

ISSN 0143-1175 REG. 144533...



## Polska Grupa Użytkowników Systemu T<sub>E</sub>X GUST

uprzejmie zawiadamia, że  
5 czerwca 1992 roku o godzinie 10.30  
w Centrum Astronomicznym im. Mikołaja Kopernika  
Warszawa, ul. Bartycka 18

odbędzie się pierwsze **Walne Zebranie**

*Serdecznie zapraszamy do uczestnictwa w spotkaniu  
i wstąpienia do stowarzyszenia*

Nasz tymczasowy adres:

Instytut Badań Systemowych PAN  
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa

## SPIS TREŚCI

### NUMERU 5(216)

Teleskop Hubble'a niepotrzebny? <i>Jan Kalinowski</i>	str. 1
Jak podzielić tort? <i>Piotr Hajłasz</i>	str. 1
Pociągające zaokrąglenia Pożyteczna sztuczka – czyli jak inaczej może się przydać odejmowanie <i>Piotr Piskorski</i>	str. 3
Mała Delta	str. 8
Patrz w niebo	str. 9
Fotony w polu grawitacyjnym <i>Tadeusz Jarzębowski</i>	str.10
Klub 44	str.12
Rzecz o wieszaniu firanek	str.14
Kulombowska eksplozja	str.14
Zadania	str.15
Drobiazgi	str.16
Epsilon	str.17

„Delta”  
matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego, Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
Towarzystwa Astronomicznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Edukacji Narodowej

#### Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula  
Bogdan Cichocki  
Roman Duda  
Jan A. Gaj  
Tadeusz Hofmokl – wiceprzewodniczący  
Tadeusz Jarzębowski  
Marcin Kubiak  
Andrzej Mąkowski  
Andrzej Pelczar  
Zbigniew Płochocki  
Zdzisław Pogoda  
Konrad Rudnicki  
Zbigniew Semadeni  
Grzegorz Sitarski  
Józef I. Smak  
Kazimierz Stępień  
Mieczysław Subotowicz  
Andrzej Szymacha  
Andrzej Woszczyk  
Wojciech Żakowski – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:  
Krzysztof Biesaga  
Piotr Hajłasz  
Jan Kalinowski – z-ca red. nac.  
Krystyna Kordos – sekr. red.  
Marek Kordos – red. nac.  
Tomasz Kwast  
Stanisław Mrówczyński  
Anna Rudnik  
Joanna Udalska

#### Adres Redakcji:

Wydział Fizyki UW  
ul. Smyczkowa 5/7  
02-678 Warszawa  
tel. 43-02-43 wewn. 21

#### Adres poczty komputerowej (E-mail address):

DELTA@PLEARN.BITNET

#### Wydawca:

Uniwersytet Warszawski  
Krakowskie Przedmieście 26/28  
00-927 Warszawa

Nakład 9 500 egz.  
Wydrukowano  
w Zakładach Graficznych  
w Warszawie, ul. Srebrna 16

Skład systemem T<sub>E</sub>X  
wykonała redakcja.

#### WARUNKI PRENUMERATY

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na III kwartał 1992 r. wynosi 12 000,- zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
  - oddziały RSW właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora
  - odbioru zamówionych egzemplarzy dokonuje prenumerator w wyznaczonych punktach sprzedaży lub w inny, uzgodniony sposób,
  - urzędy pocztowe i listonosze – od prenumeratorów z terenów wiejskich lub innych miejscowości, w których nie ma oddziałów RSW, a w miastach tylko od osób niepełnosprawnych – poczta zapewnia dostawę zamówionych egzemplarzy pod wskazany adres pod warunkiem uiszczenia dodatkowej opłaty za każdy doręczany egzemplarz – opłata wynosi 500,- zł od egzemplarza,
  - Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – tylko od prenumeratorów zlecających dostawę za granicę.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
  - na kraj – do 20 XI na I kwartał roku następnego  
do 20 II na II kwartał  
do 20 V na III kwartał  
do 20 VIII na IV kwartał
  - na zagranicę – do 31 X na I kwartał  
oraz do 1 dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarza 5 000,- zł

### W następnym numerze:

Wspomnienia Peirelsa

Niewymierność  $\pi$

Pan Krystian Winkler  
ul. Blankowa 15  
62-610 Sompolno  
pragnie wymieniać się  
archiwalnymi numerami *Delty*.

# Teleskop Hubble'a niepotrzebny?

Jan KALINOWSKI

Zdolność rozdzielcza teleskopów naziemnych jest ograniczona w istotny sposób przez atmosferę ziemską. Zamiast ostrych obrazów odległych gwiazd w teleskopie widać rozmyte, migoczące plamki o wielkości kątowej co najmniej pół sekundy. Dzieje się tak dlatego, że światło, zanim wpadnie do teleskopu, musi przejść przez grubą warstwę atmosfery podlegającej ciągłym zmianom na skutek lokalnych turbulencji. Zniekształcenia obrazu na skutek turbulencji są znacznie większe niż spowodowane dyfrakcją światła w instrumentcie obserwacyjnym. Dlatego zdolność rozdzielcza dużych teleskopów nie jest istotnie lepsza od zdolności rozdzielczej teleskopów o rozmiarach 10–20 cm. Jest to szczególnie ważne teraz, gdy mają niedługo powstać teleskopy o rozmiarach rzędu 10 metrów.

Próbuje się temu zaradzić na różne sposoby. Najlepszym rozwiązaniem jest umieszczenie teleskopu w przestrzeni kosmicznej. Jest to jednak bardzo kosztowne przedsięwzięcie, a doświadczenia z umieszczonym w 1990 roku na orbicie okołoziemskiej teleskopem Hubble'a pokazują, że nie jest to wcale łatwe zadanie. Tańszy i stosowany od dawna sposób polega na umieszczaniu teleskopów wysoko w górach. Na przykład, obserwacje gwiazd i galaktyk prowadzone za pomocą teleskopów umieszczonych na górze Mauna Kea na Hawajach (4200 m n.p.m.) dostarczają zwykle dwukrotnie więcej informacji od obserwacji prowadzonych na mniejszych wysokościach. Dla niektórych astronomów ten sposób nie jest jednak dostatecznie dobry. Obecnie kilka grup naukowców pracuje intensywnie nad tzw. systemem optyki adaptacyjnej, który powinien pozwolić na prowadzenie obserwacji astronomicznych z Ziemi z dokładnością porównywalną do tej, jaką powinien osiągnąć teleskop Hubble'a nawet po uporaniu się z problemami związanymi z jego aberracją sferyczną. Optyka adaptacyjna stała się w ostatnich latach jedną z najintensywniej rozwijanych nowinek technologicznych w astronomii. Jeśli więc wszystko się uda, to w przyszłości teleskopy naziemne w niektórych zakresach widma promieniowania elektromagnetycznego będą mogły konkurować z teleskopami kosmicznymi.

Idea optyki adaptacyjnej jest bardzo prosta. Światło gwiazdy – zanim wpadnie do teleskopu – należy odbić od elastycznego zwierciadła, które powinno być tak zdeformowane, żeby kasowało zniekształcenia światła spowodowane przez atmosferę. Pomysł jest dość stary. Prawie czterdzieści lat temu Horace W. Babcock wpadł na pomysł zastosowania systemu optycznego do „poprawiania” obrazów obiektów astronomicznych. Kłopot polega na tym, że trzeba wiedzieć najpierw, jakim zniekształceniom uległo światło przy przejściu przez atmosferę, oraz że zniekształcenia te ulegają ciągłym, bardzo szybkim zmianom. Informację taką można uzyskać monitorując zniekształcenia obrazu jasnej gwiazdy leżącej blisko interesującego nas obiektu. Pomysł Babcocka czekał jednak na techniczną realizację wiele lat. Dopiero rozwój komputeryzacji umożliwił zbudowanie systemu analizującego sygnał reprezentujący zniekształcenia spowodowane przez atmosferę i sterującego deformacją elastycznego zwierciadła w celu uzyskania „prawdziwego” obrazu naszego obiektu.

Prototyp takiego systemu, opracowanego przez Południowe Obserwatorium Europejskie (ang. *European Southern Observatory*), pozwolił niedawno uzyskać za pomocą 3,5 metrowego teleskopu w La Silla w Andach chilijskich obraz gwiazdy o wymiarach kątowych 0,18 sekundy. Jest to więc zdolność rozdzielcza klasy teleskopu Hubble'a. Wadą tego systemu jest to, że nie zawsze w pobliżu interesującego nas obiektu znajduje się dostatecznie jasna gwiazda (prototyp wymagał obecności gwiazdy o jasności co najmniej 5 mag.). Dlatego inna grupa badawcza z Honolulu pracuje nad systemem, który nie wymagałby istnienia jasnego sąsiada. Idea polega na tym, aby wykorzystać zniekształcony obraz bezpośrednio interesującego nas obiektu, tworzony przez główne zwierciadło teleskopu. Otóż, jeśli szybko zmienić ostrość tego obrazu przez przesunięcie od i do ogniska zwierciadła układu optycznego analizującego ten obraz, to pojawia się na nim układ cieni i światła charakteryzujący zaburzenia

# Jak podzielić tort?

Piotr HAJŁASZ

Dwie osoby chcą się podzielić ciastkiem. Jak powinny to zrobić, aby podział był sprawiedliwy? Pomysł jest bardzo prosty. Jeden dzieli, drugi zaś wybiera. Jest to tzw. podział pragmatyczny (nazwa pochodzi od Hugona Steinhausa).

No dobrze, ale jak to zrobić w przypadku, gdy  $n$  osób chce równo podzielić tort między siebie?

Z doświadczenia wiemy, że zwykle Pani Domu dzieli tort i rozdaje gościom, lecz jakże często czujemy się pokrzywdzeni i w duchu mówimy: „To niesprawiedliwe, on ma lepszy kawałek”.

Czy można więc tak podzielić tort, aby nikt nie czuł się pokrzywdzony? Może na wadze? Nie, to niczego nie rozwiąże, bo dla kogoś jakiś kawałek, mimo że mniejszy, może przedstawiać większą wartość – jeśli jest np. z orzechem. Każdy ma swoją własną miarę wartościującą, który kawałek tortu jest lepszy, a który gorszy, i nie ma wagi, na której można by rozważyć tort na kawałki tak, aby nikt nie czuł się pokrzywdzony. Zresztą i tak nie mamy wagi.

Czy można więc wybrnąć z tej sytuacji? Można. Taki sprawiedliwy sposób podziału znaleźli Stefan Banach i Bronisław Knaster (dla  $n = 3$  problem ten rozwiązał wcześniej Steinhaus). Sposób dzielenia tortu pomiędzy  $n$  osób będziemy określali indukcyjnie ze względu na liczbę osób.

Dla dwóch już potrafimy. Przypuśćmy, że wiemy, jak podzielić tort pomiędzy  $n - 1$  osób. Opiszemy teraz sposób podziału pomiędzy  $n$  osób.

Najpierw ponumerujemy te osoby liczbami od 1 do  $n$ . Osoba nr 1 wskazuje na torcie, jak duży kawałek chce dostać. Następnie po kolei osoby wypowiadają się, czy przypadkiem nr 1 nie chce wziąć za dużo. Jeżeli wszystkie osoby zgadzają się z 1, to bierze ona ten

kawałek i pozostałe  $n - 1$  osób dzieli się tym, co zostało – a to już wiadomo, jak zrobić (założenie indukcyjne).

Załóżmy więc, że któraś z osób, na przykład nr 4, twierdzi, że osoba nr 1 jest zbyt zachłanna i chce wziąć za dużo. Wtedy osoba nr 4 musi wskazać mniejszy kawałek będący częścią kawałka, który wskazała osoba nr 1, a który to kawałek usatysfakcjonowałby osobę nr 4. Oczywiście, żadna z osób 1, 2, 3 nie może stwierdzić, że osoba nr 4 chce za dużo, bo przecież zgodzili się na większy kawałek. Co najwyżej któraś z osób 5, 6, ...,  $n$  może zaprotestować i wówczas ta osoba protestująca musi wskazać część kawałka, który wskazała osoba nr 4 itd.

Tak czy inaczej, po skończonej liczbie kroków znajdzie się osoba wskazująca jakiś kawałek na tortcie, z którą to osoba wszystkie pozostałe będą się zgadzały, że nie jest za duży. Wtedy ta osoba bierze ten kawałek, a resztą dzieli się pozostałe  $n - 1$  osób (założenie indukcyjne).

