s}^2/\text{m}^2.$$

Stałą C zapisuje się najczęściej w postaci

$$C = 1/c^2, \quad \text{gdzie } c = 3,0 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

Korzystając ze wzoru (20) łatwo udowodnić, że prędkość $c = 1/\sqrt{C}$ w jednym układzie równa jest także c w innym układzie odniesienia:

$$"V + 1/\sqrt{C}" = 1/\sqrt{C}.$$

Istnienie takiej niezmienniczej prędkości jest najbardziej znaną cechą szczególnej teorii względności. W podejściu zaprezentowanym w tym artykule istnienie tej prędkości, a także jej wartość, jest rezultatem płynącym z teorii względności, a nie, jak zazwyczaj, założeniem.

Na samo zakończenie chciałbym jeszcze zwrócić uwagę, że prędkości elektronów w metalach związane z przewodzeniem prądu rzadko przekraczają 1 mm/s.

Relatywistyczne skrócenie odległości przy takich prędkościach odpowiedzialne jest w istocie za działanie silników elektrycznych, prądnic itp. Obala to mit, że szczególna teoria względności ma znaczenie dopiero przy niewyobrażalnie dużych prędkościach. I prędkość ślimaka musi być czasami, i to nie z pedanterii, traktowana jako prędkość „relatywistyczna”.



Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

M 640. Który z trójkątów mających boki o długości a, b, c , gdzie $0 \leq a \leq 1 \leq b \leq 2 \leq c \leq 3$, ma największe pole?

Rozwiązanie na str. 6

M 641. W dwóch szeregach ustawieni są uczniowie siódmej i ósmej klasy. Za każdym siódmoklasistą stoi wyższy od niego ośmioklasista. Wykazać, że jeśli siódmoklasistów ustawimy w szeregu według wzrostu, a za nimi stanie ustawiony według wzrostu szereg ośmioklasistów, to nadal za każdym siódmoklasistą będzie stał wyższy od niego ośmioklasista.

Rozwiązanie na str. 6

M 642. Żołnierzy w pułku ustawiamy tak w prostokąt $m \times n$ (m szeregów, n kolumn), że w każdym szeregu żołnierze stoją według wzrostu. Udowodnić, że jeśli w każdej kolumnie żołnierzy ustawimy teraz według wzrostu, to żołnierze w dowolnym szeregu będą nadal ustawieni według wzrostu.

Rozwiązanie na str. 6

Redaguje Jarosław KULPA

F 339. Elektron znajduje się w odległości $x = 1$ cm od przewodzącej płaszczyzny. Po jakim czasie elektron znajdzie się na płaszczyźnie? Prędkość początkowa elektronu jest równa zeru. Rozważyć jedynie efekty fizyki klasycznej, pominać promieniowanie. Rozwiązanie na str. 7

F 340. W jakim czasie kometa Halleya pokona połowę swej trajektorii znajdującej się bliżej Słońca. Okres obiegu komety wynosi $T = 76,09$ roku, a mimośród elipsy, po której porusza się kometa, jest równy $e = 0,97$.

Rozwiązanie na str. 7

Żeglowanie pod wiatr

Siłę wiatru wykorzystywano jako napęd silników podobno już 4 tysiące lat temu, lecz przez długie wieki umiano jedynie żeglować z wiatrem. Gdy wiatr wiał w kierunku przeciwnym niż wiodła trasa podróży, trzeba było czekać jego odmiany bądź siadać do wiosel.

Sztukę żeglowania pod wiatr opanowali ponoć Wikingowie już około X wieku, lecz niewiele pewnych informacji mamy w tej sprawie. Wiemy natomiast, że karawele, na których Kolumb wypłynął na podbój Nowego Świata 500 lat temu, przystosowane już były do żeglugi pod wiatr. Ponieważ na karawelach, galeonach i innych starych żaglowcach znam się marnie, więc wyjaśnię, dlaczego taka żegluga jest możliwa na przykładzie niewielkiej współczesnej żaglówki, jak ta z rysunku 1. Od razu również wyjaśnię, że żeglowanie w kierunku dokładnie przeciwnym niż ten, z którego wieje wiatr, jest niemożliwe. Pisząc zaś o żegludze pod wiatr przyjmuję, że kąt między kierunkiem wiatru i kursem łodzi nie jest zerowy, lecz jedynie ostry.

