

## UWAGA !!!

w prenumeracie *Delta* tańsza

## SPIS TREŚCI

### NUMERU 7(218)

Kilka prostych problemów matematycznych w ekonomii <i>Krzysztof Mazur</i>	str. 1
Wbrew zdrowemu rozsądkowi (III) <i>Tomasz Hofmokr</i>	str. 1
Wielkoskalowe pola prędkości we Wszechświecie <i>Michał Chodorowski</i>	str. 5
Mała Delta	str. 8
Ferromagnetyki i zjawiska magnetomechaniczne <i>Jarosław Kulpa</i>	str. 10
Zupełnie inaczej	str. 12
Klub 44	str. 14
Patrz w niebo	str. 16
Zadania	str. 16
Epsilon	str. 17

**W następnym numerze:**

**O teorii względności inaczej**

„Delta”  
matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego, Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
Towarzystwa Astronomicznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Edukacji Narodowej

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula  
Bogdan Cichocki  
Roman Duda  
Jan A. Gaj  
Tomasz Hofmokr – wiceprzewodniczący  
Tadeusz Jarzębowski  
Marcin Kubiak  
Andrzej Mąkowski  
Andrzej Pelczar  
Zbigniew Płochocki  
Zdzisław Pogoda  
Konrad Rudnicki  
Zbigniew Semadeni  
Grzegorz Sitarski  
Józef I. Smak  
Kazimierz Stępień  
Mieczysław Subotowicz  
Andrzej Szymacha  
Andrzej Woszczyk  
Wojciech Żakowski – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:  
Krzysztof Biesaga  
Piotr Hajłasz  
Jan Kalinowski – z-ca red. nac.  
Krzyszyna Kordos – sekr. red.  
Marek Kordos – red. nac.  
Tomasz Kwast  
Stanisław Mrówczyński  
Anna Rudnik  
Joanna Udalska

Adres Redakcji:

ul. Smyczkowa 5/7  
02-678 Warszawa  
tel. 43-02-43 wewn. 21

Adres poczty komputerowej  
(E-mail address):

DELTA@PLEARN.BITNET

Wydawca:

Uniwersytet Warszawski  
Krakowskie Przedmieście 26/28  
00-927 Warszawa

Nakład 8 500 egz.

Wydrukowano  
w Zakładach Graficznych  
w Warszawie, ul. Srebrna 16

Skład systemem  $\text{TeX}$   
wykonała redakcja.

### WARUNKI PRENUMERATY

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na IV kwartał 1992 r. wynosi 18 000,- zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumeratę.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
  - na teren kraju
    - jednostki kolportażowe „Ruch” właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób,
    - urzędy pocztowe na terenie wiejskim i w miejscowościach, w których nie ma jednostek kolportażowych „Ruch” – poczta zapewnia dostawę zamówionych egzemplarzy pocztą zwykłą pod wskazanym adresem w ramach opłaconej prenumeraty,
  - na zagranicę
    - Zakład Kolportażu Prasy i Wydawnictw, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia dostawy pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni pokrywa prenumeratę.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
  - na kraj i zagranicę – do 20 XI na I kwartał roku następnego  
do 20 II na II kwartał  
do 20 V na III kwartał  
do 20 VIII na IV kwartał.

Cena 1 egzemplarza 8 000,- zł



# Kilka prostych problemów matematycznych w ekonomii

Krzysztof MAZUR

Z podręczników szkolnych znamy na ogół zastosowania matematyki w fizyce. Ostatnio jesteśmy świadkami wielkiego wzrostu zainteresowania ekonomią. Ludzie poszukujący informacji na ten temat sięgają często do książek zachodnich, ponieważ w polskich króluje zwykle jeszcze ekonomia polityczna socjalizmu ze swymi „jedynie słusznymi” dogmatami. Zastrzawszy do zachodnich podręczników ekonomii przekonujemy się, jak bardzo wykładana tam ekonomia opiera się na matematyce. Często używa się w nich skomplikowanych metod opartych na rachunku prawdopodobieństwa i statystyce, aby móc uwzględnić czynnik ryzyka w działalności gospodarczej.

Przykłady, które poniżej przedstawiam, są jednak całkowicie elementarne i deterministyczne, tj. niezależne od czynnika losowego. Pierwszy dotyczy minimalizacji kosztów w przedsiębiorstwie. Jest to tzw. problem hurtownika:

*Hurtownik ma magazyn, przez który w ciągu roku przewija się 3 000 ton jakiegoś towaru. Zamówienie nowej partii towaru kosztuje hurtownika 50 tys. zł (transport), przechowywanie towaru kosztuje go 30 tys. zł/tona  $\times$  rok i jest proporcjonalne zarówno do czasu przechowywania, jak i do ilości towaru. Odbiór towaru przez sklepy odbywa się w tempie jednostajnym, tzn. w ciągu dnia sklepikarze odbierają 3 000/365 ton towaru. Jakiej wielkości dostawy i co jaki czas powinien hurtownik zamawiać, aby koszty były najmniejsze?*

Wiemy ze szkoły, że zadania na minimum dobrze się rozwiązuje za pomocą pochodnej. Lecz najpierw, jak w każdym zadaniu z treścią, musimy napisać równanie na szukaną wielkość kosztu, abyśmy wiedzieli, co mamy minimalizować. Wprowadźmy więc następujące oznaczenia:

$C$  – całkowite koszty roczne,

$n$  – liczba dostaw w ciągu roku,

$Q$  – wielkość każdej dostawy (założymy, że dostawy są równe, dłaczego – o tym będzie mowa później).

Łatwo zauważyć, że koszty poniesione przez hurtownika rozpadają się na dwie części:  $C_1$  – koszty zamawiania nowych partii towaru i  $C_2$  – koszty przechowywania. Widać też, że:

$$C_1 = 50 \text{ tys. zł} \cdot n$$

oraz

$$Q \cdot n = 3000 \text{ ton}.$$

Trochę więcej kłopotu sprawia składnik  $C_2$ . Nie jest on równy  $30 \text{ tys. zł} \cdot Q$ , jak mogłoby się wydawać, a to dlatego, że ilość towaru jest równa  $Q$  tylko w dniu dostawy, a potem już jednostajnie maleje.

## Wbrew zdrowemu rozsądkowi (III)

(Według wykładów radiowych z audycji IV programu – *Widnokrąg*)

**Pięćdziesięciolatek żyje już ponad sto lat i na pewno waży ponad sto kilogramów**

Tomasz HOFMOKL

W naszych spotkaniach staram się przedstawić Państwu wyniki doświadczeń, które przeczą temu, co na ogół uważamy za możliwe, czyli, innymi słowami, przeczą zdrowemu rozsądkowi. Poprzednio opowiedziałem o wynikach, które ponad wszelką wątpliwość pokazują, że prędkość światła, a ogólniej fali elektromagnetycznej w próżni, jest zawsze taka sama i nie zależy od ruchu źródła lub ruchu obserwatora – odbiornika. Fakt ten leży u podstaw szczególnej teorii względności Alberta Einsteina. Wynika z niej między innymi, że prędkość przesyłania sygnału nie może przekroczyć prędkości światła, czyli 299 792 458 m/s. Istnienie największej możliwej prędkości, jakkolwiek może budzić sprzeciw, nie jest bardzo trudne do przyjęcia. Tak już jest Wszechświat zbudowany i trudno. Z dużymi prędkościami nie spotykamy się w życiu codziennym, więc to ograniczenie naszych możliwości specjalnie nas nie boli. Czy aby na pewno? Jeżeli potrafimy uświadomić sobie wszystkie konsekwencje tego faktu, to już nie byłbym taki pewny. Postanowiłem, że w cyklu naszych pogadanek będę starał się omijać wywody teoretyczne, a odwołałem się do najprostszyc doświadczeń. Cóż może być prostszego niż pomiar czasu? Wiadomo, że do tego służy zegarek. Może nam sprawić nieco kłopotu pytanie, a co to jest zegarek, nie mówiąc już o pytaniu, co to jest czas. Obiecałem jednak chodzić po ziemi, a nie zajmować się teoretycznymi rozważaniami. Na nasze potrzeby wystarczy stwierdzenie, że upływ czasu wyznaczamy za pomocą zegarka. No, a sam zegar zdefiniujemy jako urządzenie, które po dokonaniu cyklu zmian wraca do stanu początkowego. Zegarem może być serce, a jednostką czasu jedno jego uderzenie. Może być nim nakręcany zegarek ze sprężyną balansową, może być wreszcie zegar kwarcowy albo zegar atomowy. Oczywiście, bicie serca

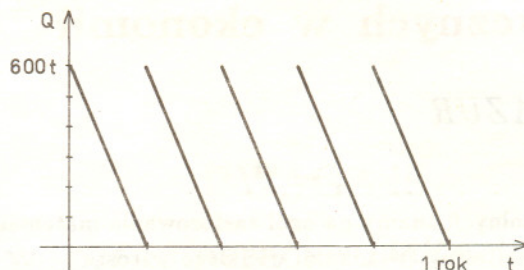


nie jest zbyt dokładnym miernikiem. Najdokładniejszy, jak dotychczas, jest zegar atomowy. Można za jego pomocą osiągnąć dokładność pomiaru czasu rzędu  $10^{-12}$  s.

Po tych wstępnych uwagach mogę już opowiedzieć o bardzo prostym doświadczeniu wykonanym w październiku 1971 roku. Postanowiono mianowicie sprawdzić, czy zegarek nieruchomy chodzi tak samo, jak zegarek w ruchu. Inaczej mówiąc, czy nasz zegarek, zakładając, że jest to idealny zegarek, powinien chodzić tak samo w jadącym tramwaju, jak schowany w szufladzie w domu. Dla wielu z Państwa samo postawienie takiego pytania wyda się bezsensowne. Czy upływ czasu może zależeć od tego, czy poruszamy się, czy nie? Do pojawienia się szczególnej teorii względności było oczywiste, że czas to czas, czyli że jest wielkością absolutną, taką samą wszędzie i nikt nie stawiał sobie pytania, czy upływ czasu może zależeć od jakichś warunków zewnętrznych. Oczywiście, nie mówimy o poczuciu czasu. Może nam się coś dłużyć, może czas biec szybko, ale rozumiemy przez to odczucia subiektywne dobrze wiedząc, że ten prawdziwy czas, odmierzany przez bezlitosne zegary, jest zawsze taki sam. Powiedziałem „dobrze wiedząc, że”, a skąd my to dobrze wiemy? Jedynym źródłem naszej wiedzy jest doświadczenie. Przy małych prędkościach i dokładnościach pomiaru czasu spotykanych w życiu codziennym doświadczenie zdaje się potwierdzać przekonanie, że czas zawsze płynie jednakowo. A może to tylko wynik przybliżony, może czas wcale nie płynie zawsze jednakowo?

W październiku 1971 roku wysłano rejsowymi samolotami komunikacyjnymi cztery cezowe zegary atomowe w podróż dookoła świata. Raz zgodnie z kierunkiem obrotu Ziemi, czyli na wschód, a drugi raz na zachód. Wskazania zegarów porównywano ze wskazaniami zegarów odniesienia w U.S. Naval Observatory, czyli w amerykańskim obserwatorium floty. Nie będę opowiadał szczegółów eksperymentu i jak zabezpieczono się przed popełnieniem błędów doświadczalnych. Nie było to całkiem proste, bowiem spodziewano się różnic wskazań zegarów nieruchomych i podróżujących rzędu jednej stumilionowej części sekundy. Dlatego właśnie w podróż wysłano cztery niezależne zegary, które przed lotem, w przerwach lotu i po locie porównywano ze wskazaniami zegarów wzorcowych przez cały okres 636 godzin. Piloci rejestrowali przez cały czas lotu

Np. dla  $n = 5$ ,  $Q = 600$  ton wykres ilości towaru w magazynie wygląda tak:



Średnia ilość towaru w magazynie wynosi więc  $300 \text{ ton} = \frac{Q}{2}$ .

Tak samo jest dla dowolnego innego  $n$ . Zatem

$C_2 = 30 \text{ tys.} \cdot \frac{Q}{2} = 15 \text{ tys.} \cdot Q$ . Stąd możemy zestawić już całościowy wzór na koszt

$$C = C_1 + C_2 = 50 \text{ tys.} \cdot n + 15 \text{ tys.} \cdot Q = \frac{50 \text{ tys.} \cdot 3000}{Q} + 15 \text{ tys.} \cdot Q$$

i stąd traktując  $C$  jako funkcję zmiennej  $Q$  każdy obliczy, jakie musi być  $Q$ , aby koszt był minimalny.

Przy rozwiązywaniu problemu hurtownika nasuwają się następujące spostrzeżenia:

1. Nie trzeba wcale używać pochodnej, by rozwiązać to zadanie.

Wystarczy postawić sobie problem jako zadanie z parametrem  $M$ : dla jakiego parametru  $M$  nierówność

$$\frac{150\,000}{Q} + 15Q \geq M$$

zachodzi dla każdego  $Q > 0$ ? Otóż

$$\frac{100}{Q} + \frac{Q}{100} \geq \frac{M}{1500} \quad \text{oraz} \quad \frac{100}{Q} + \frac{Q}{100} \geq 2,$$

a więc  $M = 3000$ .

2. W naszej analizie przyjęliśmy założenie, że najkorzystniej jest, jeśli wszystkie dostawy są równej wielkości. I to jest rzeczywiście prawda. Aby się o tym przekonać, rozważmy sytuację, w której mamy  $n$  dostaw w ciągu roku i wielkość  $i$ -tej dostawy jest  $x_i$ -tą częścią dostawy całorocznej. Oczywiście, będzie wtedy  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ . Dla takiego rozłożenia dostaw składnik  $C_2$  będzie proporcjonalny do  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$  (z jakimś współczynnikiem proporcjonalności), natomiast dla ciągu dostaw

równych (każda w wysokości  $\frac{1}{n}$  dostawy całorocznej)  $C_2$  będzie proporcjonalny do  $\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}$  (z tym samym współczynnikiem). Składnik  $C_1$  jest w obu przypadkach taki sam. Zatem, aby przekonać się, że najkorzystniejsza jest sytuacja, gdy dostawy są równe przez cały rok, wystarczy zauważyć, że:

jeśli  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$  i  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ , to

$$(\clubsuit) \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq \frac{1}{n}.$$

Można tego dowieść metodą wyrównywania wyrazów ciągu. Metoda ta polegać tu będzie na stopniowym wyrównywaniu wszystkich wyrazów  $x_1, x_2, \dots, x_n$  do  $\frac{1}{n}$  i zauważeniu, że suma kwadratów cały czas maleje. Na koniec dochodzimy do sytuacji, w której wszystkie wyrazy są równe  $\frac{1}{n}$  i nierówność  $(\clubsuit)$  staje się równością. Na czym zatem polegają poszczególne kroki tej metody?



