delta

$h=6{,}63\cdot 10^{-34}\,J\cdot s$ $\pi=3{,}1415193\ldots$

UWAGA !!!

w prenumeracie *Delta* tańsza

SPIS TREŚCI

NUMERU 6(217)

W następnym numerze:

Wielkoskalowe pola prędkości we Wszechświecie

„Delta"
matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej

Adres Redakcji:
Wydział Fizyki UW
ul. Smyczkowa 5/7
02-678 Warszawa
tel. 43-02-43 wewn. 21

Adres poczty komputerowej
(E-mail address):
DELTA@PLEARN.BITNET

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa

Nakład 9500 egz.
Wydrukowano
w Zakładach Graficznych
w Warszawie, ul. Srebrna 16

Skład systemem TEX
wykonała redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na IV kwartał 1992 r. wynosi 18 000,– zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
   - oddziały RSW właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora – odbioru zamówionych egzemplarzy dokonuje prenumerator w wyznaczonych punktach sprzedaży lub w inny, uzgodniony sposób,
   - urzędy pocztowe i listonosze – od prenumeratorów z terenów wiejskich lub innych miejscowości, w których nie ma oddziałów RSW, a w miastach tylko od osób niepełnosprawnych – poczta zapewnia dostawę zamówionych egzemplarzy pod wskazany adres pod warunkiem uiszczenia dodatkowej opłaty za każdy doręczany egzemplarz – opłata wynosi 500,– zł od egzemplarza,
   - Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – tylko od prenumeratorów zlecających dostawę za granicę.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
   - na kraj – do 20 XI na I kwartał roku następnego
     do 20 II na II kwartał
     do 20 V na III kwartał
     do 20 VIII na IV kwartał
   - na zagranicę – do 31 X na I kwartał
     oraz do 1 dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarza 5 000,– zł

Funkcja *pi*

Jarosław GÓRNICKI

W elementarnej geometrii symbolem π oznaczamy stosunek obwodu okręgu do jego średnicy. Wielkość ta nie zależy od wyboru okręgu, a jej wartość wynosi 3,1415...

Rozważmy teraz pewną funkcję *pi* uogólniającą znaczenie symbolu π. Niech Φ będzie dowolną figurą płaską, wypukłą i ograniczoną, o niepustym wnętrzu. Zapowiedzianą funkcję *pi* definiujemy wzorem

$$pi(\Phi) = \frac{\text{obwód figury } \Phi}{\text{średnica figury } \Phi},$$

gdzie średnicą figury Φ nazywamy liczbę $\sup\limits_{x,y\in\Phi} |x-y|$. Z tego określenia wynika, że:

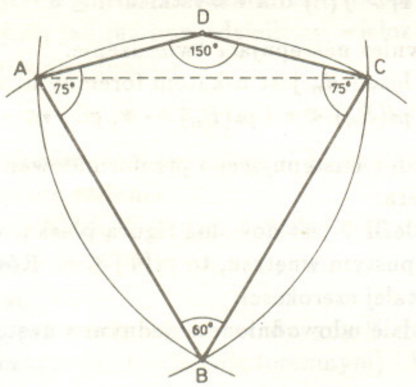
1) $pi(\text{koło}) = \pi$,
2) $pi(\text{trójkąt równoboczny}) = 3$,
3) $pi(\text{trójkąt}) = \dfrac{\text{obwód trójkąta}}{\text{najdłuższy bok}}$ (jeżeli T oznacza dowolny trójkąt, to $2 < pi(T) \le 3$),
4) $pi(\text{kwadrat}) = 2\sqrt{2} \approx 2,82$,
5) $pi(\text{prostokąt o bokach } a, b) = \dfrac{2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (jeżeli P oznacza dowolny prostokąt, to $2 < pi(P) \le 2\sqrt{2}$).

Wyrażenie

$$\frac{2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2\cdot\left\{1 - \frac{2ab}{(a+b)^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

osiąga wartość największą, gdy $\dfrac{2ab}{(a+b)^2}$ przyjmuje wartość największą, a to ma miejsce, gdy $a = b$.

Skoro ze wszystkich trójkątów *pi*-optymalnym (czyli takim, na którym funkcja $pi(\cdot)$ przyjmuje wartość największą) jest trójkąt równoboczny, to naturalne jest pytanie: czy wśród wszystkich czworokątów *pi*-optymalnym czworokątem jest kwadrat? Niestety, tak nie jest! Przekonamy się o tym wykonując następującą konstrukcję: wykreślmy trójkąt Reuleaux o średnicy 1 i jeden jego łuk podzielmy na pół.



Rys. 1

Trójkąt Reuleaux o średnicy d otrzymujemy jako część wspólną trzech kół o promieniach równych d i środkach będących wierzchołkami trójkąta równobocznego o boku długości d.

350 lat temu urodził się Izaak Newton

Andrzej K. WRÓBLEWSKI

Izaak Newton urodził się w dniu Bożego Narodzenia, 25 XII 1642 roku.

Według kalendarza juliańskiego obowiązującego jeszcze wówczas w Anglii; według kalendarza gregoriańskiego, przyjętego już wtedy w wielu krajach Europy, było to 4 I 1643 r. Wszystkie daty w tym artykule odnoszące się do Anglii są podane według kalendarza juliańskiego.

Miejscem narodzin była niewielka farma Woolsthorpe (Lincolnshire), w środkowo-wschodniej Anglii. Ojciec Newtona, noszący także imię Izaak, niepiśmienny rolnik, zmarł 3 miesiące przed narodzeniem syna. Izaak Newton był wcześniakiem i jako noworodek był maleńki (podobno mieścił się w litrowym garnku) i tak słabowity, że nie dawano mu szans na przeżycie. A jednak, mimo tych kłopotów w pierwszych latach, zmarł dopiero w 85 roku życia ciesząc się na ogół dobrym zdrowiem; do końca zachował bujne włosy i stracił tylko jeden ząb.

W 1646 r. jego matka Hannah wyszła powtórnie za mąż za pastora Barnabę Smitha i zamieszkała z nim w pobliskiej wiosce. Trzyletni Izaak pozostał w Woolsthorpe z babką, która go wychowywała przez następne 7 lat. Brak ojca i odejście matki wywarły głęboki wpływ na psychikę chłopca. Nienawidził ojczyma, który mu zabrał matkę, obmyślał zemstę, chcąc ich oboje zniszczyć. Zapewne te przeżycia dzieciństwa ukształtowały w znacznej mierze nieznośny charakter Newtona, który miał się potem dać we znaki tylu ludziom w jego otoczeniu. Reagował z furią, ilekroć wydawało mu się, że ktoś chce mu uszczknąć choć cząstkę osiągnięć.

Czytać, pisać i rachować uczył się mały Izaak w pobliskich szkółkach wiejskich. W 1654 roku został posłany do szkoły w Grantham, noszącej dumną nazwę królewskiej. W dniu 5 VI 1661 r. został przyjęty do Trinity College w Cambridge. Z Grantham wyniósł Newton znajomość łaciny oraz przypuszczalnie elementarnej geometrii. W pierwszych latach pobytu w Cambridge studiował grekę, logikę, etykę i retorykę. Trzeba wiedzieć, że w Cambridge nie było jeszcze wówczas wykładów matematyki na wyższym poziomie. Dopiero w 1663 r. utworzona tam została tzw. katedra Lucasa, a pierwszy profesor na tej katedrze, Izaak Barrow, zainaugurował wykłady 14 III 1664 r.

W 1665 r. wybuchła w Anglii wielka epidemia dżumy. Ofiarą strasznej choroby padali przede wszystkim ludzie żyjący w dużych skupiskach. Władze uniwersytetu w Cambridge postanowiły więc zawiesić zajęcia i rozpuścić studentów do domów. Newton wrócił do Woolsthorpe w sierpniu 1665 r. i w wiejskim ustroniu spędził z małymi przerwami półtora roku do kwietnia 1667 r. Jak twierdził później, w tym właśnie okresie doszedł do swych najważniejszych odkryć.

W 1665 r. uzyskuje niższy stopień uniwersytecki – bakałarza, a 7 VII 1668 r. zostaje magistrem (*master of arts*); pozostaje nadal w Trinity College współpracując z Barrowem. Ten, widząc genialnego następcę, postanawia zrezygnować z katedry Lucasa rekomendując na swe miejsce Newtona. W dniu 29 X 1669 r 26-letni Newton zostaje profesorem i odtąd przez około 20 lat wykłada matematykę, mechanikę i optykę. Zresztą wykłady jego były trudne i nudne, studenci ich nie lubili i czasem w ogóle nie zjawiali się w sali wykładowej.

W 1671 r. buduje swój drugi, bardzo dobry teleskop zwierciadlany (pierwszy w 1668 r.), o którym głośno jest w Cambridge. Wieść o tym dociera do Londynu i członkowie Royal Society (Towarzystwo Królewskie, utworzone w 1662 r.) wyrażają życzenie zobaczenia tego przyrządu. Newton posyła swój teleskop do Londynu i w uznaniu zasług zostaje 11 I 1672 r. wybrany członkiem Royal Society. W odpowiedzi na list zawiadamiający

Łącząc kolejno odcinkami wierzchołki trójkąta i punkt podziału łuku otrzymujemy czworokąt $ABCD$, zwany *deltoidem*, dla którego

$$pi(ABCD) = 2 + 2\sqrt{2-\sqrt{3}} = 3,035\ldots$$

W związku z tym mamy:

Zadanie. Dla każdego $n \geq 4$ wyznaczyć n-kąty wypukłe, dla których funkcja *pi* przyjmuje wartość największą.

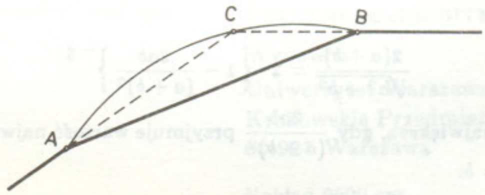
Z pewnych ogólnych twierdzeń wynika, że takie wielokąty istnieją, lecz nie można z nich nic wnioskować o kształcie tych wielokątów. Tego typu dowody, które mówią, że coś istnieje, lecz mimo to nie wiemy, jak to coś wygląda, noszą nazwę dowodów egzystencjalnych. Ponieważ pytamy się o konkretne wyznaczenie tych n-kątów, więc takie egzystencjalne podejście nam nie wystarcza.

Zanim przystąpimy do rozwiązania tego problemu, wskażemy oszacowanie wartości, jakie może przyjmować funkcja $pi(\cdot)$.

Oznaczmy przez $f(n)$ największą wartość funkcji *pi*, jaką ona osiąga na wszystkich n-kątach wypukłych ($n \geq 3$), np. $f(3) = 3$, $f(4) > 3,035$. Wówczas mamy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. Dla dowolnego $n \geq 3$ istnieje taki $(n+1)$-kąt wypukły W_{n+1}, że $pi(W_{n+1}) > f(n)$.

Dowód. Wybieramy wielokąt wypukły o n bokach i średnicy 1, na którym funkcja *pi* przyjmuje wartość największą. Niech jednym z jego boków będzie AB. Na tym boku jako na cięciwie wykreślamy łuk o promieniu 1.



Rys. 2

Następnie na łuku AB wybieramy dowolny punkt C i traktując go jako $(n+1)$-szy wierzchołek otrzymujemy $(n+1)$-kąt wypukły W_{n+1} o większym obwodzie i, jak łatwo zauważyć, nie powiększonej średnicy. Zatem $pi(W_{n+1}) > f(n)$. ■

Z twierdzenia tego otrzymujemy natychmiastowy wniosek:

Wniosek. $f(n+1) > f(n)$ dla wszystkich $n \geq 3$.