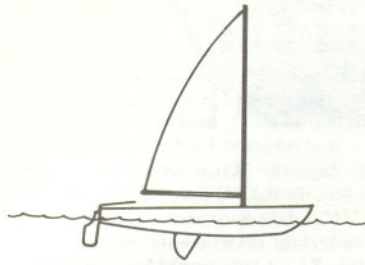
Ustawmy więc naszą łódkę i jej żagiel jak na rysunku 2. Widzimy, że gęstość linii wiatru owiewającego żagiel, a zatem i prędkość przepływu powietrza, jest większa po stronie zawietrznej niż nawietrznej. Jest to sytuacja bardzo podobna do pokazanej na rysunku 3, gdzie woda płynie przez rurę z przewężeniem. Aby w jednostce czasu taka sama ilość wody przepływała przez szeroki, jak i wąski fragment rury, woda w przewężeniu musi płynąć szybciej niż w miejscu szerokim.

Teraz musimy skorzystać z prawa Bernoulliego, które orzeka, że podczas przepływu stacjonarnego, tzn. nie podlegającego zmianom w czasie

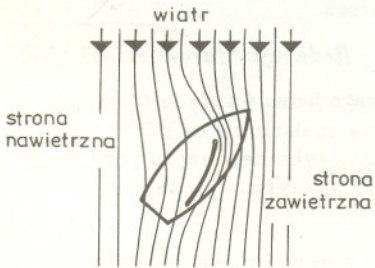
$$(*) \quad \rho \frac{v^2}{2} + p = \text{const},$$

gdzie v jest prędkością przepływu, p ciśnieniem, a ρ gęstością przepływającej cieczy bądź gazu. Prawo Bernoulliego wyrażające w istocie zasadę zachowania energii można również sformułować następująco: podczas przepływu stacjonarnego zmiana energii kinetycznej elementu cieczy równa jest pracy sił zewnętrznych nad tym elementem. Wspomniane dwie wielkości są reprezentowane odpowiednio przez pierwszy i drugi człon w równaniu (*), co widać lepiej, jeśli pomnożymy obie strony równania przez objętość. Ze wzoru (*) widać, że dzięki różnicy prędkości przepływu ciśnienie po stronie zawietrznej żagla jest niższe niż po nawietrznej. Należy tutaj zaznaczyć, że w obszarze zmian ciśnień, z jakimi mamy tutaj do czynienia, powietrze można traktować jako gaz nieściśliwy, tzn. taki, którego gęstość ρ nie ulega zmianom. Ze względu na różnicę ciśnień na łódkę działa wypadkowa siła, zwana aerodynamiczną, zaznaczona na rysunku 4. Siłę tę rozkładamy na składową podłużną, która napędza naszą łódkę, i poprzeczną, która jest kompensowana przez siłę bocznego oporu łodzi. Duży boczny opór uzyskuje się w małych łódkach przez umieszczenie pod kadłubem łodzi, wzdłuż jej osi symetrii, (patrz rys. 1), sporych rozmiarów blachy nazywanej mieczem. Tak więc miecz zapobiega przesuwaniu łodzi w bok, a podłużna składowa siły aerodynamicznej gna nas do przodu. Proste, co? A Kolumb o tym nie wiedział.

