delta

$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34} J \cdot s$ $\pi = 3{,}141593\ldots$

UWAGA!!!

w prenumeracie *Delta* tańsza

SPIS TREŚCI

NUMERU 4(215)

Diabeł w lustrze	str. 1
Jak przekroczyć prędkość światła? *Piotr Hajłasz*	str. 1
Jak zarobić milion dolarów?	str. 2
Paradoksy Olbersa	str. 3
Spróbuj wykryć błędy *Robert Hajłasz*	str. 4
Gdy dwa prawa zachowania kłócą się ze sobą *Andrzej Szymacha*	str. 6
Jak piłeczką pingpongową rozbić mur?	str. 6
Zasada superpozycji	str. 7
Kącik Prac Uczniowskich	str. 7
Mała Delta	str. 8
Prawo Bernoulliego *Jan Kalinowski*	str.10
Zadania	str.11
Paradoksy w rachunku prawdopodobieństwa *Jacek Jakubowski*	str.12
Klub 44	str.14
Chłodzenie światłem	str.16
Pękające rury	str.16
Epsilon	str.17

W następnym numerze:

Odgadywanie wielomianów

„Delta"
matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej

Adres Redakcji:
Wydział Fizyki UW
ul. Smyczkowa 5/7
02-678 Warszawa
tel. 43-02-43 wewn. 21

Adres poczty komputerowej
(E-mail address):
DELTA@PLEARN.BITNET

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa

Nakład 9 500 egz.
Wydrukowano
w Zakładach Graficznych
w Warszawie, ul. Srebrna 16

Skład systemem TEX
wykonała redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na III kwartał 1992 r. wynosi 12 000,– zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
   - oddziały RSW właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora – odbioru zamówionych egzemplarzy dokonuje prenumerator w wyznaczonych punktach sprzedaży lub w inny, uzgodniony sposób,
   - urzędy pocztowe i listonosze – od prenumeratorów z terenów wiejskich lub innych miejscowości, w których nie ma oddziałów RSW, a w miastach tylko od osób niepełnosprawnych – poczta zapewnia dostawę zamówionych egzemplarzy pod wskazany adres pod warunkiem uiszczenia dodatkowej opłaty za każdy doręczany egzemplarz – opłata wynosi 500,– zł od egzemplarza,
   - Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – tylko od prenumeratorów zlecających dostawę za granicę.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
   - na kraj – do 20 XI na I kwartał roku następnego
     do 20 II na II kwartał
     do 20 V na III kwartał
     do 20 VIII na IV kwartał
   - na zagranicę – do 31 X na I kwartał
     oraz do 1 dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarza 5 000,– zł

Diabeł w lustrze

Lecąca strzała w każdym momencie jest w jakimś miejscu. Ale skoro w nim jest, więc nie porusza się.

Kreteńczyk twierdzi, że wszyscy Kreteńczycy kłamią. Czy można mu wierzyć?

Jeśli zbiór X składa się z takich elementów, które nie są swoimi elementami, to czy sam jest swoim elementem?

Pierwsze z zacytowanych zdań pochodzi z V wieku p.n.e., ostatnie z końca XIX wieku. Każde z nich formułuje jakąś *aporię*, czyli trudność. Zdań tego rodzaju, to znaczy głupich pytań, na które nie sposób odpowiedzieć inaczej niż *odczep się*, historia ludzkiego myślenia naprodukowała bez liku. I na ogół służyły one do intelektualnego przekomarzania się. Chyba że trafiały na zbyt ambitnych.

Grupa zawodowa, do której mam zaszczyt się zaliczać, od samego powstania była zbyt ambitna. Już sama nazwa MATEMATYKA zawiera w sobie niewiele skromności (pochodzi od greckiego *mathema*, co oznacza umiejętność; *mathein* oznacza uczyć się). Bliższe przyjrzenie się ogólnym zamierzeniom przyświecającym jej narodzinom stawia sprawę jeszcze bardziej jednoznacznie – miała to być wiedza pewna, w odróżnieniu od innych nauk (nawet podział na nauki ścisłe i rozwiązłe okazywał się być zbyt mało podkreślający wyjątkowość matematyki). A jako wiedza pewna nie mogła dopuścić do tego, by chociażby najgłupsze pytanie dotyczące jej dziedziny pozostało bez całkowicie jednoznacznej odpowiedzi.

Jaka jest rada na pojawianie się aporii, żeby nie powiedzieć wprost: paradoksów? Jest nią uściślenie czy, jak kto woli, rygoryzacja pojęć i metod. Oba te słowa niosą, co prawda, w sobie zapowiedź klęski – pierwsze sugeruje ciasnotę, a drugie sztywność – ale program uściślenia, rygoryzacji czy, jak mówiono, dania matematyce solidnych podstaw, pod koniec ubiegłego stulecia (gdy paradoksów namnożyło się bez liku) uznano za ważny i przez ponad pół wieku realizowano go z wielkim nakładem sił i środków.

Ustalono, co to jest teoria (mianowicie: zbiór zdań zamknięty ze względu na wnioskowanie), ustalono, co to jest zdanie (wyrażenie zbudowane zgodnie z zamkniętą listą reguł i w określonym języku), ustalono, co to jest język itd. Potem powiedziano, kiedy teoria jest dobrą teorią. Ma ona w tym celu być przede wszystkim niesprzeczna (z dwóch przeciwnych zdań co najwyżej jedno ma być jej twierdzeniem), ma być zupełna (z dwóch przeciwnych zdań co najmniej jedno ma być jej twierdzeniem), ma być kategoryczna (jej modele, czyli te obiekty, do których pasuje, mają mieć identyczną budowę), ma też być rozstrzygalna (czyli musi istnieć sposób na stwierdzenie w skończonej liczbie kroków, czy dane zdanie w jej języku jest twierdzeniem, czy nie). Były i inne warunki, ale i tych było dosyć na to, by po pewnym czasie matematycy przekonali się, że dla takiej np. arytmetyki (zwyczajnych liczb rzeczywistych) żadnego z tych warunków nie da się udowodnić (Gödel, Skolem, Löwenheim). Przez „drobną modyfikację" warunków gry (użycie teorii drugiego rzędu) zdołano jedynie zapewnić arytmetyce liczb rzeczywistych kategoryczność. Inne chwyty pozwoliły zapewnić tejże arytmetyce niesprzeczność (Gentzen). Wiadomo, arytmetyka liczb rzeczywistych jest tak powszechnie stosowana, że można dopuścić się wielu „innowacji", by obronić jej dobre imię.

Z innymi jednak obiektami zainteresowań matematyki nie poszło już tak łatwo. Oczywiście, były teorie, które spełniały wszystkie żądane warunki (specjalnie w tym celu je wymyślono), ale kłopot był ze znalezieniem dla nich sensownego zastosowania gdziekolwiek. Były jednak i takie, które nie dość, że były złe, to jeszcze nie bardzo było wiadomo, jak je poprawić.

Najbardziej doniosłym przykładem jest teoria mnogości, która (na domiar złego) sama została powołana do życia (Cantor), by umożliwiać uściślanie innych, bardziej z codzienną praktyką związanych teorii matematycznych. Po pierwszych, zrozumiałych w nowo tworzonej dyscyplinie, trudnościach w ustaleniu sposobu, w jaki można bez popadania w sprzeczności mówić o zbiorach, przed jej twórcami stanęły pytania, w jakie własności stworzone właśnie zbiory należy wyposażyć. Wydawało się, że sprawę da się bezkonfliktowo rozwiązać, bo przecież można było się zgodzić na każde, nie prowadzące do absurdów rozwiązanie. I wtedy okazało się, że rozwiązań nie prowadzących do absurdów nie ma.

W *Delcie* 2/1992 P. Grzegorzewski pisze o problemie wyboru reprezentacji dla pewnej klasy zbiorów. Przez reprezentację rozumie taki nowy zbiór, w którym każdy z wyjściowych zbiorów ma swojego reprezentanta i różne zbiory mają różnych reprezentantów. I przytacza twierdzenie Halla, które mówi, kiedy

Jak przekroczyć prędkość światła?

Piotr HAJŁASZ

Opiszemy cztery sposoby przekroczenia prędkości światła. Nie będą to, „oczywiście", wszystkie możliwe metody. No, ale przecież teoria względności mówi, że prędkości światła nie można pokonać. Czy tu nie ma jakiejś sprzeczności? Oczywiście, sprzeczności nie ma, mimo że sposoby na przekroczenie prędkości światła będą autentyczne, to znaczy, poza jednym przykładem (pierwszym), prędkość światła zostanie pokonana naprawdę i nie będzie to żadne złudzenie wynikające ze złej interpretacji naszych obserwacji. Pozorna sprzeczność z teorią względności bierze się stąd, że zwykle nie precyzuje się, co należy rozumieć przez niemożność przekroczenia prędkości światła. No, ale nie uprzedzajmy wypadków. Wytłumaczenie paradoksów podamy na końcu.

Oto pierwszy sposób.
Pod koniec lat siedemdziesiątych astronomowie obserwując fale radiowe wysyłane przez radiogalaktykę 3C120 zauważyli w niej „obłok", który przemieszcza się ze sporą prędkością kątową. Mnożąc prędkość kątową poruszającego się obłoku przez odległość od Ziemi otrzymali prędkość liniową, która, ku ich osłupieniu, wynosiła 2,1 prędkości światła.

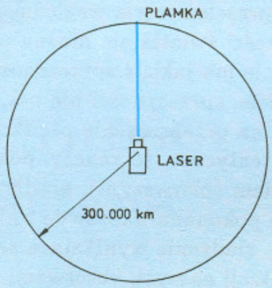
Podobne paradoksalne prędkości zaobserwowano w kilku kwazarach. W kwazarze 3C279 znaleziono nawet obiekt poruszający się z prędkością dziesięciokrotnie przewyższającą prędkość światła!

Zanim jednak wytłumaczymy, w jaki sposób możemy obserwować tak paradoksalne prędkości, przejdźmy do następnego sposobu.

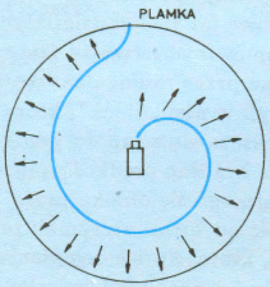
Kiedy obserwujemy koliście rozchodzące się fale na wodzie (np. po rzuceniu kamieniem), to zwykle patrzymy na grzbiet jednej z fal i obserwujemy prędkość, z jaką on się przesuwa. Skłonni jesteśmy uznać ją za prędkość fali. Tak zdefiniowana prędkość nosi nazwę prędkości fazowej. Definicja ta odnosi się nie tylko do fal na wodzie, ale również np. do fal elektromagnetycznych.

Jeśli jednak wyliczymy prędkość fazową w ziemskiej jonosferze fal wysyłanych przez nadajniki TV (częstotliwość rzędu 100 MHz), to okaże się, że jest ona większa niż c ! A więc czyżby fala elektromagnetyczna poruszająca się w ośrodku mogła mieć prędkość większą niż prędkość światła w próżni?

A teraz trzeci sposób. Wyobraźmy sobie, że w środku kulistego ekranu o promieniu 300 000 km znajduje się laser mogący się obracać.