Oczywiste jest również następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2. Jeżeli R_n jest n-kątem foremnym, wypukłym ($n \geq 3$), to wtedy $pi(R_n) < \pi$ i $pi(R_n) \to \pi$, gdy $n \to +\infty$.

Będziemy korzystali z następującego przeformułowania znanego twierdzenia Barbiera:

Twierdzenie 3. Jeśli Φ jest dowolną figurą płaską, wypukłą, ograniczoną, o niepustym wnętrzu, to $pi(\Phi) \leq \pi$. Równość zachodzi tylko dla figur o stałej szerokości.

Twierdzenie to będzie udowodnione w jednym z następnych numerów *Delty*.

Szerokością figury w danym kierunku nazywamy kres dolny szerokości pasów prostopadłych do tego kierunku i zawierających tę figurę (pas to obszar zawarty między dwiema prostymi równoległymi, a jego szerokość to odległość tych prostych). Figura o stałej szerokości to taka, dla której szerokość nie zależy od wyboru kierunku.

Ostatecznie: dla dowolnej płaskiej, wypukłej i ograniczonej figury Φ o niepustym wnętrzu zachodzi

$$2 < pi(\Phi) \le \pi .$$

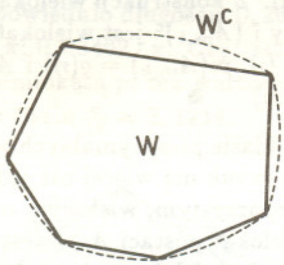
Wracamy teraz do problemu wyznaczenia *pi*-optymalnych n-kątów ($n \ge 4$) wypukłych. W tym celu zdefiniujemy klasę wielokątów $A_{m,k}$.

Wypukłe wielokąty o stałej szerokości d, złożone z łuków kół o promieniu d nazywamy wielokątami Reuleaux. Jeśli W jest wielokątem foremnym o nieparzystej liczbie boków i średnicy d, to zataczając odpowiednie łuki o środkach w wierzchołkach wielokąta otrzymamy foremny wielokąt Reuleaux (tak, jak to było dla trójkąta). Niestety, nie można tak postąpić w przypadku parzystej liczby boków.

O sposobie kreślenia wielokątów Reuleaux można przeczytać w książce H. Rademachera i O. Toeplitza, *O liczbach i figurach*, PWN, Warszawa 1956, str. 207–209.

Definicja. Jeżeli n ($n \ge 3$) ma nieparzysty dzielnik m, czyli $n = mk$, to $A_{m,k}$ jest n-kątem wypukłym, równobocznym, mającym m wierzchołków wspólnych z foremnym wielokątem Reuleaux o m łukach i pozostałych $m(k-1)$ wierzchołkach rozmieszczonych równomiernie po $k-1$ na każdym z m łuków.

W dowolnym wypukłym n-kącie W ($n \ge 3$) o średnicy 1 zastąpmy każdy bok przez łuk okręgu o promieniu 1, dla którego ten bok jest cięciwą. Figurę ograniczoną tymi łukami oznaczmy W^c.



Rys. 3

Łatwo zauważyć, że figura W^c również ma średnicę równą 1, skąd $pi(W)$ oraz $pi(W^c)$ oznaczają odpowiednio obwody figur W i W^c. Jeśli W jest wielokątem foremnym o nieparzystej liczbie boków, to W^c jest, jak już powiedzieliśmy, wielokątem Reuleaux. Wprowadźmy również funkcję

$$g(n) = 2n \cdot \sin \frac{\pi}{2n}, \qquad n = 3, 4, 5 \ldots$$

Możemy teraz sformułować twierdzenie, które daje częściowe rozwiązanie naszego zadania:

Twierdzenie 4. Niech W będzie dowolnym wypukłym n-kątem ($n \ge 3$) o średnicy 1. Wtedy:

(i) $pi(W) \le g(n)$;

(ii) $pi(W) = g(n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy W jest wielokątem równobocznym (niekoniecznie foremnym) i W^c jest wielokątem Reuleaux;

(iii) $A_{m,k}$ jest *pi*-optymalnym wielokątem dla $n = mk$, gdy m jest liczbą nieparzystą, oraz

$$f(n) = pi(A_{m,k}) = g(n) .$$

go o wyborze przesyła swą pracę pt. *New Theory about Light and Colors.* Ukazuje się ona 19 II 1672 r. w *Philosophical Transactions*; jest to pierwsza publikowana praca Newtona.

Poglądy na temat natury światła wypowiedziane przez Newtona w tej pracy wywołały krytykę wielu uczonych, m.in. Christiana Huygensa i Roberta Hooke'a. Ten ostatni, wybitny eksperymentator i człowiek obdarzony niezwykłą intuicją fizyczną, starszy od Newtona o 8 lat i już wsławiony swym dziełem *Micrographia* (1665), był wówczas najwybitniejszą postacią w Royal Society. Już to pierwsze starcie Newtona z Hooke'em, prowadzone korespondencyjnie, ale na oczach świata nauki, ustawiło tych dwu wielkich ludzi na pozycjach zaciekłych wrogów, jakimi mieli pozostać przez całe życie.

Powstanie *Zasad* (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*) związane jest bezpośrednio z pewnym, pozornie błahym, zdarzeniem z początku 1684 r. Pewnego stycznowego dnia trzej wybitni członkowie Royal Society: Edmond Halley, Robert Hooke i Christopher Wren, prowadzili dyskusję, przypuszczalnie w jednej z londyńskich kawiarni, na temat ruchów ciał niebieskich. Halley oznajmił, że udało mu się w poprzednim roku wywnioskować na podstawie III prawa Keplera oraz wzoru Huygensa na siłę odśrodkową (opublikowanego w 1673 r.), iż siła działająca na planety jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu ich odległości od Słońca. Halley stwierdził dalej, że nie udało mu się dotychczas znaleźć kształtu orbit planet, jakie wynikać winny z takiej postaci siły.

W sierpniu 1684 r. (według innych danych było to w maju) Halley odwiedził Newtona w Cambridge i zadał mu pytanie: Jakiego kształtu będą tory planet, jeżeli siła przyciągania ich przez Słońce jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości? Newton odpowiedział bez namysłu, że będą to elipsy. Zdumiony Halley zapytał Newtona, skąd to wie, na co Newton odparł: Ja już to dawno temu obliczyłem. Przeszukując swe papiery nie mógł jednak znaleźć zapisanego gdzieś dowodu, toteż obiecał go odtworzyć i przesłać Halleyowi do Londynu. Po paru tygodniach Halley otrzymał od Newtona więcej niż oczekiwał, a mianowicie dziesięciostronicową rozprawę *De motu corporum in gyrum* (*O ruchu ciał na orbitach*). Spostrzegłszy szybko, że praca ta zawiera rewolucyjne wyniki, odwiedził ponownie Newtona nalegając, by ten zgodził się swą pracę opublikować. Newton odrzekł, że już pracuje nad nową, rozszerzoną wersją, którą prześle wkrótce do Royal Society. Słowa dotrzymał i 23 II 1685 r. jego praca *Propositiones de motu* została formalnie zapisana w rejestrach Royal Society. Jednocześnie Newton zapowiedział, że pracuje nad dalszym rozszerzeniem swego traktatu.

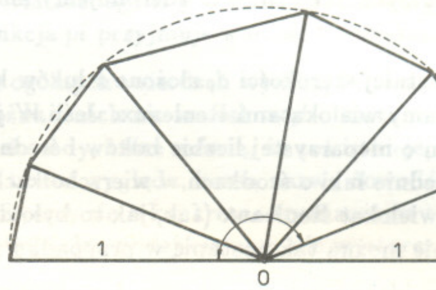
Na wiosnę 1686 r. wielkie dzieło było niemal gotowe. Pierwsza księga *Zasad* została oficjalnie przedstawiona Royal Society na posiedzeniu w dniu 28 IV 1686 r. Podjęto wówczas decyzję, że dzieło zostanie wydrukowane na koszt Towarzystwa. Ówczesny prezes, Samuel Pepys, dał 5 VII 1686 r. swe *Imprimatur*, które widnieje na karcie tytułowej *Zasad*. Miało to jednak tylko znaczenie formalne, gdyż wkrótce okazało się, że Royal Society, borykające się z kłopotami finansowymi, nie jest w stanie pokryć kosztów druku. Halley postanowił wówczas wydrukować „boski traktat" Newtona za własne pieniądze.

W początkach marca 1687 r. Newton przesłał Halleyowi ostateczną wersję księgi drugiej, a w miesiąc później – księgę trzecią. Angażując kilku drukarzy Halley chciał zakończyć druk *Zasad* na koniec trymestru w Trinity College, 21.VI, ale prace opóźniły się o dwa tygodnie. W dniu 5 VII 1687 r. Halley doniósł Newtonowi, że jego dzieło jest wydrukowane.

Zasady rozpoczynają się od ośmiu *Definicji*, w których Newton wyjaśnia używane przez siebie pojęcia masy, ilości ruchu (tj. pędu), siły przyłożonej, siły odśrodkowej oraz miar tych sił. Potem następuje *Objaśnienie* (*Scholium*), gdzie znajdujemy słynne stwierdzenia:

Uwaga. Twierdzenie to nie wskazuje rozwiązań naszego problemu w przypadku, gdy n jest potęgą liczby 2, np. $n = 4, 8, 16, \dots$

Dowód. Wykreślamy półkole o promieniu 1 i wpisujemy w nie kolejno jako cięciwy boki wielokąta W.



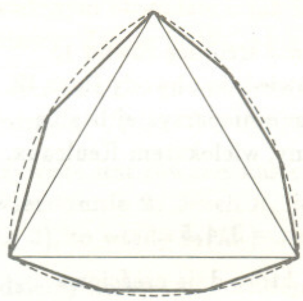
Rys. 4

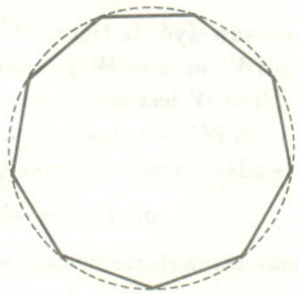
Ponieważ $pi(W^c) \le \pi$ (twierdzenie 3), więc rzeczywiście wszystkie cięciwy dadzą się wpisać w to półkole. Ustalając końce wpisanej w półkole łamanej stwierdzamy, że długość tej łamanej jest największa, gdy jej boki są równe (dlaczego?). Długość każdej takiej „równej" cięciwy jest nie większa niż $2\sin\frac{\pi}{2n}$, więc $pi(W) \le g(n)$. Dowodzi to warunku (i).

Udowodnimy teraz (ii). Z powyższej konstrukcji wynika, że $pi(W) = g(n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy łamana wpisana w półkole jest równoboczna i wypełnia je w całości. To zaś równoważne jest temu, że W jest równoboczny i $pi(W^c) = \pi$. Drugi z tych warunków jest równoważny wobec twierdzenia 3 temu, że W^c jest wielokątem Reuleaux. To dowodzi (ii).

Udowodnimy teraz (iii). Z konstrukcji wielokąta $A_{m,k}$ wynika, że jest on równoboczny i $(A_{m,k})^c$ jest wielokątem Reuleaux. Zatem na podstawie (ii) oraz (i), $pi(A_{m,k}) = g(n)$ i $A_{m,k}$ jest pi-optymalny, co dowodzi warunku (iii). ■

Przypatrzmy się teraz klasie pi-optymalnych wielokątów postaci $A_{m,k}$. Jeżeli $n = mk$ ma więcej niż jedno takie przedstawienie z m nieparzystym, większym od jedności, to dla ustalonego n każdy wielokąt postaci $A_{m,k}$ jest pi-optymalny. Na przykład dla $n = 9$ oba wielokąty $A_{3,3}$, $A_{9,1}$ są pi-optymalne.