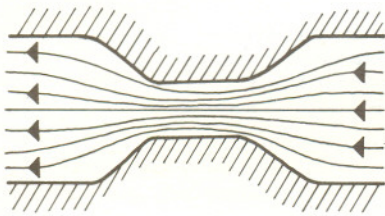
Stanisław MRÓWCZYŃSKI



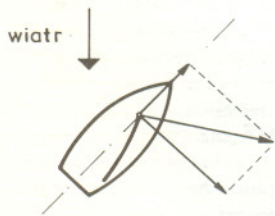
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

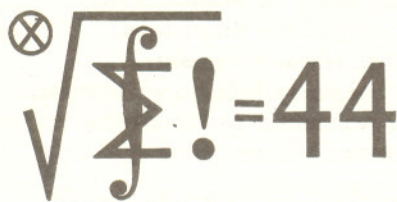
W *Delcie* 4/1992 Czytelnik znajdzie opis kilku ciekawych zjawisk dziejących się za sprawą prawa Bernoulliego.

Kto to rozwiąże?

Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną. Za pomocą n pasków o wymiarach $\frac{1}{n} \times 1$ możemy bez trudu pokryć koło o średnicy 1 (rys.). Wydaje się, że nie można pokryć tego koła za pomocą mniejszej liczby pasków o podanych wymiarach. Czy można to w prosty sposób udowodnić? Czekamy na rozwiązania. Najciekawsze wydrukujemy.

Redakcja

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 1992



Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1992.

Zadania z matematyki nr 243, 244

Redaguje Marcin E. KUCZMA

243. Na każdym polu szachownicy stoi sześcian, którego jedna ściana jest czarna, a pozostałe białe. Chcemy, aby wszystkie czarne ściany znalazły się na górze. Można tylko jednocześnie obracać wszystkie sześciany dowolnie wybranego rzędu poziomego lub pionowego wokół ich wspólnej osi obrotu. Wskazać algorytm. (... wspomnienie „kostki Rubika”...)

244. Na płaszczyźnie dany jest punkt P . Wyznaczyć kres górny pól trójkątów ABC o tej własności, że $|PA| + |PB| + |PC| = 1$.

Zadanie 244 zaproponował pan Adam Czornik z Bytomia.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/1992

Przypominamy treść zadań:

239. Dla danej liczby naturalnej $n \geq 3$ wyznaczyć kres dolny i kres górny wartości wyrażenia

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}}$$

po wszystkich układach liczb dodatnich (a_1, \dots, a_n) ; numeracja cykliczna ($a_{n+1} := a_1, a_{n+2} := a_2$).

240. Znaleźć wszystkie pary (x, y) spełniające równanie

$$5y^2 - 2x^2 + 4xy - 23x - 27y + 12 = 0,$$

w których x jest dowolną liczbą całkowitą, a y – liczbą pierwszą.

239. Weźmy dowolne liczby a_1, \dots, a_n i oznaczmy ich sumę przez s . Dla każdego $k \in \{1, \dots, n\}$ zachodzą nierówności

$$\begin{aligned} \frac{a_k}{s} &\leq \frac{a_k}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}} = \\ &= 1 - \frac{a_{k+1}}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}} - \frac{a_{k+2}}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}} \leq \\ &\leq 1 - \frac{a_{k+1}}{s} - \frac{a_{k+2}}{s}. \end{aligned}$$

Stąd przez zsumowanie otrzymujemy nierówność podwójną

$$1 \leq \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}} \leq n - 2.$$

Oszacowań tych nie da się już poprawić; przyjmując bowiem $a_k = t^k$, gdzie t jest dowolnie wybraną liczbą dodatnią, uzyskujemy wartość rozważanej sumy równą

$$\frac{n-2}{1+t+t^2} + \frac{t^{n-2}}{1+t^{n-2}+t^{n-1}} + \frac{t^{n-1}}{1+t+t^{n-1}}.$$

Przy t dążącym do zera oraz do nieskończoności uzyskane wyrażenie dąży odpowiednio do $n - 2$ oraz do 1. Zatem liczby 1 i $n - 2$ są poszukiwanymi kresami.