Ten podział tortu pomiędzy  $n$  osób rozsądnie jest też nazwać podziałem pragmatycznym. Problemem sprawiedliwego podziału bardzo się interesował Hugo Steinhaus. W szwedzkim czasopiśmie *Econometrica* ukazał się w 1948 r. artykuł, w którym Steinhaus pisał między innymi o podziale spadku. Uważał też, że podział pragmatyczny nadaje się do rozstrzygnięcia niektórych sporów międzynarodowych.

Powróćmy jednak do podziału tortu. Banach zauważył, że z rozwiązania tego problemu można wyprowadzić pewne ważne twierdzenie matematyczne.

Zacznijmy jednak od pewnej dygresji. Jednym z najważniejszych pojęć w matematyce jest miara. Pojęcie to jest wspólnym uogólnieniem takich pojęć, jak długość, powierzchnia, objętość. W matematyce występuje kilka modyfikacji pojęcia miary. To, co my zdefiniujemy, nosi oficjalną nazwę miary unormowanej, skończenie addytywnej, mierzącej wszystkie podzbiory zbioru  $X$  (uff!). My będziemy w skrócie mówili po prostu „miara”. A oto ta definicja.

atmosferyczne. Można by więc posłużyć się nim do sterowania zwierciadłem elastycznym. Obecnie trwają prace nad budową prototypu takiego systemu. Entuzjaści sądzą, że za 2–3 lata będzie można uzyskiwać zdjęcia o „kosmicznej” jakości.

Okazało się jednak, że prace nad optyką adaptacyjną były prowadzone od lat w USA pod auspicjami Departamentu Obrony i były objęte ścisłą tajemnicą. Dopiero w maju 1991 zezwolono na opublikowanie prac na ten temat. W numerze 353(1991) czasopisma *Nature* pojawiły się dwie prace informujące o doświadczeniach przeprowadzonych w 1983 i 1988 r. Nie warto byłoby o tym pisać, gdyby nie fakt, że zastosowano w tych doświadczeniach inną metodę pozyskiwania informacji o turbulencjach atmosfery. Metoda ta również pozwala uwolnić się od istotnie ograniczającego pole obserwacji warunku istnienia jasnej gwiazdy przewodniej w bezpośredniej bliskości badanego obiektu. W doświadczeniach C.A. Primmermana (*Nature* 353(1991), str. 141) i R.Q. Fugate (*Nature* 353(1991), str. 144) zamiast naturalnej gwiazdy przewodniej wykorzystano sztuczną. Sztuczna gwiazda przewodnia została uzyskana za pomocą światła laserowego (stąd też ingerencja Departamentu Obrony, który interesował się propagacją światła laserowego w atmosferze w kontekście „wojen gwiazdnych”). Światło lasera, wysłane przez układ optyczny teleskopu, było ogniskowane na wysokości około 5 km nad Ziemią i na skutek rozpraszania Rayleigha na atmosferycznym azocie i tlenie dawało obraz sztucznej gwiazdy. Monitorowanie tego obrazu dostarczało informacji o stanie atmosfery.

W doświadczeniu Primmermana typowy cykl obserwacji wyglądał następująco. Najpierw przez 1 ms obserwowano zniekształcony obraz naturalnej gwiazdy przy płaskim zwierciadle korekcyjnym. Następnie wysyłano światło lasera i na podstawie obserwacji sztucznej gwiazdy przewodniej korygowano kształt zwierciadła. Cała ta operacja trwała tylko 500  $\mu$ s. Po tym obserwowano poprawiony obraz gwiazdy. Jakość uzyskanego w ten sposób obrazu gwiazdy Procyon ( $\alpha$  CMi) była doskonała. Dla niektórych obserwacji stosunek natężenia światła w maksimum do teoretycznej wartości natężenia światła ograniczonego jedynie przez dyfrakcję wynosił 0,46, a szerokość otrzymanego obrazu była równa dyfrakcyjnej zdolności rozdzielczej teleskopu (teleskop miał 60 cm średnicy, faktyczna zdolność rozdzielcza bez systemu korekcyjnego była około 10 razy gorsza).

W doświadczeniu Fugate używano teleskopu o średnicy 1,5 m uzyskując poprawę kątową zdolności rozdzielczej z 2" do 0,"18. Pozwoliło to na rozdzielenie układu podwójnego 53 $\xi$  Ursae Majoris o rozmiarach kątowych 1,"3 już po jednej sekundzie obserwacji!

W innym doświadczeniu (R.A. Humphreys, *Opt. Lett.* 16 (1991)) sztuczna gwiazda przewodnia uzyskana była na wysokości 90 km w warstwie mezosferycznego sodu na skutek rezonansowego rozpraszania światła lasera. Metoda ta powinna być lepsza od przedstawionych powyżej, ale obecnie zbudowanie lasera o odpowiedniej mocy, częstotliwości światła i długości impulsu napotyka istotne trudności techniczne.

Interesujące jest to, że systemy optyki adaptacyjnej można w zasadzie wbudować we wszystkie istniejące teleskopy. Co więcej, uzyskane wyniki dowodzą, że w niedalekiej przyszłości systemy optyki adaptacyjnej powinny umożliwić poprawę zdolności rozdzielczej największych naziemnych teleskopów na tyle, żeby mogły konkurować z teleskopami umieszczanymi poza atmosferą ziemską. Ostatnio prowadzone są też prace nad wykorzystaniem sieci neuronowych do optyki adaptacyjnej zamiast tradycyjnych technik komputerowych. Może to nie tylko uprościć algorytmy korekcyjne, ale ich zdolność uczenia się może umożliwić optymalne korygowanie zaburzeń atmosferycznych.

Czy to oznacza, że teleskop Hubble'a (i inne teleskopy kosmiczne) będzie zupełnie niepotrzebny? Niestety, nie. Optyka adaptacyjna prawdopodobnie będzie najbardziej efektywna w zakresie podczerwonym, gdzie zaburzenia atmosferyczne są stosunkowo niewielkie. W zakresie widzialnym trudno będzie jednak konkurować z teleskopem Hubble'a, a w ultrafiolecie teleskop Hubble'a będzie bezkonkurencyjny, bo atmosfera praktycznie nie przepuszcza ultrafioletu.

## Pociągające zaokrąglenia

Kiedy 2 400 lat temu okazało się, że świat jest zbyt bogaty na to, by można było go opisać za pomocą stosunków dwu liczb naturalnych, w naturalny sposób postanowiono posiadany zbiór liczb wzbogacić i tak powstały liczby rzeczywiste. Konkretnie zrobił to Eudoksos przy użyciu zmyślnie wprowadzonej teorii proporcji, ale nie to jest tu ważne.

Z początku (a początek ten trwał ponad dwa tysiące lat) wszystko było w porządku. Proporcje Eudoksosa (nazywane liczbami rzeczywistymi dopiero od XIX wieku) służyły najpierw matematykom, potem fizykom, technikom, w końcu całej nauce (tej zwanej po angielsku *science*, a nie tej zwanej *art*). Służyły ofiarnie i uczciwie. Zło ujawniło się dopiero wtedy, gdy zaczęto przyglądać się im samym (zamiast ich po prostu używać). Okazało się mianowicie, że przeważająca część z nich nigdy nikomu do niczego potrzebna nie była i nie będzie.

W wyniku dowolnego pomiaru otrzymać możemy jedynie liczbę wymierną – tak już są skonstruowane nasze przyrządy. Złudzenie, że niektóre pomiary dają inne wyniki, bierze się stąd, iż jednostkę, w której mierzymy, możemy mianować liczbą niewymierną – np. stwierdzając, że jakiś kąt jest prosty możemy sądzić, iż zmierzylismy  $\frac{\pi}{2}$ , ale będzie to tylko zakamuflowany opis tego, że jest to  $\frac{1}{4}$  kąta pełnego.

Nasuwa się więc pytanie, po co było wprowadzać także inne liczby (poza wymiernymi), skoro i tych jest aż nadto. Bo istotnie, wszystkich liczb wymiernihych też nie potrzebujemy. Czy ktoś może rzeczywiście do czegoś rozsądnego potrzebować liczby, powiedzmy,

$$10^{10^{10^{10^{10}}}}$$

albo czegoś jeszcze większego? W *Kalejdoskopie matematycznym* Steinhausa można znaleźć szereg uwag na ten temat. O ile mi wiadomo, w *Księdze Guinnessa* nie ma odnotowanej największej liczby, jaka była komuś (poza matematykami) do czegoś potrzebna – nie wypada jednak wątpić, że liczba taka istnieje.

Niedwuznacznie zostało wyżej napisane, że matematycy zajmują się rzeczami niekoniecznie rozsądnymi. Nadając tej wypowiedzi sens pickwickowski spróbujmy jednak odpowiedzieć na pytanie, dlaczego matematycy natworzyli tyle liczb, dla których realne odpowiedniki *de facto* nie istnieją. Odpowiedź, że musieli, jest tylko odwiekaniem odpowiedzi – co ich, mianowicie, do tego zmuszało?

Faktyczna odpowiedź tkwi już u samego źródła. Kiedy stwierdzono, że przekątna kwadratu nie jest wymierną wielokrotnością jego boku, do wyboru były trzy możliwości: albo uznać, że nie należy ich porównywać (na co żaden uczony nigdy przystać nie powinien), albo uznać, że nie zawsze prawdziwe jest twierdzenie Pitagorasa (czyli że zachodzi tylko dla trójkątów, których długości boków są wymiernymi wielokrotnościami tzw. trójek pitagorejskich), albo wreszcie dopuścić istnienie liczby  $\sqrt{2}$ . To ostatnie rozwiązanie dawało przyjemną okrągłość teorii i na nie się zdecydowano. Tyle że kontynuując dbałość o kształt teorii trzeba się było zdecydować i na inne liczby niewymierne. Trzeba więc było stworzyć elegancką teorię wszelkich liczb – idea istnienia kresu zbioru ograniczonego spełniała wszelkie wymogi pod tym względem (czy też równoważna teoria przekrojów). W konsekwencji otrzymano (właśnie dla owej ogólności i elegancji)

Niech dany będzie zbiór  $X$ . Miara  $m$  (unormowana... itd.) jest to funkcja, która przyporządkowuje każdemu podzbiorowi zbioru  $X$  pewną liczbę nieujemną w taki sposób, że spełnione są następujące warunki:

1)  $m(\emptyset) = 0$ ,  $m(X) = 1$ .

2) Jeśli  $A_1, A_2, \dots, A_n$  są rozłącznymi podzbiorami zbioru  $X$ , to

$$m(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = m(A_1) + m(A_2) + \dots + m(A_n).$$

Może wyjaśnimy tę bardzo długą nazwę: miara unormowana...

Otóż, słowo unormowana oznacza, że  $m(X) = 1$ . Warunek 2) nazywa się skończoną addytywnością. Wprowadza się też w matematyce miary, które nie muszą spełniać warunku  $m(X) = 1$ . Wówczas nie nazywa się ich unormowanymi. W warunku zaś 2) często sumy skończone zastępuje się sumami nieskończonymi i wówczas mówi się, że miara jest przeliczalnie addytywna. Wreszcie, na ogół nie zakłada się, że miara mierzy wszystkie podzbiory, to znaczy zakłada się, że funkcja  $m$  jest określona tylko dla niektórych podzbiorów zbioru  $X$ .

W dalszym jednak ciągu mówiąc o mierze będziemy mieli na myśli miarę unormowaną, skończoną addytywną, mierzącą wszystkie podzbiory zbioru  $X$  (por. mój artykuł w *Delcie* 11/1991). No dobrze, ale co to ma wspólnego z dzieleniem tortu?

Otóż, dla każdej osoby dany kawałek tortu przedstawia jakąś wartość. Umawiamy się, że cały tort dla każdej osoby ma wartość 1. (Można się, na przykład, umówić, że owa wartość to ilość pieniędzy, które ta osoba zapłaciłaby, aby dostać dany kawałek tortu, przy czym waluta jest tak dobrana, że za cały tort ta osoba chciałaby zapłacić 1.)

A więc takie przypisywanie wartości różnym kawałkom tortu to nic innego tylko miara!