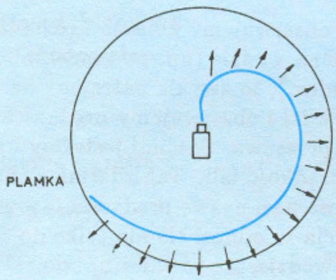


Jeśli teraz w ciągu pół sekundy obrócimy laser o 360°, to ponieważ światło rozchodzi się z prędkością 300 000 km/s, więc jeszcze przez pół sekundy punkcik na ekranie nie drgnie.



Tak wygląda przestrzenne rozmieszczenie fotonów po pełnym obrocie lasera. Strzałkami zaznaczono kierunki przemieszczania się fotonów.

Lecz po całej sekundzie (od chwili ruszenia lasera) świetlny punkcik zacznie się przesuwać po ekranie z zawrotną prędkością, tak że w ciągu pół sekundy wykona pełny obrót.



Chwilkę później. Ponieważ promień przesuwa się – w kierunku zaznaczonym strzałkami – z prędkością c, więc widać, że prędkość plamki musi znacznie przekroczyć c.

jest to możliwe. Gdybyśmy jednak założyli, że zbiory, z których wybieramy są rozłączne, to wybór reprezentacji byłby chyba zawsze możliwy. Nic więc dziwnego, że możliwość utworzenia na tych osłabionych warunkach reprezentacji dowolnej rodziny zbiorów została uznana przez Ernsta Zermelo, który porządkował nową teorię, za całkowicie dopuszczalną własność. Zyskała ona nazwę pewnika wyboru (dobra nazwa – chodzi przecież o utworzenie organu przedstawicielskiego).

Niestety, matematycy mają tę paskudną cechę, że bez przerwy dowodzą jakichś twierdzeń i stawiają sobie wszelkie pytania, jakie im przyjdą do głowy. W ramach właśnie takiej nadgorliwości Banach i Tarski udowodnili, że posługując się pewnikiem wyboru można kulę podzielić na pięć części, z których można złożyć dwie kule takie, jak wyjściowa. Nie wszystkich pojawienie się tak rewelacyjnej możliwości ucieszyło – nie jest najlepiej, gdy dyscyplina, którą uprawiamy, traci wyraźnie kontakt z rzeczywistością; pojawia się obawa, że niewybredne anegdoty o scholastykach i inne uwłaczające opowieści o uczonych pasują do nas zbyt dokładnie. Można więc było odrzucić pewnik wyboru i uprawiać matematykę bez jego pomocy. Niestety jednak jabłka z drzewa wiadomości dobrego i złego nie da się wypluć – w międzyczasie stwierdzono, że (jeśli chce się postępować ściśle) bez pewnika wyboru nie można udowodnić np. równoważności definicji ciągłości Heinego (to ta ze szkoły – za pomocą ciągów) i definicji Cauchy'ego (to ta z epsilonem i deltą). A przecież takie rozdwojenie ciągłości byłoby paranoją.

Była jeszcze nadzieja, że inne naturalne założenia przyjmowane o zbiorach zdecydują za nas – okaże się, że przyjęcie bądź odrzucenie pewnika wyboru jest wymuszone przez inne potrzebne własności. Niestety, i ta nadzieja zawiodła. W 1963 roku Paul Cohen udowodnił, że zarówno przyjmując pewnik wyboru, jak i go odrzucając, nie otrzymamy sprzeczności z pozostałymi aksjomatami teorii mnogości, zaproponowanymi przez Zermelo. W ten sposób całą odpowiedzialność za to, jaka będzie matematyka, muszą na siebie wziąć matematycy. Niby było to i tak oczywiste, ale nikt się nie spodziewał, że jest aż tak duża dowolność w tworzeniu matematyki.

Wynik Cohena był wielkim osiągnięciem podstaw matematyki, ale – paradoksalnie – znacznie obniżył rangę podstaw. Skoro nie można się od tej dyscypliny dowiedzieć niczego decydującego, a tylko poznawać głąb dowolności, to może lepiej tego nie robić.

Już od paru stuleci matki przestrzegają swoje córki, by zbyt długo nie przypatrywały się sobie w lustrze – po pewnym czasie można w lustrze dojrzeć diabła. A matematycy nie słuchali, przyglądali się sobie najdokładniej, jak umieli, i teraz wiedzą, że tego, czego dowiedzieć się chcieli, dowiedzieć się nie można.

Marek KORDOS

Jak zarobić milion dolarów?

Każdy wie, jak zaprzeczyć implikacji. Mianowicie, zdanie $\neg(p \to q)$ równoważne jest zdaniu $p \wedge \neg q$. Reguła ta jest bardzo często wykorzystywana przy dowodach nie wprost.

No, dobrze. Zobaczmy, jakie wnioski z niej wynikają. Weźmy takie oto zdanie: „Jeśli będę miał milion dolarów, to zjem Słońce".
Bzdura, jakich mało! A więc prawdziwe jest zaprzeczenie tego zdania, czyli posługując się regułą zaprzeczenia implikacji wnioskujemy, iż prawdziwe jest zdanie:
„Będę miał milion dolarów i nie zjem Słońca".
A więc prawdą jest, że będę miał milion dolarów! Nigdy nie widziałem prostszego sposobu zrobienia majątku. A może coś jest nie tak z naszym rozumowaniem? Istotnie. Niestety, popełniliśmy błąd. Uznaliśmy bowiem, że początkowe zdanie jest ewidentnym fałszem. A przecież zdanie to w odniesieniu – jak sądzę – do większości Czytelników ma postać

$$\underbrace{\text{Będę miał } 10^6\,\$}_{\text{fałsz}} \Rightarrow \underbrace{\text{zjem Słońce}}_{\text{fałsz}}$$

A takie zdanie – z fałszu wynika fałsz – zawsze jest prawdziwe – jak widać, czasami wbrew naszej intuicji. Jak się jednak dobrze zastanowić, to często sami używamy podobnych zdań w mowie potocznej. Na przykład:
„Prędzej mi kaktus wyrośnie na dłoni niż zarobisz milion dolarów".

Piotr HAJŁASZ

Paradoksy Olbersa

Jeden z podstawowych postulatów kosmologii, tzw. zasada kopernikowska, głosi, że Wszechświat oglądany z dowolnego miejsca wygląda średnio tak samo. Ta bardzo naturalna i bogata w skutki zasada, zastosowana bezpośrednio do naszego Wszechświata, prowadzi jednak natychmiast do tzw. paradoksu Olbersa. Jest on formułowany w dwóch wersjach: fotometrycznej i grawitacyjnej (zwanej też grawitacyjnym paradoksem Seeligera).

Wersja fotometryczna mówi, że skoro na mocy zasady kopernikowskiej gęstość przestrzenna gwiazd jest wszędzie średnio taka sama, to całe niebo powinno świecić nieskończenie jasno. Wyobraźmy sobie bowiem gwiazdy znajdujące się w małym kącie bryłowym $d\omega$ w odległości od nas zawartej między r a $r + dr$. Ich liczba w tak określonym elemencie objętości jest proporcjonalna do $r^2 dr d\omega$. Oświetlenie na Ziemi dawane przez każdą gwiazdę jest proporcjonalne do r^{-2}, zatem oświetlenie dawane przez gwiazdy z tego elementu objętości od odległości już nie zależy i jest proporcjonalne do $dr d\omega$. Wynik sumowania (całkowania) po nieskończonej objętości Wszechświata jest wobec tego nieskończony. W naszym rozumowaniu milcząco traktowaliśmy gwiazdy jak punkty. W rzeczywistości są one widoczne jako wprawdzie bardzo małe, ale tarczki i dlatego przy równomiernym wypełnieniu przestrzeni przez gwiazdy patrząc w dowolnym kierunku powinniśmy widzieć powierzchnię gwiazdy. Oświetlenie na Ziemi byłoby wtedy skończone, ale całe niebo powinno świecić z jasnością powierzchniową przeciętnej gwiazdy. Tymczasem niebo jest jednak czarne! Tu uwaga: nie oznacza to, że z fragmentów nieba pomiędzy gwiazdami nie dociera żadne promieniowanie, a tylko, że tego promieniowania jest tak mało, że niebo widzimy tam jako czarne.

Odrzucenie zasady kopernikowskiej byłoby z wielu powodów niekorzystne dla przyrodoznawstwa, dlatego od samego początku próbowano znaleźć sposób na wybrnięcie z tej sprzeczności. Taką próbą była np. hipoteza Wszechświata hierarchicznego. Postulowało się mianowicie, że gwiazdy grupują się w galaktykach, galaktyki w gromadach galaktyk, gromady galaktyk tworzą zgrupowania wyższego rzędu itd. W modelu takim gęstość przestrzenna gwiazd obliczana dla coraz większych obszarów byłaby coraz mniejsza, ponieważ w objętości zawierającej strukturę wyższego rzędu zawsze byłyby zawarte gwiazdy o gęstości odpowiadającej strukturom poprzedniego rzędu plus próżnia między nimi. W rezultacie dla Wszechświata nieskończonego gęstość gwiazd dążyłaby do zera, a więc niebo mogłoby być czarne. Problem grupowania się galaktyk jest, co prawda, do dziś istotny dla astronomii, ale fotometryczny paradoks Olbersa stracił znaczenie, a przyczyną stało się odkrycie ucieczki galaktyk. Mianowicie, nawet gdyby gwiazdy wypełniały przestrzeń równomiernie, wskutek ich dopplerowskiego poczerwienienia (obniżenia energii kwantów światła) i ekspansji całego Wszechświata (obniżenia gęstości kwantów) oświetlenie dawane przez gwiazdy z odległości r spadałoby z jej wzrostem gwałtowniej niż r^{-2}. Sumowanie (całkowanie) oświetleń ze wszystkich odległości (do nieskończoności) dałoby wtedy wynik skończony, a więc, być może, niebo byłoby czarne.

Wersja grawitacyjna paradoksu jest subtelniejsza, a trudności są innego typu. Gdyby mianowicie Wszechświat miał być nieskończony i równo wypełniony materią, to z każdego kierunku powinniśmy odczuwać nieskończone przyciąganie grawitacyjne. Tu można by powiedzieć, że skoro z każdego kierunku, to nie ma problemu, bo wszystko się znosi. Nie jest to jednak takie proste, bowiem mogłyby się tak znosić oddziaływania dowolnie silne, byle skończone, natomiast w ogóle nie wiadomo, czy $-\infty$ i $+\infty$ mogą się jakkolwiek kasować. Na szczęście stało się to również nieistotne po odkryciu ekspansji Wszechświata oraz tego, że grawitację, tak naprawdę, opisuje nie prawo Newtona, lecz równania Einsteina.

Tomasz KWAST

Możemy więc z łatwością obliczyć prędkość, z jaką będzie się przesuwał ów punkcik:

$$2\pi \cdot 300\,000 \text{ km}/0,5 \text{ s} > 12c\,.$$

A więc prędkość światła zostanie przekroczona ponad 12 razy! Gdyby wziąć ekran o jeszcze większym promieniu bądź obrócić laser z większą prędkością, to moglibyśmy otrzymać dowolnie dużą prędkość poruszania się świetlnego punktu po ekranie.