240. Przekształcamy dane równanie do postaci

$$y^2 = (2x + 2y - 1)(-x + 3y - 12).$$

Oznaczmy czynniki iloczynu po prawej stronie odpowiednio przez u i v . Ponieważ y jest liczbą pierwszą, (u, v) musi być jedną z następujących par:

$$(1, y^2), (y, y), (y^2, 1), (-1, -y^2), (-y, -y), (-y^2, -1).$$

Każda z tych możliwości wyznacza układ dwóch równań z niewiadomymi x, y . Jedynie drugi i czwarty układ daje rozwiązanie zgodne z postulatami zadania:

$$x = -2, y = 5 \quad \text{oraz} \quad x = -2, y = 2.$$

Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 229 ($WT=1,11$) i 230 ($WT=3,17$)
z numeru 11/1991

Józef Siwy	- Łaziska Górne	42,42
Piotr Kumor	- Olsztyn	39,98
Henryk Kornacki	- Augustów	38,22
Janusz Olszewski	- Suwałki	37,21
Marek Prauza	- Poraj	37,17
Przemysław Gadziński	- Środa Śl.	36,49

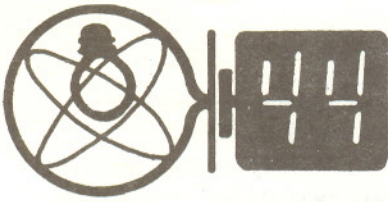
Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 127 ($WT=2,77$) i 128 ($WT=2,67$)
z numeru 11/1991

Adam Sikorski	- Lublin	44,43
Paweł Perkowski	- Szczecin	38,66
Tomasz Wietecha	- Tarnów	21,31
Przemysław Gworys	- Częstochowa	17,87
Andrzej Nowogrodzki	- Chełm	15,30

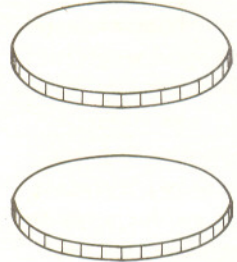
Gratulacje dla p. Sikorskiego, który kończąc trzecią rundę został trzecim w historii Ligi 44 F Weteranem. Przy okazji przypominamy nazwiska poprzednich Weteranów: Piotr Bała z Torunia i Dzierżysław Lipniacki z Lublina.



141. Wzdłuż linii prostej w jednakowych odstępach umieszczonych jest nieskończenie wiele ładunków punktowych dodatnich i ujemnych na przemian, o tej samej wartości bezwzględnej. Z badać (analitycznie lub numerycznie), jak szybko maleje natężenie pola elektrycznego w miarę oddalania się od prostej. Rozważyć obie składowe pola – równoległą i prostopadłą do prostej.

142. Zasada symetrii zwierciadlanej (nie obowiązująca w oddziaływaniach słabych cząstek elementarnych) głosi, że każde zjawisko fizyczne ma swój odpowiednik w analogicznym zjawisku „zwierciadlanym” – innymi słowy, obserwując przebieg doświadczenia nie możemy wynioskować, czy widzimy je bezpośrednio, czy odbite w lustrze. Które z następujących hipotetycznych zjawisk są zgodne z zasadą symetrii zwierciadlanej, a które nie?

- Dwa płaskie krążki, wykonane z pewnego materiału i ustawione równoległe (rys.) przyciągają się, gdy obracają się w tę samą stronę, a odpychają, gdy obracają się w przeciwnie strony.
 - Krażek przyciąga drugi nieruchomy krążek, gdy obraca się w jedną stronę, a odpycha, gdy obraca się w przeciwną stronę.
 - Krażek przyciąga drugi nieruchomy krążek, gdy obraca się w którąkolwiek stronę, a nie oddziałuje z nim, gdy jest nieruchomy.
 - Krażek przyciąga ładunek dodatni, gdy obraca się w jedną stronę, a odpycha, gdy obraca się w przeciwną stronę.
 - Krażek przyciąga biegun N magnesu, gdy obraca się w jedną stronę, a odpycha, gdy obraca się w przeciwną stronę.
- Krażki nie mają w swojej budowie wyróżnionej żadnej skrętności (np. nie są wykonane z cukru lewoskrętnego).



Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/1992

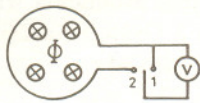
Przypominamy treść zadań:

137. Przez wnętrze cewki C przechodzi stały strumień Φ pola magnetycznego wytworzonego przez magnes stały lub elektromagnes. Cewka obraca się ze stałą prędkością kątową ω , nawijając drut z bębna B (i zwiększając w ten sposób liczbę zwojów). Voltomierz V jest dołączony jedną końcówką ślizgowa do pierścienia P , a drugą do drutu. Obliczyć wskazania woltomierza.

137. Odpowiedź może się wydać paradoksalna: woltomierz wskazuje zero, choć pozornie ze wzoru

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}(n\Phi) = -\Phi \frac{dn}{dt}$$

(gdzie n – liczba zwojów) wynikałoby, że $\mathcal{E} \neq 0$. Zauważmy jednak, że w zadaniu nie występuje zmienne pole magnetyczne (związane z wirowym polem elektrycznym) ani też przewodnik nie przecina w swoim ruchu linii pola magnetycznego. Dla ułatwienia dyskusji przyjmijmy, że w pierścieniu P występuje przerwa – nie zmienia to warunków fizycznych zadania, gdyż strumień Φ przez pierścień jest stały i nie ma w tym obwodzie siły elektromotorycznej. Łatwo wtedy wykazać, że dopóki przerwa nie minie styku ślizgowego, strumień objęty przez drut cewki nie zmienia się, natomiast minięcie styku przez przerwę jest równoważne przłączeniu styku z położenia 1 do położenia 2, co, oczywiście, nie spowoduje wychylenia woltomierza.



138. Oznaczmy kąt obrotu i -tego pręta względem wybranego kierunku przez α_i . Nierówność kątów α_i oznacza, że każda z nici tworzy linię łamaną na powierzchni walca o średnicy d . Jeśli różnice między kolejnymi kątami są małe, to rzut odcinka łamanej od i -tego do $(i+1)$ -szego pręta na płaszczyznę prostopadłą do osi walca jest dany wyrażeniem

$$\frac{d}{2}(\alpha_i - \alpha_{i+1}).$$

Odpowiednie przesunięcie wzdłuż osi walca wynosi b ; ponieważ nić jest napięta siłą F , więc składowa tej siły w płaszczyźnie prostopadłej do osi jest równa

$$F \frac{d}{2b}(\alpha_i - \alpha_{i+1}).$$

138. Dwie równoległe nici odległe o d są napięte, każda siłą F . Do nici są prostopadle przymocowane jednorodne pręty w odległości wzajemnej b , każdy o masie m i długości l . Środki prętów są w połowie odległości między nimi. Obliczyć prędkość fali torsyjnej wzdłuż nici (fala ta polega na obrocie kolejnych prętów w płaszczyźnie prostopadłej do nici).

Taka sama siła jest wywierana przez drugą nić, a łączny moment sił wynosi

$$F \frac{d^2}{2b}(\alpha_i - \alpha_{i+1}).$$

Na i -ty pręt działają dwa momenty dane powyższym wyrażeniem – ze strony odcinków nici do pręta o numerze $i+1$ i do pręta o numerze $i-1$. Przyrównując wypadkowy moment sił do iloczynu $I\epsilon_i$ (gdzie I – moment bezwładności pręta, $\epsilon_i = d^2\alpha_i/dt^2$ – przyspieszenie kątowe) uzyskujemy równanie falowe

$$(1) \quad I\epsilon_i = F \frac{d^2}{2b}(\alpha_{i+1} + \alpha_{i-1} - 2\alpha_i).$$