Otóż założmy, że mamy taki ciąg liczb dodatnich  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , że  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ . Założmy ponadto, że nie wszystkie  $x_i$  są równe  $\frac{1}{n}$ . Wówczas istnieją co najmniej dwa takie wyrazy

w tym ciągu, że jeden jest większy, a drugi mniejszy od  $\frac{1}{n}$ .

Przenumerowując możemy założyć, że są to  $x_1$  i  $x_2$ . W takiej

sytuacji przerabiamy ciąg wyjściowy  $x_1, x_2, \dots, x_n$  na ciąg  $x'_1 = \frac{1}{n}$ ,

$x'_2 = x_1 + x_2 - 1/n$ ,  $x'_3 = x_3$ ,  $x'_4 = x_4, \dots, x'_n = x_n$ , w którym jest

więcej wyrazów równych  $\frac{1}{n}$ . Trzeba jeszcze wykazać, że ciąg  $(x'_i)_{i=1}^n$

ma mniejszą sumę kwadratów. W tym celu wystarczy wykazać,

że  $x_1^2 + x_2^2 > (x'_1)^2 + (x'_2)^2$ , czyli  $(x'_1)^2 + (x'_2)^2 - x_1^2 - x_2^2 < 0$ .

Proponuję podstawić za  $x'_1$  i  $x'_2$  to, co wyżej, a następnie lewą stronę

powyższej nierówności przedstawić jako iloczyn dwóch wyrażeń

o przeciwnych znakach. Zaznaczmy, że metoda wyrównywania może

być użyta do dowodów bardzo wielu nierówności, np. między średnią

arytmetyczną i geometryczną.

Tyle o problemie hurtownika. Tym z Czytelników, którym spodobało

się zagadnienie minimalizacji kosztów w przedsiębiorstwie, polecam

samodzielne rozwiązanie następującego problemu:

*Mieszkańcy pewnego miasteczka wyrzucają tygodniowo 700*

*pojemników śmieci. Tygodniowy średni koszt utrzymania pojemnika*

*wynosi 3 tys. zł. Koszt kursu śmieciarki na wysypisko i z powrotem*

*wynosi 24 tys. zł. Śmieciarka w czasie jednego kursu zabiera śmieci*

*maksymalnie ze stu pełnych pojemników. Ile pojemników na śmieci*

*trzeba ustawić w tym mieście, by (tygodniowe) całkowite koszty*

*zakładu oczyszczania miasta były najmniejsze, a śmieci nie leżały na*

*ulicach?*

Wskazówki:

1. Rozwiązywać problem osobno w każdym z przedziałów

$(0, 100]$ ,  $(100, 200]$ , itd. Liczby będące granicami przedziałów

oznaczają tu liczby pojemników.

2. Wynik ma być liczbą całkowitą, tymczasem rozwiązanie, które

dostaniemy przyrównując pochodną kosztów do zera, może nie być

liczbą całkowitą. W tej sytuacji należy sprawdzić, dla której z dwóch

najbliższych rozwiązaniu liczb całkowitych koszt jest mniejszy.

Przejdźmy teraz do zagadnień wymagających innych metod. Będą

to metody związane z pochodną logarymiczną opisującą tzw. tempo

wzrostu danej wielkości. Pochodna logarymiczna funkcji  $f$  jest to

po prostu  $f'/f = (\ln(f))'$  (ze wzoru na pochodną funkcji złożonej).

Rozwiążmy następujące zadanie.

*Niech na giełdzie papierów wartościowych dostępne będą akcje tylko*

*dwóch firm zmieniające swoje ceny według wzoru  $f_1(t) = 3 + \cos t$ ,*

*$f_2(t) = 3 + \sin t$ . Ceny te są podane w dolarach. W jaki sposób należy*

*grać na giełdzie w okresie  $[0, 2\pi]$ , aby zyskać najwięcej? Ile zyskamy*

*do momentu  $t = 2\pi$  zaczynając grę w momencie  $t = 0$  z kwotą 1000\$?*

*Gra na giełdzie polega na tym, że w dowolnym momencie możemy*

*kupować bądź sprzedawać wybrane akcje lub też wycofać się z giełdy*

*i trzymać pieniądze w domu.*

Gra w każdym z pierwszych trzech przedziałów  $[0, \pi/2]$ ,  $[\pi/2, \pi]$ ,

$[\pi, \frac{3}{2}\pi]$  jest prosta, bo w każdym ze skrajnych przedziałów tylko

jedna z tych funkcji rośnie, w środkowym zaś obie maleją.

wysokość i prędkość samolotu oraz dokładną trasę, aby można było potem obliczyć teoretycznie oczekiwane wskazania zegarów. Możemy śmiało zawierzyć, że J. C. Hafele z Washington University oraz Richard E. Keating ze służby czasu U.S. Naval Observatory dołożyli wszelkich starań, aby pomiary wykonać z największą możliwą starannością. Nas interesuje wynik. Otóż zegary w samolocie wskazywały inny upływ czasu niż zegary w obserwatorium. Nie jest ważny w tej chwili wynik liczbowy. Najważniejsze jest stwierdzenie, że czas inaczej płynie w układzie, który się porusza, a inaczej w spoczynku. Czas nie jest absolutny. Radzę dobrze się zastanowić nad tym wynikiem. Jest to całkowicie sprzeczne z niemal wrodzonym poczuciem, że czas to coś nieubłaganego, co stale upływa i nic na to nie możemy poradzić. Otóż tak nie jest.

Nie mogę twierdzić, że autorzy eksperymentu byli zaskoczeni. Przeciwnie, eksperyment był zaplanowany po to, aby sprawdzić w skali makroskopowej, w skali życia codziennego, no bo przecież samolot to niemal życie codzienne, przewidywania szczególnej teorii względności. Jakie były przewidywania teorii? Otóż mówi ona, że czas w układzie poruszającym się płynie wolniej w stosunku do czasu mierzonego w układzie nieruchomym. Inaczej mówiąc, jadąc tramwajem starzejemy się wolniej niż czekając na niego na przystanku. Zegar w tramwaju „chodzi” wolniej. Przewidywania teorii mówią o układach poruszających się ruchem jednostajnym prostoliniowym. Doświadczenie z zegarami zostało wykonane w ruchu obrotowym wokół Ziemi. W tym przypadku zegara na ziemi nie można traktować jako nieruchomego, bowiem porusza się również z całą Ziemią w jej ruchu obrotowym. Dlatego przewidywania teorii trzeba zmodyfikować. Zegary podróżujące samolotem na wschód, czyli zgodnie z ruchem obrotowym Ziemi, będą się spóźniać, a zegary lecące na zachód będą się spieszyć względem zegara na ziemi. Na to nakładają się jeszcze inne zjawiska związane z polem grawitacyjnym Ziemi, o których mówi ogólna teoria względności, którą dzisiaj nie będziemy się zajmować. Otóż uwzględniając wszystkie znane nam czynniki możemy się spodziewać, że lecąc na wschód po takiej trasie, jaką samoloty przeleciały, zegary powinny się spóźnić o około 40 nanosekund. Jedna nanosekunda równa się jednej tysięcznej milionowej części sekundy. Przewidywanie to jest obarczone błędem wynikającym z niezbyt precyzyjnie znanych warunków



lotu. Przypominam, że samolot był zwykłym samolotem komunikacyjnym i leciał po swojej zwyczajnej trasie, co komplikowało obliczenia. Opóźnienie może sięgać w tych warunkach do sześćdziesięciu kilku nanosekund.

Z porównania wskazań zegarów okazało się, że spóźniły się o 59 nanosekund. Podobne rozważania prowadzą do wniosku, że zegary podróżujące na zachód powinny przyspieszyć w całej podróży o 275 nanosekund. W rzeczywistości przyspieszyły o 273 nanosekundy. Doświadczenie potwierdziło więc sprzeczny ze zdrowym rozsądkiem wniosek, że czas płynie inaczej w układzie poruszającym się niż w układzie spoczynkowym.

Wybrałem dla Państwa to właśnie doświadczenie, bo jest ono zrealizowane w warunkach bardzo zbliżonych do warunków życia codziennego. Potwierdzenie wolniejszego upływu czasu w układach poruszających się spotykamy na każdym kroku w fizyce cząstek elementarnych, gdy przyspieszamy je do prędkości bliskich prędkości światła.

Zrozumienie faktu, że upływ czasu zależy od prędkości podróżowania, jest tak ważne, że zatrzymam się na doświadczeniu myślowym ilustrującym tak zwany paradoks bliźniąt. Dane liczbowe zaczerpnąłem z podręcznika *Wstęp do fizyki* autorstwa A. K. Wróblewskiego i J. A. Zakrzewskiego.

Oto prawdopodobna, lecz wymyślona, historia dwóch braci bliźniaków. Pierwszy został pilotem rakiety kosmicznej o najnowszym typie silnika fotonowego, który pozwala rozwinąć rakiecie prędkość podróżną 0,745 prędkości światła. Drugi pozostaje na Ziemi, jako kierownik kontroli lotów. Rakieta wyrusza z Ziemi do układu  $\alpha$  Centaura. Zakładamy dla uproszczenia, że prędkość podróżną rakietę osiąga zaraz po starcie. To tylko uproszczenie obliczeń. Rakieta startuje 1 stycznia i bracia postanawiają przesłać sobie życzenia noworoczne drogą radiową. Można łatwo obliczyć, że sygnał wysłany z Ziemi po roku od chwili startu dotrze do rakiety po upływie około 2,6 roku od chwili startu według zegara w rakiecie. Także sygnał wysłany z rakiety po roku od chwili startu dotrze do brata bliźniaka na Ziemi również po upływie 2,6 lat od chwili startu według zegara na Ziemi. W pierwszej fazie lotu sytuacja jest więc symetryczna: każdy z braci bliźniaków stwierdza, że zegar jego brata idzie wolniej, bo brat porusza się względem odczytującego sygnały zegara. Mamy tu do czynienia ze względnością ruchu. Układ  $\alpha$  Centaura jest najbliższym

Możemy naszą strategię zapisać symbolicznie:

$$0 \xrightarrow[\times \frac{1}{3}]{f_2} \frac{\pi}{2} \xrightarrow[\text{wycofujemy się}]{\pi} \pi \xrightarrow[\times \frac{3}{2}]{f_1} \frac{3}{2}\pi$$

1000\$                      1333,(3)\$                      1333,(3)\$                      2000\$

Najciekawsza sytuacja jest w przedziale  $[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$ , bo tam zarówno  $f_1$ , jak i  $f_2$  rosną. Trzeba się zatem zdecydować na wybór tej funkcji, która w danym momencie daje lepszy zysk. Normalnie za lepsze (przynoszące większy zysk) uważa się te akcje, dla których iloraz  $\frac{f(t+h) - f(t)}{f(t)}$  jest największy, gdzie  $t$  – czas poprzedniej sesji,  $t+h$  – czas ostatniej sesji,  $h$  – odległość między sesjami. Jednak zamiast badać, który z ilorazów:  $\frac{f_1(t+h) - f_1(t)}{f_1(t)}$  czy  $\frac{f_2(t+h) - f_2(t)}{f_2(t)}$  jest większy, możemy podzielić oba przez  $h$ , przejść do granicy przy  $h \rightarrow 0^+$  otrzymując nowe ilorazy  $\frac{f_1'(t)}{f_1(t)}$  oraz  $\frac{f_2'(t)}{f_2(t)}$  i wybrać większy z nich. Rozwiążmy zatem w przedziale  $[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$  nierówność:

$$\frac{f_1'(t)}{f_1(t)} \geq \frac{f_2'(t)}{f_2(t)}$$

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{-\sin t}{3 + \cos t} &\geq \frac{\cos t}{3 + \sin t}, \\ -\sin t \cdot (3 + \sin t) &\geq \cos t \cdot (3 + \cos t), \\ -3(\sin t + \cos t) &\geq \cos^2 t + \sin^2 t = 1, \\ \sin t + \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) &\leq -\frac{1}{3}, \\ 2\sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) &\leq -\frac{1}{3}, \\ \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) &\leq -\frac{1}{3\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Zatem patrząc na wykres funkcji  $\cos$  widzimy, jak mamy postępować w przedziale  $[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$ . W chwili  $\frac{3}{2}\pi$  mamy akcje  $f_1$ . Tak trwamy aż do chwili  $t$ , dla której  $\cos(t - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{3\sqrt{2}}$ . W tym momencie akcje  $f_1$  zamieniamy na  $f_2$  i przy tym trwamy już do końca. Obliczenie całkowitego zysku przy tej optymalnej strategii pozostawiamy Czytelnikom.

Podobnym zagadnieniem jest słynny problem składowania wina: *Ktoś zajmuje się produkcją wina, którego wartość w czasie zmienia się według wzoru*

$$W(t) = e^{\sqrt{t}}W_0,$$

gdzie  $t$  jest czasem mierzonym w latach. Załóżmy, że roczne oprocentowanie kapitału w banku wynosi 15%. Jak długo trzeba trzymać wino w beczkach i kiedy należy je sprzedać, by zarobić na tym najwięcej?

Proponuję rozwiązać to zadanie samodzielnie, gdyż jest analogiczne do poprzedniego.

#### Rozwiązania quizu z EPSILONA:

Pierre, Diofantos (*Arytmetyka*), prawnikiem, Leonhard Euler, w markach niemieckich (w wysokości 100 000, ale ta nagroda dawno już się zdewałowowała), Riemann, *Szatan z siódmej klasy*, gdyż jest ostatnim jeszcze nie udowodnionym spośród tych, które Fermat zostawił bez dowodu potomnym, 1987, Mordella.