Oczywiście, ponieważ różne osoby mają różne preferencje – jeden woli nawet dostać mniejszy kawałek, byle z rodzynkiem – więc dla różnych osób dany kawałek tortu ma inną wartość. Czyli, innymi słowy, mamy  $n$  miar  $m_1, m_2, \dots, m_n$  opisujących gusty osób czekających na tort.

Miary te mają jeszcze jedną własność. Mianowicie, jeśli kawałek  $K$  przedstawia dla  $i$ -tej osoby wartość  $m_i(K) > 0$ , to może ona z tego kawałka odciąć mniejszy  $K' \subseteq K$ , taki że  $m_i(K')$  jest dowolną liczbą dodatnią mniejszą od  $m_i(K)$ . Czyli, innymi słowy,  $i$ -ta osoba może z kawałka  $K$  odciąć część  $K'$  o upatrzonej z góry wartości. Własność tę nazywa się nieograniczoną podzielnością. A więc, jak zauważył Banach, tłumacząc na język teorii miary powyższą procedurę dzielenia tortu otrzymujemy natychmiast dowód następującego twierdzenia.

*Jeśli  $m_1, m_2, \dots, m_n$  są miarami nieograniczenie podzielnymi, unormowanymi, skończenie addytywnymi, mierzącymi wszystkie podzbiory zbioru  $X$ , to tak możemy rozbić zbiór  $X$  na zbiory rozłączne  $K_1, K_2, \dots, K_n$ , że*

$$m_1(K_1) \geq \frac{1}{n}, \quad m_2(K_2) \geq \frac{1}{n}, \dots \\ \dots, \quad m_n(K_n) \geq \frac{1}{n}.$$

Zauważmy, że warunek  $m_i(K_i) \geq \frac{1}{n}$  oznacza, że w subiektywnym odczuciu  $i$ -tej osoby dostała ona nie mniej niż  $1/n$ -tą część tortu.

Jak już zauważyliśmy, dowód tego twierdzenia jest dokładnym powtórzeniem procedury podziału pragmatycznego.

Powiedzieliśmy, że istnieje wiele modyfikacji pojęcia miary. Banach zresztą sformułował swoje twierdzenie dla inaczej zdefiniowanej miary. Twierdzenie Banacha doczekało się uogólnienia. W 1940 r. radziecki matematyk Liapunow udowodnił bardzo abstrakcyjne twierdzenie o tzw. miarach wektorowych, z którego to twierdzenia wynika w szczególności twierdzenie Banacha. Ciekawe, czy Liapunow wiedział coś o podziale pragmatycznym tortu?

teorię, w której istotnie używane liczby (z powodu których teorie tworzone) stanowią zaniedbywalny margines. Nawet te liczby, od których ulepszanie się zaczęło – pierwiastki z liczb naturalnych czy wymiernych – też okazują się marginesowe. Nawet jeśli za przyzwoitsze liczby uznamy te, które są pierwiastkami dowolnych wielomianów o współczynnikach wymiernych (liczby algebraiczne), to i tak tych innych (przestępnych) będzie nieskończenie wiele razy więcej.

Pierwsze liczby przestępne odkrył Liouville w 1844 roku. Były to liczby postaci

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{10^{i!}},$$

gdzie  $c_i$  to dowolne z liczb naturalnych spełniających warunek  $1 \leq c_i \leq 9$ . To, że liczb przestępnych jest tak wiele, uświadomił matematikom trzydzieści lat później Cantor.

Jest cały szereg fajnych twierdzeń o liczbach należących do nieużywanej większości – większość z tych twierdzeń mówi o ich ekspansjonistycznym charakterze, np.:

*jeśli  $\alpha$  i  $\beta$  są liczbami algebraicznymi ( $\alpha \neq 0, 1$ ) i  $\beta$  jest niewymierna, to  $\alpha^\beta$  jest liczbą przestępną.*

Ale faktycznie wskazują one, że w pogoni za ładnie ogólnymi teoriami matematycy zapędzili się daleko poza świat (cóż tu ukrywać) normalnych ludzi.

Zjawisko opisane tu na przykładzie liczb jest w matematyce zjawiskiem typowym. Podobnie, goniąc za odpowiednio zaokrągloną teorią funkcji wyprodukowano dla niej definicję tak ogólną, że dziś mamy funkcje ciągle nigdzie nie różniczkowalne, wszędzie różniczkowalne i równocześnie w żadnym przedziale nie monotoniczne itd., itp. Właściwie w każdej gałęzi matematyki spotykamy podobne sytuacje. Ta część matematyki, która powstała z zewnętrznej (w stosunku do matematyki) potrzeby, jest w każdej z jej gałęzi znikomo mała. Stanisław Lem ustami bohaterów *Księgi robotów* twierdzi, że aby pokonać smoka, trzeba stworzyć ogólną teorię smoków, w której ten smok, o którego chodzi, będzie szczególnym, łatwym do rozwiązania przypadkiem. Rzeczywiście, często tak jest łatwiej. Matematycy poszli jednak dalej – ogólną teorię smoków gotowi są tak rozbudować, że same smoki staną się mało zauważalnym obiektem zainteresowania powstałej teorii, ale za to teoria nabierze pociągających, opływowych, wręcz zmysłowo na jej twórców oddziałujących kształtów.

Ale, Szanowni Niematematycy, przyznajcie: czyż nie jest to sytuacja (jak powiedział marszałek Radetzky na polu bitwy pod Custozzą) godna zawiści?

Marek KORDOS

Żył kiedyś człowiek,  
który uczył się, jak zabijać smoki  
i oddał wszystko, co miał,  
aby opanować tę sztukę.

Po trzech latach  
osiągnął mistrzostwo.  
Nigdy jednak nie miał okazji  
wykorzystać swoich umiejętności.

Dschuang Dsi

I wtedy zaczął uczyć innych,  
jak zabijać smoki.

René Thom

Piotr PISKORSKI

Wszyscy chyba znają sztuczkę – żart „... pomyśl jakąś liczbę, zrób z nią to, co Ci powiem,... Wyszło 1...”.

Pokażę inną sztuczkę matematyczną: zgadywanie wielomianów. Chciałbym się nią z Wami podzielić (znaleźć ją można w książce W.W. Sawyera *W poszukiwaniu modelu matematycznego*). Zaczniemy od wielomianu drugiego stopnia. Pomyślcie sobie jakiś wielomian i podajcie jego wartości dla 0,1,2,3,... Wystarczyłoby od 0 do 3, a nawet do 2, ale od przybytku głowa nie boli. Mój kolega podał mi takie liczby: -1,4,15,32,55,84,... Jaki był jego wielomian? Aby go odgadnąć, zapiszę te wartości w linii, a pod spodem ich różnice, różnice różnic,... itd.

<b>w</b>	-1	4	15	32	55	84
<b>1</b>	5	11	17	23	29	
<b>2</b>		6	6	6	6	
<b>3</b>			0	0	0	

Dla wielomianu drugiego stopnia są to trzy wiersze, a dalej same zera.

Można zacząć zgadywać. Otóż, współczynnik przy  $x^2$  to połowa liczby, na której nasze różnice się ustaliły (wiersz **2**), w naszym przypadku  $(1/2) \times 6$ , czyli 3, wyraz wolny to pierwsza wartość wiersza początkowego **w**, (u nas -1), a współczynnik przy  $x$  to różnica pierwszego wyrazu w wierszu **1** i współczynnika przy  $x^2$  (obliczonego przez nas przed chwilą),  $5 - 3 = 2$ . Wielomian, którego szukaliśmy, to  $W(x) = 3x^2 + 2x - 1$ .

Wiemy już, jak się to robi. Pozostaje pytanie, dlaczego tak jest. Aby to wykazać, weźmy dowolny wielomian  $Q(x) = ax^2 + bx + c$  i jego wartości dla  $x = 0, 1, 2, 3$ . Otrzymujemy  $Q(0) = c$ ,  $Q(1) = a + b + c$ ,  $Q(2) = 4a + 2b + c$ ,  $Q(3) = 9a + 3b + c$ . Zróbmy to, co już robiliśmy przed chwilą, wypiszmy trójkąt różnic.

$c$	$(a + b + c)$	$(4a + 2b + c)$	$(9a + 3b + c)$
$(a + b)$	$(3a + b)$	$(5a + b)$	
	$2a$	$2a$	
		$0$	

Oto, na czym polega ta sztuczka. Jest już na pewno jasne, dlaczego można szybko i bez problemów w ten sposób zgadywać współczynniki wielomianu. Sztuczkę taką łatwo opracować i dla innych stopni wielomianów. Spróbujcie sami opracować metodę zgadywania, na przykład, dla wielomianu stopnia trzeciego. Niecierpliwi mogą skorzystać z trójkąta różnic podanego poniżej dla  $R(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ .

$d$	$(a + b + c + d)$	$(8a + 4b + 2c + d)$	$(27a + 9b + 3c + d)$	$(64a + 16b + 4c + d)$
$(a + b + c)$	$(7a + 3b + c)$	$(19a + 5b + c)$	$(37a + 7b + c)$	
	$(6a + 2b)$	$(12a + 2b)$	$(18a + 2b)$	
	$6a$		$6a$	
		$0$		

Jak widać, sposób odgadywania w tym przypadku jest trudniejszy. Jaki? Odpowiedzcie na to pytanie sami. Można by tę zabawę ciągnąć dalej. Zobaczmy, ile wierszy niezerowych będzie miał trójkąt dla wielomianu  $k$ -tego stopnia. Mamy powyżej odpowiedź dla  $k$  wynoszącego 2 i 3.

Zobaczmy, jak to wygląda dla  $k = 1$ . Wielomian  $W(x) = ax + b$ , przyjmuje wartości:

$b$	$a + b$	$2a + b$	$3a + b$	$4a + b$	$5a + b$	...
$a$	$a$	$a$	$a$	$a$	$a$	...
0	0	0	0	0	0	...

czyli ma dwa wiersze różne od zera. Porównajmy z innymi przypadkami: wielomian drugiego stopnia ma trzy rzędy, trzeciego – cztery. Czyżby zawsze liczba wierszy była o jeden większa od stopnia wielomianu? Nie będziemy tego dowodzić, sprawdzimy tylko, czy nasz wniosek jest prawdziwy, na przykład, dla  $x^6$ , najprostszego wielomianu stopnia szóstego.

0	1	64	729	4096	15625	46656	117649
1	63	665	3367	11529	31031	70993	
	62	602	2702	8162	19502	39962	
	540	2100	5460	11340	20460		
	1560	3360	5880	9120			
	1800	2520	3240				
	720	720					
	0						

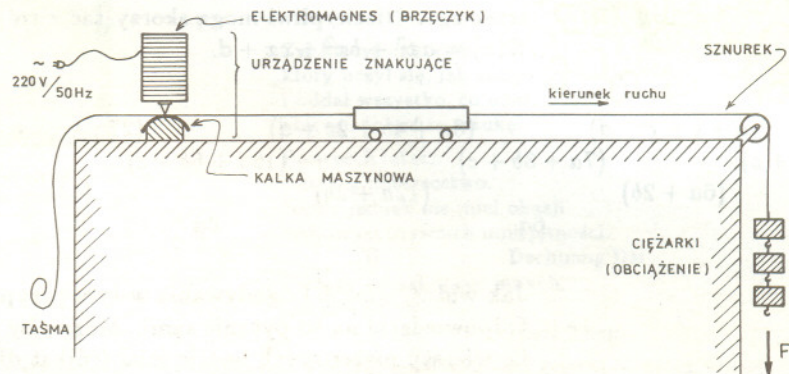
Otrzymaliśmy siedem niezerowych wierszy. Chyba się zgadza...

Czy trójkąty różnic mogą się przydać do czegoś innego? Ależ tak. Możliwość ich zastosowania jest przeogromna. Jednym z zastosowań metody różnic skończonych, jak oficjalnie nazywają się nasze trójkąty, jest znajdowanie kolejnej lub brakującej liczby w jakimś ciągu bez znajdowania jego wzoru. W bardzo wielu przypadkach udaje się ją obliczyć w poniższy sposób. Jest to szczególnie łatwe, gdy mamy do czynienia z ciągiem wielomianowym (o ile mamy wystarczająco dużo informacji o tym ciągu). Zajmę się tylko tym przypadkiem. Weźmy ciąg  $?_1; 6; 23; 58; 117; 206; ?_2$ . Załóżmy, że są to wyrazy jakiegoś wielomianu stopnia trzeciego. Wypiszmy dla niego trójkąt różnic.