Dalsze postępowanie jest analogiczne jak np. przy wyprowadzeniu prędkości fali poprzecznej na nici obciążonej punktowymi masami. Założmy, że rozwiązanie ma postać impulsu falowego rozchodzącego się bez zmiany kształtu

$$(2) \quad \alpha_i = f(x_i - vt),$$

gdzie x_i – położenie i -tego pręta na osi x skierowanej wzdłuż nici, v – prędkość fali. Wyrażenie $\alpha_{i+1} + \alpha_{i-1} - 2\alpha_i$ dla małych różnic można przybliżyć przez

$$\alpha_{i+1} + \alpha_{i-1} - 2\alpha_i = \frac{d^2\alpha}{dz^2} \cdot b^2 = f'' \cdot b^2.$$

Ponieważ lewa strona równania (1) jest równa $Iv^2 f''$, więc widzimy, że wyrażenie (2) spełnia równanie (1), jeśli tylko

$$Iv^2 = \frac{1}{2} F d^2 b, \quad \text{tzn.} \quad v = d \sqrt{\frac{Fb}{2I}}.$$

Ostateczne rozwiązanie otrzymujemy podstawiając moment bezwładności pręta $I = \frac{1}{12} ml^2$

$$v = \frac{d}{l} \sqrt{\frac{6Fb}{m}}.$$

Masywna gwiazda po „wypaleniu” w swoim wnętrzu lekkich pierwiastków i wytworzeniu węglowego lub nawet żelaznego jądra wybucha jako tzw. supernowa. Struktura gwiazdy ulega wtedy gruntownej przebudowie (może powstać gwiazda neutronowa) lub – być może – cała gwiazda ulega zniszczeniu. W każdym razie produkty eksplozji z prędkością wyrażającą się w tysiącach kilometrów na sekundę rozbiegają się we wszystkie strony, tworząc w ośrodku międzygwiazdowym powiększającą się bańkę zjonizowanego i silnie zaburzonego gazu. Zaburzenie to jest tak silne, że jest w stanie masowo wytworzyć w materii międzygwiazdowej zgęszczenia dające początek następnemu pokoleniu gwiazd.

Źródłem podobnego zaburzenia, aczkolwiek znacznie słabszego, staje się pod koniec swojego życia gwiazda o masie zbliżonej do masy Słońca. Mianowicie, po osiągnięciu stadium olbrzyma gwiazda dość łagodnie odrzuca swoje zewnętrzne warstwy, które tworzą wtedy tzw. mgławicę planetarną. Mgławica ta, z początku niemal sferycznie symetryczna, w ciągu kilku tysięcy lat świeci coraz słabiej, traci pierwotny kształt i rozplywa się w przestrzeni. Na niebie można wskazać wiele mgławic, których kształt i ruch (właściwie ruch ich fragmentów) wyraźnie sugerują, że są one szczątkami jakiejś gwiazdy, która zakończyła ewolucję czy to spokojnie, czy to w sposób gwałtowny.

Zadziwiająco podobne struktury mogą jednak, jak się okazuje, być produktami narodzin gwiazd. Co bowiem może się stać, gdy w wodorowym obłoku, w jego najgęstszym obszarze, powstanie gwiazda? Pojawienie się nowej, masywnej, a więc i gorącej gwiazdy spowoduje jonizację otaczającego ją wodoru. Bańka zjonizowanego, a więc i gorącego wodoru będzie ekspandować zgęszczając na swojej krawędzi materię międzygwiazdową. Cały ten proces będzie odbywał się, rzecz jasna, znacznie łagodniej niż w przypadku wybuchu supernowej, nawet wolniej niż zachodzi wytworzenie mgławicy planetarnej, ale efekt końcowy będzie na oko taki sam: gwiazda zostanie otoczona w przybliżeniu sferycznie symetryczną mgławicą, a właściwie wieloma mgławicami układającymi się w przybliżeniu na sferze o środku w naszej gwieździe.