I wreszcie ostatni sposób. Sposób ten będzie najprostszy. Do zrozumienia jego nie będzie potrzeba żadnych wiadomości z fizyki i dzięki temu będzie tutaj najbardziej widoczne, dlaczego nie prowadzi on do sprzeczności z teorią względności.

Nieraz wystawy są ozdabiane rurkami, wewnątrz których znajdują się żaróweczki – jedna obok drugiej. Żaróweczki te po kolei zapalają się i gasną, dzięki czemu odnosimy wrażenie, jakby wewnątrz rurki przesuwał się świetlny punkt.

Wyobraźmy więc sobie następujące doświadczenie. Ustawmy żaróweczki jedna obok drugiej w odstępach 1 cm na odcinku o długości 1 000 000 km, przy czym tak podobierajmy czasy zapalania się żaróweczek, że kolejna żaróweczka zapala się o 10^{-11} s później niż poprzednia. Ponieważ mamy akurat 10^{11} żaróweczek, więc ostatnia zapali się o sekundę później niż pierwsza. Obserwator będzie więc widział punkt świetlny, który pokona odległość miliona kilometrów w ciągu jednej sekundy, a więc ponad trzykrotnie przekroczy prędkość światła!

Ale czy to przeczy teorii względności? Oczywiście, że nie, gdyż poruszaniu się świetlnego punkcika tak naprawdę nie będzie towarzyszył żaden rzeczywisty ruch. To jest tylko złudzenie. Żadna cząstka, żadna fala, żadna informacja nie biegnie wraz z tym punktem.

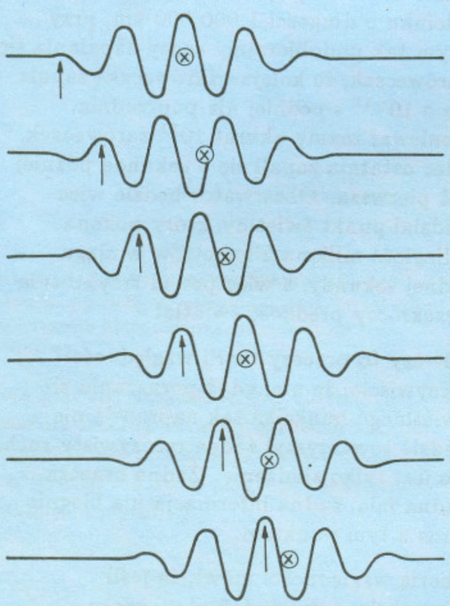
Teoria względności mówi, że jeśli w punkcie A zaszło jakieś zjawisko, to żaden efekt tego zjawiska, żadna informacja o nim nie dotrze do punktu B z prędkością większą niż c. A więc nie możemy wysłać z punktu A do punktu B żadnej cząstki, żadnej fali z prędkością większą niż c. Natomiast teoria względności nie eliminuje innych sposobów pokonania prędkości światła, takich jak choćby opisane w powyższych przykładach. I choć poza pierwszym przykładem (tym z galaktyką) przekroczenie prędkości światła nastąpiło naprawdę, to jednak uzasadnione wydaje się nazwanie tych sposobów pozornymi, uznając w ten sposób, że przez przekroczenie prędkości światła rozumie się to, co ten termin oznacza w teorii względności.

Przeanalizujmy teraz powyższe cztery sposoby – od ostatniego do pierwszego – aby się przekonać, że rzeczywiście nie prowadzą one do sprzeczności z teorią względności.

Ostatni sposób już przeanalizowaliśmy. Przykład poprzedni (ten z laserem) jest dokładnie tej samej natury, co przykład z żaróweczkami. Jedynie tylko to, że doświadczenie jest trochę bardziej skomplikowane, może wywołać wrażenie, że przykład ten jest bardziej subtelny.

Przejdźmy teraz do omówienia przykładu z falą elektromagnetyczną. Zastanówmy się, czy to, że prędkość fazowa fali jest większa niż c, rzeczywiście oznacza, że fala porusza się z prędkością większą niż c, to znaczy, czy fala ta przenosi informację, energię... z prędkością większą niż c?

Poniższy rysunek pokazuje, że rzeczywista prędkość „paczki falowej" może być mniejsza od prędkości fazowej.



Prędkość fazowa (prędkość strzałki) może być znacznie większa od prędkości całej paczki falowej (prędkość krzyżyka).

Otóż, cała informacja, energia... porusza się z paczką falową, a więc prawdziwa prędkość, z jaką porusza się fala, to prędkość całej paczki falowej, a ta jest już zawsze nie większa niż c. Prędkość ta nazywa się prędkością grupową.

Pozostał teraz już tylko jeden paradoks do wytłumaczenia – ten z galaktyką.

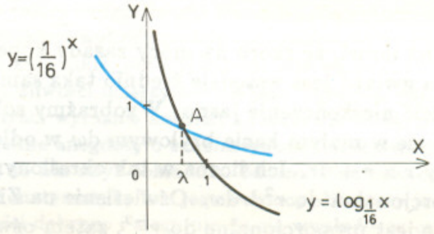
Spróbuj wykryć błędy

Robert HAJŁASZ

1. *Ile rozwiązań ma równanie*

$$\left(\frac{1}{16}\right)^x = \log_{\frac{1}{16}} x\,?$$

Rozwiązanie.



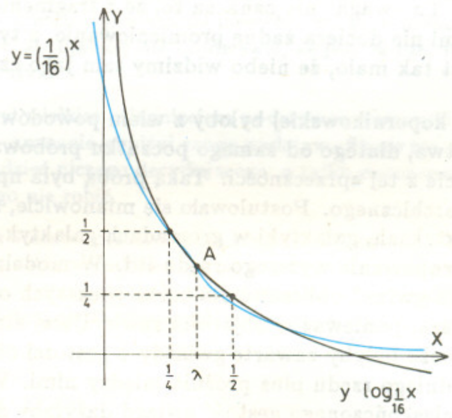
Odpowiedź: Dokładnie jedno.

Tymczasem

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{4}, \quad \text{zatem } x_1 = \frac{1}{4},$$

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{2}, \quad \text{zatem } x_2 = \frac{1}{2}.$$

Można dowieść, że dane równanie ma dokładnie trzy rozwiązania: $\frac{1}{4}, \lambda, \frac{1}{2}$.
Błędny był wykres. Powinien on wyglądać tak:



2. *Dla jakiej wartości parametru a układ równań*

$$\begin{cases} y - x^2 = 3 \\ y^2 + x^2 = a \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie?

Rozwiązanie.
I sposób
Przypuśćmy, że dla pewnej wartości a układ ma dokładnie jedno rozwiązanie (x, y). Wtedy otrzymujemy następujące zdania prawdziwe

$$y^2 + y = 3 + a\,,$$

$$y^2 + y - (3 + a) = 0\,.$$

Skoro jest tylko jedno (x, y), więc jest tylko jedno y. A jeżeli tak, to musi być $\Delta = 0$, czyli

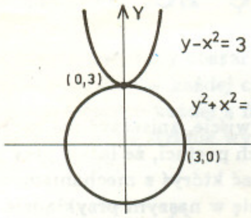
$$1 + 4(3 + a) = 0\,,$$

$$a = -\frac{13}{4}\,.$$

Zatem wykazaliśmy, że jeśli istnieje a, przy którym układ ma dokładnie jedno rozwiązanie, to $a = -13/4$. Innymi słowy, wykazaliśmy, że $a = -13/4$ to jedyny kandydat na wartość parametru a, przy którym układ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Czy kandydat „przejdzie", przekonujemy się przez sprawdzenie. Podstawiając $a = -13/4$ do równania $y^2 + x^2 = a$ dostajemy sprzeczność.

Odpowiedź: Dla żadnej.

II sposób



Odpowiedź: Dla $a = 9$. Wtedy jedynym rozwiązaniem jest para $(0,3)$.

I sposób jest błędny, II sposób jest poprawny. Błąd w sposobie I pojawił się, gdy uznaliśmy, że przy dokładnie jednym rozwiązaniu układu musi być $\Delta = 0$. Otóż, nie musi. Istotnie, popatrzmy bowiem na rysunek. Widać, że układ ma dokładnie jedno rozwiązanie, a mianowicie $(0,3)$, natomiast $\Delta \neq 0$. No bo obliczmy Δ.

$$y^2 + y - 12 = 0,$$
$$\Delta = 49.$$

Wtedy $y_1 = -4$, $y_2 = 3$, ale y_1 zostaje przez równanie $y - x^2 = 3$ odrzucone i zostaje tylko y_2.

3. *Wiedząc, że $a^2 + a + 1 = 0$, oblicz* $a^{1991} + \frac{1}{a^{1991}}$.

Rozwiązanie.
Mnożąc obie strony danej równości przez a mamy $a^3 + a^2 + a = 0$, stąd $a^3 = -\underbrace{(a^2+a)}_{-1} = +1$.

I sposób

$$a^{1991} + \frac{1}{a^{1991}} = (a^3)^{663}a^2 + \frac{1}{(a^3)^{663}a^2} = a^2 + \frac{1}{a^2} =$$
$$= \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 = \left(\frac{a^2+1}{a}\right)^2 - 2 = \left(\frac{-a}{a}\right)^2 - 2 = -1.$$

Odpowiedź: -1.

II sposób

$$a^{1991} + \frac{1}{a^{1991}} = (a^3)^{\frac{1991}{3}} + \frac{1}{(a^3)^{\frac{1991}{3}}} = 1 + 1 = 2.$$

Odpowiedź: 2.

Gdy „rzecz dzieje się w zbiorze liczb rzeczywistych", wtedy oba sposoby są złe. Nie ma bowiem takiego rzeczywistego a, że $a^2 + a + 1 = 0$. Gdy „rzecz dzieje się w zbiorze liczb zespolonych", wtedy I sposób jest poprawny, II sposób zaś jest zły. Zły dlatego, że wzór $(z^k)^l = z^{kl}$ obowiązuje, przy zespolonym z, dla k, l całkowitych. Weźmy np. $k = 4$, $l = 1/4$. Wtedy wzór się „psuje". Istotnie

$$\underbrace{(i^4)^{\frac{1}{4}}}_{\underbrace{(iiii)^{\frac{1}{4}}}_{1}} = \underbrace{i^{4\cdot\frac{1}{4}}}_{i}.$$

Zatem $1 = i$. Sprzeczność.

4. *Oblicz* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$

Rozwiązanie.
I sposób

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) =$$
$$= 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 = 0.$$

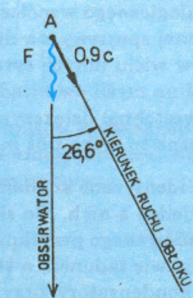
II sposób

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+n)n}{2n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

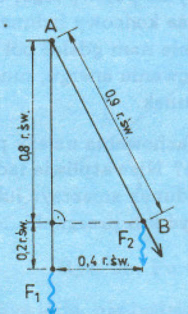
I sposób jest błędny. II sposób jest poprawny. W sposobie I zastosowaliśmy twierdzenie o granicy sumy. Twierdzenie to wolno stosować tylko wtedy, gdy składniki tej sumy są zbieżne i liczba tych składników jest stała. Tymczasem u nas liczba ta rośnie wraz z n.