Rys. 5. pi-optymalny wielokąt $A_{3,3}$. Rys. 6. pi-optymalny wielokąt $A_{9,1}$.

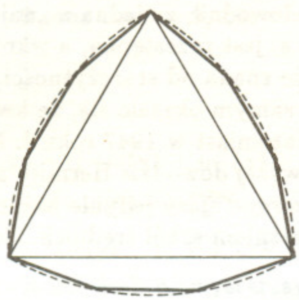
Gdy $n \ge 3$ jest liczbą nieparzystą, to wielokąt foremny R_n jest pi-optymalny i $pi(R_n) = g(n)$. Gdy zaś $n > 3$ jest liczbą parzystą, to $pi(R_n) = n\sin\frac{\pi}{n} < g(n)$.

Do rozważenia pozostają jeszcze dwie sprawy:

1) Czy oprócz wielokątów typu $A_{m,k}$ istnieją dla $n = mk$ jakieś nierównoboczne wielokąty W, dla których W^c jest wielokątem Reuleaux?
2) Jak wygląda sytuacja, gdy $n > 3$ jest potęgą liczby 2?

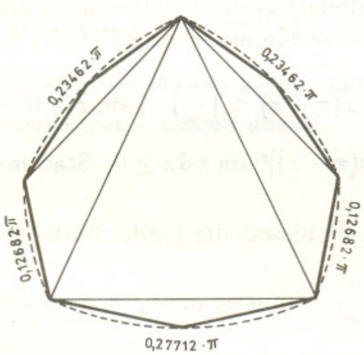
Systematyczne badania tych kwestii dla małych wartości $n \geq 3$ wykazały, co następuje:

- $A_{3,1}$ jest jedynym *pi*-optymalnym trójkątem;
- dla $n = 4 = 2^2$ deltoid (rys. 1) jest jedynym *pi*-optymalnym czworokątem wpisanym w regularny wielokąt Reuleaux i $f(4) < g(4) \approx 3,061$;
- dla $n = 5, 6, 7, 8, 9$ nie ma nieforemnych wielokątów Reuleaux, w które można by wpisać równoboczny n-kąt. Zatem wszystkie *pi*-optymalne wielokąty o $n = 5, 6, 7, 9$ bokach są typu $A_{m,k}$;
- dla $n = 8 = 2^3$ najlepszym wielokątem wpisanym w foremny wielokąt Reuleaux o 3, 5 lub 7 łukach jest ośmiokąt wpisany w trójkąt Reuleaux.



Rys. 7

Dla tego ośmiokąta *pi* ma wartość około 3,119, lecz nie jest to wartość *pi*-optymalna. Analiza numeryczna pokazuje, że lepszy ośmiokąt można wpisać w nieforemny pięciokąt Reuleaux (rys. 8), którego łuki mają odpowiednio długości: $0,23462 \cdot \pi$; $0,12682 \cdot \pi$; $0,27712 \cdot \pi$; $0,12682 \cdot \pi$; $0,23462 \cdot \pi$. Czy jest to już *pi*-optymalny ośmiokąt? Dla tego ośmiokąta *pi* ma wartość około 3,1211 i jest ona bliska wartości $g(8) = 16 \sin \frac{\pi}{16} \approx 3,1214$.



Rys. 8

Dla wielokątów o większej liczbie boków ($n \geq 10$) ogólne i wyczerpujące odpowiedzi również nie są znane.

Na zakończenie zwróćmy uwagę, że funkcja *pi* nie jest jedynym możliwym uogólnieniem symbolu π. Można na przykład wprowadzić funkcję $\widehat{pi}$ określoną też na zbiorze wszystkich figur płaskich, wypukłych, ograniczonych, o niepustym wnętrzu, następująco

$$\widehat{pi}(\Phi) = \frac{4 \cdot |\Phi|}{(\text{średnica figury } \Phi)^2},$$

gdzie $|\Phi|$ oznacza pole figury Φ. Dla tej funkcji można rozważać analogiczne problemy.

„I. Czas absolutny, prawdziwy i matematyczny, sam z siebie i przez swą naturę, upływa równomiernie bez związku z czymkolwiek zewnętrznym i inaczej nazywa się trwaniem...
II. Przestrzeń absolutna, przez swą naturę, bez związku z czymkolwiek zewnętrznym, pozostaje zawsze taka sama i niezmieniona..."

W dalszej części *Objaśnienia* Newton definiuje pojęcia miejsca oraz ruchu absolutnego i względnego. W ostatniej części wstępu podaje natomiast *Aksjomaty, czyli prawa ruchu.*
„I Prawo: Każde ciało pozostaje w swym stanie spoczynku lub ruchu jednostajnego po linii prostej, dopóki siły przyłożone nie zmuszą go do zmiany tego stanu.
II Prawo: Zmiana ruchu jest proporcjonalna do przyłożonej siły poruszającej i następuje wzdłuż prostej, wzdłuż której siła ta jest przyłożona.
III Prawo: Każdemu działaniu towarzyszy zawsze przeciwne i równe przeciwdziałanie, to jest wzajemne działania dwóch ciał na siebie są zawsze równe i skierowane przeciwnie."

Na początku trzeciej księgi znajdujemy słynne *Prawidła badania natury*, będące wykładem zasad metodologicznych przyrodoznawstwa.

„Prawidło 1. Nie należy dla zjawisk natury przypuszczać więcej przyczyn, niż te, które są prawdziwe i wystarczają do ich objaśnienia.

Prawidło 2. Trzeba zatem, jak tylko to jest możliwe, przypisywać zjawiskom tego samego rodzaju te same przyczyny...

Prawidło 3. Te właściwości ciał, które nie mogą być ani wzmocnione, ani osłabione i przypadają w udziale wszystkim ciałom dostępnym naszym doświadczeniom, należy uznać za powszechne właściwości wszystkich ciał w ogóle...

Prawidło 4. W filozofii doświadczalnej twierdzenia wyprowadzone ze zjawisk metodą indukcji należy uważać za ścisłe, lub w przybliżeniu prawdziwe, dopóki nie zajdą zjawiska inne, przez które twierdzenia te zostaną bardziej uściślone, lub okażą się podległe wyjątkom..."

Nie można zrozumieć znaczenia *Zasad* Newtona oraz reakcji, jaką to dzieło wywołało wśród ówczesnych uczonych, jeśli się nie prześledzi historii poglądów na temat ruchu, ciążenia i struktury świata.

System Arystotelesa, który utrzymywał się w przyrodoznawstwie przez niemal dwa tysiące lat, miał u swych podstaw dychotomiczny podział świata na dwie części, rządzone odmiennymi prawami. Oto streszczenie tego systemu.

Wszystkie substancje na Ziemi i w jej najbliższym otoczeniu, w tzw. *świecie podksiężycowym*, składają się z czterech elementów: ognia, powietrza, wody i ziemi, połączonych z sobą w różnych proporcjach. Ruchy ciał ziemskich dzielą się na *naturalne*, wynikające z samej natury substancji tych ciał, oraz *wymuszone* przez działanie zewnętrzne jakiegoś czynnika poruszającego. Pewne ciała przez swą naturę spadają w dół, dążąc do środka świata i te nazywają się ciałami *ciężkimi*. Inne ciała, nazywane *lekkimi*, przez swą naturę unoszą się do góry.

W przeciwieństwie do naturalnych ruchów spadania w dół i unoszenia się w górę ciał ziemskich, wśród ciał niebieskich występuje wieczny *ruch kołowy*. Wobec tego ciała te nie mogą składać się z czterech elementów ziemskich, lecz z czegoś innego; ten piąty element, eter (łac. *quinta essentia*) jest niezmienny, a wieczny ruch kołowy wynika też z jego natury.

Świat ma zatem strukturę geocentryczną, gdyż ciężka Ziemia, przez swą naturę znajduje się w jego środku (nawet, gdyby kiedyś tam nie była, to znalazłaby się tam już dawno dzięki swemu ruchowi naturalnemu). Wokół Ziemi mamy koncentryczne sfery trzech pozostałych elementów w porządku ich lekkości: najpierw woda, potem powietrze, wreszcie najwyżej – sfera ognia. Wyżej rozciąga się świat ciał niebieskich, obracające się wokół nieruchomej Ziemi koncentryczne sfery unoszące kolejno Księżyc, Merkurego, Wenus, Słońce, Marsa, Jowisza, Saturna; ostatnią jest sfera gwiazd stałych (*firmamentum*) będąca granicą kosmosu.

Prosty dowód niewymierności liczby π

Michał KRYCH

W 1761 roku niemiecki matematyk, Johann H. Lambert podał błędny dowód niewymierności π, natomiast poprawny podał w roku 1766. Jego dowód wykorzystywał tzw. ułamki łańcuchowe. Podobny dowód znalazł nieco później Francuz Andrien M. Legendre. Około stu lat potem Joseph Liouville sformułował i udowodnił twierdzenie, które pozwoliło wskazać konkretne liczby przestępne, tj. takie, które nie są pierwiastkami żadnego niezerowego wielomianu o współczynnikach całkowitych. Po upływie niewielu lat Charles Hermite udowodnił, że jedna z „najważniejszych" liczb w matematyce, liczba e, jest przestępna, a wkrótce Ferdinand Lindemann wykazał, że znana od starożytności liczba π również jest przestępna. Tym samym okazało się, że kwadratura koła nie jest wykonalna. Natomiast w 1947 roku I. Niven, wzorując się na wspomnianym wyżej dowodzie Hermite'a, podał dowód niewymierności π wykorzystujący jedynie najprostsze własności całek, znane obecnie uczniom szkół średnich. Jego rozumowanie przytoczymy poniżej.

Załóżmy, że $\pi = \frac{p}{q}$, gdzie p oraz q oznaczają liczby naturalne. Niech

$$c_n = \frac{q^n}{n!}\int_0^\pi [x(\pi - x)]^n \sin x \, dx .$$

Wykażemy, że
1. $\lim c_n = 0$,
2. $c_n > 0$ dla każdej liczby naturalnej n,
3. c_n jest liczbą całkowitą dla każdej liczby naturalnej n.

Oznaczać to będzie, że przyjęte założenie, iż $\pi = \frac{p}{q}$ prowadzi do sprzeczności, bo ciąg dodatnich liczb całkowitych nie może być zbieżny do liczby 0. Udowodnimy własności 1, 2 i 3 ciągu (c_n).

1. Jeśli $0 \le x \le \pi$, to $x(\pi - x) \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ i $\sin x \ge 0$, zatem $\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} \ge \int_0^\pi [x(\pi-x)]^n \sin x \, dx \ge 0$. Stąd mamy $0 \le c_n \le \frac{\pi}{n!}\left(\frac{q\pi^2}{4}\right)^n$. Ponieważ dla każdej liczby rzeczywistej a, np. $a = \frac{q\pi^2}{4}$, jest $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$, więc $\lim c_n = 0$, co kończy dowód własności 1.

2. Całkowana funkcja jest dodatnia wewnątrz przedziału $[0, \pi]$, więc całka z niej na tym przedziale jest dodatnia, zatem $c_n > 0$.