Taki właśnie system mgławic obserwuje się w Orionie. Gwiazdę λ Orionis (jest to gorąca gwiazda typu O8) otaczają liczne mgławice zarówno emisyjne, jak i ciemne, układające się w lekko spłaszczony pierścień o średnicy 10° . Z pomiarów prędkości radialnych tych mgławic wynika, że jedna część tego pierścienia porusza się ku nam, a inna od nas oddala. Fakt ten nietrudno wytłumaczyć przyjąwszy, że λ Orionis powstała w obłoku spłaszczonym, wtedy bowiem ekspandujący zjonizowany wodór mógł w płaszczyźnie równikowej obłoku zagęścić najwięcej materii, tworząc w ten sposób mgławice układające się teraz w pierścień. Zakładając, że pierścień ten jest w rzeczywistości kołowy, można ocenić jego orientację względem promienia widzenia, a wtedy z tempa jego ekspansji wynika, że narodziny λ Orionis nastąpiły około 2,4 mln lat temu. Jest to zgodne z oceną wieku samej gwiazdy.

Niestety, jest pewien słaby punkt tego modelu. Mianowicie ruch λ Orionis jest zbyt szybki. Krótko mówiąc, jeżeli ona wytworzyła cały ten układ mgławic, to i tak już dawno nie powinno jej tam być. Znane są liczne mgławice planetarne bez gwiazdy centralnej, co tłumaczy się tym, że mgławica właściwie nie ma szans poruszać się swobodnie poprzez materię międzygwiazdową, podczas gdy gwiazda może. Nic więc dziwnego, że szybko opuszcza centrum „swojej” mgławicy. Tymczasem tu mamy sytuację wręcz odwrotną: λ Orionis tkwi praktycznie w centrum mgławicy, choć nie powinna! Być może nabyła ona wielkiej prędkości dopiero niedawno (wskutek spotkania z inną gwiazdą lub utraty towarzysza), a może rzeczywiście prawda jest zupełnie inna.

Tomaz KWAST

O pewniku Euklidesa

Wiadomo, że stwierdzenie *przez punkt nie leżący na prostej przechodzi dokładnie jedna równoległa do danej* jest kluczowym faktem geometrii euklidesowej. Tak właśnie brzmi aksjomat zwany tradycyjnie piątym postulatem, pewnikiem Euklidesa lub aksjomatem o równoległych. Euklides w swoich *Elementach* wypowiedział go jednak zupełnie inaczej:

Jeżeli dwie proste przy przecięciu z trzecią tworzą po jednej stronie kąty wewnętrznie jednostronne, których suma jest mniejsza od dwóch kątów prostych, to te proste przecinają się przy dostatecznym przedłużeniu, i to po tej właśnie stronie. Mimo iż zawile, sformułowanie to jest równoważne z poprzednim – to znaczy, że przyjmując za prawdziwe jedno z tych stwierdzeń możemy wykazać drugie i odwrotnie (nb. powszechnie używana wersja została podana prawdopodobnie dopiero w 1796 roku przez J. Playfaira).

Niemal od chwili powstania *Elementów* krytycy i komentatorzy próbowali udowodnić piąty postulat Euklidesa. We wszystkich jednak dowodach wykorzystywano fakty, które były równoważne z tymże pewnikiem. Twierdzenia te przyjmowały czasem postać wydawałoby się zaskakująco odległą od aksjomatu o równoległych. Oto niektóre z nich:

Istnieją przynajmniej dwa trójkąty podobne nieprzystające. Wysokości w trójkącie przecinają się w jednym punkcie.

Na każdym trójkącie można opisać okrąg.

Istnieje kwadrat.

Przez każdy punkt wewnętrzny kąta wypukłego można poprowadzić prostą przecinającą oba ramiona tego kąta.

Istnieje trójkąt, w którym suma kątów jest równa kątowi półpełnemu.

Jeśli proste się nie przecinają, to odległość między punktami jednej z nich a drugą jest ograniczona.