Paradoks ten jest nieco innego rodzaju niż trzy pozostałe. Mianowicie, nie mamy tutaj do czynienia z żadnym przekroczeniem prędkości światła. To, że wydaje się nam, iż jakiś obłok porusza się z prędkością większą niż c, jest po prostu złą interpretacją danych doświadczalnych. Nie, nie twierdzę, że to wynika z niedokładności pomiarów. To jest coś znacznie bardziej subtelnego.

Oczywiście, nikt nie wie, jak to jest naprawdę. Istnieje jednak hipoteza bardzo ładnie tłumacząca obserwowanie takich prędkości. Wyobraźmy sobie, że obserwowany obłok porusza się z prędkością 0,9 c pod kątem 26,°6 do prostej łączącej nas z obłokiem.



Niech w chwili $t = 0$ obłok znajduje się w punkcie A. Wysyła on wówczas z tego punktu foton F_1 w naszą stronę. W chwili $t = 1$ rok obłok znajduje się w punkcie B. Wysyła on wówczas z tego punktu foton F_2 w naszą stronę.



Otóż, z rysunku widać, że foton F_1 wyprzedza w „pionie" foton F_2 o 0,2 roku świetlnego, podczas gdy różnica ich współrzędnych w poziomie wynosi 0,4 roku świetlnego.

Po upływie milionów lat, gdy fotony dotrą na Ziemię, najpierw dotrze foton F_1, a po upływie 0,2 roku dotrze foton F_2. Natomiast my będziemy obserwowali, że dotarły one z punktów w przestrzeni odległych o 0,4 roku świetlnego. Stąd otrzymamy prędkość poprzeczną 2c, podczas gdy tak naprawdę jest ona równa „zaledwie" 0,4 c.

Gdy dwa prawa zachowania kłócą się ze sobą

Andrzej SZYMACHA

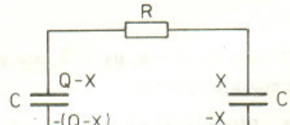
Każdy wie, co to jest kondensator i to, że może on służyć do magazynowania energii. Jeśli pojemność kondensatora wynosi C, a zgromadzony na okładce ładunek równy jest Q, energia kondensatora ma wartość $Q^2/2C$. Charakterystyczne jest występowanie w tym wzorze współczynnika $1/2$. Naiwnie można by sądzić, że skoro napięcie na okładkach wynosi Q/C, energia powinna być równa iloczynowi napięcia Q/C i ładunku Q, czyli Q^2/C.

Wyjaśnienie jest bardzo proste. Gdybyśmy zaczęli czerpać prąd z tego kondensatora i stopniowo go rozładowywali, napięcie by spadało i tylko początkowe porcje ładunku przepływałyby przy napięciu Q/C, podczas gdy końcowe przechodziłyby przez różnicę potencjałów dążącą do zera. Średnie napięcie byłoby równe $(1/2)(Q/C+0)$ i stąd właśnie $1/2$ we wzorze na całkowitą energię. Dokładnie taki sam jest mechanizm pojawienia się analogicznego współczynnika we wzorach na energię odkształconej sprężyny, na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym i w wielu innych sytuacjach. To właśnie ten współczynnik miał na myśli ów ksiądz, któremu doniczka spadła na głowę i który westchnął dziękczynnie: „Chwała Ci, Panie, że energia kinetyczna to tylko **pół** mv^2".

Przygotujmy dwa identyczne kondensatory, ale naładujmy początkowo tylko jeden z nich. Co się stanie, gdy do końcówek kondensatora naładowanego przytkniemy końcówki tego drugiego? Niewątpliwie ładunek, a także i energia rozpłyną się pomiędzy oba kondensatory, przy czym ze względu na ich identyczność końcowe energie i końcowe ładunki powinny być takie same na każdym z nich. Pamiętając o prawie zachowania energii i o prawie zachowania ładunku można by przypuścić, że teraz na każdym z kondensatorów mamy ładunek $Q/2$ i energię $Q^2/4C$. Ale tak nie może być! Przecież podstawiając do ogólnego wzoru na energię kondensatora ładunek $Q/2$ dostaniemy $Q^2/8C$. Mnożąc tę ostatnią wartość przez 2 (bo są dwa kondensatory) dostajemy jako całkowitą wartość końcowej energii tylko połowę tego, co było na początku. Jeśli przyjmiemy, że końcowy ładunek całkowity jest równy początkowemu, ginie nam gdzieś pół energii – gdybyśmy się upierali przy zachowaniu energii, musiałby jakoś niezrozumiale rozmnożyć się ładunek.

Któremu z praw zachowania należy przyznać pierwszeństwo w tym przykładzie? Niewątpliwie ładunkowi. Nie ma takiej ludzkiej siły, by ładunek zniszczyć lub wykreować. Nie sposób także ładunek ukryć lub przegapić.

Energii też, oczywiście, zniszczyć nie można, ale ma ona tyle form, tyle różnych postaci, że łatwo przy pobieżnej analizie zjawiska zaniedbać któryś z mechanizmów jej przetwarzania. Tak też i dzieje się w naszym przykładzie. Wydostawanie się energii poza obręb rozważanych kondensatorów byłoby bardziej widoczne, wręcz oczywiste, gdybyśmy zamiast zwierać na krótko odpowiednie okładki kondensatorów połączyli jedną z par przewodnikiem o określonej wartości oporu omowego (rys.). W trakcie wyrównywania napięć (i ładunków) płynie prąd i na oporniku wydziela się ciepło Joule'a–Lenza. Mogłoby się wydawać, że straty na ciepło dają się ograniczyć do minimum przez wzięcie małego oporu, ale to złudzenie. Wydzielone ciepło łatwo obliczyć i przekonać się, że wynik nie zależy od wartości oporu, no i że, oczywiście, to wydzielone ciepło dokładnie uzupełnia wartość końcowej energii elektrostatycznej do wartości energii początkowej.



Uzyskanie tego wyniku nie wymaga praktycznie żadnych obliczeń, w szczególności nie trzeba wyznaczać czasowego przebiegu zjawiska rozładowania. Wystarczy zauważyć, że przeniesienie ładunku X z okładki pierwszego kondensatora na okładkę drugiego zmniejsza napięcie pierwszego o X/C i zwiększa napięcie drugiego o X/C, a więc zmniejsza różnicę potencjałów na końcach opornika o $2X/C$. W trakcie przeładowywania przeniesienie połowy początkowego ładunku powoduje (liniowy jako funkcja X) spadek napięcia na oporze łączącym, od początkowej wartości Q/C do końcowej wartości zero. Średnie napięcie jest więc równe $Q/2C$ i przepływ ładunku $Q/2$ spowoduje wydzielenie ciepła $Q/2 \times Q/2C$, czyli dokładnie tyle, ile „zginęło" nam przy pierwszym rachunku.

Przedstawione powyżej rozwiązanie tego niezbyt skomplikowanego paradoksu nie wyczerpuje całości problemu, gdyż jest ono poprawne jedynie przy zaniedbaniu indukcyjności pętli, jaką tworzą kondensatory i łączące je (chociażby zredukowane do samych końcówek) przewody. Może pojawić się iskrzenie, może być wypromieniowana fala elektromagnetyczna, może powstać hałas – nie mamy jednak wątpliwości, że w każdym konkretnym przypadku dokładnie pół początkowej energii elektrostatycznej rozproszy się do otoczenia.

Jak piłeczką pingpongową rozbić mur?

Bardzo prosto – strzelamy piłeczką pingpongową o masie m i prędkości v w znacznie cięższą, spoczywającą kulę o masie M. Zaniedbujemy grawitację, opory itp., tzn. rozpatrzymy zderzenie prawie sprężyste. Po zderzeniu kula o masie M porusza się z prędkością V, a nasza kulka odskoczy do tyłu z prędkością v'. Z zasady zachowania pędu mamy:

$$mv = mv' + MV\,.$$

Otrzymujemy, że

$$MV = m(v - v')\,,$$

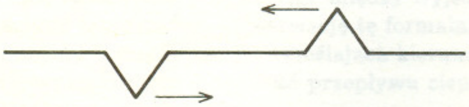
to znaczy kula o masie M toczy się z pędem $MV > mv$, bo $v' < 0$. Zderza się ona teraz z jeszcze cięższą kulą, która w wyniku zderzenia znów nabiera pędu. Powtarzamy to jeszcze kilka razy z coraz cięższymi kulami, aż końcowa kula z olbrzymim pędem uderza w mur. Czy mur się zawali?

Na szczęście nie. Pęd kuli M po zderzeniu rośnie, ale jej energia jest mniejsza niż energia piłeczki pingpongowej. Jeśli są jeszcze jakieś straty, które zaniedbaliśmy, to tym gorzej.

Jan KALINOWSKI

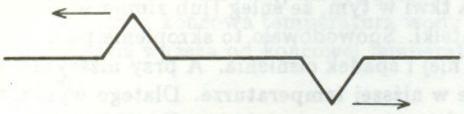
Zasada superpozycji

głosi, że dwie fale mogą przebiegać dany obszar przestrzeni niezależnie, tzn. w każdym punkcie i w każdej chwili wychylenie jest sumą wychyleń odpowiadających każdej z fal oddzielnie. Wynika stąd wniosek, że jeśli np. na strunie wytworzymy dwa impulsy biegnące naprzeciw siebie,



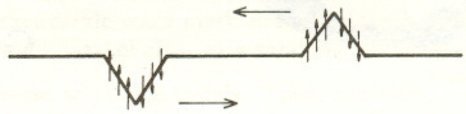
to w pewnym momencie fale „znikną", tzn. wychylenia się zniosą,

a następnie impulsy znów powstaną „z niczego".

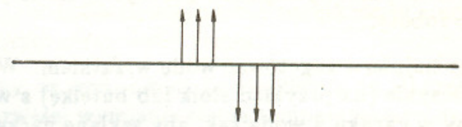


Czy ten – pozornie absurdalny – wniosek z zasady superpozycji jest prawidłowy i jak można go pogodzić z zasadą zachowania energii?

Wyjaśnienie paradoksu kryje się w tym, że energia fali występuje w dwóch postaciach – jako suma energii kinetycznych punktów ośrodka oraz suma energii potencjalnych (np. energii sprężystości, gdy fala powoduje rozciąganie i ściskanie ośrodka, lub energii grawitacyjnej, gdy mowa o falach na powierzchni wody). Energia potencjalna zależy od wychyleń punktów ośrodka, energia zaś kinetyczna od ich prędkości. Na przedstawionych rysunkach bezpośrednio widzimy tylko wychylenie punktów, a więc tylko energia potencjalna spada do zera i ponownie się „odtwarza". Aby omówić energię kinetyczną, zaznaczmy pionowymi strzałkami prędkości punktów ośrodka na pierwszym rysunku.