3. Ten fragment rozumowania jest najdłuższy. Niech w oznacza wielomian stopnia k. Pochodne funkcji w są więc równe 0 począwszy od $(k+1)$-szej, czyli $w^{(j)}(x) = 0$ dla $j \ge k+1$ i dowolnej liczby x. Zaczniemy od obliczenia całki nieoznaczonej $\int w(x) \sin x \, dx$. Całkując dwukrotnie przez części otrzymujemy:

$$\int w(x) \sin x \, dx = -w(x) \cos x + \int w'(x) \cos x \, dx =$$
$$= -w(x) \cos x + w'(x) \sin x - \int w''(x) \sin x \, dx .$$

Sprowadziliśmy zatem problem do obliczenia całki $\int w''(x)\sin x\,dx$, a więc do takiego samego zadania, jak na początku, z tym jednak że udało się nam zmniejszyć o 2 stopień wielomianu, przez który wymnażamy sinus. Powtarzając to rozumowanie wielokrotnie i biorąc pod uwagę to, że pochodne wielomianu w począwszy od pochodnej $(k+1)$-szego rzędu zerują się, otrzymujemy wzór:

$$\int w(x)\sin x\,dx = \cos x[-w(x) + w''(x) - w^{(4)}(x) + \ldots] + \\ + \sin x[w'(x) - w^{(3)}(x) + W^{(5)}(x) - \ldots]$$

– przy czym sumy w nawiasach kwadratowych są skończone, bo od pewnego momentu ich wszystkie składniki są zerami.

Niech teraz $w(x) = [x(\pi - x)]^n$. Jest, oczywiście, $w(x) = w(\pi - x)$. Wobec tego $w^{(j)}(x) = (-1)^j w^{(j)}(\pi - x)$ dla $j = 0, 1, 2\ldots$ Jest również $\sin 0 = \sin\pi = 0$ oraz $\cos 0 = 1$, $\cos\pi = -1$, skąd

$$\int_0^\pi w(x)\sin x\,dx =$$

$$= -1(-w(\pi) + w''(\pi) - w^{(4)}(\pi) + \ldots) - \\ - 1(-w(0) + w''(0) - w^{(4)}(0) + \ldots) = \\ = 2(w(0) - w''(0) + w^{(4)}(0) - \ldots).$$

Do stwierdzenia całkowitości liczb c_n wystarczy więc, by liczby $\frac{q^n}{n!}w(0)$, $\frac{q^n}{n!}w''(0)$, $\frac{q^n}{n!}w^{(4)}(0)\ldots$, były całkowite. Z dwumianu Newtona mamy

$$w^{(j)}(x) = \Big[\pi^n x^n - \binom{n}{1}\pi^{n-1}x^{n+1} + \\ + \binom{n}{2}\pi^{n-2}x^{n+2} - \binom{n}{3}\pi^{n-3}x^{n+3} + \ldots + (-1)^n x^{2n}\Big]^{(j)}.$$

Jeśli $j < n$, to każdy składnik sumy $w^{(j)}(x)$ zawiera zmienną x z dodatnim wykładnikiem, więc $w^{(j)}(0) = 0$. Mamy $w^{(n)}(0) = n!\pi^n$, $w^{(n+1)}(0) = -\binom{n}{1}\pi^{n-1}(n+1)!$, $w^{(n+2)}(0) = \binom{n}{2}\pi^{n-2}(n+2)!\ldots$, $w^{(2n)}(0) = (-1)^n(2n)!$ Dla $j > 2n$ $w^{(j)}(x) = 0$. Jeśli więc $\pi = \frac{p}{q}$, to liczby $\frac{q^n}{n!}w^{(j)}(0)$ są całkowite dla każdej nieujemnej liczby całkowitej j. To stwierdzenie kończy dowód.

Konkurs

Jak wynika z powyższego artykułu, prosty dowód niewymierności π wcale nie jest taki bardzo prosty i został wymyślony stosunkowo niedawno. W artykule jest też przypomniana pokrótce historia innych dowodów niewymierności π. W związku z tym ogłaszamy otwarty konkurs. Czekamy na elementarne (własnej produkcji) dowody niewymierności π. Jeśli nie będą one zbyt długie, to z chęcią je opublikujemy. A ponadto będzie to z pewnością dobra praca na Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki.

Redakcja

Usuwając Ziemię z centrum wszechświata i czyniąc ją jedną z planet Kopernik burzył fundament całego systemu. Ale Kopernik zbyt głęboko tkwił w wielowiekowej tradycji, by mógł zrobić następne rewolucyjne kroki. Nie potrafił zrezygnować z idei, że jedynie orbity kołowe, jako najdoskonalsze, przystoją ciałom niebieskim; wskutek tego zmuszony był w swym heliostatycznym systemie świata zachować epicykle i deferenty.

Następny rewolucyjny krok uczynił Kepler. On pierwszy zerwał z tradycją „astronomii kinematycznej" stawiającej sobie za zadanie tylko opis ruchu ciał niebieskich i on pierwszy pytał o przyczyny: „A były głównie trzy problemy, których przyczyn, dlaczego jest tak, a nie inaczej, szukałem, a mianowicie liczba, wielkość i ruch sfer". Ale ruch kołowy jest dla Keplera nadal ruchem naturalnym w tym sensie, że nie wymaga siły przyciągającej, która by utrzymywała ciało w stałej odległości od środka.

Wielki Galileusz, który tak przyczynił się do rozwoju nauki o ruchu, nie zastanawiał się nad dynamiką układu planet i siłami działającymi w układzie Kopernika, którego był zwolennikiem i propagatorem. Nigdy nie zaakceptował odkrycia orbit eliptycznych przez Keplera, a także wyrażał zdziwienie, iż ten przypisywał przypływy morza wpływowi przyciągania Księżyca. Wymyślił natomiast własne, kompletne fałszywe wyjaśnienie przypływów, jako zjawiska dowodzącego ruchu obrotowego Ziemi.

U Kartezjusza znajdujemy pierwszą próbę, choć mało jeszcze spójną, utożsamienia fizyki ziemskiej i niebieskiej. W racjonalnej kosmologii Kartezjusza pojawia się po raz pierwszy „siła odśrodkowa", *conatus recedendi a centro* – skłonność ciał do oddalania się od środka – wobec czego potrzebny jest mechanizm temu przeciwdziałający i utrzymujący ciało na orbicie kołowej. Kartezjusz znalazł potrzebne wytłumaczenie w istnieniu wirów subtelnej materii wypełniającej cały wszechświat. To właśnie ciśnienie wywierane przez wir, którego środkiem jest Słońce, miało utrzymywać planety na ich orbitach. Ruch satelitów i spadek swobodny ciał był z kolei wywoływany przez mniejsze wiry, których środkami były planety.

Huygens był chyba jedynym poza Newtonem matematykiem tego okresu zdolnym do wykazania, że siła centralna odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości od środka wywołuje ruch po przecięciach stożkowych. Po ukazaniu się *Zasad* nie mógł, oczywiście, zaprzeczyć ścisłości dowodów matematycznych Newtona, ale nadal nie pogodził się z ideą ciążenia powszechnego.

Historycy nauki są obecnie zgodni co do tego, że to Hooke pierwszy spojrzał inaczej na zagadnienie ruchu planet. Najwcześniejsza zanotowana o tym wiadomość pochodzi z 1666 r., gdy 23 maja Hooke przedstawiał na posiedzeniu Royal Society swą pracę o ruchu ciał po linii krzywej. Mówił wtedy, że „ruch po okręgu jest wynikiem złożenia tendencji do ruchu prostoliniowego po stycznej oraz skłonności dążenia do środka..."

Gdy patrzymy dziś z perspektywy trzech stuleci na Newtona i Hooke'a, zdaje się nie ulegać wątpliwości, że Hooke został potraktowany niesprawiedliwie. Na pewno nie był on w stanie – nie będąc matematykiem – rozwiązać ilościowo zagadnienia ruchu planet. Ale Newton zawdzięczał Hooke'owi wiele. Zresztą sam w przypływie lepszego humoru przyznał się Halleyowi, że listy Hooke'a (1679 – 1680) zwróciły jego uwagę na zagadnienie ruchu planet. Trudno powiedzieć, jak potoczyłyby się wydarzenia, gdyby Hooke nie wskazał Newtonowi nowego podejścia do analizy ruchu krzywoliniowego. Wszak Newton większą część czasu poświęcał na prace alchemiczne oraz studia historyczne i teologiczne, z których zresztą niewiele wynikło. Czy bez impulsu otrzymanego od Hooke'a zająłby się ponownie mechaniką nieba ? Mógłby więc bez uszczerbku dla swej wielkości dać satysfakcję Hooke'owi choćby drobną wzmianką w tekście *Zasad*. Tego jednak nie zrobił.

Jak obliczyć π?

Udowodnimy, że

$$2^n \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ dwójek}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi\,.$$

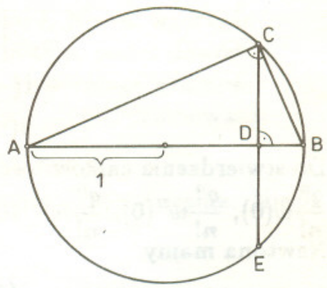
Dowód tego faktu będzie bardzo elementarny.

Niech W_m oznacza m-kąt foremny wpisany w koło o promieniu 1. Wówczas, oczywiście,

$$\text{obwód } W_m \xrightarrow[m\to\infty]{} \text{obwód koła} = 2\pi\,.$$

Mając wielokąt W_m konstruujemy wielokąt W_{2m} w sposób następujący: Wierzchołki wielokąta W_m dzielą okrąg na m łuków. Łącząc środki tych łuków z wierzchołkami wielokąta W_m otrzymamy wielokąt W_{2m}.

Niech a_m oznacza długość boku wielokąta W_m. Łatwo zauważyć, że $a_4 = \sqrt{2}$. Wobec tego $a_m < \sqrt{2}$ dla $m > 4$.



Lemat. $a_{2m} = \sqrt{2-\sqrt{4-a_m^2}}$.

Dowód. Niech $|CE| = a_m$.
Pole trójkąta ABC wynosi

$$\frac{1}{2}|AC||BC| = \frac{1}{2}|AB||CD|\,.$$

Podstawiając

$$|AC| = \sqrt{|AB|^2-|BC|^2} = \sqrt{4-a_{2m}^2}\,,$$
$$|BC| = a_{2m}\,,$$
$$|AB| = 2\,,$$
$$|CD| = \frac{1}{2}a_m\,,$$

otrzymamy
$$\frac{1}{2}\sqrt{4-a_{2m}^2}\,a_{2m} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot \frac{1}{2}a_m\,,$$

więc
$$a_m^2 = a_{2m}^2(4-a_{2m}^2)\,.$$

Oznaczając $x = a_{2m}^2$ otrzymamy równanie kwadratowe
$$x^2-4x+a_m^2 = 0\,,$$

skąd
$$x_{1,2} = \frac{4\pm\sqrt{16-4a_m^2}}{2}\,.$$

Ponieważ $2m > 4$, więc $a_{2m}^2 < 2$ i rozwiązanie z „plusem" odrzucamy. Wobec tego

$$a_{2m}^2 = \frac{4-\sqrt{16-4a_m^2}}{2}\,,$$
$$a_{2m} = \sqrt{2-\sqrt{4-a_m^2}}\,.$$

Wykorzystamy teraz ten lemat do rekurencyjnego obliczenia a_{2^m}. Otóż, jak wiemy,

$$a_4 = \sqrt{2}\,,$$

skąd

$$a_8 = \sqrt{2-\sqrt{4-\sqrt{2}^2}} = \sqrt{2-\sqrt{2}}\,,$$
$$a_{16} = \sqrt{2-\sqrt{4-\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2}} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\,,$$

itd.