# Wielkoskalowe pola prędkości we Wszechświecie

Michał CHODOROWSKI

Swoje słynne prawo liniowej zależności prędkości ucieczki galaktyk od odległości do nich Edwin Hubble sformułował w 1929 roku. Od tamtego czasu w kosmologii królują (poza krótkim okresem popularności tzw. Modelu Stanu Stacjonarnego) modele Friedmana ekspandującego Wszechświata. Według nich powstał on około 10–20 miliardów lat temu w Wielkim Wybuchu i rozszerza się. Jednakże przyciąganie grawitacyjne spowalnia ekspansję: jeśli średnia gęstość materii we Wszechświecie  $\rho$  przekracza pewną wartość krytyczną  $\rho_{kr}$ , wówczas grawitacja ostatecznie zwycięży i po fazie ekspansji nastąpi faza kontrakcji (Wszechświat zacznie się kurczyć). W przypadku  $\rho < \rho_{kr}$  Wszechświat będzie się rozszerzać wiecznie, natomiast gdy  $\rho = \rho_{kr}$ , prędkość ekspansji Wszechświata maleć będzie asymptotycznie do zera.

Do dziś nie jesteśmy pewni, który z powyższych scenariuszy realizuje nasz Wszechświat...

Jedną z konsekwencji jego gęstego i gorącego początku jest kosmiczna nukleosynteza pewnych lekkich pierwiastków podczas kilku pierwszych, najgorętszych minut istnienia Wszechświata. Te lekkie izotopy, powstałe z wodoru, to hel-4, deuter, hel-3 i lit-7. Porównanie przewidywań teoretycznych obfitości ich występowania z obserwacjami wypada bardzo korzystnie dla modelu Wielkiego Wybuchu – przewiduje on prawidłowo obfitości *wszystkich* lekkich pierwiastków, pomimo olbrzymiego zakresu liczbowego tych obfitości: od jednej czwartej dla helu-4 do  $10^{-10}$  dla litu-7. Jedyne dopasowywany parametr w tych rachunkach to obecna tzw. średnia gęstość materii *barionowej* we Wszechświecie  $\rho_b$ . Bariony to „normalna” materia, z której jesteśmy zbudowani, np. protony i neutrony (elektrony są na tyle lekkie, że mogą tu być pominięte). Z dopasowania wynika, że  $\rho_b \approx 0,06\rho_{kr}$ .

Drugą konsekwencją gorącego początku Wszechświata jest istnienie tzw. relikowego promieniowania tła, czyli „światła” Wielkiego Wybuchu, obecnie bardzo niskoenergetycznego – mikrofalowego – z powodu ekspansji Wszechświata. Promieniowanie to ma – znów zgodnie z przewidywaniami teoretycznymi! – rozkład widmowy ciała doskonale czarnego i okazuje się być bardzo jednorodne: jego natężenie z dużą dokładnością nie zależy od kierunku, z którego ono dociera. W pierwotnym, gorącym Wszechświecie materia barionowa była zjonizowana i jej niejednorodności nie mogły narastać ze względu na silne oddziaływanie z promieniowaniem poprzez bardzo efektywne rozpraszanie fotonów na swobodnych elektronach. Dopiero, gdy z powodu rozszerzania się Wszechświata jego temperatura spadła na tyle, że zrekombinował wodór (tzn. protony połączyły się z elektronami tworząc atomy wodoru), Wszechświat stał się „przezroczysty” dla promieniowania i niejednorodności w rozkładzie materii zaczęły narastać. Zatem mierzone obserwowalnie niejednorodności w rozkładzie natężenia promieniowania tła informują nas pośrednio o niejednorodnościach rozkładu materii w erze rekombinacji wodoru. Otóż, okazują się być one o wiele za małe, by zdążyć narosnąć odpowiednio tak, by utworzyć struktury obserwowane obecnie, takie jak galaktyki, gromady galaktyk itp.! Jedyne sensowną próbą uniknięcia sprzeczności modelu z obserwacjami wydaje się być zapostulowanie istnienia we Wszechświecie znaczących ilości materii niebarionowej – w szczególności nie oddziałującej elektromagnetycznie. Taka materia byłaby, oczywiście, niewidoczna („ciemna”), natomiast jej niejednorodności, nie będąc „rozmarywane” przez promieniowanie mogłyby narastać znacznie wcześniej, przed erą rekombinacji wodoru. Po rekombinacji materia zwykła (tzn. barionowa) szybko spadałaby do już utworzonych przez ciemną materię dołów potencjału grawitacyjnego. Czy aby jednak ciemna materia to nie przysłowiowa brzytwa, której chwytają się obrońcy modelu standardowego tonąc w morzu obserwacji sprzecznych z teorią?

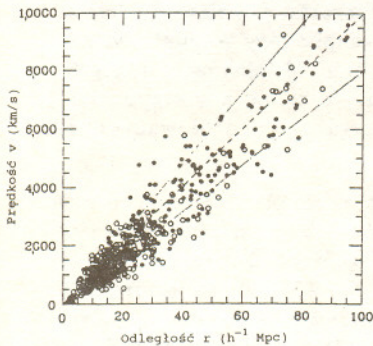
Ziemi układem gwiazdowym położonym w odległości 4,3 lat świetlnych od nas. Jeden rok świetlny to odległość, jaką przebywa światło w ciągu jednego roku. Z punktu widzenia brata na Ziemi brat astronauta pokona drogę tam i z powrotem przy założonej prędkości 0,745 c w czasie  $8,6/0,745 = 11,54$  lat. W układzie rakiety przy podanej prędkości czas płynie wolniej półtora raza. Czyli na zegarze rakiety upływa  $11,54/1,5 = 7,7$  lat, gdy ląduje ona z powrotem na Ziemi. Brat bliźniak będzie więc młodszy o ponad trzy lata. Stąd paradoks – brat bliźniak młodszy o kilka lat. Doświadczenie z wożeniem samolotem zegarów potwierdza właśnie ten nieprawdopodobny wniosek. Może być dwóch braci bliźniaków różniących się wiekiem o kilka lat, a w przypadku większych prędkości podróżowania nawet i o więcej.

Może się ktoś zastanawiać, czy w pędzącej rakiecie coś się czuje, że czas upływa wolniej. Mogę odpowiedzieć z własnego doświadczenia, a i każdy z Państwa ma podobne. Oczywiście, nie mamy poczucia ogromnej prędkości i nie czujemy, że czas upływa wolniej. Skąd ta pewność? Otóż w bardzo prosty sposób możemy wykonać rzeczyste doświadczenie.

Wiemy, że Wszechświat się rozszerza. Ciała niebieskie oddalają się od siebie z prędkościami proporcjonalnymi do odległości. W 1960 roku odkryto nowy typ ciał nazwanych kwazarami, których znamy już dziś około półtora tysiąca, a które charakteryzują się niezwykłą prędkością ucieczki względem Ziemi. Te najszybsze mogą nawet osiągać 93% prędkości światła. A to oznacza, że my w tej właśnie chwili pędzimy w przestworzach z prędkością równą 0,93 prędkości światła względem wybranego kwazara! I co? I nic! Nie odczuwamy tej prędkości. Ale obserwator tam gdzie daleko widzi pędzącą Ziemię (jeżeli takie małe coś może zobaczyć) i myśli sobie (jeżeli tam jest i myśli): „Ale pędzą! Tym to dobrze, wolniej się starzeją”. I prawda. Przekroczyłem już jakiś czas temu pół wieku życia. A tamten obserwator może mi zazdrości „Temu to dobrze, przekroczył 140 lat życia i jakoś się trzyma”. Kto ze słuchaczy ukończył 35 lat, ma prawo pogratulować sobie ukończenia stu lat życia, tyle że w oczach obserwatora z odległego kwazara. Przy okazji dodam, że dla naszego odległego podglądacza ważę ponad 224 kg. Ale o tym następnym razem.



Otóż nie, gdyż istnieją inne niezależne fakty obserwacyjne sugerujące istnienie ciemnej materii we Wszechświecie. Mianowicie, charakterystyczne prędkości gwiazd w galaktykach i galaktyk w gromadach galaktyk przewyższałyby znacząco prędkości ucieczki z tych struktur, gdyby doły potencjału grawitacyjnego tychże były tworzone wyłącznie przez widzialną materię. Oczywiście, niewidoczna może być również materia barionowa: np. duże planety o masie rzędu masy Jowisza lub masywne czarne dziury. Okazuje się, że przeważająca jej część nawet *musi* być niewidoczna, ponieważ średnia gęstość widocznego składnika wynosi tylko około  $0,007\rho_{kr}$ , rząd wielkości mniej od całkowitej gęstości barionowej przewidywanej przez teorię pierwotnej nukleosyntezy. Jednakże do tego, by galaktyki się nie rozpadały, potrzeba „dodać im” taką ilość masy niebarionowej, żeby  $\rho$  wyniosło co najmniej  $0,1\rho_{kr}$ . W przypadku gromad galaktyk „dodać” trzeba więcej – wówczas  $\rho \approx 0,3\rho_{kr}$ . Wynika z tego, że domieszka składnika niebarionowego zmienia się wraz ze skalą struktury. Zatem aby uzyskać miarodajne oszacowanie całkowitej średniej gęstości materii we Wszechświecie, należy poddać analizie dynamikę nie pojedynczej gromady, lecz całego naszego „kosmicznego sąsiedztwa”.



Rys. 1

W przypadku galaktyk spiralnych jasność galaktyki zależy monotonicznie od jej prędkości obrotu. Zależność ta została ustalona przez badanie galaktyk należących do danej gromady, a więc znajdujących się z niezłym przybliżeniem w jednakowej od nas odległości. Zbadanie kilkudziesięciu gromad pozwoliło ustalić, że prędkość rotacji jest skorelowana z jasnością galaktyki ze średnio 40% rozrzutem. Jasność obserwowana danego obiektu jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu jego odległości, stąd 40% rozrzut w jasnościach oznacza 20% błąd wyznaczenia odległości. Innymi słowy, jeśli z dwóch galaktyk spiralnych o identycznej prędkości obrotu druga ma cztery razy mniejszą jasność obserwowaną, to możemy się spodziewać, że znajduje się ona  $2(\pm 2 \times 20\%) = 2(\pm 0.4)$  razy dalej od pierwszej. Analogiczne związki znaleziono także dla galaktyk eliptycznych. Natomiast aby znaleźć odległość absolutną, a nie tylko względną, należałoby wykalibrować powyższe związki przez niezależne wyznaczenie odległości do pobliskich gromad. Pozostaje to wciąż problemem oczekującym na zadowalające rozwiązanie.

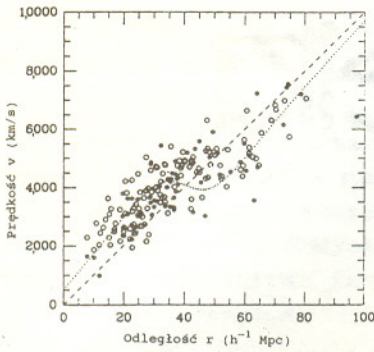
Dynamika tego obszaru, uśredniona po wszystkich kierunkach, jest bardzo prosta (rys. 1): opisuje ją wspomniane już prawo Hubble'a  $v = Hr$ , gdzie  $v$  to prędkość ucieczki galaktyki,  $r$  oznacza odległość do niej, a  $H$  jest stałą proporcjonalności, zwana – oczywiście – stałą Hubble'a. Skąd jednak bierze się tak duży rozrzut punktów wokół linii prostej? Wyznaczanie prędkości galaktyk, a przynajmniej ich składowych wzdłuż kierunku widzenia, jest nieskomplikowane. Prędkości te otrzymuje się z dobrą dokładnością mierząc przesunięcia dopplerowskie linii absorpcyjnych występujących w świetle danej galaktyki względem ich położenia w warunkach laboratoryjnych. Natomiast znane obecnie metody wyznaczania odległości do galaktyk są znacznie mniej dokładne. Wykorzystują one empiryczne związki między jasnościami galaktyk a charakterystycznymi prędkościami poruszających się w nich gwiazd. Obecnie odległości absolutne potrafimy wyznaczyć z dokładnością do czynnika 2! Implikuje to analogiczną niedokładność wyznaczenia stałej Hubble'a:  $H = 100h \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}$ , gdzie

$h \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ . Z tego też powodu jednostką osi  $X$  na rysunku 1 jest  $h^{-1}\text{Mpc}$ . Rozrzut punktów na tym rysunku wynika nie z błędów odczytania tych empirycznych związków (co w tym przypadku jest nieistotne), lecz z rzeczywistego rozrzutu jasności galaktyk, który implikuje błąd odległości około 20%. Na rysunku 1 zostały naniesione dodatkowo proste  $v = H(1 \pm 0,2)r$  i dane obserwacyjne nie przeczą możliwości, że istotnie galaktyki poruszają się z prędkościami czysto hubblewskimi, tzn. wynikającymi z ekspansji Wszechświata (nazywamy to przepływem hubblewskim) natomiast rozrzut bierze się *wyłącznie* z niedokładności wyznaczenia odległości.

A jakie mogłyby być inne przyczyny rozrzutu? Galaktyki nawet w skalach dużo większych od gromad galaktyk nie są ułożone idealnie równomiernie, muszą więc zaburzać przepływ hubblewski. Upřednio opisaliśmy hipotezę, według której stanowiłyby one jedynie „wyspy” widzialnej materii w morzu ciemnej materii niebarionowej. Nie mamy zatem żadnej pewności, czy rozkład galaktyk odzwierciedla wiernie rozkład materii we Wszechświecie. Niemniej skoro występują niejednorodności rozkładu galaktyk, to zapewne występują również niejednorodności rozkładu masy. W skalach większych od kilku  $h^{-1}\text{Mpc}$  względne kontrasty gęstości przestrzennej galaktyk  $\delta_n$  ( $\delta_n = (n(\bar{x}) - n)/n$ , gdzie  $n(\bar{x})$  oznacza gęstość przestrzenną rozkładu galaktyk, uśrednioną w danej skali, natomiast  $n$  oznacza globalną średnią) są mniejsze od jedności. Jeśli to samo jest prawdą dla kontrastu masy,  $\delta_p$ , wówczas przepływ galaktyk będzie zaburzony nieznacznie. Grawitacyjne przyciąganie niewielkiej (względnie!) koncentracji masy spowodowałoby nadanie pobliskim galaktykom dodatkowych, niewielkich (względem czysto hubblewskich) prędkości, skierowanych ku centrum zaburzenia. Ponieważ potrafimy mierzyć jedynie składowe radialne prędkości, więc efekt występowania tych tzw. prędkości własnych galaktyk (tzn. względem ekspandującego jednorodnie tła) byłby najlepiej mierzalny dla galaktyk obserwowanych w dość wąskim stożku wokół kierunku łączącego centrum zaburzenia z obserwatorem.