Widzimy, że nałożenie się impulsów oznacza dodanie (podwojenie) prędkości:



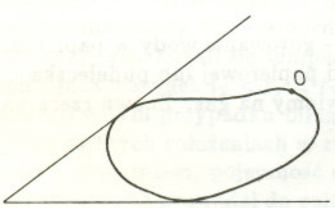
W momencie mijania się impulsów kosztem spadku energii potencjalnej do zera energia kinetyczna jest więc czterokrotnie większa niż dla pojedynczego impulsu.

Jerzy B. BROJAN

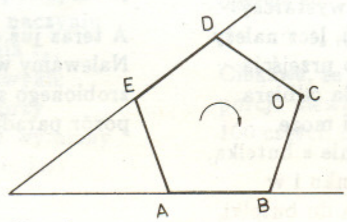
Nie wszystko koło, co się kręci

Następujące pytanie zostało postawione przez Andrieja Nikołajewicza Kołmogorowa. *Mamy dany kąt oraz punkt O wewnątrz niego* (rys. 1). *Czy istnieje figura inna niż koło, która może obracać się wewnątrz tego kąta w taki sposób, że będzie cały czas dotykała do obu jego ramion, punkt O zaś będzie leżał na jej obwodzie?*

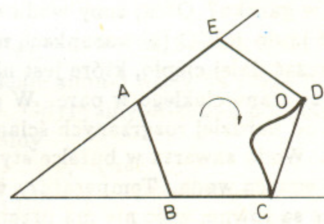
Oczywiście, koło ma tę własność. Ale nie tylko koło. A. Babiczew znalazł pewną klasę takich figur (*Kwant* 5/1981). Rozważmy, mianowicie, wielokąt foremny umieszczony w kącie utworzonym z przedłużenia dwóch jego boków. Niech natomiast punkt O będzie jednym z wierzchołków tego wielokąta (rys. 2a).



Rys.1



Rys. 2a



Rys. 2b. Po obrocie o kąt $2\pi/5$.

Jeśli teraz będziemy obracali ten wielokąt, to punkt O, oczywiście, nie będzie leżał na jego obwodzie, lecz będzie zakreślał pewną krzywą w jego wnętrzu. Jeśli obrócimy wielokąt o kąt 2π, to punkt O zakreśli pewien „kwiatek". Łatwo zauważyć, że figura w kształcie tego „kwiatka" spełnia już założenia zadania Kołmogorowa.

Powstają pytania. Czy istnieją inne figury o tej własności? A jeśli ograniczymy się do figur wypukłych, to czy istnieją jakieś figury różne od koła? A może zmodyfikować zadanie i rozpatrywać figury styczne nie do ramion kąta, lecz do jakichś innych figur?

Piotr HAJŁASZ

Sumę szeregu $1-1+1-1+1-1+\ldots$ można obliczyć bez trudu: $S = 1-1+1-1+1-1+\ldots =$
$= 1-(1-1+1-1+\ldots) = 1-S$, skąd $S=\frac{1}{2}$.
Błąd, oczywiście, polega na potraktowaniu szeregu tak, jakby reprezentował on liczbę – jeśli S nie jest liczbą, to z $S = 1-S$ nie da się wyprowadzić zależności $S=\frac{1}{2}$.

Rodziców mamy dwoje. Dziadków czworo. Pradziadków ośmioro. Cofając się o n pokoleń będziemy mieli 2^n prapra...pradziadków. Biorąc $n=100$ (a więc cofając się o kilka tysięcy lat) mamy

$$2^{100} = (2^{10})^{10} = 1024^{10} > 1000^{10} = 10^{30}.$$

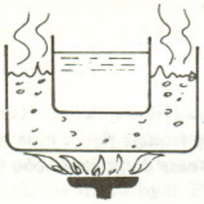
Czy to trochę nie za dużo?

mała delta

Gotowanie wody

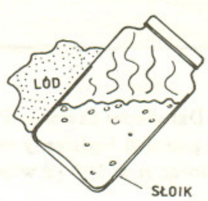
Nic prostszego – każdy powie. Zwyczajnie: wziąć garnek, wodę, palnik gazowy lub coś innego bardzo gorącego i już. Ale my będziemy chcieli niezwyczajnie. Spróbujemy inaczej gotować wodę: wrzątkiem, śniegiem, a na koniec w papierowym rondelku. A więc do roboty.

Spróbujmy najpierw zagotować wodę wrzątkiem. Weźmy szklane naczynie (na przykład słoik lub butelkę) z wodą i umieśćmy w garnku z wodą tak, aby szklane naczynie i garnek nie stykały się. Teraz ogrzewamy garnek do momentu wrzenia w nim wody. Można by oczekiwać, że i woda w szklanym naczyniu będzie też wrzeć.



Tak się jednak nie dzieje. Woda w butelce będzie bardzo gorąca (tak samo gorąca jak w garnku), ale nie będzie wrzeć. Dlaczego? Czym różni się woda w butelce od wody w garnku? Otóż, żeby woda wrzała, nie wystarczy ogrzać ją do 100°C (w warunkach normalnych), lecz należy dostarczać dalej ciepło, które jest niezbędne do przejścia wody ze stanu ciekłego w parę. W garnku woda odbiera ciepło od bardziej rozgrzanych ścianek garnka i może wrzeć. Woda zawarta w butelce styka się jedynie z butelką, a ta z wrzącą wodą. Temperatury wody w garnku i w butelce sa równe, więc nie ma przepływu ciepła do butelki, czyli woda w niej nie może się zagotować.

Jeśli nie można wrzątkiem, to może zimną wodą albo śniegiem? Wolne żarty – ktoś powie. No cóż, spróbujmy. Nalewamy trochę wrzącej wody do butelki, szybko korkujemy i czekamy, aż wrzenie w niej ustanie. Wiemy, że polewanie wrzątkiem nic nie da. Równe temperatury, brak przepływu ciepła itd. Polejmy ją więc zimną wodą albo połóżmy na niej trochę śniegu. I co? WRZE!

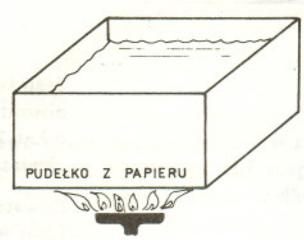


Czy to nie paradoksalne? Czego nie mógł zrobić wrzątek, dokonał śnieg!

Tajemnica tkwi w tym, że śnieg (lub zimna woda) oziębił ścianki butelki. Spowodowało to skroplenie pary wodnej wewnątrz niej i spadek ciśnienia. A przy niższym ciśnieniu woda wrze w niższej temperaturze. Dlatego wysoko w górach nie można ugotować kartofli. W butelce mamy więc wrzątek, ale niezbyt gorący. O tym, że ciśnienie w butelce zmalało, łatwo się przekonać biorąc, na przykład, butelkę plastykową zamiast szklanej.

Po oblaniu zimną wodą butelka zostaje zgnieciona przez ciśnienie zewnętrzne powietrza. Przy tych doświadczeniach należy pamiętać, żeby nie napełniać butelki (lub słoika) do pełna.

A teraz już ostatnia rzecz – gotowanie wody w papierze. Nalewamy wody do torebki papierowej lub pudełeczka zrobionego z papieru i stawiamy na gaz. Znowu rzecz na pozór paradoksalna.



Papier nie zapala się i można w ten sposób zagotować wodę. Chodzi o to, że woda w papierowym naczyniu odbiera szybko ciepło od papieru i nie pozwala mu ogrzać się powyżej 100°C i zapalić się. To samo dzieje się w zwykłych garnkach, w których można gotować przez całe lata. Ale wystarczy postawić pusty garnek na gaz tylko raz, aby uległ zniszczeniu.

Gotował Jan KALINOWSKI

Ciepło – zimno

Wiele codziennych doświadczeń potwierdza oczywistą prawdę: gdy dwa ciała o różnych temperaturach są w kontakcie cieplnym, zawsze mamy do czynienia ze zjawiskiem polegającym na wyrównywaniu się temperatur. W efekcie ciało cieplejsze ochładza się, zimniejsze ogrzewa, aż do uzyskania stanu pośredniego między wyjściowymi wartościami temperatur. Obserwację tę formalnie opisuje druga zasada termodynamiki określająca kierunek wymiany ciepła – wyklucza ona możliwość przepływu ciepła od ciała zimniejszego do cieplejszego.

Zastanówmy się jednak nad możliwością rozwiązania problemu brzmiącego paradoksalnie w zestawieniu z drugą zasadą termodynamiki:
Jak doprowadzić do tego, by dana ilość zimnej wody na skutek wymiany ciepła z taką samą ilością wody ciepłej stała się cieplejsza od wody ciepłej?
Innymi słowy:
Jak ogrzewając wodę zimną za pomocą gorącej dojść do stanu, w którym końcowa temperatura wody ogrzewanej będzie wyższa od końcowej temperatury wody ogrzewającej?

Natychmiast nasuwa się spostrzeżenie, że wymiana ciepła między wodą gorącą i zimną ustanie w momencie wyrównania się ich temperatur, dalsze zaś ogrzanie wody zimnej oznaczałoby, że ciepło może przepływać od ciała chłodniejszego do cieplejszego, co przecież nie jest możliwe.

Wyobraźmy sobie jednak następujący przebieg procesu: W termosie A przygotowujemy litr wody gorącej ($t_1 = 100°\mathrm{C}$), w termosie B zaś litr zimnej ($t_2 = 0°\mathrm{C}$). Dodatkowo potrzebny nam będzie jeszcze jeden termos (C), w którym będziemy gromadzili ogrzewaną wodę, oraz naczynie o cienkich, dobrze przewodzących ściankach, w którym zimna woda będzie ogrzewana.

Nalewamy połowę zimnej wody do naczynia i naczynie zanurzamy w wodzie gorącej z termosu A. Po pewnym czasie temperatury wody w termosie i wody w naczyniu wyrównają się. Ustali się temperatura pośrednia t_x, spełniająca warunek $t_2 < t_x < t_1$. Analiza niezwykle prostego w tym przypadku bilansu cieplnego (przy upraszczających założeniach w rodzaju: nie ma wymiany ciepła z otoczeniem, pojemność cieplna naczynia jest zaniedbywalna) prowadzi do zależności

$$t_x = \frac{2t_1 + t_2}{3} \approx 66,7°\mathrm{C}.$$

Teraz pół litra ogrzanej wody przelewamy do termosu C, drugą zaś połowę chłodnej wody ogrzewamy za pomocą ciepłej w termosie A. Woda ogrzewająca nie jest już tak gorąca, jak na początku doświadczenia. Wciąż jednak możemy za jej pomocą całkiem nieźle podgrzać pozostałe pół litra zimnej wody. Jej temperatura końcowa osiągnie wartość

$$t_y = \frac{2t_x + t_2}{3} \approx 44,4°\mathrm{C}.$$

Do takiej też wartości spadnie ostatecznie temperatura wody ogrzewającej – tej z termosu A. Końcową temperaturę wody ogrzewanej będzie można zmierzyć po wymieszaniu pół litra wody o temperaturze 66,7°C i pół litra wody o temperaturze 44,4°C. Bilans cieplny dla tego przypadku podpowiada nam wartość 55,5°C. A więc rzeczywiście udało się doprowadzić do odwrócenia stosunku temperatur! W prawdziwym doświadczeniu, wskutek nieuniknionych strat ciepła pobieranego przez naczynia i otoczenie, różnica ta będzie mniejsza, ale ostateczny efekt taki sam.