Kontynuując tę procedurę obliczania otrzymamy w końcu

$$a_{2^n+1} = \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ dwójek}}},$$

skąd

$$\text{obwód } W_{2^n+1} = 2^{n+1}\sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ dwójek}}} \to 2\pi.$$

I ostatecznie dzieląc przez 2 mamy

$$2^n\sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ dwójek}}} \to \pi.$$

Zauważmy ponadto, że jeżeli $|BC| = a_{2^n+1}$, to

$$|AC| = \sqrt{4 - a_{2^n+1}^2} = \sqrt{2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ dwójek}}}$$

Ponieważ a_{2^n+1} jest bardzo małe przy bardzo dużym n, więc $|AC|$ jest bardzo bliskie 2, czyli

$$\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}}_{n \text{ dwójek}} \to 2,$$

co często symbolicznie zapisuje się w postaci

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}} = 2.$$

Opracował Piotr HAJŁASZ

Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

M 634. Wielomian $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + 1$ o nieujemnych współczynnikach a_j ma n pierwiastków rzeczywistych. Wykazać, że wtedy $P(k) \geq (k+1)^n$ dla dowolnej liczby naturalnej k.
Rozwiązanie na str. 11

M 635. Gracz A rzuca symetryczną monetę $n+1$ razy, gracz B zaś n razy. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że A uzyska więcej orłów niż B?
Rozwiązanie na str. 11

M 636. Udowodnić, że jeśli liczby naturalne a, b, c, n $(n \geq 2)$ spełniają równanie $a^n + b^n = c^n$, to $\min(a, b) > n$.
Rozwiązanie na str. 11

Redaguje Jarosław KULPA

F 335. Ciężarek zawieszono na sprężynie o znanym współczynniku sprężystości. Na podstawie analizy ruchu harmonicznego, zakładając nieważkość sprężyny, wyznaczono masę ciężarka. Po zważeniu ciężarka okazało się, że jego masa jest mniejsza o Δm. Oceń, jaka była masa sprężyny?
Rozwiązanie na str. 10

F 336. Jaka temperatura ustaliłaby się na powierzchni Ziemi, gdyby nagle zgasło Słońce? Gradient temperatury w głąb Ziemi wynosi 25°C na 1 km, a współczynnik średniego przewodnictwa cieplnego zewnętrznych warstw Ziemi wynosi $\lambda \approx 10$ W/(m·K).
Rozwiązanie na str. 10

Następne pokolenia fizyków rozwijały i udoskonalały mechanikę Newtona. Jak powiedzieliśmy, *Zasady* były dziełem pisanym w języku geometrii, nie ma więc w nich np. tego, co dziś nazywamy równaniami Newtona. Drugie prawo dynamiki Newtona w postaci różniczkowej podał po raz pierwszy Jacob Herman w 1716 r. Leonhard Euler zrobił poważny krok w kierunku przedstawienia fizyki Newtona w języku matematycznym Kartezjusza i Leibniza. Gdy Joseph Louis de Lagrange opracował swą mechanikę analityczną, mógł już z dumą oświadczyć w przedmowie: „W tej książce nie ma w ogóle rysunków. Metody, jakie tu przedstawiam, nie wymagają ani konstrukcji, ani rozważań geometrycznych ...”

Newton dokonał ogromnego dzieła. Oczywiście, wykorzystywał to, co przed nim znaleźli Galileusz, Kartezjusz, Kepler, Hooke i Huygens, choć nie zawsze to przyznawał. Nawet Newton, gdyby urodził się kilkadziesiąt lat wcześniej, nie zdołałby chyba sam zbudować swego systemu. Ale Newton nie zapożyczał po prostu od swoich poprzedników, lecz ich odkrycia i pomysły twórczo przetworzył i połączył w jedną spójną całość. Stał na ramionach gigantów, jednak przewyższył ich ogromem swego intelektu. Lagrange wyraził się o Newtonie, że był najszczęśliwszym z ludzi, gdyż istnieje tylko jeden świat i tylko jeden człowiek mógł ustalić prawa nim rządzące.

Gdy Newton zmarł 20 III 1727 roku, wyprawiono mu wspaniały pogrzeb z udziałem Lorda Kanclerza, wielu książąt i hrabiów. Pochowano go w katedrze Westminster, a długie epitafium na wspaniałym grobowcu kończy się słowami: *Sibi gratulentur mortales, tale tantumque exstitisse humani generis decus* – Niech się radują śmiertelni, że istniała taka ozdoba rodzaju ludzkiego.

Są to fragmenty większego artykułu zamieszczonego w *Postępach Fizyki*, 1987, tom 38, zeszyt 4, str. 315-343.

Jak obejrzeć wnętrze gwiazdy?

Tomasz KWAST

Obserwacje spektroskopowe są potężnym narzędziem badania składu chemicznego ciał niebieskich – niestety, w przypadku gwiazd bada się bezpośrednio tylko zewnętrzne warstwy gwiazd, skąd pochodzi promieniowanie odbierane przez obserwatora. Wnętrze gwiazdy pozostaje niedostępne obserwacjom w jakimkolwiek zakresie promieniowania elektromagnetycznego. Dlatego tak wielką wagę przywiązuje się do obserwacji strumienia neutrin, pochodzących, jak wiadomo, nawet z samego centrum gwiazdy (prawdę powiedziawszy, na razie obserwuje się systematycznie neutrina jedynie słoneczne). Wszechświat przejawia jednak tak wielką rozmaitość zjawisk, że w niektórych przypadkach umożliwia obejrzenie składu chemicznego centralnych części gwiazdy. Jednym z obiektów oferujących tę szansę jest druga co do jasności gwiazda Lutni, β *Lyrae.*

Jest ona doskonale widoczna gołym okiem (3,4 mag) i jest gwiazdą zmienną. Jej zmienność odkrył w 1784 r. John Goodricke, odkrywca zmienności Algola (jest to gwiazda podwójna zaćmieniowa). Przez następne lata coraz bardziej stawało się widoczne, że o ile Algol jest przedstawicielem licznej grupy gwiazd (zob. Joanna Udalska, *Paradoks Algola*, *Delta* 2/1985), to β *Lyrae* jest obiektem wyjątkowym. Analiza krzywej jasności sugeruje, że jest to gwiazda także zaćmieniowa, której składnik główny (jaśniejszy i dający głębsze minima jasności) jest gorącym olbrzymem typu B8. Jego widmo ulega okresowym przesunięciom, co standardowo tłumaczy się efektem Dopplera, a co za tym idzie – ruchem orbitalnym gwiazdy. Niezwykłe jest przy tym, że składnik główny jest zarazem obiektem mniej masywnym w układzie. Co więcej, wydłużanie się okresu zmienności (wynoszącego około 12,9 dni) dowodzi, że ten właśnie mniej masywny składnik traci masę. Według najnowszych oszacowań składnik główny i wtórny mają odpowiednio 2 i 12 mas Słońca. Gaz przepływający ze składnika głównego do wtórnego, jako obdarzony znacznym momentem pędu, nie spada na gwiazdę bezpośrednio, lecz tworzy wokół niej dysk, z którego dopiero z opóźnieniem jest przez nią akreowany. Obecność grubego dysku tłumaczyłaby tu fakt, że składnik wtórny (ten masywniejszy) nie jest widoczny.

Tu wypada podkreślić, dlaczego właściwie taki model gwiazdy podwójnej jest wyjątkowy. Otóż aby gwiazda mogła tracić masę na rzecz swojej towarzyszki, musi stać się tak wielka, że niemal wypełni swoją materią tzw. krytyczną powierzchnię Roche'a (jest to taka powierzchnia ekwipotencjalna, która odpowiadałaby najmniejszej energii i jednocześnie obejmowała obie gwiazdy, przy czym na tę energię potencjalną ma składać się energia grawitacyjna i energia ruchu obrotowego w tempie takim, w jakim obiegają się te dwie gwiazdy). Kłopot w tym, że to masywniejsza gwiazda ewoluuje szybciej, a więc ona jako pierwsza osiąga stadium olbrzyma i wypełnia swoją część krytycznej powierzchni Roche'a. Jakim więc prawem w układzie β *Lyrae* masę traci składnik lżejszy?

Wydłużanie się okresu jest równoznaczne ze wzrastaniem odległości składników układu podwójnego. Oznacza to, że w przeszłości, gdy gwiazdy stanowiły parę znacznie ciaśniejszą, składnik masywniejszy nie miał możliwości stać się w pełni rozwiniętym olbrzymem, gdyż krytyczna powierzchnia Roche'a była dla niego za ciasna. Materia jego zewnętrznych warstw w znacznej ilości musiała już dawno przepłynąć do gwiazdy towarzyszącej. To, co teraz widzimy jako olbrzyma typu B8, jest w rezultacie pozostałością po kiedyś masywniejszej gwieździe, praktycznie – jądrem dawnej gwiazdy. β *Lyrae* powinna się wobec tego różnić od innych gwiazd typu B8, np. pod względem składu chemicznego.

Każda gwiazda w chwili powstania jest jednorodna chemicznie i jej skład odpowiada składowi chemicznemu materii międzygwiazdowej: na 10 atomów wodoru powinien przypadać jeden atom helu i śladowe ilości innych

Rozmiary krytycznej powierzchni Roche'a zależą od odległości składników układu podwójnego: są tym większe im większa jest odległość składników. Często są one mniejsze niż rozmiary, jakie osiągnęłaby masywna gwiazda w stadium czerwonego olbrzyma, gdyby była samotna. Dlatego dążąc do tego stadium w trakcie ewolucji musi ona wtedy tracić część swoich zewnętrznych warstw na rzecz towarzysza.

Rozwiązanie zadania F 885.
Niech μ oraz m oznaczają masę sprężyny i ciężarka. Całkowita energia drgań ciężarka wynosi $E_1 = \frac{m\omega^2 x_0^2}{2}$, gdzie ω oznacza częstość kołową drgań, x_0 zaś maksymalne wychylenie ciężarka. Zakładając jednorodny rozkład masy sprężyny możemy obliczyć jej całkowitą energię drgań

$$E_2 = \frac{\omega^2}{2}\int_0^{x_0} \frac{\mu}{x_0} x^2 \, dx = \frac{\mu x_0^2 \omega^2}{6}.$$

Porównując $E_1 + E_2$ z energią drgań w ruchu harmonicznym $E = \frac{kx_0^2}{2}$ otrzymujemy

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{(1/3)\mu + m}}.$$

Stąd pozorny przyrost masy ciężarka $\Delta m = \frac{1}{3}\mu$. Ostatecznie otrzymujemy $\mu = 3\Delta m$.

Rozwiązanie zadania F 886.
Oznaczmy gradient temperatury przez x. Obliczmy energię, jaka wydobywa się z głębi Ziemi na metr kwadratowy powierzchni: $E = \lambda x = 0,25\ \mathrm{W/m^2}$. Choć po zgaśnięciu Słońca zmieni się rozkład temperatur oraz przewodnictwo cieplne, strumień energii wydobywający się na powierzchnię musi być ten sam, albowiem ma on swoje źródło w procesach promieniotwórczych zachodzących w głębi Ziemi. Potraktujmy Ziemię jako ciało doskonale czarne o temperaturze T. Z prawa Stefana–Boltzmanna oraz z warunków równowagi mamy $\sigma T^4 = \lambda x \Rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{\lambda x}{\sigma}} = 45$ K.

Cykl CNO – ogół reakcji termojądrowych prowadzących do przemiany wodoru w hel z udziałem atomów węgla C, azotu N i tlenu O jako katalizatorów poszczególnych reakcji. Początkowa zawartość CNO w gwieździe, określona przez skład materii międzygwiazdowej, na ogół nie jest optymalna dla cyklu CNO. Wtedy katalizator obecny w nadmiarze będzie szybciej zużywany niż odtwarzany, i odwrotnie będzie się działo z katalizatorem deficytowym. Sytuacja ustabilizuje się, gdy proporcje katalizatorów osiągną wartości optymalne dla całej reakcji, tzn. gdy każdy z katalizatorów będzie w tym samym tempie zużywany co odtwarzany.

pierwiastków. W trakcie toczących się później w gwieździe reakcji termojądrowych w jądrze ubywa wodoru, a przybywa helu (w większości gwiazd materia jądra nie miesza się z materią otoczki). Ale nie tylko na tym polega zmiana składu chemicznego. Węgiel, azot i tlen (C, N, O) są wprawdzie tylko katalizatorami cyklu CNO, jednak ich początkowa zawartość jest „kosmiczna", a nie taka, jaka najbardziej odpowiadałaby temu cyklowi. W rezultacie ich względna ilość ulega zmianie w trakcie ewolucji gwiazdy. W materii międzygwiazdowej stosunek liczby atomów C:N:O wynosi 33:7:60, natomiast po zużyciu wodoru (tj. po zakończeniu ewolucji na ciągu głównym) ich proporcje ustalają się jako 2:95:3. I taki mniej więcej skład chemiczny powinny ujawnić obserwacje, o ile nasze przypuszczenia co do natury β *Lyrae* są słuszne.