Powyższe twierdzenia dowodzone są zazwyczaj w kursach geometrii przy mniej lub bardziej jawnym wykorzystaniu pewnika Euklidesa. Ale na podstawie każdego z nich z osobna można elementarnie wykazać piąty postulat.

Zdzisław POGODA

Jeszcze inna wersja jednego z pewników Euklidesa

także stara, ale chyba młodsza od podanych powyżej, mówi, że *przez dowolne trzy punkty płaszczyzny można poprowadzić prostą – tyle odpowiednio grubą.*

Prostokąt można podzielić na skończoną liczbę mniejszych prostokątów tak, by każdy z nich miał przynajmniej jeden bok o długości będącej liczbą całkowitą; stąd wynika, że i duży prostokąt ma bok o długości całkowitej.

Nie umieliśmy tego udowodnić elementarnymi metodami i zwróciliśmy się z prośbą o pomoc do Czytelników (*EPSILON* nr 7). Otrzymałiśmy w tej sprawie wiele listów. Poprawne i bardzo pomysłowe (z reguły różne!) rozwiązania przekazali nam Panowie: Piotr Chmiel, Bolesław Gawel, Mieczysław Jędrzejowski, Piotr Wojciech Śniady, Apoloniusz Tyszką i Klaudiusz Wójcik. Panowie: Piotr Kumor i Marcin Mazur znaleźli rozwiązania w literaturze matematycznej, a Pan Tomasz Bartoszyński przysłał dwa rozwiązania, które przekazał mu Pan Martin Goldstern z Izraela. Dwa rozwiązania zadania zamieściła już *Delta* (11/1991, 1/1992). Autorom rozwiązań bardzo dziękujemy i serdecznie gratulujemy.

Coś z życia

Komputer to taki niesłychanie sprawny idiota.
(Hugo Steinhaus)

„Poczta elektroniczna” (*e-mail*), czyli rozpowszechnione w ostatnich latach „połączenie komputerowe” umożliwiła użytkownikowi przesłanie informacji czy dłuższego tekstu innej osobie (nawet na drugim końcu świata) – praktycznie w ciągu kilku godzin. Jeśli tylko w danej miejscowości jest założony „węzeł” tej poczty, to wystarczy usiąść przy komputerze, podłączyć się do sieci, wystukać elektroniczny adres osoby, której chce się przesłać wiadomość i napisać list. Gdy po pewnym (krótkim) czasie adresat sprawdzi „skrzynkę pocztową” w komputerze u siebie, znajdzie przekazany tekst. Można w ten sposób przysłać nawet kilkusetstronicowe prace. W Polsce już w kilku ośrodkach akademickich węzły zostały założone.

Ostatnio pewnemu fizykowi, dr. X., zdarzyła się oryginalna przygoda. Wyjechał on na kilka tygodni do Włoch, do Triestu; od razu założył sobie tam konto poczty elektronicznej i chciał wysłać wiadomość do współpracującego z nim profesora Y. z Kanady. Okazało się jednak, że oprogramowanie komputera jest zupełnie inne niż to, którego używał w Polsce. Udało mu się, po pewnych kłopotach „wejść” do programu wysyłającego listy. Podał elektroniczny adres pana Y., nazwisko swoje, nazwisko adresata, przeszedł kursorem do linijki niżej, po czym wpadł na pomysł wprowadzenia drobnej zmiany przy danych nadawcy. Niestety – kursor absolutnie nie chciał wrócić do góry. Pan X. próbował różnych klawiszy – bez rezultatu. Napisał więc słowo *help*, licząc, że pokaże się na ekranie jakaś pomocna mu wskazówka – ale i to nic nie dało. Naciskał zatem dalej rozmaite przyciski – i nagle wszystko znikło.

Okazało się, że do Kanady został wysłany list następującej treści:

To: Professor Y. in Toronto
From: X. in Trieste
HELP.