$?_1$	6	23	58	117	206	$?_2$	$?_2$	$?_2$
$C$	17	35	59	89	$Z$			
$B$	18	24	30	$Y$				
$A$	6	6	$X$					

Zauważmy, że ostatni wiersz w trójkącie będzie zawierał szóstkę, mamy więc  $A = 6$  i  $X = 6$ . Obliczymy  $B$ :  $18 - B = 6$ , czyli  $B = 12$ . Postępując tak samo otrzymujemy:  $Y = 36$ ,  $C = 5$ ,  $Z = 125$ ,  $?_1 = 1$  oraz  $?_2 = 331$ . W ten sposób obliczyliśmy brakujące wyrazy ciągu nie znając i nie znajdując jego wzoru. Możemy go jednak szybko znaleźć. Rozwiążcie to sami. Odpowiedź, jaki to jest ciąg, znajdziecie na końcu artykułu. Dla niektórych ciągów metoda ta zawodzi lub jest mało skuteczna. Przykładami takich ciągów są  $5^n$  i  $n!$ ...

Na koniec krótko o praktycznym zastosowaniu metody różnic skończonych w opracowywaniu wyników doświadczenia z fizyki. Przyjrzyjmy się doświadczeniu.





**Rozwiązanie zadania F 888.**  
Efekty dyfrakcyjne pierwszego rzędu pojawiają się przy spełnieniu warunku  $d \sin \theta = \lambda$ , gdzie  $\theta$  oznacza kąt ugięcia fali na pileczcze. Ponieważ  $\sin \theta \approx \frac{d}{2x}$  ostatecznie otrzymujemy  $x \approx \frac{d^2}{2\lambda} = 1,3 \text{ km}$ .



**Rozwiązanie zadania F 884.**  
Pole magnetyczne elektromagnesu nie może przekroczyć stanu nasycenia. Rozsądźmy na małą odległość  $x$  belkę i magnes, wówczas w szczelinie pojawi się pole magnetyczne o energii  $E = \frac{1}{2\mu_0} B^2 Sx$ , gdzie  $S$  jest powierzchnią styku. Ta energia jest równa pracy, jaką należało wykonać rozsuwając belkę i elektromagnes  $W = F \cdot x$ , stąd siła przyciągania  $F = \frac{1}{2\mu_0} B^2 S$ .  
Dzieliąc przez  $S$  otrzymujemy ciśnienie  $p = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = 1,9 \cdot 10^6 \text{ Pa} \approx 19 \text{ atm}$ .

Do wózka ściganego przez ciężarek na sznurku doczepiona jest taśma papierowa. Podczas ruchu wózka zaznaczane są na niej kropki co 0,02 s. W ten sposób rejestrowana jest droga przebywana przez wózek. Pierwsze kropki były tak gęsto, że nie mogłem paru odróżnić, a co dopiero zmierzyć odległości między nimi – musiałem je odrzucić. Podane odległości to droga od początku taśmy do kolejnej (nie wiemy której) kropki. Oto otrzymane dane (mierzone w centymetrach): 2; 2,5; 3,3; 4,4; 5,75; 7,4; 9,33; 11,56; 14,09; 16,92;... Załóżmy, że tworzą one ciąg wielomianowy. Wypiszmy kolejne wiersze różnic:

2	2,5	3,3	4,4	5,75	7,4	9,33	11,56	14,09	16,92
0,5	0,8	1,1	1,35	1,65	1,93	2,23	2,53	2,83	
	0,3	0,3	0,25	0,3	0,28	0,3	0,3	0,3	
		0	-0,05	0,05	-0,02	0,02	0	0	

Zauważmy, że różnice w czwartym wierszu różnią się nieznacznie, prawie wszystkie są równe 0. Przyjmując, że są równe zeru, otrzymalibyśmy trzy niezerowe wiersze. Byłyby to więc ciąg wyrazów wielomianu drugiego stopnia. I rzeczywiście, w ruchu jednostajnie przyspieszonym droga jest proporcjonalna do kwadratu czasu (książki podają wzór  $s = at^2/2$ ). W ten sposób otrzymaliśmy zależność (a nie konkretny wzór) drogi od czasu w ruchu jednostajnie przyspieszonym. Można się zastanawiać, jak tą metodą opracowywać ciągi innego typu niż wielomiany.

Nasz szukany ciąg to:  $a_n = n^3 + 3n^2 + n + 1$ .



**Rozwiązanie zadania M 681.**  
Wystarczy udowodnić, że  $a_1 > [2n/3]$ . Jeżeli by tak nie było, to  $3a_1 \leq 2n$ , skąd, jak łatwo zauważyć, wśród liczb  $\{n+1, \dots, 2n\}$  byłyby co najmniej dwie różne wielokrotności  $a_1$ . Oczywiście, każda z liczb  $a_2, \dots, a_n$  też ma wielokrotność wśród liczb  $\{n+1, \dots, 2n\}$ . Łącznie otrzymalibyśmy co najmniej  $n+1$  różnych liczb w zbiorze  $\{n+1, \dots, 2n\}$  (gdyż  $NWW(a_i, a_j) > 2n$  dla  $i \neq j$ ). Stąd sprzeczność.

Strefy polarne chyba zawsze kojarzą się z zimnem i mrokiem. Wszyscy bowiem wiemy, że w okolicach ziemskich biegunów Słońce jest zawsze widoczne nisko nad horyzontem, bywają dłuższe okresy, gdy w ogóle nie pojawia się nad horyzontem i w rezultacie jest tam zimno i niegościnnie. Tak jest na Ziemi, ale czy na każdej planecie? Otóż, Uran jest pod tym względem wyjątkiem. Jego oś obrotu leży niemal w płaszczyźnie jego orbity, a zatem są okresy, gdy Słońce niemal prostopadle oświetla bieguny planety. Nie wynika wprawdzie z tego, że wtedy jest tam gorąco, bo Uran w ogóle jest daleko od Słońca, niemniej jednak strefa gorąca formalnie obejmuje też bieguny. Zresztą z tego samego powodu strefy polarne sięgają do równika planety. Ciekawe, gdzie wobec tego są na Uranie strefy umiarkowane?

\*

Jak hamowanie wpływa na prędkość? Chociaż pytanie brzmi niepoważnie, okazuje się jednak, że odpowiedź nie musi być standardowa. Sztuczny satelita, wskutek oporu stawianego mu przez szczątkową atmosferę na wysokości kilkuset kilometrów, na pewno traci energię. Ale przy ruchu keplerowskim energia  $\mathcal{E}$  na orbicie wiąże się jednoznacznie z wielkością pólśi  $a$  tej orbity:

$$a = -\frac{GMm}{2\mathcal{E}},$$

gdzie  $M$  i  $m$  to masy Ziemi i satelity,  $G$  – stała grawitacji. W ruchu po elipsie energia jest ujemna (półś orbita jest dodatnia), a więc jej malenie musi powodować malenie pólśi. Satelita więc, wskutek oporu powietrza opada (co jest zgodne z intuicją) – ale na niższej orbicie musi poruszać się szybciej, bo tego wymaga trzecie prawo Keplera, a to już nie jest takie oczywiste. Krótko mówiąc, hamowanie (byłe słabe!) powoduje wzrost prędkości.







# mała delta

## O dzieleniu batonika na trzy równe części i podobnie trudnych problemach

Jeśli masz brata albo siostrę, to na pewno wiele razy przychodziło Ci dzielić na dwie części ciastko, czekoladkę, jabłko czy np. Twój ulubiony batonik *Mars*. Zadanie to całkiem proste, jeżeli, oczywiście, pominąć sam przykry obowiązek dzielenia się z bliźnim.

Gorzej sprawa wygląda, gdy poza jednym bratem albo siostrą, rodzice postarali się o jeszcze jednego brata lub siostrę. Nie dość, że Tobie przypadnie mniejsza część batonika, to i podzielić go sprawiedliwie na trzy części jest sprawą nieprostą. Zadanie upraszcza się, gdy masz troje rodzeństwa – batonik dzielisz na połowę, a połówki na połówki. Moja metoda dzielenia na trzy równe części polega właśnie na wielokrotnym dzieleniu na cztery. A więc, batonik dzielimy na cztery części, trzy rozdajemy, a pozostałą ćwiartkę znów dzielimy na cztery, rozdajemy trzy itd. Jeśli będziemy dostatecznie cierpliwi, to każdemu przypadnie jedna trzecia całego batonika.

Niestety, dzielić batonik do nieskończoności mogą tylko matematycy. Zobaczmy więc, jaką część batonika dostaniemy po pierwszym, drugim i trzecim podziale. Po pierwszym  $\frac{1}{4} = 0,25$ , po drugim  $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16} = 0,3125$ , po trzecim  $\frac{5}{16} + \frac{1}{64} = \frac{21}{64} = 0,328125$ . A więc wystarczy trzy razy dzielić, by bardzo zbliżyć się do  $\frac{1}{3} = 0,333\dots$

Moją metodę podziału na trzy równe części można fachowo nazwać iteracyjną, tzn. taką, która do celu prowadzi za pomocą nieskończenie wielu takich samych kroków. Jeżeli, jak w naszym

przypadku, już po kilku krokach uzyskujemy dobrą dokładność, to metodę określamy jako szybko zbieżną.

Dzieląc batonik wiele razy na cztery zauważyliśmy, że

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots = \frac{1}{3}$$

A czemu równa się suma nieskończenie wielu wyrazów, z których każdy jest nie jedną czwartą, jak poprzednio, ale jedną drugą wyrazu poprzedzającego? Tzn. interesuje nas suma

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Wyobraźmy sobie Jasia łakomczucha, który wrócił ze szkoły do domu i na stole znalazł nie batonik *Mars*, ale *Prince Polo*, a obok kartkę od Mamy: „Podziel się z Kasią”. Kasia to siostra Jasia, ale nie ma jej w domu, bo gra „w gumę” na podwórku. Jaś odcina połowę batonika i zjada. Kasia nie wraca, a Jaś bardzo lubi słodczyce, więc po pewnym czasie odcina połówkę połówki. Kasia nadal gra „w gumę”, a Jaś odcinając za każdym razem połowę pozostającej części zjada kolejno jedną ósmą batonika, jedną szesnastą itd. Jeśli Kasia nie wróci do domu, to Jaś zje, oczywiście, cały batonik. A zatem

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = 1$$

Na koniec jeszcze jedno zadanie dla tych, którzy zrozumieli moje wywody. Ile wynosi nieskończona suma

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots ?$$

Małą Deltę przygotował Stanisław MRÓWCZYŃSKI

## Patrz w niebo

Ewolucja na ciągu głównym to najdłuższy i spokojny okres w życiu gwiazdy. Gwiazda świeci wtedy kosztem „spalania” wodoru. Ta sama reakcja zachodzi też w bombie wodorowej, jak wiemy, w sposób wybuchowy (i to jeszcze jak!), ale gwiazda potrafi sama utrzymywać produkcję energii na poziomie bardzo skromnym. Na przykład w centrum Słońca wydajność reakcji proton-proton jest raptem rzędu 0,01 W/kg, trzeba tylko pamiętać, że kilogramów Słońce ma sporo. Tak czy inaczej, skoro ten etap ewolucji trwa najdłużej, nic dziwnego, że ogromna większość gwiazd widocznych na niebie to gwiazdy ciągu głównego. Po zużyciu wodoru w centrum ewolucja gwiazdy toczy się znacznie szybciej. Gwiazdy powiększają swoje rozmiary, tracą zewnętrzne warstwy, niektóre wybuchają, w każdym razie są to burzliwe etapy życia, którym towarzyszy intensywniejsza produkcja energii, przez co te, w zasadzie rzadkie, zjawiska mogą być obserwowalne nieraz z wielkich odległości.

Przyroda jednak ma różne dziwne pomysły. Przede wszystkim utracie masy przez gwiazdę może towarzyszyć bardzo wydajna produkcja pyłu. Zaawansowana wiekiem gwiazda otacza się wtedy gęstym obłokiem tego pyłu i całe zjawisko zamiast przyciągać wzrok z daleka, staje się ledwo widoczne w podczerwieni. Satelita IRAS znalazł około 100 obiektów, których świecenie można właśnie w taki sposób wytłumaczyć. Pył otaczający gwiazdę przerabia jej promieniowanie krótkofalowe na podczerwone i odbiornik promieniowania rejestruje stosunkowo silną emisję w pasmach – jak w przypadku IRASa – 25, 60 i 100  $\mu\text{m}$ .