Skrupulatne badania składu chemicznego β *Lyrae* zapoczątkował w 1959 r. A.A. Bojarczuk. Według niego stosunek liczby atomów helu i wodoru wynosi 20, czyli o dwa rzędy więcej niż w materii międzygwiazdowej (0,1). Co prawda, późniejsze pomiary znacznie ten wynik obniżyły (do wartości poniżej 2), za to wykryto nadobfitość azotu, ale z kolei nie dało się wyznaczyć zawartości węgla. Niemniej jednak w mocy pozostał wniosek, że skład naszej gwiazdy jest nietypowy i można podejrzewać, że charakteryzuje on głębokie warstwy normalnych gwiazd. Sprawa była na tyle interesująca, że kilka lat temu wykonane zostały w Obserwatorium McDonalda nowe obserwacje widmowe 2,7-metrowym teleskopem z zastosowaniem nowych technik. Obserwacje te potwierdziły, że stosunek ilości helu do wodoru wynosi 1,5. Potwierdziły też brak linii neutralnego i jednokrotnie zjonizowanego węgla, z czego wynika, że pierwiastka tego jest w gwieździe 25 razy mniej niż w materii międzygwiazdowej. Wreszcie względna zawartość azotu okazała się 16 razy wyższa, a tlenu 20 razy niższa od wartości normalnej. Tak więc rzeczywiście stwierdzono charakterystyczny nadmiar azotu przy jednoczesnym niedoborze węgla i tlenu.

Jak więc zajrzeć do wnętrza gwiazdy? To proste, wystarczy usunąć z niej tyle materii z wierzchu, ile trzeba. Jak widać, takie eksperymenty z gwiazdami przyroda robi sama. Przepływ masy wymuszany jest obecnością drugiej gwiazdy w pobliżu. Ocenia się, że w przypadku β *Lyrae* maksimum natężenia przepływu układ przeżył zaledwie 60 000 lat temu. Składnik wtórny, ten masywniejszy, jest teraz niewidoczny, ponieważ zasłania go dysk akrecyjny – tak się bowiem widocznie składa, że Ziemia znajduje się blisko płaszczyzny tego dysku. Gdy za kilkadziesiąt tysięcy lat przepływ materii ustanie, dysk się rozproszy i masywny składnik stanie się widoczny. Składnik zwany nadal głównym zacznie palić w centrum hel, skurczy się i materialny kontakt między składnikami na jakiś czas zostanie zerwany. Po kilku milionach lat składnik główny znowu spęcznieje (bo ewolucja na etapie palenia helu przebiega dość szybko) i rozpocznie się ponownie przepływ – tym razem praktycznie helu – do gwiazdy masywniejszej. Ale tymczasem gwiazda masywniejsza wreszcie zakończy swą ewolucję na ciągu głównym, spęcznieje i rozpocznie się przepływ materii w przeciwną stronę. Trudno orzec, co będzie dalej. Gwiazda o masie 13 mas Słońca w zasadzie powinna w końcu eksplodować jako supernowa, nie wiadomo jednak, jak na jej wcześniejszą ewolucję wpłynie obecność drugiej gwiazdy niemal zanurzonej w jej atmosferze.

Nie potrafimy jeszcze ze wszystkimi szczegółami przewidywać późnych faz ewolucji gwiazdy, a co dopiero, gdy ma ona towarzysza i wszystko się ogromnie komplikuje. Jak widzimy, komplikacje te są dość zasadnicze: szybciej ewoluować i tracić masę może, wbrew oczekiwaniom, gwiazda mniej masywna, kierunek przepływu materii może się zmieniać, może nastąpić odwrócenie początkowego stosunku mas itd. Mamy przy tym, co prawda, okazję obejrzenia odsłoniętego jądra gwiazdy, każdy może jednak tu stwierdzić, że to przecież nic nadzwyczajnego, bo pozostałości po supernowych lub centralne gwiazdy mgławic planetarnych to też odsłonięte wnętrza dawniej normalnych, masywnych gwiazd. Zgoda, tylko że β *Lyrae* jest chyba najjaśniejszą gwiazdą z tych osobliwych i – co ważniejsze – ukazującą obserwatorom swoje wnętrze nie po zakończeniu życia, lecz jakby na żywo, na bieżąco. Dlatego jej znaczenie dla teorii ewolucji gwiazd jest wyjątkowe.

Rozwiązanie zadania M 684.
Z uwagi na znak współczynników wielomianu P wszystkie pierwiastki muszą być ujemne (bo jeśli $x \geq 0$, to $P(x) > 0$). Zatem możemy zapisać
$$P(x) = (x+\gamma_1)(x+\gamma_2)\cdot\ldots\cdot(x+\gamma_n),$$
$\gamma_j > 0$ dla wszystkich j. Posługując się nierównością między średnią arytmetyczną i geometryczną widzimy, że
$$k+\gamma_j = \underbrace{1+\ldots+1}_{k \text{ składników}} +\gamma_j \geq$$
$$\geq (k+1)\sqrt[k+1]{1\cdot\ldots\cdot 1\cdot\gamma_j} =$$
$$= (k+1)\sqrt[k+1]{\gamma_j}.$$
Ze wzorów Viete'a wynika, że $\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n = 1$, jeśli więc pomnożymy uzyskane nierówności dla $j = 1, 2, \ldots, n$ stronami, to dostaniemy tezę zadania.

Rozwiązanie zadania M 685.
Łatwo zauważyć, że zawsze albo A uzyska więcej orłów niż B, albo A uzyska więcej reszek niż B. Ponieważ zdarzenia te są jednakowo prawdopodobne i rozłączne, więc prawdopodobieństwo tego, że A uzyska więcej orłów niż B jest równe $\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie zadania M 686.
Niech $a \geq b$ i przypuśćmy, że $n \geq b$. Ponieważ $a^n + b^n = c^n$, to, oczywiście, $a < c$. Z drugiej strony
$$(a+1)^n = a^n + na^{n-1} + \ldots + 1 >$$
$$> a^n + na^{n-1} \geq a^n + ba^{n-1} \geq$$
$$\geq a^n + b^n = c^n,$$
zatem $a^n < c^n < (a+1)^n$, czyli $a < c < a+1$, a to oznacza, że c nie jest liczbą całkowitą.

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 125 (WT=2,70) i 126 (WT=3,60) z numeru 10/1991

Adam Sikorski – Lublin 39,55
Paweł Perkowski – Szczecin 38,66

Przepraszamy za błędy w punktacji w obszernym omówieniu Ligi w *Delcie* 2/1992, w wyniku których zaniżone zostały stany kont pp. Mariusza Bogacza, Romana Musiała, Wiesława Kacprzaka, Tomasza Wietechy i Przemysława Gworysa. Prawidłowe liczby punktów dla pp. Wietechy i Gworysa wydrukowane zostały w numerze 5/1992

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1992.

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 2/1992

Przypominamy treść zadań:

133. Po wewnętrznej stronie pionowego cylindra o promieniu R toczy się bez poślizgu kulka o promieniu $r < R$. Znaleźć zależność od czasu współrzędnej pionowej kulki oraz kąta obiegu w płaszczyźnie poziomej.

134. Pocisk karabinowy o masie m lecący z prędkością v trafia w drewniany klocek o masie M i grubości d. Siła oporu działająca na pocisk w drewnie nie zależy od prędkości i jest równa T. Przy jakiej wartości v klocek uzyska maksymalną prędkość, jeśli początkowo był nieruchomy? Długość pocisku i siły zewnętrzne pominąć.

133. Przyjmijmy oś z jako pionową, w płaszczyźnie zaś poziomej wprowadźmy osie nieruchome x i y oraz – podobnie jak w zadaniu 126 – osie lokalne r i u. Podane poprzednio równania (1) – (6) (zob. *Delta* 2/1992) obowiązują bez jakichkolwiek zmian i z faktu, że $\vec{P}$ ma obecnie kierunek osi z wnioskujemy, że jest to jedyna niezerowa współrzędna wszystkich składników równania (6), tzn. $T_u = ma_u = 0$. Zatem ruch obiegowy kulki w płaszczyźnie poziomej jest ruchem jednostajnym po okręgu i możemy wprowadzić stałą kątową prędkość obiegu $\Omega = \dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{v_u}{R-r}$. Przekształcając jak poprzednio składową z równania (6) otrzymujemy

$$-(1+\gamma)T = \gamma P + \gamma mr\Omega\omega_r\,,$$

a podstawiając $T = m\dfrac{dv_z}{dt} - P$ mamy

$$-(1+\gamma)m\frac{dv_z}{dt} + P = \gamma mr\Omega\omega_r\,.$$

Po zróżniczkowaniu tego równania jeszcze raz względem czasu i skorzystaniu z poprzednio wyprowadzonego równania (12)

$$r d\omega_r = v_z d\alpha, \quad \text{tzn.} \quad r\frac{d\omega_r}{dt} = v_z\Omega,$$

otrzymujemy ostatecznie równanie oscylatora harmonicznego

$$-(1+\gamma)\frac{d^2v_z}{dt^2} = \gamma\Omega^2 v_z\,.$$

Oznacza to, że zależność pionowych składowych prędkości i położenia od czasu ma charakter oscylacyjny, z częstością równą $\Omega\sqrt{\gamma/(1+\gamma)}$. Kulka nie spada więc w dół, wbrew wszelkim oczekiwaniom! Siła ciężkości dodaje tylko składową stałą do również oscylującej prędkości kątowej ω_r. Tak się dzieje, ma się rozumieć, tylko w przypadku braku oporów ruchu, niemniej jednak, być może, znaleźliśmy odpowiedź na pytanie trapiące bilardzistów: Dlaczego tak często bila, która wpadła do otworu, wyskakuje z niego z powrotem?