W 1987 roku grupa astronomów, przezwana żartobliwie przez kolegów Siedmioma Samurajami, ogłosiła odkrycie takiej koncentracji materii, oddalonej od nas o około  $40 h^{-1}\text{Mpc}$  w gwiazdozbiórze Centaura. Diagram Hubble'a dla galaktyk obserwowanych w kierunku tego centrum przyciągania, nazwanego Wielkim

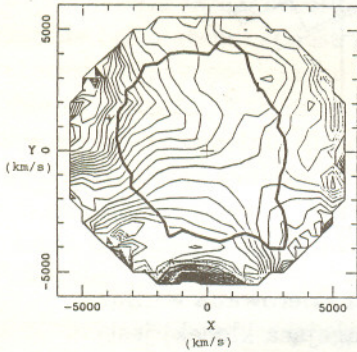




Rys. 2

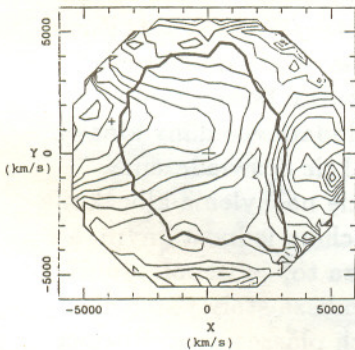
Atraktoorem, uzupełniony o nowe dane, uzyskane przez inną grupę badawczą dla galaktyk znajdujących się poza centrum przedstawia rysunek 2. Wydaje się, że istotnie punkty układają się mniej więcej wokół esowatej krzywej, będącej wynikiem teoretycznego obliczenia pola prędkości galaktyk w obecności koncentracji materii: znajdujące się między centrum przyciągania a obserwatorem galaktyki powinny być przyspieszane, znajdujące się zaś poza centrum powinny być spowalniane względem przepływu hubblowskiego. Niestety, parametry modelu są wciąż słabo wyznaczone przez dane obserwacyjne, jako że np. typowa prędkość własna galaktyki znajdującej się w odległości  $50 h^{-1} \text{Mpc}$  wynosi  $\sim 600 \text{ km/s}$ , natomiast 20% błąd wyznaczenia odległości oznacza błąd  $1000 \text{ km/s}$  w określeniu prędkości hubblowskiej. Zatem dla pojedynczej galaktyki „szum jest silniejszy od sygnału”! Niemniej, można próbować pozbyć się go „wygładzając” pole prędkości radialnych przez uśrednienie ich po odpowiednio dużych obszarach. Ponadto okazuje się, że przy pewnych naturalnych założeniach dotyczących procesu grawitacyjnego narastania zaburzeń w ekspandującym Wszechświecie z pola prędkości radialnych można odtworzyć pole pełnej, trójwymiarowej prędkości.

Dla  $\delta_\rho \ll 1$  można stosować tzw. liniową teorię narastania zaburzeń. W ramach tej teorii istnieje prosty związek między polami prędkości własnych i gęstości materii: strumień prędkości własnych przez dowolną powierzchnię zamkniętą do jej wnętrza jest proporcjonalny do względnej nadwyżki masy w tym obszarze. Czynniki proporcjonalności  $f$  zależy od średniej gęstości materii  $f = f(\rho)$  i jest jej funkcją rosnącą. Jest tak, ponieważ w gęstym Wszechświecie już niewielkie względne kontrasty gęstości oznaczają duże nadwyżki masy, powodujące duże prędkości własne. Z obliczeń wynika, że  $f(\rho) = \left(\frac{\rho}{\rho_{kr}}\right)^{0,6}$ . Innymi słowy, pole prędkości własnych pozwala nam wyznaczyć, z dokładnością do stałego czynnika, pole gęstości masy, czyli  $f(\rho) \cdot \delta_\rho(\vec{x})$ . Tak wyznaczone pole gęstości masy możemy teraz porównać z polem gęstości przestrzennej galaktyk odtworzonym bezpośrednio z katalogów. Może się okazać, że pola te mają się nijak do siebie. Byłaby to sytuacja fatalna dla kosmologii, ponieważ możliwy do zaobserwowania rozkład galaktyk nie mówiłby nic o prawdziwym rozkładzie materii we Wszechświecie. Być może jest jednak tak, że oba rozkłady są skorelowane: gdzie góry (zagęszczenia) w rozkładzie materii, tam i góry w rozkładzie galaktyk, a gdzie doliny (pustki) – to doliny. Oczywiście, nie ma powodu, aby wysokość gór była koniecznym identyczna w obu przypadkach, zatem najprościej jest zapostulować, że  $\delta_n = b \cdot \delta_\rho$ , gdzie  $b$  jest stałą proporcjonalności. Ponieważ z pola prędkości wyznaczamy bezpośrednio  $f(\rho)\delta_\rho$  zatem naszą hipotezą jest  $\delta_n \stackrel{(?)}{=} \frac{b}{f(\rho)} (f(\rho)\delta_\rho)$ .



Rys. 3a. Rozkład masy.

Rysunek 3a przedstawia mapę gęstości masy  $f(\rho)\delta_\rho$  wyznaczoną w pewnej wybranej płaszczyźnie, w której leży nasza Galaktyka (jej położenie oznacza duży krzyż) i Wielki Atraktor, natomiast rysunek 3b przedstawia mapę rozkładu przestrzennego galaktyk w tej płaszczyźnie, skonstruowaną na podstawie obserwacji wykonanych przez Astronomicznego Satelitę Podczerwieni, IRAS-a. Wydaje się, że poziomicie pól gęstości (lekką pogrubioną kreską oznacza  $\delta = 0$ ) są rzeczywiście skorelowane: na obu rysunkach widać wyraźnie Wielki Atraktor (mały krzyżyk). Na mapie gęstości galaktyk jest widoczne również ich zagęszczenie w kierunku dokładnie przeciwnym do Wielkiego Atraktora (w gwiazdozbiorze Perseusza i Ryb), natomiast na mapie gęstości masy występuje ono słabiej i w trochę innym miejscu. Jednakże w obszarach tych bardzo niewiele galaktyk ma wyznaczone prędkości własne – obszar, w którym jakość danych znacząco przewyższa szum jest ograniczony grubą linią. Tak więc, obecne dane nie są sprzeczne z hipotezą, że istotnie rozkład galaktyk dokładnie odzwierciedla rozkład (ciemnej) materii we Wszechświecie. Formalna analiza danych wykazuje, że  $b \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_{kr}}\right)^{-0,6} \approx 1$ . Co więcej, wstępne próby uwzględnienia nieliniowych poprawek i dzięki temu niezależnego oszacowania  $b$  i  $\rho$  sugerują, że  $b \approx \frac{\rho}{\rho_{kr}} \approx 1$ . Tak więc oczekujemy na nowe dane, które, być może, pozwolą potwierdzić przypuszczenia wielu kosmologów, że Wszechświat ma średnią gęstość materii dokładnie równą krytycznej. Oznaczałoby to między innymi, że Jego Ostatecznym Przeznaczeniem jest rozwiązanie pośrednie między Wielkim Kolapsem a Ekspansją w Nicłość...



Rys. 3b. Rozkład galaktyk według IRAS'a.



# S

# mała delta

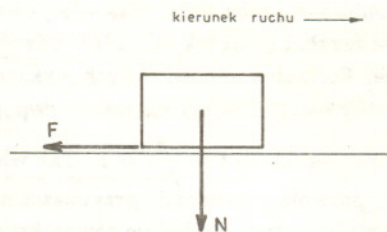
## Tarcie

Tarcie zwykle kojarzy się z siłami oporu występującymi podczas ruchu. Każdy z nas wie, że łatwiej jest ciągnąć sanki po śniegu lub lodzie, niż po odsnieżonym chodniku. Tarcie sanek o śnieg jest mniejsze niż o beton, z którego wykonane są płyty chodnikowe. W którąkolwiek stronę byśmy ciągnęli, tarcie zawsze nam przeszkadza, działa w przeciwną stronę. Jeśli się zapytać, co to jest tarcie, większość odpowie powtarzając szkolną formułkę:

*Jest to siła oporu spowodowana stykaniem się nierównych powierzchni, działająca zawsze w kierunku przeciwnym do ruchu. Dlatego dla podtrzymania ruchu należy przyłożyć siłę do poruszającego się ciała, która to siła będzie co najmniej równa sile tarcia.*

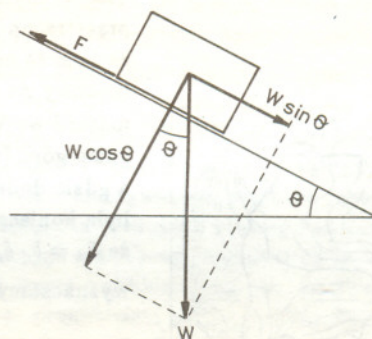
Czy rzeczywiście powyższe stwierdzenie jest zawsze słuszne?

Mimo że są tak ważne w technice i badane od setek lat, prawa tarcia nie są wciąż dokładnie znane. Wyjaśnienie pochodzenia sił tarcia jest skomplikowane, ale jest interesujące, że empirycznie tarcie można opisać bardzo prostym prawem. Z dość dobrym przybliżeniem można uważać siłę tarcia  $F$  za proporcjonalną do siły  $N$  dociskającej stykające się ciała, to znaczy  $F = \mu N$ , gdzie  $\mu$  jest współczynnikiem tarcia, zależnym od rodzaju stykających się powierzchni.



Dotychczas nie umiemy nawet oszacować teoretycznie współczynnika  $\mu$ . Istnieją natomiast tabele podające wartości współczynnika tarcia

„stali po stali”, „drewna po betonie” itp. Możemy sami zmierzyć go w bardzo prosty sposób. Założmy, że chcemy zmierzyć  $\mu$  dla tarcia żelaznego klocka o drewno. W tym celu kładziemy klocek na deskę, a następnie nachylamy deskę do poziomu pod coraz większym kątem, aż przy pewnym kącie nachylenia  $\theta_0$  klocek pod wpływem własnego ciężaru zacznie się zsuwać.



Składowa siły ciężkości skierowana wzdłuż płaszczyzny deski (ściągająca klocek) jest równa  $W \sin \theta_0$  i musi równoważyć siłę tarcia, jeśli klocek zsuwa się ruchem jednostajnym. Ciężar klocka oznaczyliśmy przez  $W$ . Siła dociskająca klocek jest równa  $W \cos \theta_0$ . Stąd otrzymujemy  $\mu = W \sin \theta_0 / W \cos \theta_0 = \operatorname{tg} \theta_0$ . Współczynnik tarcia nie zależy od ciężaru klocka, co można sprawdzić biorąc różne klocki lub obciążając dodatkowo dany klocek. Warto zauważyć w trakcie doświadczenia, że przy właściwym kącie nachylenia klocek nie zsuwa się dokładnie ruchem jednostajnym, ale jakby skokami. Oznacza to, że współczynnik tarcia jest jedynie z grubsza stały i zmienia się w różnych miejscach płaszczyzny. Różnice te mogą być spowodowane różną twardością podłoża, stopniem wypolerowania płaszczyzn styku, zanieczyszczeniami powierzchni itp.

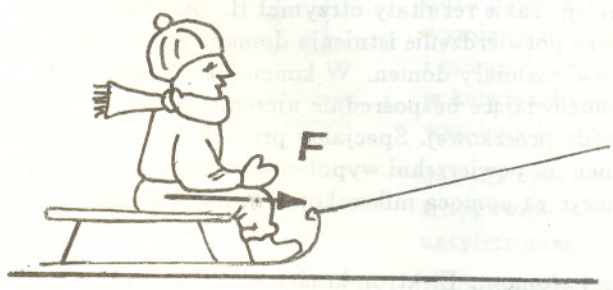


Dlatego też używanie wartości  $\mu$  wziętej z tablic może prowadzić do fałszywych wniosków, gdyż stabelaryzowane wartości nie uwzględniają wspomnianych czynników.

Zwróćmy uwagę również na to, że dla  $\theta < \theta_0$  klocek nie zsuwa się. Oznacza to, że siła ściągająca klocek nie jest w stanie pokonać tarcia. Mamy wówczas do czynienia z tarcie statycznym. Siła tarcia statycznego jest dokładnie równa sile chcącej wprawić klocek w ruch (w przeciwnym przypadku klocek albo by się zsuwał, albo siła tarcia wciągałaby go pod górę) i rośnie ze wzrostem nachylenia do wartości krytycznej. Wzór  $F = \mu N$  dotyczy jedynie tarcia poślizgu.

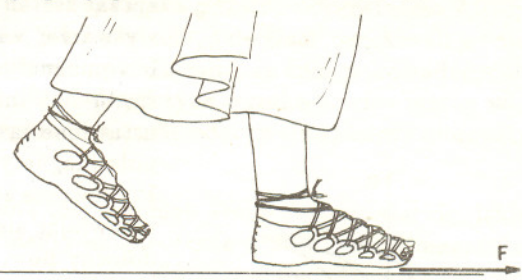
Wróćmy teraz do potocznej definicji tarcia, w której jest mowa o nierównych powierzchniach, oporze ruchu i kierunku siły tarcia. Powszechnie uważa się, że powierzchnie stykających się ciał są nierówne i tarcie spowodowane jest „zahaczaniem się” nierówności, powstają odkształcenia, tworzą się fale i ruchy atomów, co prowadzi do grzania się powierzchni ciał. Dlatego polerowanie powierzchni pozwala zmniejszyć tarcie. Ale jedynie do pewnego stopnia! Jeśli wypolerujemy doskonale powierzchnie, to może okazać się, że współczynnik tarcia stanie się bardzo duży. Dzieje się tak dlatego, że jest wiele punktów styczności między powierzchniami i stają się istotne siły oddziaływań międzycząsteczkowych. Dzieje się tak szczególnie dla powierzchni trących, wykonanych z tego samego materiału. Atomy czy cząsteczki na powierzchni styku nie „wiedzą”, że należą do różnych ciał i dwa kawałki „zlepiają się” w jeden.