Wśród osobliwych obiektów mogą trafić się jednak jeszcze osobliwsze. Podczerwony obiekt o katalogowym numerze 09371+1212, położony w gwiazdozbiornie Lwa, okazał się nadspodziewanie jasny w pasmie 60  $\mu\text{m}$ . Obserwacje w innych zakresach widma sugerują, że mamy tu do czynienia z chłodną gwiazdą (typu M4) otoczoną ekspandującą otoczką i wszystko byłoby w porządku, gdyby nie ten właśnie nadmiar energii emitowanej w jednym pasmie. Dowodzi to bowiem, że w obłoku otaczającym gwiazdę zachodzi jakiś proces nietermiczny. Należało więc wykryć, jaka substancja może produkować takie nietypowe widmo. Nie może nią być gaz, bowiem nie byłby w stanie zaabsorbować tyle energii, ile obserwuje się w emisji – ale może nią być ciało stałe, mianowicie lód. Grupa astronomów z Grenoble kilka lat temu wykazała, że widmo z maksimum w pasmie 60  $\mu\text{m}$  może być wyprodukowane przez wodę otaczającą gwiazdę w postaci obłoku drobnych kryształków lodu o temperaturze nie wyższej od 65 K. Byłby to, jak dotychczas, jedyny znany obiekt tego rodzaju. Prawdę powiedziawszy, kilka innych źródeł podczerwieni również wykazuje nadwyżkę promieniowania w pasmie 60  $\mu\text{m}$ , ale znacznie mniejszą niż u 09371+1212. Obiekt ten, ze względu na wyjątkową w nim rolę lodu, proponowano nazwać „Lodową Mgławicą w Lwie”. Tak więc burzliwe późne stadia ewolucji ujawniają się niekiedy, jak widać, w sposób lekko szokujący: zamiast chmurą rozpalonych gazów, gwiazda otacza się chmurą pyłu lodowego!

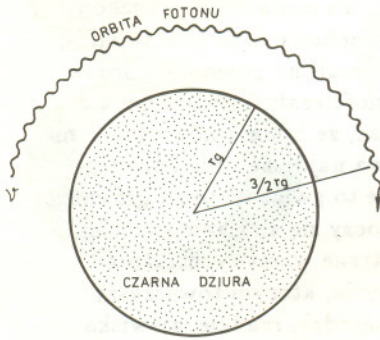
*Tomasz KWAST*

## Uwaga Olimpijczycy!

W *Delcie* 9/1992 będzie wydrukowana treść zadań z pierwszego (domowego) etapu Olimpiady Matematycznej. Zachęcamy do uczestnictwa!

# Fotony w polu grawitacyjnym

Tadeusz JARZĘBOWSKI



Rys. 1. W odległości  $3/2$  promienia grawitacyjnego  $r_g = 2GM/c^2$  fotony powinny krążyć wokół czarnej dziury po orbitach kołowych.

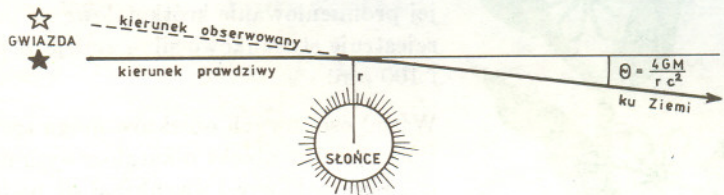
W szkole uczyliśmy się, że (w próżni) światło rozchodzi się po liniach prostych. Ale w pobliżu masywnych ciał tak nie jest – tu o prostoliniowości rozchodzenia się promieniowania elektromagnetycznego mówić już nie można. W silnym polu grawitacyjnym tor fotonu powinien ulegać zakrzywieniu.

Skrajny tego przypadek ilustruje rysunek 1. W bezpośrednim sąsiedztwie czarnej dziury – w odległości  $3/2$  jej promienia – fotony powinny krążyć wokół niej niczym satelita wokół planety. Do takiego wniosku prowadzi ogólna teoria względności Einsteina, tak miałyby to wyglądać w świecie o silnym zakrzywieniu czasoprzestrzeni.

Nie mamy, oczywiście, możliwości zaobserwowania obiegającego czarną dziurę promieniowania, jako że samo istnienie tych obiektów należy dziś jeszcze raczej do domeny teorii. Możemy natomiast dostrzec zachodzenie tego typu zjawiska w sąsiedztwie zwykłej gwiazdy. Nie jest to obiekt skondensowany, więc wpływ pola grawitacyjnego jest znacznie słabszy i, konsekwentnie, skala zjawiska skromniejsza. Na zmianę kierunku fotonu teoria Einsteina podaje tu wyrażenie

$$\Theta = \frac{4GM}{rc^2} \text{ (radianów).}$$

$M$  oznacza masę gwiazdy,  $r$  zaś to odległość, w jakiej przebiega foton.



Rys. 2. Przebiegające w pobliżu Słońca kwanty świetlne zmieniają kierunek. W następstwie tego gwiazdy, usytuowane na niebie w pobliżu Słońca, widoczne są trochę dalej od niego.

Mówiąc o gwieździe mamy, oczywiście, na myśli nasze Słońce. Zmiana kierunku będzie największa, gdy za  $r$  podstawimy minimalną, mającą jeszcze sens wartość, tj. promień Słońca. Wówczas

$$\Theta = 8,46 \cdot 10^{-6} \text{ rad} = 1,75''.$$

O taką wartość zmienić się zatem powinien kierunek fotonów przebiegających przy samej tarczy Słońca. Jak wynika ze wzoru, promieniowanie przebiegające w odległości, na przykład, pięciu promieni Słońca odchyli się o wartość pięciokrotnie mniejszą itp.

Konsekwencją tego zjawiska będzie fakt, iż gwiazdy, w pobliżu których znajduje się aktualnie na niebie Słońce, powinniśmy obserwować nieco dalej od niego (rys. 2). Weryfikacja teorii polega zatem na zmierzeniu tego przesunięcia. No cóż, gdybyśmy byli na Księżycu, sprawa prosta – tam w pobliżu świecącego Słońca widać gwiazdy. Ale nic z tych rzeczy na otulonej atmosferą powierzchni Ziemi. Jedyną i to dość skromną możliwość, jaką nam natura prawie każdego roku oferuje, stanowi ta minuta czy nieco więcej, w ciągu którego to czasu naszą gwiazdę przesłania Księżyc. Zadanie polega w tym przypadku na tym, by sfotografować fragment nieba z zaćmionym Słońcem i porównać ze zdjęciem otrzymanym pół roku wcześniej czy też później, gdy tę część nieba widać o północy. Jeżeli zjawisko występuje, pozycje gwiazd na kliszach powinny się różnić.

Pomiary takie wykonano po raz pierwszy w roku 1919, wkrótce po opublikowaniu pracy Einsteina. Konsekwentnie wykorzystywanych było następnie jeszcze kilkanaście zaćmień z lat późniejszych. Obserwacje potwierdzały przewidywane zmiany pozycji gwiazd, ale dokładność pomiarów nie jest tu zbyt wysoka. I nic dziwnego. Niewiele gwiazd da się dostrzec w czasie zaćmienia, zwłaszcza przy samym Słońcu, gdzie świeci korona; ich przemieszczenia na niebie są zaś tego rzędu, co rozmycie obrazów wywołane przez atmosferę ziemską. Otrzymane z pomiarów różnice w pozycjach gwiazd (przeliczone na skraj tarczy Słońca) wahały się w granicach od  $1,3''$  do  $2,7''$ . Rozrzut znaczny, niemniej wyniki te przechyliły już zdecydowanie szalę na korzyść relatywistycznego traktowania zjawiska. Trzeba tu bowiem dodać, że z mechaniki Newtona też wynika zmiana kierunku przebiegających koło Słońca fotonów, ale z takiego klasycznego traktowania zjawiska otrzymuje się wartość dwukrotnie mniejszą, mianowicie tylko  $0,87''$ .



### Rozwiązanie zadania M 682.

Niech  $v_n$  oznacza  $n$ -ty wyraz ciągu Fibonacciego ( $v_1 = v_2 = 1$ ,  $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$  dla  $n \geq 1$ ). Wtedy  $v_{m+1}v_{m+2} - v_m v_{m+3} = (-1)^m$  (indukcja!), a więc ze wzoru na różnicę arcus cotangensów mamy

$$\begin{aligned} & \operatorname{arctg} v_{2n} - \operatorname{arctg} v_{2n+1} = \\ &= \operatorname{arctg} \frac{v_{2n} v_{2n+1} + 1}{v_{2n+1} - v_{2n}} = \\ &= \operatorname{arctg} \frac{v_{2n} v_{2n+1} + 1}{v_{2n-1}} = \operatorname{arctg} v_{2n+2}. \end{aligned}$$

Sumując od  $n = 1$  do  $N$  dostajemy

$$\begin{aligned} & \operatorname{arctg} v_1 = \operatorname{arctg} v_2 = \\ &= \sum_{n=1}^N \operatorname{arctg} v_{2n+1} + \operatorname{arctg} v_{2N+2}, \end{aligned}$$

i stąd żądany wynik przy  $N \rightarrow \infty$ .

Tak było do lat sześćdziesiątych. Nowe, nie znane przedtem możliwości badania tego zjawiska pojawiły się wraz z rozwojem astronomii radiowej. Pozytywnie kosmicznych źródeł promieniowania radiowego wyznaczać bowiem można ze znacznie większą dokładnością. Osiąga się to przez zastosowanie połączonych ze sobą odległych radioteleskopów – tzw. interferometrów. Tymczasem atmosfera ziemska nie przeszkadza tu już tak, jak w dziedzinie widzialnej.

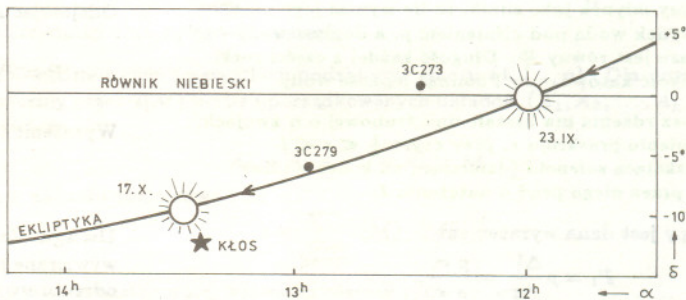
Ale *ad rem*.

Spójrzmy na wzór opisujący zmianę kierunku. Nie występuje w nim długość fali (czy też częstotliwość) promieniowania. Takiej samej zmianie kierunku podlegają więc zarówno fale świetlne, jak i rentgenowskie czy też radiowe. No więc właśnie – fale radiowe. Te docierają do powierzchni naszej planety przy niebie pogodnym, jak i podczas deszczu; przy ich odbiorze nie przeszkadza świecąca atmosfera, rejestruje się je tak samo w dzień, jak i w nocy.

Jeśli zatem do badania omawianego zjawiska zamiast gwiazdy emitującej fale widzialne wybierzemy „gwiazdę” wysyłającą fale radiowe, to na żadne zaćmienie Słońca nie trzeba będzie już czekać. Zmiany pozycji tego obiektu będzie można wyznaczać każdego stosownego dnia, gdy tylko Słońce jest nad horyzontem.

Najlepiej nadają się do tego celu kwazary. Z uwagi na ich dużą odległość są to radioźródła idealnie punktowe – a do badania pozycji takie właśnie są potrzebne. Mogą tu służyć, oczywiście, tylko te usytuowane w pobliżu linii ekliptyki, po której wędruje w ciągu roku Słońce.