134. Maksymalną prędkość klocek uzyska wtedy, gdy pocisk ugrzęźnie w nim na samym końcu („na granicy przebicia"), gdyż zarówno przy przebiciu na wylot, jak i przy wcześniejszym ugrzęźnięciu czas działania siły tarcia będzie krótszy. Badając ruch **względny** pocisku i klocka po uderzeniu stwierdzamy, że jest to ruch jednostajnie opóźniony z prędkością początkową v, końcową równą zeru i przyspieszeniem równym sumie bezwzględnych wartości przyspieszeń obu ciał:

$$a = a_1 + a_2 = \frac{T}{m} + \frac{T}{M}\,.$$

Droga w ruchu względnym jest równa grubości d klocka. Podstawiając te wielkości do wzoru na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym

$$s = \frac{1}{2a}\left(v_{konc}^2 - v_{pocz}^2\right)$$

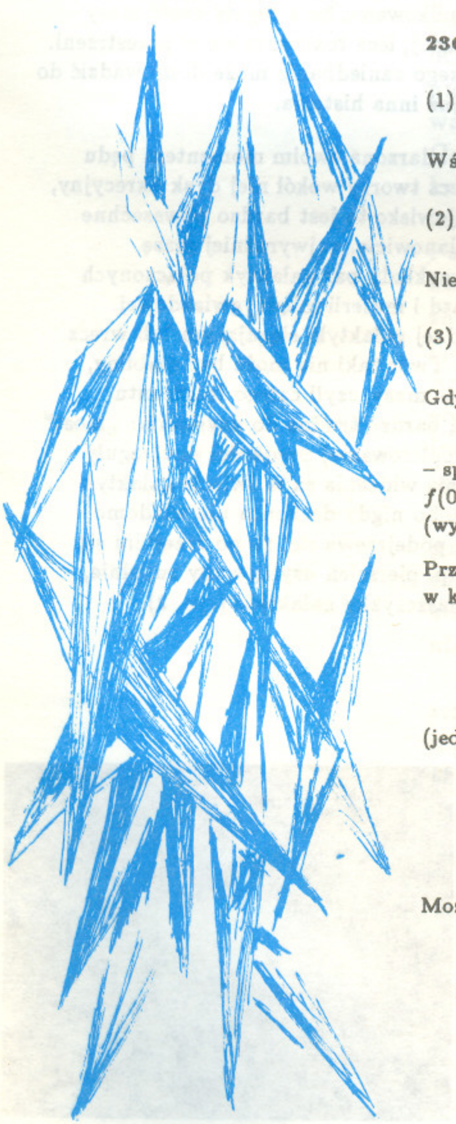
znajdujemy prędkość v pocisku

$$v = \sqrt{2dT\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)}\,.$$

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 225 (WT=1,89) i 226 (WT=2,52) z numeru 9/1991

Paweł Kubit	– Krosno	47,58
Tomasz Wietecha	– Tarnów	46,39
Jan Ciach	– Ostrowiec Św.	44,31
Leszek Krawczyk	– Włodawa	36,37
Mirosław Matlęga	– Skoczów	35,79

Urodzajna kolejka! W matematycznym **Klubie 44** – dwie nowe twarze: panowie Kubit i Wietecha. Pan Ciach zaś, kończąc trzecie okrążenie, staje się jedenastym Weteranem.



Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/1992

Przypominamy treść zadań:

235. Okręgi k i k' są styczne zewnętrznie. W okrąg k wpisano trójkąt równoboczny ABC. Na okręgu k' tak obrano punkty A', B', C', że proste AA', BB', CC' są styczne do k'. Dowieść, że długość jednego z odcinków AA', BB', CC' równa się sumie długości pozostałych dwóch.

236. Dla każdej liczby naturalnej n wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon M \to M$, $M = \{0, 1, \ldots, n\}$, spełniające warunek: $f(m) = |f^{-1}(\{m\})|$ dla $m \in M$. ($|X|$ oznacza liczbę elementów zbioru X.)

235. Oznaczmy środki i promienie okręgów k i k' odpowiednio przez O, O', r, r', a punkt styczności tych okręgów przez T. Przedłużmy odcinek AT do przecięcia z okręgiem k' w punkcie D. Trójkąty równoramienne AOT i $TO'D$ są podobne w skali $r : r'$, więc $|AD| : |AT| = (|AT| + |TD|) : |AT| = \lambda$, gdzie $\lambda = (r + r')/r$. Stąd
$$|AA'| = \sqrt{|AT| \cdot |AD|} = \sqrt{\lambda}\,|AT|$$
i podobnie $|BB'| = \sqrt{\lambda}\,|BT|$, $|CC'| = \sqrt{\lambda}\,|CT|$.

Przyjmijmy, że punkt T leży na krótszym łuku AB okręgu k. Na mocy twierdzenia Ptolemeusza zachodzi równość
$$|AT| \cdot |BC| + |BT| \cdot |CA| = |CT| \cdot |AB|.$$
Skoro ABC jest trójkątem równobocznym, wnosimy stąd, że
$$|AA'| + |BB'| - |CC'| = \sqrt{\lambda}\,\big(|AT| + |BT| - |CT|\big) = 0.$$

236. Załóżmy, że f spełnia podany warunek. Wówczas
$$(1)\qquad \sum_{m=0}^{n} f(m) = \Big|\bigcup_{m=0}^{n} f^{-1}(\{m\})\Big| = |M| = n + 1.$$
Wśród składników tej sumy mamy $f(1)$ jedynek, $f(2)$ dwójek itd. Zatem
$$(2)\qquad \sum_{m=1}^{n} m f(m) = n + 1.$$
Niech $f(0) = k$. Oczywiście, $k \geq 1$, $f(k) \geq 1$. Odejmując (1) od (2) otrzymujemy
$$(3)\qquad \sum_{m=1}^{n} (m-1) f(m) = k.$$
Gdyby dla pewnego $r \geq 3$, $r \neq k$, zachodziła nierówność $f(r) \geq 1$, to na mocy (3) dostalibyśmy
$$k \geq (k-1)f(k) + (r-1)f(r) \geq (k-1) + (r-1) \geq k + 1$$
– sprzeczność. Wynika stąd, że jedynymi niezerowymi wartościami funkcji f mogą być liczby $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(k)$. Zauważmy jeszcze, że jeśli $k \geq 3$, to nierówność $k \geq (k-1)f(k)$ (wynikająca z (3)) pociąga $f(k) = 1$.

Przepiszmy teraz równość (1), rozróżniając trzy przypadki: $k = 1$, $k = 2$, $k \geq 3$, i rozpisując w każdym z tych przypadków lewą stronę (1) w bardziej przejrzystej postaci:
$$\begin{array}{ll}
\text{gdy } k = 1\colon & 1 + f(1) + f(2) + 0 + \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots + 0 = n + 1,\\
\text{gdy } k = 2\colon & 2 + f(1) + f(2) + 0 + \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots + 0 = n + 1,\\
\text{gdy } k \geq 3\colon & k + f(1) + f(2) + 0 + \ldots + 0 + 1 + 0 + \ldots + 0 = n + 1
\end{array}$$
(jedynka w ostatnim wzorze na k-tym miejscu). Stąd, w myśl własności funkcji f:
$$\begin{array}{lllll}
\text{gdy } k = 1\colon & f(1) = 2, & f(2) = 1; & n = 3; & \\
\text{gdy } k = 2\colon & f(1) = 0, & f(2) = 2; & n = 3 & \text{lub}\\
 & f(1) = 1, & f(2) = 2; & n = 4; & \\
\text{gdy } k \geq 3\colon & f(1) = 2, & f(2) = 1; & n = k + 3 \geq 6. &
\end{array}$$
Możemy więc wypisać (w formie tabelek) wszystkie funkcje spełniające podany warunek:
$$\begin{array}{ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3\\ f: & 1 & 2 & 1 & 0\end{array}\qquad
\begin{array}{ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3\\ f: & 2 & 0 & 2 & 0\end{array}\qquad
\begin{array}{cccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4\\ f: & 2 & 1 & 2 & 0 & 0\end{array}$$
$$\begin{array}{cccccccccc} & 0 & 1 & 2 & \ldots & \ldots & k & k+1 & k+2 & k+3\ (= n \geq 6)\\ f: & k & 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 \quad 0\end{array}$$

Okres T i promień względnej orbity a dwóch obiegających się po kole mas M (cięższej) i m (lżejszej) są, jak wiemy, związane zależnością zwaną trzecim prawem Keplera:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathrm{G}(M+m)},$$

gdzie G jest stałą grawitacji. Ponieważ całkowity moment pędu układu podwójnego wynosi $J = Mm\sqrt{\frac{\mathrm{G}a}{M+m}}$, można okres obiegu zapisać jako

$$T = \frac{2\pi}{\mathrm{G}^2} J^3 \frac{M+m}{M^3 m^3}.$$

Załóżmy, że układ podwójny to dwie gwiazdy, między którymi zachodzi przepływ masy, przy czym odbywa się to idealnie w tym sensie, że ile jedna gwiazda straci, to druga tyle zyska, czyli $\mathrm{d}M = -\mathrm{d}m$. Moment pędu układu pozostaje wtedy stały. Obliczywszy „logarytmiczną różniczkę zupełną” obu stron ostatniej zależności dostajemy

$$\frac{\mathrm{d}T}{T} = -3\frac{\mathrm{d}M}{M} - 3\frac{\mathrm{d}m}{m} = 3\frac{1-q^2}{q}\frac{\mathrm{d}M}{M+m},$$

gdzie $q = m/M$. Jest to bardzo ważna w astrofizyce zależność. Przede wszystkim umożliwia ona w ogóle stwierdzenie przepływu masy między gwiazdami na podstawie zaobserwowania tylko zmian okresu układu podwójnego. Ponadto znak tych zmian określa, która gwiazda masę traci, a która zyskuje (por. mój artykuł w tym numerze). Oczywiście, przyroda jest trochę bardziej skomplikowana, bo z reguły część masy traconej przez jedną gwiazdę nie dociera do drugiej, lecz rozprasza się w przestrzeni. W wyniku tego moment pędu układu maleje, czego zaniedbanie może doprowadzić do fałszywego obrazu gwiazdy podwójnej – ale to już inna historia.

Materia przepływająca między gwiazdami jest obdarzona swoim momentem pędu i dlatego nie spada bezpośrednio na „biorcę”, lecz tworzy wokół niej dysk akrecyjny, z którego dopiero stopniowo jest wchłaniana. Zjawisko to jest bardzo powszechne w świecie gwiazd i, okazuje się, że nie tylko. Mianowicie, najwyraźniej masę wymieniają również galaktyki. Znamy liczne przykłady par galaktyk połączonych tzw. mostami zbudowanymi, oczywiście, z gwiazd i materii międzygwiazdowej. Zazwyczaj „most” jest ramieniem spiralnym jednej galaktyki sięgającym lub wręcz oplatającym drugą pobliską galaktykę (rys. 1). Twór taki nie może być stabilny, niewątpliwie więc zachodzi w nim przekazywanie masy, czyli całego fragmentu ramienia spiralnego, aczkolwiek dowody tego są bardzo trudne do uzyskania: „most” bardzo słabo świeci, więc wszelkie pomiary (dopplerowskie) prędkości są z reguły niewykonalne, prędkości poprzeczne do promienia widzenia są w świecie galaktyk niemierzalne, geometria „mostu” jest niepewna, bo nigdy do końca nie wiadomo, co jest „przed”, a co „za” itd. Niemniej jednak podejrzewa się, że po rozejściu się takich galaktyk może wokół „biorcy” powstać np. pierścień usytuowany zupełnie, zdawałoby się, nieprawdopodobnie względem płaszczyzny galaktyki (rys. 2).