Zwróćmy uwagę, że dzieląc wodę chłodną nie na dwie, lecz na większą liczbę części możemy uzyskać jeszcze wyższą jej temperaturę końcową. Dokonując podziału na 10, 100, 1000... części uzyskujemy wciąż wyższą i wyższą temperaturę. A co będzie, jeśli zimną wodę podzielimy na nieskończenie wiele nieskończenie małych porcji? Czy wtedy nastąpi całkowita zamiana temperatur?

Tak dobrze to już nie będzie. Tylko pierwsza, nieskończenie mała porcja chłodnej wody ogrzeje się do pierwotnej temperatury wody gorącej. W każdym etapie doświadczenia następuje ochładzanie wody początkowo gorącej, za każdym więc razem porcje wody zimnej będą uzyskiwały coraz mniej ciepła.

Załóżmy, że wodę zimną podzieliliśmy na 10 części. Po pierwszej wymianie ciepła temperatura wody gorącej będzie równa

$$t_{x_1} = \frac{10}{10+1} t_1,$$

po drugiej

$$t_{x_2} = \frac{10}{10+1} t_{x_1} = \left(\frac{10}{11}\right)^2 t_1,$$

po dziesiątej zaś

$$t_y = t_{x_{10}} = \left(\frac{10}{11}\right)^{10} t_1 \approx 38,5°\mathrm{C}.$$

Końcową temperaturę wody chłodnej (teraz już raczej ciepłej) znajdujemy jako średnią temperaturę wszystkich jej dziesięciu porcji

$$t_z = \frac{t_{x_1} + t_{x_2} + \ldots + t_{x_{10}}}{10} \approx 61,5°\mathrm{C},$$

lub prościej, korzystając z warunku, że chłodna woda ogrzeje się o tyle, o ile ostudzi się ciepła

$$t_z = t_2 + (t_1 - t_y) = 100 - 38,5 = 61,5°\mathrm{C}.$$

Ciekawe, że dalsze dzielenie zimnej wody na coraz mniejsze porcje niewiele już daje. Gdybyśmy dokonali podziału na 100 części, otrzymalibyśmy

$$t_y = t_{x_{100}} = \left(\frac{100}{100+1}\right)^{100} t_1 \approx 37,2°\mathrm{C},$$

a więc

$$t_z \approx 62,8°\mathrm{C}.$$

W ogólnym przypadku podziału na n równych porcji mamy

$$t_y = t_{x_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n t_1 = \frac{t_1}{(1+\frac{1}{n})^n}.$$

Mianownik ostatniego wyrażenia przy nieograniczonym wzroście n nie rośnie nieograniczenie, lecz dąży do $\mathrm{e} = 2,71828...$ Tak więc końcowa temperatura litra gorącej początkowo wody nie może spaść poniżej wartości

$$t_y = \frac{t_1}{\mathrm{e}} \approx \frac{100}{2,71828} \approx 36,8°\mathrm{C},$$

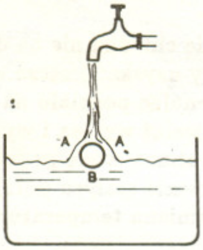
a tym samym temperatura wody chłodnej nie może wzrosnąć powyżej $t_z = 100°\mathrm{C} - 36,8°\mathrm{C} = 63,2°\mathrm{C}$. Słowem, nie można doprowadzić do całkowitej zamiany temperatur litrowych porcji wody.

Opracowała Joanna UDALSKA

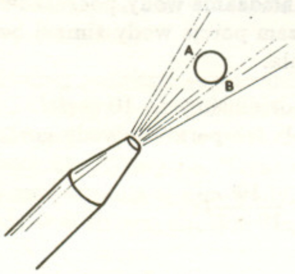
(na podstawie książki P. Makowieckiego *Pomyśl zanim odpowiesz*, Wiedza Powszechna, Warszawa 1985)

Prawo Bernoulliego

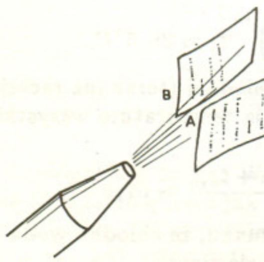
Jan KALINOWSKI



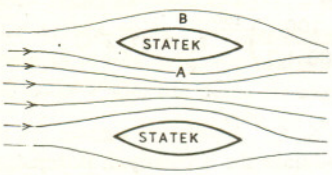
Rys. 1. Piłeczka „wciągana" przez strumień wody.



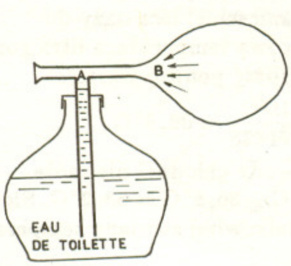
Rys. 2. Piłeczka podtrzymywana przez strumień powietrza.



Rys. 3. Jeśli między kartki wdmuchiwać powietrze, to kartki „przyciągają się".



Rys. 4. Dwa statki płynące równolegle przyciągają się.



Rys. 5. Rozpylacz.

Czy zauważyłeś, jak różne przedmioty pływające na wodzie (patyki, piłeczki itp.) „z uporem maniaka" dostają się pod strumień cieknącej wody? Możesz to sam łatwo sprawdzić. Weź piłeczkę do pingponga lub małą piłeczkę gumową, włóż do naczynia i ustaw pod strumieniem wody lecącej z kranu (rys. 1). Zauważysz, że piłeczka zostanie wciągnięta pod strumień, a nawet, że pod strumieniem pływa nieco mniej zanurzona. Jakby strumień wody wyciągał ją w górę, zamiast głębiej ją wepchnąć. Jeszcze bardziej zagadkowe jest zachowanie się piłeczki w strumieniu powietrza wydmuchiwanego z węża włożonego z przeciwnej strony do odkurzacza. Piłeczka jakby trzymała się strumienia powietrza (rys. 2). Każdy może jakoś zrozumieć, że strumień skierowany prosto do góry może to zrobić z piłeczką, ale skierowany na ukos? W silnym strumieniu powietrza, np. ze sprężarki do pompowania opon samochodowych, można utrzymać śruby, nakrętki, kulki metalowe itp. Dlaczego tak się dzieje? Dlaczego, gdy dmuchamy między dwie kartki papieru, to trudno jest je rozdzielić, gdyż raczej „sklejają się" zamiast rozsunąć się (rys. 3)? Czy zauważyłeś, że gdy wchodzisz do rwącej rzeki, nurt rzeki wciąga cię na środek? Podobnie, szybko przejeżdżający pociąg może wciągnąć pod koła osoby stojące na peronie zbyt blisko toru. Wydawałoby się, że pęd powietrza wywołany przez pociąg powinien raczej odepchnąć nieuważnych.

Wszystkie powyższe zjawiska łatwo można wytłumaczyć korzystając z prawa Bernoulliego. Prawo to głosi, że dla bezwirowego przepływu nieściśliwej cieczy lub gazów wielkość

$$\rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 + p$$

jest stała, gdzie ρ, v, i p są odpowiednio gęstością, prędkością przepływu i ciśnieniem cieczy lub gazu w danym punkcie, a h – względną wysokością tego punktu. Prawo Bernoulliego wynika z zasady zachowania energii przy przepływie cieczy i gazów. Na mocy tego prawa, na przykład, na tej samej wysokości ($h = \text{const}$), jeśli prędkość przepływu cieczy rośnie, to maleje ciśnienie. Teraz możemy już wytłumaczyć omawiane zjawiska.

Rozpatrzmy strumień wody spadającej na piłeczkę. W punktach A prędkość wody jest większa niż w punkcie B i różnica ciśnień utrzymuje piłkę pod strumieniem, a nawet trochę wypycha ją z wody.

Podobnie jest dla piłeczki w strumieniu powietrza. W środku strumienia prędkość jest większa niż na brzegach i wynikająca stąd siła wraz z siłą grawitacji i oporu czołowego piłeczki utrzymują ją w położeniu stacjonarnym. Przesuwając strumień przesuwamy też piłeczkę. Podobnie dwie kartki „przyciągają się", gdy dmuchamy między nie. Trzeba o tym pamiętać kierując statkami. Gdy dwa statki płyną równolegle, woda między nimi musi płynąć szybciej niż na zewnątrz. Ciśnienie między nimi jest więc mniejsze, statki „przyciągają się" i może dojść do zderzenia (rys. 4).

Innym przykładem wykorzystania prawa Bernoulliego jest rozpylacz. Powietrze jest przedmuchiwane przez rurkę ze zwężeniem. W zwężeniu prędkość powietrza jest większa, a więc ciśnienie mniejsze. Wskutek mniejszego ciśnienia w punkcie A (rys. 5) płyn ze zbiorniczka podnosi się i jest porywany przez strugę powietrza.

Jak widać, zjawisk związanych z prawem Bernoulliego jest bardzo dużo i można je stosunkowo łatwo objaśnić. Ale, ale. Czy rzeczywiście wszystko już rozumiemy? Na zdrowy rozum wydawałoby się, że jeśli dmuchamy przez rurkę ze zwężeniem, to w zwężeniu powinno być wyższe ciśnienie, bo tam musimy powietrze wtłoczyć. A prawo Bernoulliego mówi, że na odwrót – jest tam niższe ciśnienie. Powiedzieliśmy, że prawo Bernoulliego odzwierciedla prawo zachowania energii. Na zakończenie podamy więc argument z użyciem sił pozwalający lepiej zrozumieć to prawo. W zwężeniach gaz lub ciecz musi płynąć szybciej, aby taka sama masa ośrodka przeszła przez zwężenie. Żeby ośrodek mógł płynąć szybciej, musi być siła przyspieszająca przepływ. Siła ta może pochodzić jedynie z różnicy ciśnień. Gdyby w zwężeniach panowało większe ciśnienie niż poza nimi, to ośrodek byłby hamowany, a nie przyspieszany.

Granica Roche'a to taka krytyczna odległość od planety, poniżej której ciekły satelita obiegający tę planetę nie może istnieć, ponieważ siły pływowe przeważałyby nad jego własną grawitacją – satelita zostałby rozerwany skutkiem pływowego działania swojej macierzystej planety. Gdy gęstości planety i satelity są jednakowe, to granica Roche'a znajduje się w odległości około 2,5 promieni planety od jej środka. Tymczasem wiadomo z wielu źródeł i nawet widzieliśmy w telewizji, że astronauci w statku na orbicie okołoziemskiej wypuszczali do kabiny kule wody, które, co prawda, nieco drgały i falowały, ale nie miały żadnej tendencji do rozrywania się – a przecież rzecz działa się dużo poniżej granicy Roche'a. Obserwacjom nie można przeczyć, pozostaje więc znaleźć przyczynę tej niespodziewanej spoistości kuli wodnej w niedozwolonym dla niej obszarze przestrzeni. Jest nią napięcie powierzchniowe wody, które dla tak małych porcji wody decydująco wpływa na ich kształt. Gdyby te kule wodne miały kilometrowe rozmiary, to co innego...