Wybór padł najpierw na dwa znane, bliskie kwazary: 3C 273 i 3C 279. Leżą one w gwiazdozbiornie Panny, stosunkowo niedaleko punktu równonocy jesiennej i gwiazdy Kłos ( $\alpha$  Virginis). Ich położenie na niebie ukazuje rysunek 3. W pobliżu pierwszego z nich Słońce przechodzi około 1 października; drugi leży prawie na samej ekliptyce, Słońce przesłania go tydzień później. Koniec września, pierwsza połowa października – to najstosowniejsza zatem pora do badania wpływu pola grawitacyjnego Słońca na promieniowanie radiowe biegnące od tych kwazarów. Obserwacje prowadzono w ciągu pięciu kolejnych jesieni, poczynając od roku 1969. Radioteleskopy wyznaczały pozycje tych kwazarów przez około dziewięć godzin każdego dnia. W latach 1974–75 wzięto na warsztat trójkę innych kwazarów (o oznaczeniach: 0111, 0116, 0119). Ta trójka to obiekty wiosenne; Słońce przechodzi koło nich w kwietniu.



Rys. 3. Położenie na niebie kwazarów 3C 273 i 3C 279. Podane daty odpowiadają położeniu Słońca na ekliptyce.

Wyniki wszystkich tych badań były zupełnie jednoznaczne. Gdy Słońce, w swej rocznej wędrówce po ekliptyce, zbliżało się do kwazara, jego obserwowana pozycja z lekka zmieniała się. W miarę zaś oddalania się Słońca położenie kwazara wracało do pierwotnego. W pierwszych latach obserwacji dokładność pomiarów była rzędu jednej dziesiątej sekundy, pod koniec osiągnięto już dokładność jednej setnej. No, a co najważniejsze, zmierzona wartość odchylenia wynosi dokładnie tyle, ile Einstein przewidział, tj.

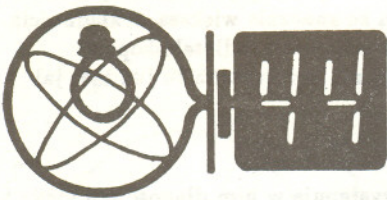
$$\Theta = 1,75 \pm 0,01.$$

Relatywistyczne zakrzywienie toru fotonów w pobliżu dużych mas nie podlega więc już dziś żadnej wątpliwości. Badania radioastronomiczne potwierdziły to jednoznacznie.

Na koniec, w ramach dygresji, zwróćmy jeszcze uwagę, że tzw. soczewki grawitacyjne, na istnienie których wskazywały obserwacje w ostatnich latach, to jest to samo zjawisko, o którym w tym artykule mowa. Tematyki tej nie będziemy tu jednak poruszać.

### Rozwiązanie zadania M 688.

W koło jednostkowe o środku w początku układu współrzędnych  $(0, 0)$  wpisujemy 1993-kąt foremny tak, aby punkt  $(1, 0)$  był wierzchołkiem. Wierzchołki są końcami wektorów o początku w  $(0, 0)$ . Suma tych wektorów jest wektorem zerowym  $[0, 0]$  (dlaczego?). Stąd suma wektorów różnych od  $[1, 0]$  jest równa  $[-1, 0]$ . Żaden z tych wektorów nie leży na osi  $x$ . Ponadto wektory z górnej półpłaszczyzny ( $y > 0$ ) są symetryczne do wektorów z dolnej półpłaszczyzny, a więc mają takie same  $x$ -owe składowe jak odpowiednie wektory z dolnej półpłaszczyzny, stąd suma  $x$ -owych składowych wektorów z górnej półpłaszczyzny jest równa  $-1/2$ . Ale suma ta jest równa szukanemu przez nas wyrażeniu.



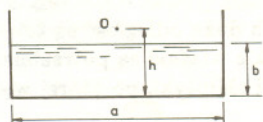
Termin nadsyłania rozwiązań:

31 VIII 1992

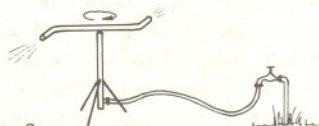
Czołówka ligi zadaniowej  
**Klub 44 F**

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 123 (WT=1,97) i 124 (WT=2,87)  
z numeru 9/1991

Adam Sikorski	- Lublin	38,29
Paweł Ferkowski	- Szczecin	36,05
Andrzej Borowski	- Aleksandrów K.	17,33
Tomasz Wietecha	- Tarnów	15,88
Przemysław Gworys	- Częstochowa	15,20



Rys. 1



Rys. 2

**Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/1992**

Przypominamy treść zadań:

**131.** Młynek Segnera (rys.2) działa na zasadzie odrzutu: do rurki z zagiętymi końcami doprowadza się w środku wodę, która wypływa przez końce wprawiając rurkę w ruch obrotowy. Jeśli potraktujemy młynek jako silnik, to ile wynosi jego moc? Pompa zasila młynek wodą pod ciśnieniem  $p$ , a dopływ wody na jednostkę czasu jest równy  $\frac{m}{t}$ . Długość każdej z części rurki wynosi  $r$ , a prędkość katowa  $-\omega$ . Pomińmy lepkość wody.

**132.** Solenoid bez rdzenia ma kształt linii śrubowej o  $n$  zwojach, długości  $l$  i promieniu przekroju  $r$ , przy czym  $\frac{l}{r} \ll r \ll l$ . Obliczyć siłę ściskającą solenoid (działająca na końce wzdłuż osi), gdy płynie przez niego prąd o natężeniu  $I$ .

**131.** Moc pompy jest dana wyrażeniem

$$P_1 = p \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{p}{\rho} \frac{m}{t},$$

gdzie  $\rho$  – gęstość wody. Pomijamy tu dla uproszczenia energię kinetyczną wody w przewodzie zasilającym młynek, tzn. zakładamy, że jest on dość szeroki (w przeciwnym przypadku należałoby zastąpić we wzorach ciśnienie początkowe  $p$  wyrażeniem  $p + \frac{1}{2} \rho v_0^2$ , gdzie  $v_0$  – prędkość początkowa wody). Prędkość wypływu wody z naczynia, w którym ciśnienie wynosi  $p$ , można obliczyć z równania Bernoulliego (tzn. z zasady zachowania energii) – w wyniku otrzymuje się

$$v = \sqrt{\frac{2p}{\rho}}$$

Rozpatrując ruch wody w obracającym się układzie odniesienia związanym z rurką, należy dodać do ciśnienia  $p$  ciśnienie odśrodkowe. Jego różniczka jest dana wyrażeniem  $\rho \cdot a_{ods} \cdot dr = \rho \omega^2 r dr$ ; po scałkowaniu mamy  $\frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2$ , zatem prędkość wypływu wody względem rurki wynosi

$$v_w = \sqrt{\frac{2}{\rho} \left( p + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 \right)} = \sqrt{\frac{2p}{\rho} + \omega^2 r^2}.$$

**Skrót regulaminu**

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 3$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1992.

**Zadania z fizyki nr 139, 140**

Redaguje Jerzy B. BROJAN

**139.** Na ekranie obserwujemy prążki powstałe w wyniku interferencji światła z dwóch niejednakowo silnych źródeł spójnych. Natężenie oświetlenia ekranu w środku prążków jasnych jest  $n$  razy większe niż natężenie oświetlenia w środku prążków ciemnych. Ile razy większe jest natężenie oświetlenia ekranu przez silniejsze źródło (gdy słabsze jest wyłączone) od natężenia oświetlenia przez słabsze (gdy silniejsze jest wyłączone)?

**140.** Prostopadłościenną naczynię ma szerokość  $a$ , a ciecz wypełnia je do wysokości  $b$  (rys.1). Naczynię może się obracać swobodnie wokół osi  $O$  prostopadłej do płaszczyzny rysunku i leżącej w odległości  $h$  od dna oraz w odległości  $\frac{a}{2}$  od ścianek bocznych. Jaki związek muszą spełniać wielkości  $a$ ,  $b$  i  $h$ , aby przedstawione na rysunku poziome położenie naczynia było stabilne, tzn. aby po małym odchyleniu naczynię powracało do pozycji poziomej? Przyjąć, że masa samego naczynia jest pomijalnie mała w porównaniu do masy cieczy i pominąć grubość ścianek.

W układzie inercjalnym (nie obracającym się) prędkość wpływającej wody jest równa  $v_{in} = v_w - \omega r$ . Zatem moc, którą młynek traci na rozpryskiwanie wody, jest równa

$$P_2 = \frac{m v_{in}^2}{2t} = \frac{m}{2t} \left( \sqrt{\frac{2p}{\rho} + \omega^2 r^2} - \omega r \right)^2.$$

Odejmując  $P_2$  od  $P_1$  otrzymujemy moc silnika

$$P = P_1 - P_2 = \frac{m}{t} \left[ \frac{p}{\rho} - \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{2p}{\rho} + \omega^2 r^2} - \omega r \right)^2 \right].$$

Wyrażenie to można sprowadzić do prostszej postaci

$$P = \frac{m}{t} \omega r \left( \sqrt{\frac{2p}{\rho} + \omega^2 r^2} - \omega r \right).$$

**Uwaga.** Zadanie można również rozwiązać rozpatrując siły wywierane przez wodę na rurkę – należy jednak obok siły odrzutu uwzględnić także siłę Coriolisa działającą wzdłuż całej długości rurki.

**132.** Kurczenie się spirali jest związane z wykonywaniem przez nią pracy kosztem energii magnetycznej. Aby usunąć z naszych rozważań inne źródła energii, założymy, że solenoid tworzy bezoporowy obwód zamknięty. Wtedy strumień pola przez jego wnętrze pozostaje stały, a zatem – przy ustalonym polu przekroju – także pole magnetyczne jest stałe. Energię pola magnetycznego wewnątrz długiego solenoidu znajdujemy bądź opierając się na wzorze  $E_m = \frac{1}{2} L I^2$ , bądź mnożąc energię na jednostkę objętości  $\frac{1}{2\mu_0} B^2$  przez objętość  $Sl$  (gdzie  $S = \pi r^2$  jest polem przekroju):

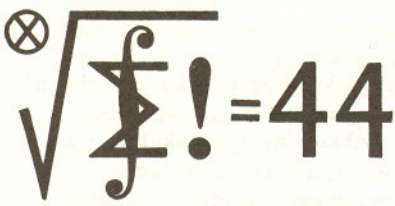
$$E_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2 S l.$$

Przyrównując zmianę tej energii do pracy  $F \Delta l$  otrzymujemy

$$F = \frac{1}{2\mu_0} B^2 S,$$

a podstawiając  $B = \mu_0 I n / l$  mamy ostateczny wynik

$$F = \frac{\mu_0}{2} \left( \frac{I n}{l} \right)^2 S.$$



Czołówka ligi zadaniowej

**Klub 44 M**

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 223 (WT=2,04) i 224 (WT=2,65)  
z numeru 8/1991

Paweł Kubit	- Krosno	43,17
Tomasz Wietecha	- Tarnów	42,17
Jan Ciach	- Ostrowiec Św.	39,90
Leszek Krawczyk	- Włodawa	36,37
Mirosław Matłoga	- Skoczów	35,79



**241.** W okrąg  $\Omega$  wpisano czworokąt  $ABCD$ , którego boki  $AD$  i  $CD$  są różnej długości. Na przekątnej  $AC$  znajdujemy punkt  $M$  taki, że  $|\angle CBM| = |\angle ACD|$ . Przez punkty  $B, M$  oraz punkt przecięcia przekątnych czworokąta prowadzimy okrąg. Dowieść, że jest on styczny do  $\Omega$ .

**242.** W każdym wierzchołku trójkąta  $ABC$  umieszczamy liczbę 1. Zgodnie z ustalonym kierunkiem obiegu obchodzimy kolejno wierzchołki pozostawiając w danym wierzchołku połowę liczby tam się znajdującej, drugą jej połowę dodając do liczby znajdującej się w następnym wierzchołku. Z otrzymanej tam sumy znów pozostawiamy połowę, resztę dodając do następnej liczby itd. Rozpoczynamy - dla ustalenia uwagi - od wierzchołka  $A$ . Po  $n$ -krotnym obejściu trójkąta mamy w punkcie  $A$  liczbę  $a_n$ . (Na przykład, po pierwszym obejściu, w wierzchołkach  $A, B, C$  znajdują się odpowiednio liczby  $\frac{11}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}$ ; tak więc  $a_0 = 1, a_1 = \frac{11}{8}$ ; dalsze wartości:  $a_2 = \frac{95}{64}, a_3 = \frac{771}{512}, \dots$ ) Wykazać zbieżność i znaleźć granicę ciągu  $(a_n)$ .

Zadanie 242 zaproponował pan Jerzy Janowicz z Bolesławca.

**Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/1992**

Przypominamy treść zadań:

**233.** Udowodnić nierówność  $\frac{y^2-x^2}{z+x} + \frac{z^2-y^2}{z+y} + \frac{z^2-x^2}{y+z} \geq 0$  dla  $x, y, z \geq 0$ .

**234.** Dla danych liczb naturalnych  $n, k \geq 2$  obliczyć wartość sumy  $\sum |A_1 \div A_2 \div \dots \div A_k|$  (sumowanie po wszystkich uporządkowanych układach  $(A_1, A_2, \dots, A_k)$  podzbiorów zbioru  $\{1, \dots, n\}$ ).

**233.** Oznaczmy rozważane wyrażenie przez  $F(x, y, z)$  oraz wprowadźmy zmiennę  $u = 1/(y+z), v = 1/(z+x), w = 1/(x+y)$ . Wówczas

$$\frac{y^2-x^2}{z+x} = \frac{y+x}{z+x} (y-x) = \frac{1/w}{1/v} ((y+z) - (z+x)) = \frac{v}{w} \left( \frac{1}{u} - \frac{1}{v} \right) = \frac{v^2-uv}{uvw}$$

i podobnie przekształcamy pozostałe dwa składniki sumy określającej  $F(x, y, z)$ . Stąd

$$F(x, y, z) = \frac{1}{uvw} ((u^2+v^2+w^2) - (vw+wu+uv)) \geq 0$$

(na mocy nierówności Cauchy'ego-Schwarza).

**234.** Niech  $\mathbf{P}$  będzie rodziną wszystkich podzbiorów zbioru  $\{1, \dots, n\}$ . Dla dowolnego zbioru  $M \in \mathbf{P}$  oznaczmy przez  $l(M)$  liczbę uporządkowanych układów  $(A_1, A_2, \dots, A_k)$  ( $A_i \in \mathbf{P}$ ) o tej własności, że

$$(1) \quad A_1 \div A_2 \div \dots \div A_k = M.$$

Rozważana w zadaniu suma równa się

$$(2) \quad s = \sum_{M \in \mathbf{P}} l(M) \cdot |M|.$$

Skorzystamy teraz z następującej własności różnicy symetrycznej:

$$(3) \quad K \div L = M \iff K \div M = L \quad (\text{dla dowolnych zbiorów } K, L, M).$$

Niech zbiór  $M \in \mathbf{P}$  będzie ustalony i przypuśćmy, że wybraliśmy w dowolny sposób zbiory  $A_1, A_2, \dots, A_{k-1} \in \mathbf{P}$ . Istnieje wówczas dokładnie jeden zbiór  $A_k \in \mathbf{P}$ , dla którego zachodzi związek (1), mianowicie zbiór  $A_k = (A_1 \div A_2 \div \dots \div A_{k-1}) \div M$ ; wynika to z równoważności (3) dla  $K = A_1 \div A_2 \div \dots \div A_{k-1}, L = A_k$ . Wobec tego  $l(M)$  równa się liczbie wszystkich uporządkowanych układów  $(A_1, A_2, \dots, A_{k-1})$ . Ponieważ każde  $A_i$  wybieramy niezależnie spośród wszystkich  $2^n$  zbiorów rodziny  $\mathbf{P}$ , zatem  $l(M) = 2^{n(k-1)}$  (niezależnie od  $M$  (!)).

Dla każdej liczby naturalnej  $m \leq n$  w rodzinie  $\mathbf{P}$  mamy  $\binom{n}{m}$  zbiorów  $m$ -elementowych  $M$ . Tak więc wartość sumy (2) wynosi

$$\begin{aligned} s &= \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} 2^{n(k-1)m} = 2^{nk-n} \sum_{m=1}^n \binom{n}{m} m = \\ &= 2^{nk-n} \sum_{m=1}^n \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} = n 2^{nk-n} \sum_{m=1}^n \binom{n-1}{m-1} = \\ &= n 2^{nk-n} \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} = n 2^{nk-n} \cdot 2^{n-1} = n 2^{nk-1}. \end{aligned}$$

# Rzecz o wieszaniu firanek

Stanisław  
MRÓWCZYŃSKI

Problem wieszania firanek jest zapewne stary, choć nie wiem jak bardzo. Przeczytałem niedawno w *Opowieści o kulturze materialnej pałaców i dworów polskich w XIX w.* pani Koweckiej, że w salonach wieszano „firanki najczęściej białe, bramowane frędzlami ciętymi z kazimirku pasowego lub ze złotym galonami. Misternie je drapowano przerzucając fantazyjnie przez brązowe pręty zakończone grotem strzały, przeciągano przez kółka”.

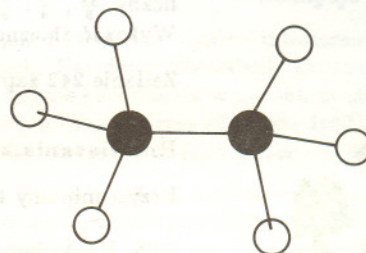
W zestawieniu z tym obrazem problem, który chcę opisać, wygląda błado i pospolicie. Jesteśmy nie w pałacu ani w dworku dziewiętnastowiecznym, ale w mieszkaniu z czasów późnego Gomułki czy wczesnego Gierka, gdzie wystarczy wspiąć się na niewysoki taboret, by sięgnąć sufitu. A więc stoimy na takim taborecie i przyczepiamy do karnisza czy odpowiedniej szyny całkiem zwykłe firanki i tylko jeden problem mamy do rozwiązania: aby uchwyty, zwane nieraz żabkami, były rozstawione w równych odległościach wzdłuż górnego brzegu firanki. Problem w istocie wygląda banalnie, lecz jego praktyczna strona nieco go komplikuje. Należy pamiętać, że rozwiązujemy go stojąc na chybottliwym taborecie, z głową zadartą do góry, z rękami pod sufitem. Kark boli, ręce omdlewają, a bywa, że i strużki wody wpływają za rękawy, gdyż niektórzy producenci firanek zalecają je wieszać „na mokro”, by uniknąć prasowania.

Pytałem kilka osób, jak sobie radzą z problemem firanek. Odpowiedzi były jednak mało ciekawe, a rozwiązania stanowiły kombinację pomiarów „na oko” i metody „prób i błędów”, tzn. wielokrotnego przesuwania raz przyczepionych żabek.

Pewna gospodyni z północnej Bawarii natomiast opisała mi rozwiązanie precyzyjne. Po kupnie nowych firanek oblicza się liczbę żabek na karniszu, następnie z krawieckim centymetrem ustala się ich położenia na górnym brzegu firanki, w końcu zaznacza się te położenia raz na zawsze kolorową nitką. Metoda zaiste precyzyjna, lecz, każdy przyzna, zupełnie pozbawiona finezji.

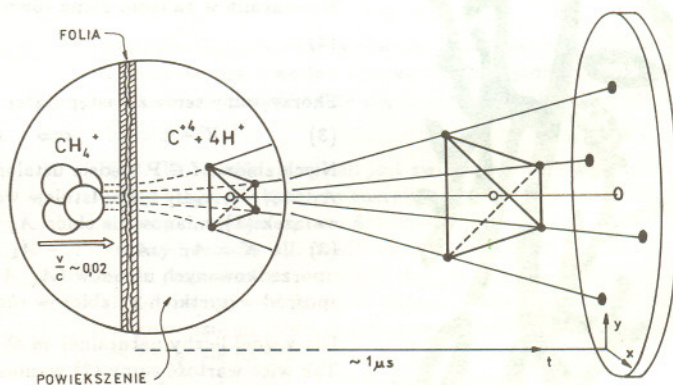
## Kulombowska eksplozja

Nasza wiedza o strukturze przestrzennej molekuł pochodzi z pośrednich obserwacji. Zgodność obliczeń modelowych z pomiarami poziomów energetycznych wzbudzeń rotacyjnych i wibracyjnych molekuł pozwala wyciągnąć wnioski o ich budowie. Dla wielu molekuł amplitudy drgań jąder atomowych są tak małe w porównaniu z odległościami międzyatomowymi, że można wyobrażać sobie molekułę jako zbiór kolorowych kulek połączonych patyczkami pod ściśle określonymi kątami i w ściśle określonej odległości. Kuleczki przedstawiają jądra (czy też raczej jony – jądra ze ściśle związanymi elektronami na wewnętrznych powłokach energetycznych), a patyczki – wiązania chemiczne. Wyobrażamy sobie, że jądra pograżone są w chmurze ujemnie naładowanych elektronów wiążących wszystko w molekułę.



Są też molekuły, dla których taki uproszczony obrazek sztywno połączonych kulek jest zły, gdyż drgania jąder są zbyt duże. Wprowadza się wówczas pojęcie funkcji falowej zawierającej wszelkie informacje o rozkładzie jąder w molekułę.

Co by się stało, gdyby tak nagle usunąć chmurę elektronową? Oczywiście, molekuła rozpadnie się, gdyż dodatnio naładowane jądra odpychają się. Rozbiegające się jądra atomowe mogłyby więc dostarczyć informacji o ich położeniu w molekułę. W ciągu ostatnich kilku lat naukowcy z Argonne National Laboratory (USA) i z Instytutu Weizmanna (Izrael) udowodnili, że można w ten sposób zbadać budowę molekuł. Idea doświadczenia jest bardzo prosta.



Schematyczny obraz doświadczenia z kulombowską eksplozją. Molekuła  $\text{CH}_4^+$  po przejściu przez cienką folię o grubości  $30\text{\AA}$  zostaje obdarta z elektronów i eksploduje na skutek odpychania kulombowskiego jonów. W ten sposób powiększona struktura przestrzenna molekuły zostaje zmierzona przez detektor ustawiony w odległości około 5 m za folią.

Molekuły o prędkości  $v \approx 0,02c$  przechodzą przez cienką folię. Przy tym przejściu jądra molekuły rozpraszają się nieznacznie na atomach folii, natomiast elektrony wiążące molekuły ulegają bardzo silnemu rozproszeniu. Po przejściu kilku warstw atomowych molekuła zostaje pozbawiona elektronów i do głosu dochodzą siły odpychania kulombowskiego. Proces obdarca z elektronów trwa około  $t_0 = 10^{-16}$  s, tj. znacznie krócej niż charakterystyczny czas drgań vibracyjnych ( $\sim 10^{-14}$  s) lub rotacyjnych ( $\sim 10^{-12}$  s). Po czasie  $t_0$  agregat dodatnio naładowanych jonów eksploduje. Pomiar składowych prędkości wylatujących jonów pozwala uzyskać informacje o strukturze przestrzennej molekuł (patrz okładka).

na podstawie *Science*, tom 244(1989), str. 426,  
opracował Jan KALINOWSKI



## Zadania

Redaguje Paweł STRZELECKI

**M 631.** Rozpatrzmy  $n$  liczb naturalnych  $a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq 2n$ , takich że najmniejsza wspólna wielokrotność każdych dwóch spośród tych liczb jest większa od  $2n$ . Udowodnić, że wszystkie te liczby są większe od  $\lfloor 2n/3 \rfloor$ .

Rozwiązanie na str. 7

**M 632.** Udowodnić, że

$$\operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 5 + \operatorname{arctg} 13 + \operatorname{arctg} 34 + \dots$$

Ciąg argumentów arcus cotangensa pokrywa się z ciągiem nieparzystych wyrazów ciągu Fibonacciego i może być określony wzorem  $u_1 = 1, u_2 = 2, u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1}$  dla  $n \geq 2$ .

Rozwiązanie na str. 11

**M 633.** Oblicz

$$\cos\left(\frac{2\pi}{1993}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{1993}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{1993}\right) + \dots + \cos\left(\frac{1992\pi}{1993}\right).$$

Rozwiązanie na str. 11

Redaguje Jarosław KULPA

**F 333.** Piłeczkę pingpongową o średnicy  $d = 3,8$  cm oświetlono żółtym ( $\lambda = 550$  nm) światłem tworzącym wiązkę równoległych promieni. Oszacować, w jakiej odległości  $x$  znika cień za piłeczką na skutek efektów dyfrakcyjnych.

Rozwiązanie na str. 7

**F 334.** Silny elektromagnes z rdzeniem ze stali miękkiej w kształcie podkowy przyciągnął w poziomie stalową belkę również ze stali miękkiej. Oszacować, jakie może panować największe ciśnienie między belką a elektromagnesem. W stali miękkiej stanowi nasycenia odpowiada indukcja  $B = 2,2$  T.