Rys. 1

Rys. 2

6/92
(16)

Specjalnie z okazji Dnia Dziecka –

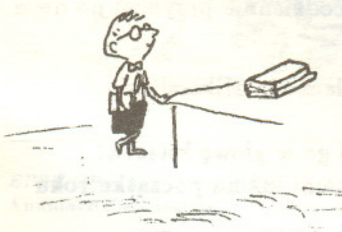
– nieznane przygody Mikołajka

Matematyka

Na lekcję matematyki oprócz pani, która nas teraz uczy, przyszły jeszcze dwie panie, pan, który się ciągle uśmiechał i Rosół. Rosół to nasz wychowawca; kiedyś opowiem wam, dlaczego tak go nazywamy. Pani od matematyki zaczęła mieć z nami lekcje dwa tygodnie temu; to już czwarta w tym roku, choć jesteśmy dopiero w połowie semestru. Od września uczą nas matematyki nowi panowie i panie, którzy przychodzą do szkoły tylko na lekcje z nami. Innocenty – ten chłopak, którego rodzice są matematykami – zapytał kiedyś ojca, dlaczego uczą nas inaczej niż kolegów z innych szkół, ale z tego, co mi powtórzył, niewiele zrozumiałem. Pamiętam tylko, że przeprowadzają u nas jakiś okropnie ważny eksperyment, i ktoś za to dostaje mnóstwo pieniędzy, i że to się nazywa Grant. Ale ja nie wiem, czy to ma związek z kapitanem Grantem, o którym książkę dostałem od Buni w zeszłym tygodniu. Całkiem fajna, choć ja wolę książki o kowbojach, co jeżdżą na koniach i strzelają „pif-paf", i gonią Indian, i uciekają przed innymi Indianami, i wszystko dobrze się kończy. Poza tym ja nie bardzo wierzę Innocentemu, jeśli chodzi o matematykę. Kiedyś myśleliśmy, że z matematyki na każde trudne pytanie będziemy umieli odpowiedzieć, bo Innocenty dowie się tego od rodziców. Oczywiście, wszystko wie też Ananiasz, który jest najlepszym uczniem, ale my go nie lubimy; nie możemy go przetrzepać, ile razy chcemy, bo nosi okulary. Okazało się jednak, że na Innocentym nie można polegać. Raz pani – to była ta druga pani, bo pierwsza od nas odeszła po trzech tygodniach – zapytała, czy zero jest liczbą naturalną. Innocenty powiedział wtedy, że to zależy od tego, jak się umówimy, ale to się pani bardzo nie spodobało i zaczęła nam tłumaczyć, że w matematyce nic nie zależy, bo to jest taka nauka. I potem mówiła jeszcze bardzo dużo innych rzeczy, których w ogóle nie zrozumiałem. Odkąd ci nowi mają lekcje matematyki, niewiele rozumiem. Tak, że w końcu nie wiem, czy zero jest liczbą naturalną, czy nie. Wprawdzie zapytałem potem Ananiasza, jak właściwie jest z tym zerem, ale on odpowiedział, że pani powiedziała, że to zależy od tego, jak się umówimy. Ten Ananiasz to wariat!

W każdym razie dziś na lekcję przyszło więcej osób.
– Mamy gości z ministerstwa – powiedziała pani. – Chcą zobaczyć, jak ładnie nauczyliście się matematyki, która, jak dobrze wiecie, jest królową wszystkich nauk.

To ciekawe, że wszyscy nasi nauczyciele od matematyki mówili nam, że matematyka jest królową nauk, a nigdy nie powiedział nam tego nikt inny. Ciekawe, co sądzi o tym pani od geografii? Raz, gdy nam o tej królowej powiedział pan, który akurat nas uczył, Joachim zapytał, kto w takim razie jest królem, na co pan kazał mu stać w kącie. Joachim nie chciał pójść do kąta, bo w ławce zawsze jest weselej. Rozpoczęła się awantura i to chyba było bardzo dobrze, bo dzięki temu pan nie usłyszał, jak Maksencjusz zapytał, czy na dworze królowej pan nauczyciel jest błaznem.



Teraz nikt nie pytał, kto jest królem, tylko wszyscy czekali, co będzie dalej.

– O czym mówiliśmy ostatnio? – zapytała pani.

To dziwne, że pani o to spytała, bo chyba dobrze pamiętała; podczas ostatniej lekcji Rufus jeździł na Kleofasie. Rufus założył się, że jeśli Kleofasowi uda się go zrzucić, to on, Rufus, zje kredę. Bardzo chciałem, żeby Kleofas zrzucił Rufusa, bo jeszcze nigdy nie widziałem, jak ktoś je kredę. Nawet Alcest, ten kolega, który jest gruby i ciągle je, kredy nie jada. Nikt nie słuchał tego, co pani mówiła, oprócz Ananiasza i Innocentego. Rodzice Innocentego proszą, żeby dokładnie zapisywał to, czego uczy pani na matematyce. Za to, że notuje, zawsze dostaje od rodziców duże lody. Innocenty mówi, że jego rodzice potem bardzo dokładnie to czytają, jego tata okropnie się śmieje i telefonuje do jakiegoś kolegi, i śmieje się przez telefon, a mama się złości i mówi, że to skandal i że przeniesie Innocentego do innej szkoły.

Gdy pani zadała pytanie, wszyscy popatrzyli na Ananiasza. Wiadomo, że gdy pani nie woła nikogo po imieniu, to na pytanie odpowiada Ananiasz.

– O zbiorach, proszę pani! – odpowiedział Ananiasz z dumą.
– Bardzo dobrze – ucieszyła się pani. – A teraz dam wam zadanie. W ogrodzie rosną jabłonie i grusze, róże i tulipany. To wszystko razem tworzy zbiór roślin. W nim zawarty jest zbiór kwiatów. Joachim, powiedz mi, co jest podzbiorem kwiatów?
– Ziemia, proszę pani! – powiedział Joachim bardzo zadowolony.
Ale pani chyba nie była zadowolona.
– To nie dokładnie tak... Rufus, czy Joachim odpowiedział dobrze?
– Nie, bo nie powiedział o nawozach sztucznych – odrzekł Rufus. – Mój wujek ma sad i jakby go nie nawoził, to by nic nie wyrosło!
– A po co sadzić kwiaty w ogródku? – zapytał Alcest. – Kwiatów się przecież nie je. Szkoda miejsca!
– Ty, nie bądź taki mądry! – krzyknął Rufus. – Jakbyś ty miał ogród, to i tak nie miałbyś czasu na robotę, bo ciągle jesz!
– Ty, nie bądź taki mądry! – krzyknął Alcest. – Jakbym miał, to bym sadził, bo potem miałbym więcej jedzenia!
I Rufus z Alcestem pobili się.
Pani patrzyła na nich okrągłymi oczami. – Ależ... Ależ chłopcy – powiedziała. – Przestańcie się kłócić i zastanówcie się chwilę. Tak ładnie napisaliście ostatnią klasówkę...

To prawda, że dobrze napisaliśmy klasówkę, ale to dlatego, że pani uczy nas według nowych metod. Trzy dni wcześniej przyniosła nam zadania, które będą na klasówce, żebyśmy się mogli przygotować. Nic a nic z nich nie zrozumiałem, ale na szczęście Innocenty zaniósł je do domu i jego rodzice napisali mu, jak to się robi. Nauczyliśmy się rozwiązań na pamięć i napisaliśmy znakomicie. Pani bardzo chwaliła wszystkich oprócz Ananiasza, który próbował rozwiązać zadania sam i zdaje się, że to nie było tak, jak chciała pani.

Rufus z Alcestem nie chcieli jednak przypomnieć sobie ostatniej klasówki. Pani powiedziała, że Rufus i Alcest zostaną za karę w szkole po lekcjach, a nam kazała wyjąć książki i otworzyć je na stronie 49, bo tam jest rysunek, który pomoże rozwiązać zadanie. Na to Alcest oznajmił, że on już podręcznika nie ma, bo gdy go pierwszy raz otworzył, to wszystkie kartki się oddzieliły, więc zaczął nimi zawijać bułeczki, które przynosi do szkoły, a on codziennie przynosi po dwie kanapki na każdą pauzę.

– Mnie też się książka rozleciała, wtedy, gdy przyłożyłem nią Mikołajowi w głowę! – zawołał Maksencjusz.
– Co takiego? – zdziwiła się pani. – Czemu uderzyłeś go w głowę książką?
– Bo zeszyt jest za lekki, a wszystkie doniczki z kwiatami już na początku roku Rosół kazał wynieść z sali – odparł Maksencjusz.

Rosół zrobił się cały czerwony. Może dlatego, że jedna z pań z ministerstwa zapytała drugą, kto to jest Rosół. Dziwne, że nikt jej tego wcześniej nie zdążył powiedzieć. Gdy ktoś z nas czegoś nie wie, to zawsze potem są z tego kłopoty; mogliby się przygotowywać, jak do nas przychodzą. No bo co w końcu, kurczę blade!

Jak ktoś powie przy Rosole „Rosół", to Rosół wlepia surowe kary i nie ma z nim żartów. Teraz też od razu wstał i wyprowadził Maksencjusza z klasy.

– A ja mam nie zniszczony podręcznik do matematyki! – pochwalił się Ananiasz. Na to Euzebiusz zabrał Ananiaszowi książkę.
– Nie! Ja mam okulary! – zawołał Ananiasz.
– No i co z tego? To ty masz okulary, a nie twoja książka! – odpowiedział Euzebiusz i trzepnął podręcznikiem w głowę Rufusa.
– O, proszę! Rozpadła się! – krzyknął zadowolony.

Wtedy Ananiasz zaczął płakać i krzyczeć, że nikt go nie lubi, i że się poskarży rodzicom, i zaczął się tarzać po ziemi, i dostał czkawki, i zrobił się cały siny. Z Ananiaszem zawsze są takie kłopoty, ale pani chyba się jeszcze nie przyzwyczaiła.

– Chłopcze, a czy ty też nie masz podręcznika? – zapytał mnie nagle pan, który się uśmiechał i akurat siedział za mną.
– Nie, proszę pana – odpowiedziałem. – Ja mam książkę, ale tylko do strony 32.
– Jak to? – zdziwił się pan.

Wytłumaczyłem mu, że po stronie trzydziestej drugiej znów jest strona pierwsza i tak do końca książki. Chciałem się pochwalić, że jednak zaglądam do podręcznika i pokazałem mu bardzo fajne zadanie o tym, w jakim czasie trzy i pół kota zje pięć i jedną czwartą myszy. Opowiedziałem mu, jak innym chłopakom to zadanie też się spodobało, i Euzebiusz z Gotfrydem przynieśli nawet koty na lekcję, a Kleofas znalazł mysz. Brakowało nam jeszcze półtora kota i czterech i jednej czwartej myszy, i Rufus z Joachimem powiedzieli, że mogą to załatwić, ale nie pozwolił im dyrektor, który właśnie wtedy wszedł do klasy, bo usłyszał krzyk, jaki wydała pani na widok myszy. Pan z ministerstwa przestał się uśmiechać, tylko jakoś dziwnie mrugał oczami. Może on też nie lubi myszy albo kotów?

Tymczasem pani ciągle uspokajała Ananiasza, który dalej płakał i miał czkawkę. Była bardzo zajęta i nie mogła odpowiedzieć Innocentemu, który zapytał, czy to już koniec lekcji, bo on bardzo mało zanotował i może przez to nie dostać swojej porcji lodów, a on się już do tych lodów przyzwyczaił. Rufus podszedł do pani z ministerstwa i zaczął jej tłumaczyć, kto to jest Rosół i dlaczego go tak nazywamy. Kleofas powiedział, że jeśli Alcest nie ma już w co owijać kanapek, to on mu chętnie da swoją książkę, ale Alcest nie odpowiedział, bo właśnie jadł rogala z czekoladą. Świetnie się bawiliśmy i na to wszedł do klasy dyrektor. I potem już nic ciekawego się nie działo.

A następnego dnia Innocenty powiedział nam, że gdy o wszystkim opowiedział w domu, to jego rodzice stwierdzili, że nie warto go przenosić do innej szkoły, bo po tej wizytacji na pewno w przyszłym roku wszędzie będą uczyć matematyki nowymi metodami.

Literatura uzupełniająca

[1] René Goscinny (tekst), Jean Jacques Sempé (rysunki), *Rekreacje Mikołajka.*
[2] René Goscinny (tekst), Jean Jacques Sempé (rysunki), *Mikołajek i inne chłopaki.*
[3] René Goscinny (tekst), Jean Jacques Sempé (rysunki), *Wakacje Mikołajka.*
[4] René Goscinny (tekst), Jean Jacques Sempé (rysunki), *Joachim ma kłopoty.*

EPSILON – niezależny dodatek *Delty*. Redakcja: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Sławomir Cynk, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski. Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ϵ.