*

Księżyc odległy jest od Słońca (o masie $2 \cdot 10^{30}$ kg) o $1,5 \cdot 10^{11}$ m, a od Ziemi (o masie $6 \cdot 10^{24}$ kg) o $3,84 \cdot 10^{8}$ m. Stosunek jego przyspieszenia ze strony Słońca do przyspieszenia ze strony Ziemi wynosi więc

$$\frac{2 \cdot 10^{30}}{6 \cdot 10^{24}} \left(\frac{3,84 \cdot 10^{8}}{1,5 \cdot 10^{11}} \right)^2 \approx 2,$$

czyli Słońce przyciąga Księżyc dwa razy silniej niż Ziemia. A jednak obiega on Ziemię, co każdy przecież widzi. Sprzeczności nie będzie, jeżeli wziąć pod uwagę, że gdyby układ Ziemia-Księżyc znajdował się w jednorodnym polu grawitacyjnym, to mogłoby ono być dowolnie silne, a Księżyc spokojnie obiegałby Ziemię. Oba te ciała „spadałyby” bowiem w tym polu z **jednakowym** przyspieszeniem. W rzeczywistości Ziemia i Księżyc znajdują się w niemal jednorodnym polu grawitacyjnym Słońca (bo Słońce jest dość daleko) i dlatego samo bezwzględne jego natężenie nie jest istotne. W rezultacie geocentryczny ruch Księżyca jest w dobrym przybliżeniu keplerowski i jedynie perturbowany przez oddziaływanie Słońca.

*

Każdy chyba rozumie, że skoro Księżyc przyciąga grawitacyjnie wodę ziemskich oceanów, to woda ta, mając możliwość swobodnego przelewania się po powierzchni Ziemi, musi tam spiętrzyć się w punkcie podksiężycowym, musi tam nastąpić przypływ. No to dlaczego woda spiętrza się również w punkcie Ziemi przeciwległym do Księżyca? Są wszak dwa przypływy i dwa odpływy w ciągu doby! Pozorny paradoks tkwi w zbyt uproszczonym tłumaczeniu przyczyny przypływów. Księżyc wprawdzie przyciąga wodę, no ale samą Ziemię też. Woda po stronie Księżyca dlatego się podnosi, że jest przyciągana silniej niż Ziemia, a to z kolei dlatego, że jest nieco bliżej Księżyca. Po stronie przeciwnej sama Ziemia jest przyciągana silniej niż woda, więc znowu pojawia się **różnica** przyspieszeń grawitacyjnych powodująca podnoszenie się wody. Tak więc, pływy to skutek nie samych oddziaływań ze strony Księżyca, lecz różnicy oddziaływań (por. *Delta* 11/1991).

*

Zastosujmy rozumowanie dotyczące pływów do Księżyca, którego ruch geocentryczny (niech to będzie w płaszczyźnie ekliptyki) jest perturbowany obecnością Słońca. W nowiu Księżyc jest silniej przyciągany przez Słońce niż Ziemia (bo bliżej Słońca), a w pełni słabiej (bo dalej). Wobec tego jego orbita powinna zostać rozciągnięta w kierunku na Słońce i przeciwnym – tymczasem tak nie jest! Tłumaczy to fakt, że orbita Księżyca nie jest tworem materialnym. W nowiu i w pełni przyspieszenie Księżyca ze strony Ziemi jest osłabiane przez pływowe działanie Słońca, zatem jego orbita musi mieć tam krzywiznę mniejszą od średniej. W pobliżu kwadr – przeciwnie – działanie pływowe Słońca pozornie zwiększa ziemską grawitację, a więc tu orbita musi mieć krzywiznę większą. W rezultacie orbita Księżyca jest spłaszczona w kierunku na Słońce i przeciwnym.

Zadania

Redaguje Michał WOJCIECHOWSKI

M 628. Udowodnić, że

$$\sum_{i=2}^{n^k} \frac{1}{i} \geq k \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i}.$$

Rozwiązanie na str. 13

M 629. Czy istnieje wielościan, którego każdy przekrój jest trójkątem?
Rozwiązanie na str. 12

M 630. Czy liczba naturalna A, co najmniej trzycyfrowa, której tylko pierwsza i ostatnia cyfra są różne od zera, może być kwadratem liczby naturalnej?
Rozwiązanie na str. 12

Redaguje Jarosław KULPA

F 331. Oszacuj, ile średnio piorunów uderza w Ziemię w ciągu sekundy, jeżeli wiadomo, że ładunek piorunu wynosi około $q = -15$ C. Dane dotyczące Ziemi: powierzchnia Ziemi naładowana jest ładunkiem $Q = -580\,000$ C, opór właściwy atmosfery wynosi $\rho = 4 \cdot 10^{13}$ $\Omega{\cdot}$m.
Rozwiązanie na str. 12

F 332. Magnes zawieszony na cienkiej nici południowym biegunem do dołu został ogrzany powyżej temperatury Curie (jest to temperatura, w której zanika namagnesowanie). W którą stronę zaczął się obracać?
Rozwiązanie na str. 12

Paradoksy w rachunku prawdopodobieństwa

Jacek JAKUBOWSKI

Rachunek prawdopodobieństwa jest tą dziedziną matematyki, w której istnieje szczególnie dużo paradoksów. Związane jest to z naszymi błędnymi wyobrażeniami o losowości. Znany jest fakt, że dla niewprawnej osoby losowość wydaje się regularnością lub tendencją do skupiania się. W tym artykule przedstawię kilka znanych i ciekawych paradoksów. Jednocześnie mam nadzieję, że ich zrozumienie przybliży rachunek prawdopodobieństwa.

Problem kawalera de'Mere

Przy rzucie trzema kostkami sumę oczek równą 11 można otrzymać sześcioma sposobami:

$$1+4+6=1+5+5=2+4+5=2+3+6=3+4+4=3+3+5.$$

Sumę oczek równą 12 też można otrzymać sześcioma sposobami:

$$1+5+6=2+5+5=2+4+6=3+3+6=3+4+5=4+4+4.$$

Dlaczego częściej wypada suma oczek równa 11 niż suma oczek równa 12? Wydaje się, że jest to sprzeczność. Nasz „zdrowy rozsądek" mówi, że rzucając jednakowymi kostkami należy je traktować jak kostki nierozróżnialne, a zatem obu zdarzeniom sprzyja 6 sytuacji, czyli oba zdarzenia mają jednakowe prawdopodobieństwo równe 6/56. Okazuje się, że natura wybiera inny model, a mianowicie traktuje kostki jak kostki rozróżnialne (czyli tak, jak gdyby kostki były pomalowane różnymi kolorami). Wtedy ważne jest nie tylko, jakie wypadły oczka, ale i na których kostkach. Zajściu zdarzenia polegającego na otrzymaniu sumy oczek równej 11 sprzyja 27 wyników, a zdarzeniu polegającemu na otrzymaniu sumy oczek równej 12 sprzyja 25 wyników. Różnica między prawdopodobieństwami jest tak mała (około 0,009), że można na nią zwrócić uwagę tylko wtedy, gdy wykona się dużą liczbę rzutów.

Paradoks Bertranda

„twierdzi", że prawdopodobieństwo nie jest wyznaczone jednoznacznie. Rozwiążmy następujące zadanie:

W okrąg o promieniu R wpisano trójkąt równoboczny. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że losowo poprowadzona cięciwa będzie dłuższa od boku trójkąta.

Rozwiązanie pierwsze. Patrzymy na kąt środkowy oparty na losowo wybranej cięciwie. Zatem zdarzeniem elementarnym jest wybór kąta środkowego, czyli przestrzenią zdarzeń elementarnych jest odcinek $[0,\pi]$. Cięciwa jest dłuższa od boku trójkąta, gdy kąt środkowy jest większy niż $2\pi/3$, stąd zbiór zdarzeń sprzyjających A jest odcinkiem $(2\pi/3,\pi]$. $P(A)$ jest równe długości przedziału $(2\pi/3,\pi]$ podzielonej przez długość przedziału $[0,\pi]$, tzn. $P(A)=1/3$.

Rozwiązanie drugie. Patrzymy na odległość środka cięciwy od środka okręgu. Utożsamiamy cięciwy, których środek leży na tym samym okręgu (mają one tę samą długość). Zdarzeniem elementarnym jest wybór odległości środka cięciwy od środka okręgu. Zatem przestrzenią zdarzeń elementarnych jest odcinek $[0,R]$. Cięciwa spełnia warunki zadania, gdy odległość środka cięciwy od środka okręgu jest mniejsza od $R/2$, tzn. zbiór zdarzeń sprzyjających B jest odcinkiem $[0,R/2)$. Stąd $P(B)=1/2$.

Rozwiązanie trzecie. Położenie cięciwy jest wyznaczone przez położenie jej środka, zatem długość cięciwy jest wyznaczona jednoznacznie przez położenie jej środka. Zdarzeniem elementarnym jest wybór środka cięciwy, to znaczy wybór jednego punktu z koła. Stąd przestrzenią zdarzeń elementarnych jest koło o promieniu R. Zbiór zdarzeń sprzyjających C jest wnętrzem koła o promieniu $R/2$. Stąd $P(C)=\dfrac{\pi(R/2)^2}{\pi R^2}=\dfrac{1}{4}$.

Otrzymaliśmy trzy różne wyniki. Dopóki nie było aksjomatyki rachunku prawdopodobieństwa (a została ona sformułowana dopiero w 1933 r. przez Kołmogorowa), nie można było tej sprzeczności wyjaśnić. Teraz możemy.
W każdym z proponowanych rozwiązań co innego rozumieliśmy przez słowa „losowo poprowadzona". Wybierając metodę rozwiązywania zadania wybieramy przestrzeń probabilistyczną (sposób losowania). Wybierając inną przestrzeń probabilistyczną rozwiązujemy inne zadanie. Paradoks Bertranda jest bardzo dobrą ilustracją faktu, że rozwiązanie problemu następuje dopiero po wybraniu przestrzeni probabilistycznej. Rachunek prawdopodobieństwa nie rozstrzyga problemu, jaką przestrzeń probabilistyczną należy wybrać.

Rozwiązanie zadania F 331.
Niech R oznacza promień Ziemi, $S=4\pi R^2$ jej powierzchnię. Natężenie pola elektrycznego przy powierzchni Ziemi wynosi $E=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{R^2}$. W kierunku Ziemi płynie prąd $I=\dfrac{E}{\rho}\cdot S=\dfrac{Q}{\varepsilon_0\rho}$. Rozładowaniu Ziemi zapobiegają burze, które dostarczają na jej powierzchnię ładunek ujemny. Prąd piorunów musi się równać prądowi ładunków dodatnich: $q\dfrac{\Delta N}{\Delta t}=I$, gdzie N oznacza liczbę piorunów. Stąd $\dfrac{\Delta N}{\Delta t}=\dfrac{Q}{\varepsilon_0\rho q}=110$ piorunów/s.