Rozwiązanie na str. 7

W mojej rodzinie wysiłkiem kilku pokoleń opracowano sposób następujący. Lewy i prawy koniec górnego brzegu firanki przyczepiamy do skrajnych żabek. Wszystkie pozostałe zbieramy „do kupy” i następnie odrzucając kolejne skrajne lewe i prawe żabki znajdujemy żabkę środkową z owej kupy. Teraz wyznaczamy środek górnego brzegu firanki zsuwając do siebie przyczepione już rogi i obciążając palcem w dół zwisający górny brzeg. Środkową żabkę przyczepiamy do środka brzegu firanki. Dalej z obu połówek postępujemy jak poprzednio z całością, potem działamy z ćwiartkami itd. aż do przyczepienia ostatniej żabki.

Niestety, metoda na którymś, czasem na każdym, etapie zawodzi, gdy liczba nie przypiętych żabek jest parzysta i nie sposób wyznaczyć środkowej. Aby takiej sytuacji uniknąć, chciałbym zaproponować formułę „karnisza idealnego”, dla którego możliwe liczby żabek określone są przez wyrazy ciągu

$$a_n = 2^n + 1.$$

Karnisze idealne mają więc 3 żabki, 5 żabek, 9 żabek itd. Wówczas opisana metoda pracuje na każdym etapie.

Niestety, życie nam zwykle dostarcza karnisze fatalne z liczbą żabek określoną przez ciąg

$$a_n = 2^n,$$

a wówczas metoda na każdym etapie zawodzi.





Duży teleskop to duże powiększenie (jest ono wszak równe stosunkowi ogniskowej obiektywu do ogniskowej okularu) lub większa skala zdjęcia (bo jest proporcjonalna do ogniskowej obiektywu). Tymczasem obserwatorzy wiedzą, że jest jakoś odwrotnie: im większa luneta, tym mniejszy jest obraz gwiazdy (przy użyciu tego samego okularu). Trzeba przyznać, że nielato to zademonstrować, trzeba bowiem mieć dostęp do kilku lunet naraz, w dodatku do lunet przyzwoitej jakości, aby można było mieć pewność, że ewentualne rozmycie obrazu nie jest skutkiem niskiej jakości sprzętu. Wtedy można zobaczyć (stosując duże powiększenia), że obraz gwiazdy to jasny punkt otoczony kilkoma (rzadko więcej niż dwoma) coraz słabszymi pierścieniami. Przekładając okular do kolejnych lunet o różnych średnicach zauważylibyśmy wspomniany dziwny efekt. Tłumaczą go falowe własności światła. Mianowicie, rozmiary centralnej plamki nie mają nic wspólnego z rzeczywistymi kątowymi rozmiarami gwiazdy. Centralna plamka z pierścieniami to skutek uginania się (dyfrakcji) światła na krawędzi obiektywu i teoria mówi, że jej średnica jest odwrotnie proporcjonalna do średnicy obiektywu. Dla światła widzialnego zależność ta ma w przybliżeniu postać:  $\alpha \approx 15/D$ , gdzie  $\alpha$  oznacza kątową (w sekundach) średnicę plamki, a  $D$  średnicę obiektywu w centymetrach. Dla dużych teleskopów  $\alpha$  wyraża się w setnych częściach sekundy, ale gwiazdy są tak daleko, że ich kątowe rozmiary są jeszcze mniejsze.



\*

A jednak większy teleskop daje większy obraz gwiazdy! Może to powiedzieć każdy, kto oglądał niebo przez teleskop o średnicy od 0,5 m wzwyż. Więc w końcu jak jest naprawdę? Wszystko się zgadza, tylko obserwacje trzeba właściwie zinterpretować. Uważny obserwator zauważył, że w małej lunecie obraz gwiazdy (dyfrakcyjny) jest ostry, ale stale się porusza. Jest to skutek niespokojnej atmosfery, efekt przesuwania się przed obiektywem niejednorodności atmosferycznych. Duży obiektyw drgania obrazu uśrednia, ponieważ niejednorodności mają rozmiary ułamków metra. Przez to w dużym teleskopie obraz gwiazdy jest wprawdzie stabilny, ale ogromnie rozmyty wskutek tego tzw. seeingu. Gwiazda wygląda trochę jak spoczywająca ameba, tzn. jak plama co chwila wysuwająca i chowająca różne wypustki. Plama ta wyjątkowo ma rozmiary 0,5", często kilkanaście sekund. Uniknąć seeingu można tylko poza atmosferą, stąd tak wielkie znaczenie ma teleskop kosmiczny.



\*

Kierujemy szkolny spektroskop na Słońce. Widzimy, oczywiście, układ linii widmowych odpowiadający składowi chemicznemu atmosfery Słońca i temperaturze panującej na jego powierzchni. W warunkach amatorskich nie da się zbadać rozkładu energii w widmie, gdyby jednak to zrobić, to też okazałoby się zgodny z panującą na Słońcu temperaturą – tak, jak być powinno. Kierujemy teraz spektroskop na Księżyc i widzimy... to samo! Kierujemy go na pierwszą lepszą ścianę domu (w dzień, rzecz jasna) i ciągle widzimy to samo! To w końcu gdzie panuje temperatura 5770 K? Gdzie jest wodorowa atmosfera z jakimiś domieszkami cięższych pierwiastków? Dlaczego ściana daje widmo słoneczne? Odpowiedź jest banalna, ale kryje głęboki sens: promieniowanie dochodzące do spektroskopu nie powstaje ani na ścianie, ani na Księżycu, jest tam tylko odbijane i dlatego niesie informacje nie o ścianie ani nie o Księżycu, lecz o miejscu, gdzie powstało, tzn. o Słońcu. Ściana czy Księżyc, owszem, również wysyłają własne promieniowanie, ale w temperaturze kilkuset kelwinów maksimum ich natężenia przypada w podczerwieni. Tak więc to, co widzimy w spektroskopie, nie odpowiada warunkom panującym na tych dwóch obiektach, co określa się też jako brak równowagi termodynamicznej.



\*

Plama słoneczna to obszar, w którym wiązka linii pola magnetycznego wydostaje się z wnętrza gwiazdy do jej atmosfery. W warstwie podfotosferycznej energia z wnętrza Słońca niesiona jest głównie dzięki konwekcji, czego skutkiem jest granulacja. Tymczasem obecność pola magnetycznego tłumi konwekcję, a więc utrudnia transport energii w plamie. W rezultacie plama jest chłodniejsza od reszty fotosfery. Pomiar dowodzi, że w plamach panuje temperatura około 4500 K, podczas gdy fotosfera ma 5770 K. Tak czy inaczej w plamach jest goręcej niż w łuku elektrycznym czy w płomieniu acetylenowym – dlaczego wobec tego plamy są czarne? Okazuje się, że jest to już sprawa niedoskonałości oka lub innych odbiorników światła. Na mocy prawa Stefana-Boltzmanna stosunek jasności powierzchniowej Słońca w plamie i poza plamą jest czwartą potęgą stosunku temperatur, co wynosi  $(4500/5770)^4 = 0,37$ . Jest to kontrast na tyle duży, że osłabiwszy z konieczności światło fotosfery do poziomu znośnego dla oka osłabiamy zarazem światło plam do natężenia dającego już wrażenie czerni.

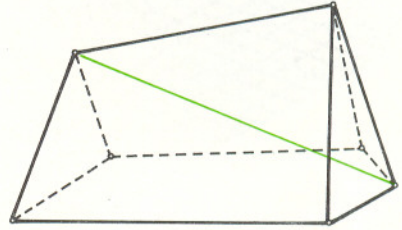


### Takie sobie zadanie

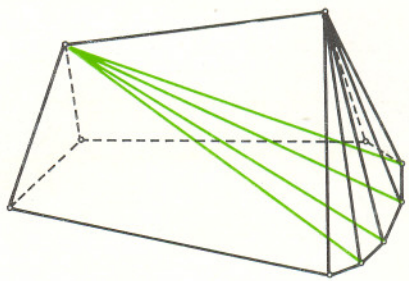
Wzór na liczbę przekątnych wielokąta wypukłego mamy szansę poznać w szkole. Wypukły  $n$ -kąt ma  $\frac{n(n-3)}{2}$  przekątnych. Stąd natychmiast wynika, ilu przekątnych wielokąt mieć nie może (przyjmowane są wartości: 0, 2, 5, 9, 14,...).

Zupełnie naturalne jest pytanie, co z przekątnymi wielościanu. Czy np. można skonstruować wielościan wypukły mający dokładnie jedną przekątną? Oczywiście, za przekątną wielościanu uważamy odcinek łączący dwa wierzchołki, który nie zawiera się w żadnej ze ścian. Czworoscian przekątnych nie ma – zero jest osiągalne. Co dalej?

Okazuje się, że jest inaczej niż w przypadku „płaskim”. Dla dowolnego naturalnego  $k$  istnieje wielościan, który ma  $k$  przekątnych. Konstrukcję łatwo opisać.



Taki „namiot” tworzymy, by otrzymać wielościan z jedną przekątną. Chcąc uzyskać większą (dowolną) liczbę przekątnych wystarczy...



W przypadku przestrzennym różnych, „takich sobie” pytań związanych z przekątnymi, krawędziami, ścianami można postawić bardzo wiele.

### Małe wielkie problemy

Wiele osób jest przekonanych, że w matematyce wszystkie problemy, dające się elementarnie sformułować, dawno zostały rozstrzygnięte. A tymczasem istnieją pytania, na które odpowiedzieć matematycy do tej pory nie potrafia, a można o nich opowiedzieć podczas luźnej rozmowy w tramwaju. Wydaje się, że o znanych nam dobrze liczbach rzeczywistych, w szczególności tych wybranych, najslawniejszych, wiadomo już chyba wszystko. A tymczasem...

Liczba  $\pi$  jest niewymierna; wykazał to w 1766 roku J.H. Lambert. Niewymierność liczby  $e$  wykazano wcześniej, zrobił to L. Euler w roku 1748. A czy  $e + \pi$  jest liczbą wymierną? Do dziś tego nie wiemy...

Wiadomo, że  $e^\pi$  nie jest liczbą wymierną. Nie jest nawet liczbą algebraiczną (to znaczy nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu o współczynnikach całkowitych), tak, jak nie są nimi  $\pi$  (dowód: F. Lindemann 1882) oraz  $e$  (Ch. Hermite 1873). A jak jest z  $\pi^e$ ? Również do tej pory nie wiadomo. Może się okazać – co byłoby sporym zaskoczeniem – iż jest to liczba wymierna...

Każdą liczbę niewymierną da się przedstawić w postaci nieskończonego ułamka dziesiętnego nieokresowego. Można zadać pytanie, czy w rozwinięciach  $\pi$  lub  $e$  wystąpi gdzieś sekwencja cyfr „0123456789”. Pytanie to wciąż pozostaje bez odpowiedzi...

Nie rozwiązane problemy dotyczą także liczb naturalnych! Do dnia dzisiejszego np. nie wiadomo, czy liczb doskonałych (czyli takich, które są sumą wszystkich swoich mniejszych od siebie dzielników, np.  $6 = 1 + 2 + 3$ ,  $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ ) jest skończenie wiele. Nie rozstrzygnięto, czy istnieje nieparzysta liczba doskonała...

Ewa POCIECHA

Adam WANTUCH

\* NADCHODZI SESJA EGZAMINACYJNA \* NADCHODZI SESJA EGZAMINACYJNA \* NADCHODZI SESJA EGZAMINACYJNA \*

*Egzamin idzie studentce raczej średnio.*  
*Egzaminator:* Inteligentnego człowieka, proszę pani, można poznać po tym, że gdy mówi, to inni rozumieją, co on mówi. Rozumie pani?  
*Studentka:* Nie!

*Egzamin idzie studentowi raczej średnio.*  
*Egzaminator:* Czym, według pana, jest egzamin?  
*Student:* Jest to rozmowa dwóch fachowców.  
*Egzaminator:* A gdy jeden z nich okazuje się być kompletnym ignorantem, co, pana zdaniem, ten drugi powinien zrobić?  
*Student:* Wziąć swój indeks i wyjść z pokoju.

I w tym momencie w obu przypadkach egzaminator wpisał ocenę pozytywną (podobno obie historie są autentyczne).