Czy zawsze tarcie jest przeszkodą w ruchu i jaki jest kierunek siły tarcia? Rozpatrzmy ponownie saneczki, ale tym razem posadźmy na nie dziecko.

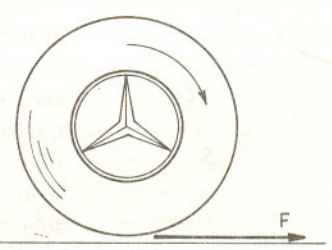


Ciągnąc za sznurek przywiązany do sanek wprawiamy je w ruch. Co wprawia jednak w ruch dziecko? Przecież nie przywiązujemy do niego sznurka. Rozpatrując jedynie dziecko i siły do niego przyłożone widzimy, że musi być jakaś siła wprawiająca je w ruch i że może to być jedynie siła tarcia między nim i sankami. Siła tarcia nie jest więc przeszkodą w ruchu, a wręcz przeciwnie, wprawia ciało w ruch! Co więcej, jej zwrot jest zgodny z kierunkiem ruchu. Czy jest to sprzeczne z ideą, że tarcie sprzeciwia się ruchowi? Oczywiście, nie, jeśli weźmie się pod uwagę *względny* ruch ciał będących w kontakcie. Bez tarcia dziecko zsunęłoby się z sanek. Względem sanek dziecko posuwałoby się do tyłu, więc „sprzeciwiająca się” temu siła tarcia działa do przodu. W tym przypadku zależy nam na tym, aby współczynnik tarcia dziecka o sanki był dostatecznie duży.

Podobnie można zapytać się: co ciągnie konia, który ciągnie wóz, co wprawia w ruch samochód lub nas, gdy chcemy iść? Za każdym razem jest to siła tarcia. Idąc wykonujemy nogą ruch do tyłu, jakbyśmy chcieli odepchnąć Ziemię do tyłu. Siła tarcia przeciwstawiając się poślizgowi nogi nadaje przyspieszenie naszemu ciału.



Z kolei w samochodzie koła napędzające obracają się tak, jakby chciały odpychać jeźdźnię do tyłu. I znowu siła tarcia wprawia samochód w ruch.



Bez tarcia trudno wyobrazić sobie życie. Wszystko wyslizguje nam się z rąk, krzesło wymyka się spod nas, a my sami staczamy się do najbliższego zagłębienia terenu, z którego nie potrafimy się już nigdy wydostać.

Powtarzając więc szkolną definicję siły tarcia warto pamiętać, co się za nią kryje.

Małą Deltę przygotował Jan KALINOWSKI



# Ferromagnetyki i zjawiska magnetomechaniczne

Jarosław KULPA



Rozwiązanie zadania M 688.

Przypuśćmy, że  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i} = \frac{p}{q}$  ( $p, q \in \mathbb{N}$ ).

Wtedy

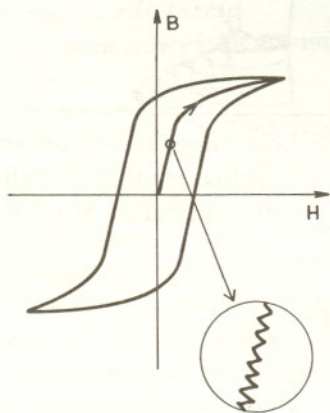
$$pn_1n_2 \dots n_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{n_1 \dots n_{k-1q}}{n_i} + \sum_{i=k}^{\infty} \frac{n_1 \dots n_{k-1q}}{n_i}$$

Oczywiście  $pn_1n_2 \dots n_{k-1}$  oraz skończona suma po prawej stronie są liczbami naturalnymi. Jeśli dobierzemy  $k$  tak, aby dla  $i \geq k$  zachodziła nierówność  $\frac{1}{n_1n_2 \dots n_{i-1}} > 3q$ ,

to łatwo zauważyć, że suma  $\sum_{i=k}^{\infty} \frac{n_1 \dots n_{k-1q}}{n_i}$  jest mniejsza od

$$\frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{n_k} + \frac{1}{n_k n_{k+1}} + \frac{1}{n_k n_{k+1} n_{k+2}} + \dots \right) < 1,$$

a to jest sprzeczność.



Pętla histerezy i efekt Barkhausena.

W numerze *Delty* 4/1992 w kąciku zadań fizycznych pojawił się problem z magnesem zawieszonym na cienkiej nitce i ogrzanym powyżej temperatury Curie. Dla wielu osób fakt, że magnes może zacząć się obracać po ogrzaniu, był zaskakujący. Stąd też zrodził się pomysł opisanego na łamach *Delty* zjawiska związanych z ferromagnetyzmem.

Mianem *ferromagnetyki* określamy substancje, które jesteśmy w stanie namagnesować. Ferromagnetyzm występuje tylko do pewnej temperatury nazywanej temperaturą Curie. Spośród pierwiastków ferromagnetykami są: żelazo Fe (770°C), nikiel Ni (1331°C), kobalt Co (358°C), gadolin Gd (20°C), terb Tb (-50°C), dysproz Dy (-186°C), holm Ho (-253°C), erb Er (-253°C) i tul Tm (-235°C). Ze względu na niskie temperatury Curie (wyżej podane w nawiasach) metale ziem rzadkich nie mają znaczenia jako ferromagnetyki. Warto wspomnieć, że istnieje cały szereg związków chemicznych wykazujących własności ferromagnetyczne, niekoniecznie zawierających powyższe pierwiastki, jak na przykład MnBi.

Człowiek wykorzystuje żelazo przeszło trzy tysiące lat. Ponoć już Tales zauważył, że niektóre gatunki żelaza przyciągają opiłki żelazne, lecz dopiero kiedy w XII wieku pojawił się kompas, magnetyzm wzbudził większe zainteresowanie. W XIX wieku gruntownie poznano prawa elektryczności i magnetyzmu, czego ukoronowaniem były równania Maxwella. Wydawało się, że narzędzia poznania zostały skompletowane i samo wnikięcie w tajemnice, jakie kryje świat, będzie tylko kwestią czasu. Na początku naszego wieku zaczął kształtować się obraz struktury atomu. Stwierdzono, że atom może wytwarzać własne pole magnetyczne. Aby wyjaśnić magnetyzowanie się ciał ferromagnetycznych, P. Weiss w 1907 roku założył, że na małych obszarach, rzędu  $10^{-6}$  m (nazwanych domenami), momenty magnetyczne atomów ustawione są w tym samym kierunku. W przypadku nieobecności zewnętrznego pola magnetycznego domeny ustawione są w sposób na ogół chaotyczny. Przyłożenie zewnętrznego pola sprawia, że domeny stopniowo porządkują się ustawiając się wzdłuż linii pola. Po usunięciu zewnętrznego pola nie wszystkie domeny powracają do stanu chaosu i otrzymujemy stan namagnesowania. W rzeczywistości, w przypadku słabych zewnętrznych pól, w domenach, w których kierunek pola magnetycznego najbardziej odpowiada zewnętrznemu polu, następuje ruch ścian domen, a dopiero przy silnych polach następują obroty momentów magnetycznych domen.

Jeżeli na ciało ferromagnetyczne umieszczone w rosnącym polu magnetycznym nałożymy cewkę podłączoną poprzez wzmacniacz do głośnika, to usłyszymy trzaski, za które odpowiedzialne są skokowe obroty domen. Na wykresie namagnesowania jako funkcje zewnętrznego pola magnetycznego otrzymujemy linię schodkową zamiast ciągłej. Takie rezultaty otrzymał H. Barkhausen w 1919 roku i było to pierwsze potwierdzenie istnienia domen. Z wielkości schodka można było oszacować rozmiary domen. W końcu lat trzydziestych zaczęto rozwijać techniki umożliwiające bezpośrednie ujście domen, na przykład za pomocą metody proszkowej. Specjalny proszek magnetyczny osadza się na granicach domen na powierzchni wypolerowanego ferromagnetyka. Granice domen można zobaczyć za pomocą mikroskopu o powiększeniu co najmniej 200 razy.

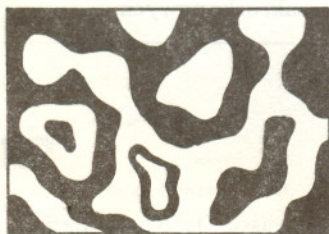
Przyjrzyjmy się obecnie bliżej atomom. Elektron krążąc wokół jądra atomu wytwarza pole magnetyczne, z którym związany jest orbitalny moment magnetyczny. Ponieważ ładunek elektronu jest ujemny, więc wektor momentu magnetycznego jest skierowany przeciwnie do wektora orbitalnego momentu pędu elektronu. Stosunek długości tych dwóch wektorów nazywany jest



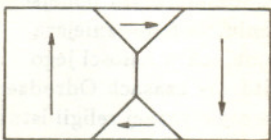
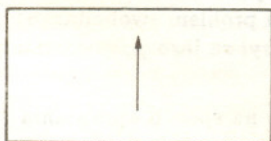


### Rozwiązanie zadania M 639.

W rozkładzie liczby  $a_k$  na czynniki pierwsze znajdzie się liczba pierwsza  $p$  występująca z wykładnikiem większym niż suma wszystkich wykładników, z którymi  $p$  występuje w rozkładach pozostałych  $a_i$  na czynniki pierwsze (gdyby tak nie było, to  $a_k$  dzieliłoby  $a_1 \dots a_{k-1} a_{k+1} \dots a_m$ ). Zatem dla dowolnego  $k$  możemy znaleźć liczbę pierwszą  $p$ , która występuje w rozkładzie  $a_k$  na czynniki pierwsze z wykładnikiem większym niż w rozkładzie innych  $a_i$ . Nazwijmy taką liczbę przedstawicielem  $a_k$ . Łatwo zauważyć, że różne liczby  $a_k$  mają różnych przedstawicieli, skąd  $m \leq \pi(n)$ .



Obraz struktury domenowej otrzymywany za pomocą metody proskowej.



Rozpad dużej domeny na mniejsze zgodnie z zasadą minimum energii.

stosunkiem żyromagnetycznym. Jest on równy ładunkowi elektronu podzielonemu przez dwie masy elektronu. Oprócz orbitalnego momentu pędu elektron ma własny moment pędu, czyli spin, oraz związany z nim własny moment magnetyczny. Dla spinu stosunek żyromagnetyczny jest dwa razy większy niż dla ruchu orbitalnego. Ogólnie stosunek żyromagnetyczny dla obu tych przypadków można zapisać jako iloczyn pewnego czynnika  $g$  i orbitalnego stosunku żyromagnetycznego. Czynniki  $g$  przyjmuje wartość 2 dla efektów związanych ze spinem i wartość 1 w przypadku ruchu elektronu wokół jądra. Jak widać, z momentem magnetycznym atomu nierozzerwalnie związany jest moment pędu atomu. Powyższa uwaga stała się inspiracją do przeprowadzenia szeregu magnetodynamicznych eksperymentów. W roku 1915 A. Einstein i W. de Haas zmierzili obrót pręta wykonanego z ferromagnetyka umieszczonego w rosnącym polu magnetycznym i zawieszono na cienkim włóknie.

Porządkowaniu się momentów magnetycznych musi towarzyszyć porządkowanie się wektorów momentów pędów atomów. Ponieważ całkowity moment pędu bryły musi pozostać nie zmieniony, pręt zacznie się obracać. Dla osiągnięcia lepszych dokładności studiowano drgania pręta umieszczonego w zmiennym polu magnetycznym. Z wielkości maksymalnego wychylenia i modułu sprężystości można było obliczyć moment pędu pręta, a zatem i czynniki  $g$ . Wartość tego czynnika była równa około dwóch. Wcześniej, bo od roku 1909 prowadził doświadczenia z ferromagnetykami S. Barnett. Doświadczenia te miały charakter odwrotny do opisanego powyżej. Pręt został poddawany szybkiemu ruchowi obrotowemu (50 Hz). W pręcie pojawiała się pole magnetyczne proporcjonalne do częstotliwości obracania pręta. Mechanicznym odpowiednikiem tego zjawiska jest tendencja ustawiania się wirujących bączków w kierunku osi obrotu w nieinercyjnym, obracającym się układzie. W ten sposób można trwale namagnesować ferromagnetyk. Z pomiarów wykonanych dla żelaza, niklu i kobaltu Barnett otrzymał wartości czynnika  $g$  równe odpowiednio 2,072; 2,084 i 2,142. Zarówno Barnett, jak i Einstein, i de Haas oczekiwali wyniku dwukrotnie mniejszego, trzeba bowiem nadmienić, że spin wprowadzono do fizyki dopiero w roku 1925. Z doświadczeń tych wynika pewien ważny wniosek: w przypadku ferromagnetyków kluczową rolę odgrywają spinowe momenty magnetyczne elektronów.

Tworząc swoją fenomenologiczną teorię domen Weiss zastanawiał się, jakie siły mogłyby porządkować momenty magnetyczne w domenie. Z oszacowań wynikało, że siły magnetyczne są do tego celu zbyt słabe. Zagadka ta została rozwiązana przez W. Heisenberga w roku 1928 w ramach powstającej wówczas mechaniki kwantowej. Siła porządkująca wiąże się z oddziaływaniem wymiany między najbliższymi elektronami. Energia tego oddziaływania jest równa pewnej stałej  $J$  zwanej całką wymiany pomnożonej przez iloczyn spinów elektronów najbliższych, sąsiadujących ze sobą atomów. Siły wymiany są krótkozasięgowe, więc ograniczenie się do najbliższych sąsiadów w sieci krystalicznej jest całkiem uzasadnione. Dla  $J > 0$  siły wymiany starają się utrzymać spiny obu elektronów w jednym kierunku. Gdy energia ruchu termicznego jest zbyt duża powyższe ustawienie może zostać zniszczone. Dla  $J < 0$  oddziaływanie wymiany stara się utrzymać spiny dwóch elektronów w przeciwnych kierunkach i mamy do czynienia z antyferromagnetykiem. Temperatura Curie (mierzona w kelwinach) jest wprost proporcjonalna do wielkości  $J$ . Stąd wynika, że energia wymiany jest mała dla pierwiastków ziem rzadkich.

Jak już było wspomniane, powyżej temperatury Curie ferromagnetyki tracą swoje własności i przechodzą w stan paramagnetyczny lub czasem antyferromagnetyczny, jak na przykład erb i dysproz.

Zadajmy sobie teraz pytanie, dlaczego domeny mają takie, a nie inne wymiary i czym jest to uwarunkowane? Otóż, prawie wszystko w fizyce dąży do stanu o najniższej energii. Wyobraźmy sobie na początek duży twór jednodomenowy. Jeżeli rozpadnie się on na kilka domen różnie zorientowanych, to pole magnetyczne zmniejszy się wokół tego ferromagnetyka, a zatem energia pola będzie mniejsza. Postępującemu rozpadowi domen przeciwstawia się



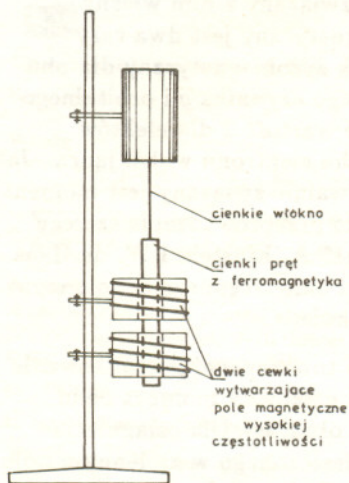
energia, którą należy wydatkować na powstanie ścianki międzydomenowej. Energia ta przypomina napięcie powierzchniowe. Na przykład dla żelaza ma ona wartość  $0,0011 \text{ J/m}^2$ . Dlatego przy pewnej wielkości domen tworzy się stan równowagi.

Czy ferromagnetyk może być nadprzewodnikiem? W myśl teorii opisującej stan nadprzewodnictwa (teoria BCS) w nadprzewodniku tworzą się pary złożone z dwóch elektronów przyciągających się za pośrednictwem sieci krystalicznej. Elektrony te mają przeciwnie skierowane spiny. Można więc wyobrazić sobie, że zjawisko nadprzewodnictwa jest w pewnym sensie odwrotne do ferromagnetyzmu i ferromagnetyki nie mogą być nadprzewodnikami.

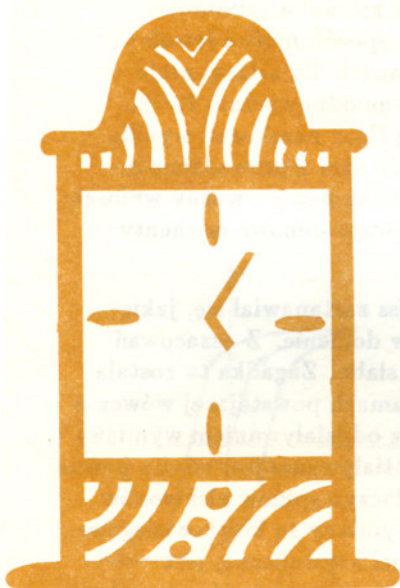
Oczywiście, nie dotyczy to antyferromagnetyków. Na przykład cer jest antyferromagnetykiem i wykazuje również własności nadprzewodzące.

Na zakończenie przeglądu zjawisk mechanicznych związanych z ferromagnetykami należałoby jeszcze wspomnieć o magnetostrykcji. Otóż, w zewnętrznym polu magnetycznym ferromagnetyk zmienia swoją długość. W przypadku Ni i Co jest to skracanie, a dla Fe wydłużanie dla słabych pól i skracanie dla silnych. Maksymalny efekt względnej zmiany długości jest rzędu  $10^{-4}$ . Ciekawszy jest efekt odwrotny. Otóż, stosując ciśnienia już rzędu 100 atmosfer zmieniamy silnie własności ferromagnetyka, na przykład wraz ze wzrostem ciśnienia zmniejsza się osiągnięte namagnesowanie przy danym zewnętrznym polu magnetycznym.

Dzisiaj nie wykorzystuje się zjawiska Barnettta ani Einsteina-de Haasa do pomiaru czynnika  $g$ . Metody te zostały zastąpione przez dokładniejsze metody rezonansowe. Niemniej jednak stanowią one piękny przykład wpływu własności mikroświata, takich jak spin, na zachowanie się ciał makroskopowych.



Schemat doświadczenia Einsteina-de Haasa.



## Zupełnie inaczej

W tym roku minęło 350 lat od śmierci Galileo Galilei, Galileusza. Jego osiągnięcia są liczne i powszechnie znane. Matematykę wzbogacił o wspaniałe narzędzie, jakim są wektory (umożliwił w ten sposób wprowadzenie, jeszcze za swego życia, geometrii analitycznej). Wprowadził do fizyki pojęcie siły (naprawdę dopiero on) i przyspieszenia oraz związał je zależnością  $F = m \cdot a$  (dał tym samym Newtonowi – ciekawe, że urodził się on w roku śmierci Galileusza – pojęcia umożliwiające sformułowanie zasad dynamiki). Opisał matematycznie ruch wahadła. Rozwiązał problem swobodnego spadku i ruchu po równi pochyłej. Zbudował teleskop i odkrył za jego pomocą cztery księżycy Jowisza. Itd., itp.

Chciałem tu jednak napisać o czym innym – o jego wpływie na sposób uprawiania nauki w ogóle, a matematyki w szczególności.

Od szóstego wieku przed naszą erą, aż po wiek siedemnasty, dominującym podejściem do matematyki był pitagoreizm. Zasada się on na przekonaniu, że najważniejszą cechą świata jest *harmonia*, czyli nadrzędna struktura utrzymująca w całości jego różnorodne, często przeciwstawne siły, działania, tendencje itd. W czasach Odrodzenia pitagoreizm przybrał inną nazwę – wobec obowiązującej monoteistycznej religii istniała tylko jedna możliwa nazwa dla pitagorejskiej harmonii: Bóg – poglądy pitagorejskie nazwano panteizmem. I tak, jak nadrzędnym celem badawczym pitagorejczyków było poszukiwanie harmonii w każdym przejawie świata, tak dla panteistów stało się nim poszukiwanie w każdym przejawie świata Boga. I jedni, i drudzy byli zdania, że harmonia/Bóg jest w swej istocie niesłychanie prosta, a więc powinna dać się wyrazić najklarowniejszym językiem, jaki ludzkość posiada – matematyką. Bóg jest matematykiem, jak mówił Kepler.

Byli jednak i inni. Np. Arystoteles przyznawał matematyce tylko walor narzędzia pozwalającego na precyzyjny opis różnych zjawisk. Poznanie matematyczne nie jest, według Arystotelesa, poznawaniem świata, lecz tylko kształceniem swojej sprawności, która może, rzecz jasna, później do czegoś się przydać. W czasach Galileusza uniwersytety były opanowane przez wyznawców Arystotelesa (zważmy: jedyne poganina, któremu przyznawano prawo kształtowania chrześcijańskich dusz i umysłów).

Badawczy aspekt panteizmu odnajdujemy choćby w wierszu, którego uczyliśmy się w szkole:

*Czego chcesz od nas, Panie,  
za twe hojne dary?  
Czegóż za dobrodziejstwa,  
w których nie znasz miary?  
Gdziekolwiek się obrócim,  
wszędę pełno Ciebie:  
na morzu i na lądzie,  
w powietrzu i w niebie.*

Z kolei arystotelesowskiemu podejściu do matematyki zaprezentował Nobel nie przyznając matematyce miejsca wśród umiejętności służących człowiekowi.





### Rozwiązanie zadania F 337.

Niech  $T_0$  oraz  $T$  oznaczają bezwzględne temperatury powietrza w balonie i na zewnątrz. Prędkość dźwięku jest równa

$$v = \sqrt{\frac{\kappa R T}{\mu}}, \text{ gdzie } \kappa \text{ jest wykładnikiem}$$

adiabaty,  $\mu$  – masą molową powietrza,  $R$  zaś stałą gazową. Współczynnik załamania jest równy stosunkowi prędkości dźwięku w otoczeniu do prędkości dźwięku w balonie

$n = \sqrt{\frac{T}{T_0}}$ . Zdolność skupiająca soczewki o grubości  $d$  i promieniach krzywizny  $r_1$  oraz  $r_2$  wynosi

$$D = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) - \frac{d}{n} (n - 1)^2 \frac{1}{r_1 r_2}.$$

Podstawiając  $r_1 = r_2 = r$  oraz  $d = 2r$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{D} = \frac{nr}{2(n-1)} = \\ &= \frac{r\sqrt{T}}{2(\sqrt{T} - \sqrt{T_0})} = \\ &= 56 \text{ m.} \end{aligned}$$



### Rozwiązanie zadania F 338.

Niech  $I_0$  oznacza strumień padający na szybę. Po przejściu strumienia przez pierwszą powierzchnię natężenie światła będzie równe  $(1 - R)I_0$ . Przez drugą powierzchnię przejdzie strumień  $I_1 = (1 - R)^2 I_0$ , odbiciu zaś ulegnie strumień  $R(1 - R)I_0$ , którego część odbita od pierwszej powierzchni może przejść przez drugą z natężeniem  $I_2 = R^2(1 - R)^2 I_0$ , itd. Sumując nieskończony szereg otrzymujemy

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + I_3 + \dots = \\ &= (1 - R)^2 I_0 + (1 - R)^2 R^2 I_0 + \\ &\quad + (1 - R)^2 R^4 I_0 + \dots = \\ &= \frac{(1 - R)^2}{1 - R^2} I_0 = \frac{2n}{n^2 + 1} I_0. \end{aligned}$$



Rozwiązanie zadania M 637. Każda liczba daje przy dzieleniu przez 9 tę samą resztę, co jej suma cyfr tak dowodzi się cechę podzielności przez 9. Zatem jedynek otrzymany z 1, 10, 19, ..., 999 999 991, 1 000 000 000, a dwójki z liczb odpowiednio o jeden większych, ale nie przekraczających miliarda; łatwo więc stwierdzić, że jedynek będzie o jedną więcej niż dwójek.

W opozycji były środowiska wojskowo-inżynierskie, które miały dokonać wkrótce największego przewrotu naukowego od tysiącleci i które były zdecydowanie pitagorejskich przekonań (środowiska te później stworzyły konkurencyjne i wrogie wobec uniwersytetów akademie – tylko w Anglii nie był to jawny konflikt).

Zanim przedstawimy rolę, jaką odegrał Galileusz w tym sporze, kilka słów o samym problemie. Zawsze byli matematycy, którzy swoją pracę traktowali jak poznawanie absolutnej prawdy o świecie czy też o Bogu. Zawsze byli też i tacy, dla których matematyka była narzędziem do rozwiązywania problemów mniej czy bardziej praktycznych, ale zawsze mających swoje źródło w problemach realnego świata. Trzeba przyznać, że ci drudzy zrobili więcej – relacjonując dziś rezultaty częściej wymieniamy ich twierdzenia i wprowadzone przez nich pojęcia, niż wyniki ich wyżej mierzących kolegów. Nie sposób jednak nie zauważyć, że przez swoich współczesnych ci pierwsi byli cenieni wyżej – wszak oni badali rzeczy ważniejsze. I nie sposób nie przyznać racji tym aktualnym ocenom. Jeśli mówi się o absolutnej prawdzie czy Bogu, to łatwiej jest znaleźć chętnych do podjęcia badań, po drugie – spory stają się ostrzejsze, co zawsze badaniom dobrze robi. Tak więc matematyczni pragmatycy korzystali z nakręcanej przez matematyków-idealistów koniunktury i często tylko dzięki niej mogli funkcjonować. Nie jest pewne, czy pragmatyzm Galileusza mógłby się ostać, gdyby nie miał uitorowanej drogi przez wzniosły idealizm Keplera.

Podstawowy konflikt Galileusza ze światem uczonych (z których mali duchem wielokrotnie próbowali zrewanżować się Galileuszowi niebezpiecznymi donosami) polegał na wskazaniu innego celu badawczego dla nauk ścisłych, niż oficjalnie przyjęty. Galileusz nadał przytoczonemu wyżej sporowi nowy wymiar – wskazał, że jest rzeczą odmienną pytanie *dlaczego*, a więc objaśnianie świata, od pytania *jak*, a więc opisywania świata. I obstawał przy odmawianiu waloru nauki pierwszemu podejściu. Jeśli dodać do tego jeszcze wręcz pogardliwy stosunek do zastanych dokonań, to nie bardzo wypada nawet dziwić się agresji jego bardziej tradycyjnie myślących kolegów.

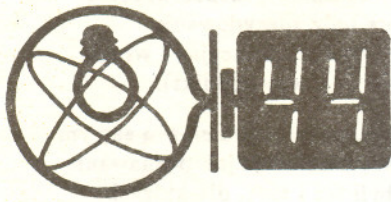
Podjęcie takiej, a nie innej problematyki badawczej Galileusz objaśnia: *w przyrodzie nie ma nic, co byłoby starsze niż ruch, ale właśnie na jego temat napisano najmniej znaczących uwag. A jego doktryna badawcza też wyraźnie sugeruje ocenę kolegów. Teraz pora jest niestosowna na zajmowanie się przyczynami ruchu, o czym różni filozofowie wypowiadali tyle różnych poglądów: jedni przypisywali go zbliżeniu do środka, drudzy – stopniowemu zmniejszaniu się oporu otoczenia, trzeci – innym oddziaływaniom otoczenia, które zamyka się za poruszającym się ciałem i wywiera na nie ciśnienie, jakby je stale popychając; wszystkie te stanowiska i wiele innych można by rozpatrzyć, co jednak przyniosłoby mało pożytku. Teraz wystarczy, jeżeli rozpatrzemy, jak bada się i opisuje własności ruchu przyspieszonego (jaka by nie była jego przyczyna) przyjmując, że prędkość chwilowa...*

Propozycja odrzucenia pytania o przyczynę czy nawet mechanizm zjawisk na rzecz skoncentrowania się jedynie na opisie ich przebiegu niesłychanie przypadła do gustu tworzącej się nowej elicie intelektualnej. Paradoksalnie – zwolennicy pitagoreizmu stali się jego grabarzami. Okazało się, że w Arystotelesie wcale nie stosunek do matematyki różnił. Jedynie opisowa wersja poznawania świata była przecież dużo łatwiejsza, a w zastosowaniach niczym nie ustępowała metodom tradycyjnym. Odrzucenie zbędnych elementów pracy badawczej poszło nawet tak daleko, że mówiono: *dowody były potrzebne takim mięczakom, jak Grecy – my się bez nich swobodnie obywamy.* Bo istotnie – po co dowód, jeżeli można sprawdzić, że jest dobrze. Przyjrzenie się pracom Galileusza niedwuznacznie zresztą pokazuje tę nonszalancję – wahadło nigdy nie waha się z okresem niezależnym od wychylenia, a on przecież „wykazał”, że jest przeciwnie; ciała o różnej masie spadają (we wszystkich dostępnych Galileuszowi warunkach) z różnym przyspieszeniem, wbrew jego wywodom.

Jednak potraktowanie nauki jako dającego się wykorzystać praktycznie opisu okazało się tak efektywne, że za sprawą Galileusza kończy się praktycznie trwający prawie dwa tysiące lat okres pitagoreizmu. Matematyka nie jest już od tej pory filozofią, teorią świata, poznawaniem prawd absolutnych. Staje się, wraz z innymi naukami, które zresztą wkrótce obwołały ją królową, najsprawniejszym narzędziem podporządkowywania świata człowiekowi, skolonizowania i zmuszenia przyrody do uległości. Wydaje się, że ten ślad Galileusza w nauce jest najbardziej doniosły.

Marek KORDOS





# Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki,  
Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

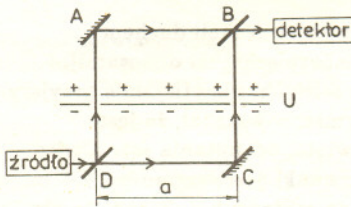
## Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 3$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1992.

Redaguje Jerzy B. BROJAN

## Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/1992

Przypominamy treść zadań:



**135.** Na rysunku mamy schemat interferometru, w którym wiązka nierelatywistycznych elektronów o energii  $E$  pada na zwierciadło półprzepuszczalne  $D$ , skąd część wiązki biegnie dalej drogą  $DAB$ , a część drogą  $DCB$ . Na odcinkach pionowych energia kinetyczna elektronów zmienia się w wyniku przejścia do obszaru o innym potencjale. Za zwierciadłem półprzepuszczalnym  $B$  rozdzielone wiązki nakładają się, a obraz interferencyjny jest rejestrowany przez detektor. O ile prążków przesunie się obraz interferencyjny, gdy różnicę potencjałów zwiększymy od zera do  $U$ ?

**136.** Gdy temperatura powietrza atmosferycznego szybko maleje w miarę wzrostu wysokości, występuje intensywne konwekcja (pionowe ruchy mas powietrza), natomiast gdy temperatura maleje powoli lub rośnie, konwekcja nie występuje. Wyjaśnić przyczynę tej zależności i obliczyć minimalny spadek temperatury suchego powietrza przy wzroście wysokości o 100 m, dla którego jeszcze występuje konwekcja.

**135.** Przesunięcie fazy jednej wiązki względem drugiej wynika stąd, że po wprowadzeniu różnicy potencjałów energia elektronów na odcinkach poziomych przestaje być jednakowa: na odcinku  $DC$  elektrony mają energię  $E$  i długość fali  $\lambda = \frac{h}{p}$ , a na odcinku  $AB$  energię

$E_1 = E + eU$  i długość fali  $\lambda_1 = \frac{h}{p_1}$ . Szukana liczba przesuniętych maksimów wynosi

$$n = \frac{a}{\lambda_1} - \frac{a}{\lambda} = \frac{a}{h}(p_1 - p) = \frac{a}{h} \left( \sqrt{2m(E + eU)} - \sqrt{2mE} \right).$$

**136.** Powietrze wznosząc się na wysokość wyższą o  $\Delta h$  rozpręża się, tzn. ciśnienie zmniejsza się o

$$\Delta p = \rho g \Delta h.$$

W realnych warunkach mamy do czynienia z ruchami mas powietrza o rozmiarach kilkudziesięciu do kilkuset metrów, zatem można pominąć wymianę ciepła z otoczeniem. Rozprężeniu adiabatycznemu towarzyszy spadek temperatury  $\Delta T$ . Z równania przemiany adiabatycznej (Poissona) i równania Clapeyrona można wyprowadzić związek między małymi przyrostami  $\Delta p$  i  $\Delta T$ .

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{R}{C_p} \frac{\Delta p}{p}.$$

Podstawiając  $\Delta p = \rho g \Delta h$  i  $\rho = \frac{p\mu}{RT}$  (gdzie  $\mu$  - średnia masa molowa powietrza, równa około 29 g) mamy

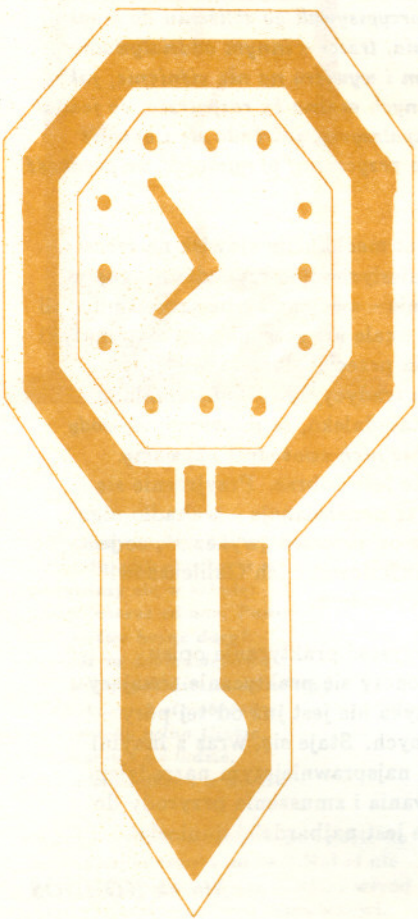
$$(*) \quad \Delta T = \frac{\mu g \Delta h}{C_p}.$$

Jeśli wznoszący się do góry „bąbel” powietrza okaże się cieplejszy od swego otoczenia, to będzie też miał mniejszą gęstość i przesunie się dalej do góry. Taka sytuacja sprzyja więc ruchom konwekcyjnym. Gdy natomiast „bąbel” będzie miał temperaturę niższą, to wskutek większej gęstości zatrzyma się i zawróci - czyli konwekcja nie wystąpi. Graniczne tempo spadku temperatury otrzymujemy ze wzoru (\*). Podstawiając  $\mu = 0,029$  kg,  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup>,

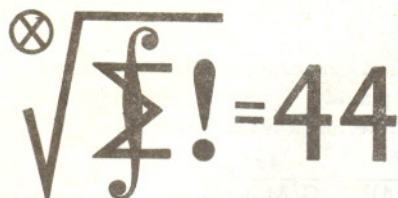
$\Delta h = 100$  m i  $C_p = \frac{7}{2}R = 29,1$  J/K (azot i tlen są gazami dwuatomowymi) mamy

$$\Delta T = \frac{0,029 \cdot 9,8 \cdot 100}{29,1} \text{ K} = 0,98 \text{ K}.$$

Obliczenia te są prawidłowe tylko dla powietrza dostatecznie suchego, aby nie wystąpiło skraplanie pary wodnej przy oziębieniu.







Czołówka ligi zadaniowej  
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 227 (WT=3,11) i 228 (WT=1,53)  
z numeru 4/1991

Józef Siwy	-	Łaziska Górne	42,42
Henryk Kornacki	-	Augustów	37,22
Marek Prauza	-	Poraj	36,06
Mirosław Matłaga	-	Skoczów	35,79

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/1992

Przypominamy treść zadań:

**227.** Wyznaczyć wszystkie czwórki dodatnich liczb całkowitych  $(x, y, u, v)$  spełniających równanie  $x^{u+v} + y = x^u y^v$ .

**228.** Wykazać zbieżność i znaleźć granicę ciągu  $(a_n)$  danego wzorem rekurencyjnym:  $a_0 = 44$ ,  $a_{n+1} = 2^{1-a_n}$  dla  $n \geq 1$ .

**227.** Jeśli liczby całkowite  $x, y, u, v \geq 1$  spełniają dane równanie, to  $y$  dzieli się przez  $x$ . Niech  $y = qx$  ( $q$  naturalne). Przekształcamy:

$$\begin{aligned} q^v &= x^{-v} y^v = x^{-v} (x^u y^v - x^{u+v})^v = \\ &= x^{-v} (x^u (qx)^v - x^{u+v})^v = x^{-v} (x^{u+v} (q^v - 1))^v = \\ &= x^{v(u+v-1)} (q^v - 1)^v. \end{aligned}$$

Otrzymana równość oznacza, że  $q^v = 2$  oraz  $x^{v(u+v-1)} = 2$ . Stąd  
 $v = 1, u = 1, x = 2, y = 4$ .

Ta czwórka spełnia równanie i jest jego jedynym rozwiązaniem.

**228.** Wzór definiujący ciąg  $(a_n)$  ma postać  $a_{n+1} = f(a_n)$ , gdzie  $f(x) = 2^{1-x}$ . Ponieważ  $f(x) < 1$  dla  $x > 1$  oraz  $f(x) > 1$  dla  $x < 1$ , zatem jedna z liczb  $a_1, a_2$  jest  $\geq 1$ . [Aby ciąg był jednoznacznie określony, wzór  $a_{n+1} = f(a_n)$  powinien obowiązywać dla  $n \geq 0$ , nie tylko dla  $n \geq 1$ ; skoro jednak (omyłkowo) podano  $n \geq 1$ , to nie znamy wartości  $a_1$ .] Przyjmijmy dla ustalenia uwagi, że  $a_2 \geq 1$ . Gdy  $a_2 = 1$ , ciąg jest stały ( $a_n = 1$  dla  $n \geq 2$ ). W dalszym ciągu zakładamy, że  $a_2 > 1$ . Wykażemy, że ciąg  $a_2, a_4, a_6, \dots$  jest malejący. Wystarczy w tym celu udowodnić, że

$$(1) \quad f(f(x)) < x \quad \text{dla } x > 1.$$

Jest to równoważne temu, że

$$(2) \quad 1 - \log_2 x < 2^{1-x} \quad \text{dla } x > 1.$$

Dla  $x \geq 2$  nierówność zachodzi (lewa strona ujemna, prawa dodatnia). Dla  $x \in (1; 2)$  przepisujemy (2) w równoważnej postaci

$$\log_2(1 - \log_2 x) < 1 - x,$$

czyli

$$(3) \quad \ln\left(1 - \frac{\ln x}{\ln 2}\right) < (1 - x) \ln 2.$$

Dla wszystkich liczb  $t > -1$  zachodzi znana nierówność  $\ln(1+t) \leq t$ . Stąd

$$\ln\left(1 - \frac{\ln x}{\ln 2}\right) \leq -\frac{\ln x}{\ln 2}.$$

Zależność (3) będzie więc udowodniona, jeśli wykażemy, że dla  $x \in (1; 2)$  mamy

$$-\frac{\ln x}{\ln 2} < (1 - x) \ln 2,$$

czyli

$$(4) \quad \ln x + (\ln 2)^2(1 - x) > 0.$$

Lewa strona (4) przedstawia funkcję ściśle wklęsłą, przyjmującą na krańcach przedziału  $(1; 2)$  wartości nieujemne. Stąd słuszność (4) dla  $x \in (1; 2)$ , więc i słuszność (1). To zaś dowodzi, że ciąg  $(a_{2k})$  jest malejący; istnieje zatem  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} =: \xi \geq 1$ . Przechodząc do granicy w równości

$a_{2k+2} = f(f(a_{2k}))$  otrzymujemy związek  $\xi = f(f(\xi))$ , z którego wobec (1) wnosimy, że  $\xi = 1$ . Pozostaje jeszcze zauważyć, że  $a_{2k+1} = f(a_{2k}) \rightarrow f(\xi) = f(1) = 1$ . Ostatecznie więc  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$  (niezależnie od wartości wyrazu początkowego).

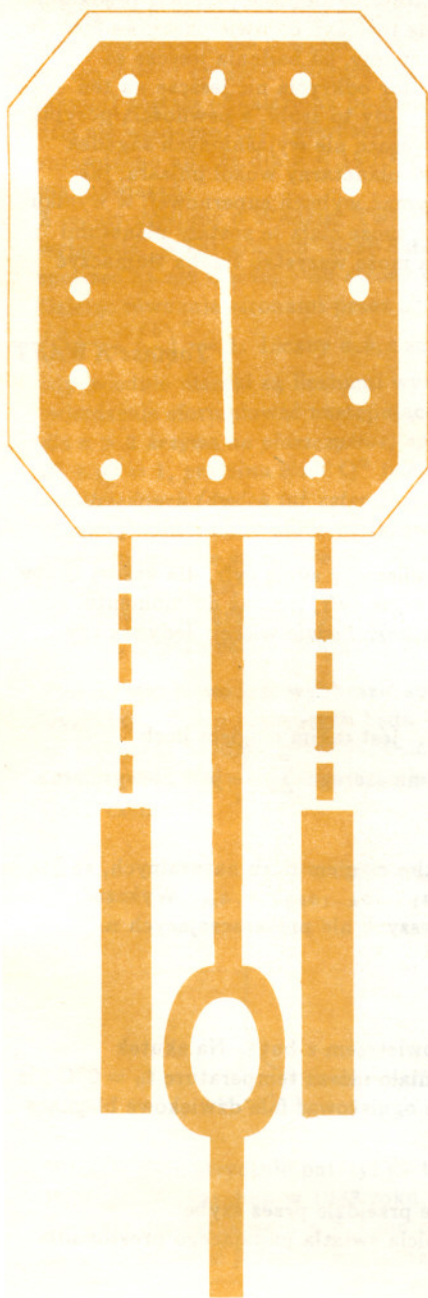
Zacytujmy fragment z książki Serge Langa *Algebra* (PWN 1984).

„Wziąć dowolny podręcznik do algebry homologicznej i udowodnić wszystkie twierdzenia nie zaglądając do dowodów podanych w tym podręczniku. Algebra homologiczna została wynaleziona przez Eilenberga i MacLane'a. Ogólna teoria kategorii (tj. teoria strzałek) jest ogólnie znana pod nazwą *nonsensu abstrakcyjnego* (termin pochodzi od Steenroda).”

Tekst ten został opatrzony dwoma przypiskami redakcji:

(1) Radzimy pominąć te ćwiczenia przy pierwszym czytaniu.

(2) Należy zauważyć, że termin *nonsens abstrakcyjny* ma w książce znaczenie dodatnie i używany jest dalej zupełnie poważnie.





Kilka miesięcy temu, prawie w każdej gazecie, można było znaleźć wiadomość, że polski astronom, **Aleksander Wolszczan**, odkrył układ planetarny. Nie może pozostać obojętna na to wydarzenie także *Delta*.

Przed wszystkim warto wiedzieć, że ciemne satelity gwiazd znane są nie od dziś. Np. już w ubiegłym wieku wiadano, że Syriusz ma takiego towarzysza, a dowodził tego fakt, że Syriusz (ściślej mówiąc, gwiazda nazywana teraz Syriusz A) porusza się po niebie „wężykiem”. Dużo później stwierdzono, że tym towarzyszem (Syriuszem B) jest biały karzeł. W miarę rozwoju spektroskopii zaczęto odkrywać gwiazdy wykazujące okresowe zmiany prędkości radialnych (z pomiaru efektu Dopplera dla linii widmowych), co również w naturalny sposób tłumaczyło się obecnością masywnego satelity przy danej gwiazdzie – krótko mówiąc, odkrywano tak nowe układy podwójne gwiazd.

Z planetami jest, rzecz jasna, dużo gorzej, gdyż ich mała masa może zakłócić ruch gwiazdy centralnej w znikomym stopniu. Ale wreszcie i to dało się zauważyć i zmierzyć u pulsara PSR 1829-10 odkrytego w 1985 r. Rozmowanie prowadzące do określenia masy satelity (gwiazdy? planety?) przebiega w przybliżeniu następująco. Załóżmy, że orbita satelity jest kołowa i że widzimy pulsara w płaszczyźnie tej orbity. Mając z obserwacji okres zmian prędkości pulsara  $T$  i ich amplitudę  $v$  można ocenić promień  $A$  orbity pulsara (liczony od środka masy układu), bowiem  $v = 2\pi A/T$ . Ciemny obiekt towarzyszący obiega ten sam środek masy po orbicie o promieniu  $a$ , przy czym

$a/A = M/m$ , gdzie  $M$  i  $m$  oznaczają odpowiednio masę pulsara i domniemanej planety. Wreszcie cały układ musi się poruszać zgodnie z trzecim prawem Keplera

$$\frac{T^2}{(a+A)^3} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)},$$

gdzie  $G$  oznacza stałą grawitacji. Stąd, po wyeliminowaniu  $a$  można, w zasadzie, wyznaczyć masę  $m$  planety, o ile znamy masę  $M$  pulsara na podstawie jego cech fizycznych. Dlatego „w zasadzie”, gdyż tak uzyskany wynik będzie bardzo niedokładny. Sprawę dodatkowo komplikuje to, że orbita planety nie musi być kołowa, układ może być oglądany nie w płaszczyźnie orbity i w rezultacie można orzec, że z określonym prawdopodobieństwem masa ciemnego satelity odpowiada masom planet.

**Aleksander Wolszczan** przy innym niż omawiany tu pulsarze wykrył w ten sposób dwie planety – a więc w istocie układ planetarny! Widocznie przebieg prędkości radialnej pulsara dał się rozłożyć na dwie okresowe funkcje czasu. Szczegółów nie znamy, bo badania jeszcze są w toku (luty 1992). Autor odkrycia nic jeszcze na ten temat nie opublikował. Gdy to zrobi, z pewnością posypią się następne prace dotyczące nie wyjaśnionych zagadek – np: jak powstał układ planetarny wokół pulsara; jak planety mogły przetrzymać wybuch supernowej, w wyniku którego pulsar powstał; może ciała te zostały planetami dopiero po wybuchu; a może wszystko trzeba tłumaczyć zupełnie inaczej?

Tomasz KWAST



## Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

**M 637.** Dla każdej z liczb od 1 do 1 000 000 000 obliczamy sumę cyfr, dla każdej liczby z tak otrzymanego miliarda liczb znów obliczamy sumę cyfr, itd., aż do momentu, gdy otrzymamy miliard liczb jednocyfrowych. Których liczb będzie więcej: jedynek czy dwójek?

Rozwiązanie na str. 13

**M 638.** Wykazać, że jeśli  $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$  jest takim ciągiem liczb naturalnych, że  $\lim_k n_k / (n_1 n_2 \dots n_{k-1}) = \infty$ , to suma szeregu  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i}$  jest niewymierna.

Rozwiązanie na str. 10

**M 639.** Niech  $a_1 < a_2 < \dots < a_m \leq n$  będzie takim ciągiem liczb naturalnych, że dla żadnego  $k$  liczba  $a_k$  nie jest dzielnikiem iloczynu  $a_1 \dots a_{k-1} a_{k+1} \dots a_m$ . Wykazać, że  $m \leq \pi(n)$ , gdzie  $\pi(n)$  oznacza liczbę liczb pierwszych nie przekraczających  $n$ .

Rozwiązanie na str. 11

Redaguje Jarosław KULPA

**F 337.** Balon o promieniu  $r = 2$  m napełniono powietrzem z butli. Na skutek rozprężania adiabatycznego powietrze w balonie miało niższą temperaturę  $t_0 = 0^\circ\text{C}$  niż temperatura otoczenia  $t = 10^\circ\text{C}$ . Taki balon może ogniskować fale dźwiękowe biegnące w powietrzu. Znaleźć ogniskową balonu.

Rozwiązanie na str. 13

**F 338.** Jaka część światła padającego prostopadle przejdzie przez szybę o współczynniku załamania  $n$ ? Współczynnik odbicia światła padającego prostopadle na granicę dwóch ośrodków wynosi  $R = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$ .

Rozwiązanie na str. 13

### NOWINKA

W wyniku wielomiesięcznych obserwacji promieniowania tła prowadzonych przez sztuczny satelitę COBE (*Cosmic Background Explorer*) została wiosną 1992 r. sporządzona pierwsza mapa fluktuacji temperatury promieniowania reliktoowego. Obszary cieplejsze (o kilka stutysięcznych kelwina) od temperatury średniej odpowiadają obszarom o niższej gęstości, a chłodniejsze obszarom o wyższej gęstości materii w epoce, gdy nastąpiło oddzielenie materii od promieniowania. Według teorii Wielkiego Wybuchu stało się to, gdy Wszechświat liczył kilka milionów lat. Tak więc, jeżeli obserwacje te się potwierdzą, będzie to oznaczało, że astronomia sięgnęła do tzw. powierzchni ostatniego rozproszenia, czyli do odległości i epoki, poza które dalej sięgnąć się nie da (za pośrednictwem promieniowania elektromagnetycznego) ze względów zasadniczych!

T.K.



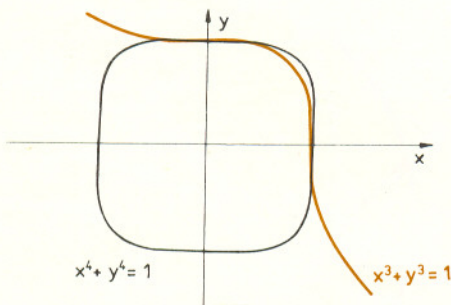
## O twierdzeniu Fermata trochę inaczej

Wielkie Twierdzenie Fermata jest jednym z najpopularniejszych tematów matematycznych. Wiadomo: mówi ono o równaniu  $a^n + b^n = c^n$ ; w XVII wieku Fermat napisał na marginesie książki uwagę, że dla  $n > 2$  równanie to nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich, i że znalazł zadziwiający dowód tego twierdzenia, ale margines książki jest zbyt mały, by ten dowód zmieścić. Notatka ta (wraz z wieloma innymi) została odnaleziona po śmierci Fermata – i do dziś nie wiadomo, czy twierdzenie jest prawdziwe, choć sprawdzono np., że dla  $n \leq 150\,000$  równanie istotnie nie ma rozwiązań.

Z reguły myślimy o Wielkim Twierdzeniu Fermata wyłącznie „w kategoriach” liczb całkowitych. Można jednak spojrzeć na nie inaczej – od strony geometrycznej. Jak? Dzieliąc równanie stronami przez  $c^n$  otrzymujemy  $\left(\frac{a}{c}\right)^n + \left(\frac{b}{c}\right)^n = 1$ . Liczby  $a, b, c$  są całkowite, więc odpowiednie ułamki są liczbami wymiernymi; można zatem twierdzenie sformułować następująco:

dla  $n > 2$  krzywa na płaszczyźnie, opisana wzorem  $x^n + y^n = 1$ , przecina zbiór  $\mathbb{Q}^2$  tylko w punktach na osiach współrzędnych (dwóch lub czterech, w zależności od  $n$ ). Przez  $\mathbb{Q}^2$  oznaczamy zbiór punktów płaszczyzny, których obie współrzędne są wymierne. Wiadomo, że  $\mathbb{Q}^2$  jest położony na płaszczyźnie „gęsto”; twierdzenie mówi zatem, że odpowiednie krzywe przebiegają na płaszczyźnie tak chytrze, iż poza osiami ten gęsty zbiór omijają.

Stosunkowo łatwo jest wyobrazić sobie, jak owe krzywe wyglądają. Dla  $n$  parzystych będą – przy zwiększającym się  $n$  – coraz bardziej przybliżać się do kwadratu o boku 2 (dlaczego?). Dla  $n$  nieparzystych będzie trochę inaczej (jak? czemu?).



Właśnie geometrycznie patrzył na ten problem Gerd Faltings. Wykazał on w 1983 roku, że jeśli równanie Fermata dla ustalonego  $n \geq 4$  ma pierwiastki całkowite, to może ich mieć jedynie skończenie wiele. Oczywiście,

## Quiz

Wydaje się, że Wielkie Twierdzenie Fermata jest tematem tak „oklepanym”, iż wiemy o nim prawie wszystko. Wszystko chyba nie, bo, być może, nie pamiętamy, kiedy Dirichlet udowodnił je dla  $n = 14$  czy też których trzech liczb pierwszych mniejszych od 100 nie obejmował dowód Kummera w 1859 roku; również nie potrafilibyśmy zapewne tych dowodów z pamięci odtworzyć. Ale informacje bardziej ogólne są nam świetnie znane... Czy istotnie tak jest? Spróbujmy zatem rozwiązać mały test – zabawę: 10 pytań związanych z tym tematem. Odpowiedzi na str. 15 Delt.

1. Jak Fermat miał na imię?
2. Kto był autorem książki, na marginesie której zapisał Fermat swoją słynną uwagę?
3. Kim Fermat był z zawodu?
4. Kto udowodnił Wielkie Twierdzenie Fermata w przypadku  $n = 3$ ?
5. W jakiej walucie Paul Wolfskehl (zmarły w roku 1907) zapisał w testamencie nagrodę temu, kto udowodni Wielkie Twierdzenie Fermata?
6. Euler, Lagrange, Gauss, Riemann – tylko jeden z tych czterech wielkich matematyków nie jest autorem błędnego dowodu Wielkiego Twierdzenia Fermata. Który?
7. W jakiej książce Kornela Makuszyńskiego opisana jest historia twierdzenia?
8. Dlaczego w języku angielskim twierdzenie nosi nazwę Ostatniego Twierdzenia Fermata (*Fermat's Last Theorem*)?
9. W którym roku J. Tunner udowodnił twierdzenie dla  $n \leq 150\,000$  (wolno się pomylić o 5 lat)?
10. Czyje imię nosi hipoteza, rozwiązana przez Gerda Faltingsa, z której wynika, że dla danego  $n$  rozwiązań jest skończenie wiele?

należy tę „skończoność” odpowiednio rozumieć: jasne, że gdy liczby  $a, b, c$  spełniają to równanie, to liczby  $ka, kb, kc$  też (dla dowolnego  $k$ ) – mówiąc o wyniku Faltingsa rozwiązania takie traktujemy jako jedno. Utożsamienie tych rozwiązań jeszcze lepiej widać dzięki modelowi geometrycznemu. Istotnie, gdy popatrzymy na nie jak na punkty płaszczyzny, stwierdzimy, że przedstawiają one ten sam punkt. Faltings udowodnił po prostu, że krzywa dana przez równanie Fermata ma (dla danego  $n$ ) z  $\mathbb{Q}^2$  wspólną co najwyżej skończoną liczbę punktów. Dokładnie, Faltings udowodnił hipotezę ogólniejszą – wykazał, że własność tę ma pewna liczna rodzina krzywych, a krzywa określona przez „ $x^n + y^n = 1$ ” jest jedną z nich.

Korzystając z rezultatu Faltingsa, D.R. Heath-Brown wykazał w 1987 roku, że twierdzenie Fermata jest, mówiąc potocznie, prawdziwe dla „prawie wszystkich”  $n$ . Precyzyjniej: gdy  $n$  dąży do nieskończoności, to ułamek  $\frac{k}{n}$ , gdzie  $k$  jest liczbą tych wykładników mniejszych lub równych  $n$ , dla których twierdzenie Fermata jest prawdziwe, dąży do 1. Wynik ten daje informacje innego typu niż twierdzenie Faltingsa: Faltings dowiódł, że rozwiązań jest „mało” dla danego  $n$ , Heath-Brown zaś, że „mało” jest takich  $n$ , dla których rozwiązania istnieją. Może ktoś kiedyś w końcu wykaże, że „mało” oznacza tu „nie ma wcale”...

Krzysztof CIESIELSKI