Rozwiązanie zadania F 332.
Momenty magnetyczne ferromagnetyków związane są z własnymi momentami magnetycznymi elektronów, które ustawione są w preferowanym kierunku, tj. do góry. Własne momenty pędu elektronów (spiny) ustawione są w przeciwnym kierunku, tj. w dół. Po przekroczeniu temperatury Curie zanika stan ferromagnetyzmu i ustawienie momentów, a zatem i spinów, będzie chaotyczne. Wypadkowy moment pędu musi być jednak zachowany – stąd wynika, że magnes jako całość zacznie się obracać. Prędkość kątowa $\vec{\omega}$ będzie skierowana w dół.

Rozwiązanie zadania M 629.
Nie istnieje. Przypuśćmy bowiem, że istnieje. Weźmy dwie ściany mające wspólną krawędź. Narysujmy na nich po jednej prostej równoległej do owej krawędzi, a następnie przetnijmy wielościan płaszczyzną przechodzącą przez te proste. W przekroju otrzymamy wielokąt o dwóch bokach równoległych. Nie będzie to więc trójkąt.

Rozwiązanie zadania M 630.
Nie może. Przypuśćmy bowiem, że A jest kwadratem jakiejś liczby naturalnej. Wówczas ostatnią cyfrą liczby A musi być 1, 4 lub 9, bo nie ma kwadratów kończących się na 05 ani 06. Oznaczmy ostatnią cyfrę przez n^2. Mamy

$$A-n^2=(\sqrt{A}-n)(\sqrt{A}+n).$$

Otóż $A-n^2$ jest podzielne przez 5^{k-1}, gdzie $k\geq 3$ oznacza liczbę cyfr w rozwinięciu A, ale tylko jedna z liczb $\sqrt{A}-n$, $\sqrt{A}+n$ jest podzielna przez 5, więc stąd wynika, że jest ona podzielna przez 5^{k-1}. Mamy

$$\sqrt{A}+n\geq 5^{k-1},\qquad A\geq(5^{k-1}-3)^2.$$

Bezpośrednio sprawdzamy, że A nie może mieć trzech cyfr. Dla $k\geq 4$ mamy zaś $A\geq(5^{k-1}-3)^2>9\cdot 10^{k-1}+9$. Sprzeczność.

Dylemat więźnia

Trzech więźniów A, B, C przebywało w więzieniu. Administracja postanowiła uwolnić jednego, o czym dowiedzieli się więźniowie, ale nie wiedzieli którego. Więzień A ma wśród strażników znajomego, który wie, kto będzie wolny. Chce go zapytać, ale krępuje się pytać o siebie. Pyta więc o imię jednego z więźniów (B lub C), który ma pozostać w więzieniu. Przed zadaniem pytania ocenia, że każdy z nich ma szansę wyjścia równą $1/3$. Myśli, że jeśli strażnik powie, że na przykład B zostaje, to jego szanse rosną do $1/2$ (bo zostanie uwolniony A lub C). Gdzie popełnia błąd?

Źle liczy zdarzenia elementarne. Nie bierze pod uwagę wariantów odpowiedzi strażnika. Strażnik powie B z prawdopodobieństwem 1, gdy zostają A i B, a z prawdopodobieństwem $1/2$, gdy zostają B i C. Zatem prawdopodobieństwo warunkowe, że wyjdzie A, gdy zna odpowiedź strażnika, jest równe

$$\frac{1/2\cdot 1/3}{1/2\cdot 1/3+0+1\cdot 1/3}=\frac{1}{3},$$

a nie $1/2$, jak sądził A (skorzystaliśmy z definicji prawdopodobieństwa warunkowego i ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite). Tego należało się spodziewać, gdyż informacja strażnika z punktu widzenia A nic nie wnosi. Wiadomo, że co najmniej jeden z więźniów B i C zostaje.

Paradoks długości gry

Gra składa się z ciągu $2n$ partii, z których w każdej gracz A wygrywa jeden punkt z prawdopodobieństwem $p = 0,45$, a gracz B wygrywa jeden punkt z prawdopodobieństwem $1-p$. Dla wygrania całej gry należy uzyskać więcej punktów. Jeśli gracz A może wybrać liczbę partii $2n$ z góry, to jakie n powinien wybrać? Wielu osobom wydaje się, że skoro gra jest niekorzystna dla A, to im szybciej się skończy, tym lepiej dla A. Gdyby liczba partii była dowolną liczbą naturalną, to tak by było i A powinien wybrać grę o długości 1. Ale A może wybierać tylko spośród liczb parzystych i wtedy na wynik ma wpływ to, że gra jest korzystna dla B i to, że prawdopodobieństwo remisu maleje wraz ze wzrostem n. Jeśli $p = 0,45$, to optymalną długością gry nie jest 2, ale jest 10. Można to obliczyć korzystając z tego, że prawdopodobieństwo wygrania gracza A w ciągu $2n$ partii wynosi $\sum_{k=n+1}^{2n}\binom{2n}{k}p^k(1-p)^{2n-k}$ i z tego, że jeśli A w grze o długości $2n$ nie zdobył n albo $n+1$ punktów, to w grze o długości $2n+2$ wygra lub przegra w zależności od tego, czy wygrał, czy przegrał w grze o długości $2n$. Dla $0 < p < 1/2$ długość gry $2n$ spełnia warunek $\frac{1}{1-2p}-1\le 2n\le\frac{1}{1-2p}+1$.

Paradoks losowych liczb naturalnych

Dwóch graczy A i B gra w następującą grę. Automat generuje losowo pary sąsiednich liczb naturalnych i przyznaje losowo jedną graczowi A, a drugą graczowi B. Gracz A zna liczbę przypisaną graczowi B, a gracz B zna liczbę przypisaną graczowi A. Żaden z nich nie zna swojej liczby. Osoba z mniejszą liczbą płaci drugiej tyle żetonów, ile wynosi liczba jej przypisana. Każdy z graczy może uznać, że nie warto grać w danym momencie i poprosić o nową parę liczb. Ale żaden z nich nie spasuje, gdyż rozumuje: Gdy widzę, że przeciwnik ma liczbę k, to ja mam $k-1$ lub $k+1$. Każda z nich jest jednakowo prawdopodobna (poza $k=1$), ale gdy wygram, to dostanę $k+1$ żetonów, a gdy przegram, tracę tylko $k-1$ żetonów. Średnio każdy z nich wygrywa, więc gra jest korzystna dla obu. Jest to niemożliwe. Gdzie jest błąd?

Paradoks wynika z faktu, że nie istnieje rozkład prawdopodobieństwa, który przypisuje każdej liczbie naturalnej tę samą wartość (dlaczego?). Natomiast gdyby ograniczyć zbiór liczb, z którego maszyna losuje, byłby to zbiór skończony i rozumowanie graczy prowadzące do paradoksu byłoby fałszywe.

Mam nadzieję, że te paradoksy przybliżyły rachunek prawdopodobieństwa Czytelnikowi i pokazały, jak często nasza intuicja może być zawodna.

Rozwiązanie zadania M 628. Oto dowód: $\sum_{i=2}^{n^k}\frac{1}{i}=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{n^{i-1}+1}+\ldots+\frac{1}{n^i}\right)$, ale

$$\frac{1}{n^{i-1}+1}+\ldots+\frac{1}{n^i}=\sum_{m=2}^{n}\left(\frac{1}{(m-1)n^{i-1}+1}+\ldots+\frac{1}{mn^{i-1}}\right)\ge\sum_{m=2}^{n}\frac{n^{i-1}}{mn^{i-1}}=\sum_{m=2}^{n}\frac{1}{m}\ \text{ i stąd }\ \sum_{i=2}^{n^k}\frac{1}{i}\ge\sum_{i=1}^{k}\sum_{m=2}^{n}\frac{1}{m}=k\sum_{m=2}^{n}\frac{1}{m}.$$

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 219 (WT=3,52) i 220 (WT=1,67) z numeru 4/1991

Paweł Kubit	– Krosno	43,17
Krzysztof Zawisławski	– Warszawa	42,82
Tomasz Wietecha	– Tarnów	37,48

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 1992

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł Weterana.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1992.

Zadania z matematyki nr 239, 240

Redaguje Marcin E. KUCZMA

239. Dla danej liczby naturalnej $n \geq 3$ wyznaczyć kres dolny i kres górny wartości wyrażenia

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}}$$

po wszystkich układach liczb dodatnich $(a_1, \ldots, a_n)$; przyjmujemy, że numeracja jest cykliczna $(a_{n+1} := a_1, a_{n+2} := a_2)$.

240. Znaleźć wszystkie pary (x, y) spełniające równanie

$$5y^2 - 2x^2 + 4xy - 23x - 27y + 12 = 0,$$

w których x jest dowolną liczbą całkowitą, a y – liczbą pierwszą.

Zadanie 240 zaproponował pan Marcin Wyciślik z Chorzowa.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/1991

Przypominamy treść zadań:

231. Dowieść, że miary kątów α, β, γ trójkąta ostrokątnego spełniają nierówność

$$\sqrt{3}\,(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) \geq 2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)^2.$$

232. „Zwinąć” sumy $\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{2j}\binom{n-2j}{2k-2j}$ i $\sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{2j+1}\binom{n-2j-1}{2k-2j-1}$ (dla danych $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq 2k$).

231. Przyjmijmy, że $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. Oznaczmy: $\varphi = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$, $\psi = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$. Wówczas

$$\tag{1} \tfrac{1}{4}\pi \leq \varphi \leq \tfrac{1}{3}\pi, \quad \varphi \geq \psi \geq 0,$$

$$(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)^2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) =$$

$$\tag{2} = (2\cos\varphi\cos\psi - \cos 2\varphi)^2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,\big(2\sin\varphi(\cos\varphi + \cos\psi)\big) =$$

$$= ax^2 - bx + c,$$

gdzie

$$a = 4\cos^2\varphi, \qquad b = 4\cos\varphi\cos 2\varphi + \sqrt{3}\sin\varphi,$$
$$c = \cos^2 2\varphi - \sqrt{3}\sin\varphi\cos\varphi, \qquad x = \cos\psi.$$

Dla ustalonych wartości a, b, c trójmian kwadratowy $T(x) = ax^2 - bx + c$ jest funkcją rosnącą zmiennej x w przedziale $\langle x_0; \infty)$, gdzie

$$x_0 = \frac{b}{2a} < \frac{4\cos\varphi\cos 2\varphi + 2}{8\cos^2\varphi} = \cos\varphi + \frac{1 - 2\cos\varphi}{4\cos^2\varphi} \leq \cos\varphi.$$

Teza zadania mówi, że wyrażenie (2) przyjmuje wartości niedodatnie. Ponieważ $x = \cos\psi \in \langle \cos\varphi; 1\rangle \subset (x_0; \infty)$, wystarczy wykazać, że $T(1) \leq 0$, czyli że

$$\tag{3} a - b + c = (2\cos\varphi - \cos 2\varphi)^2 - \sqrt{3}\sin\varphi(1 + \cos\varphi) \leq 0.$$

Wprowadzamy zmienną $t = 2\cos\varphi - 1$. Wówczas $\cos\varphi = \frac{1}{2}(1+t)$, $\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 = \frac{1}{2}(t^2 + 2t - 1)$, $\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \frac{1}{2}\sqrt{3 - 2t - t^2}$ i dowodzona nierówność (3) przybiera po krótkich przekształceniach postać

$$\frac{(3 - t^2)^2}{3 + t} \leq \sqrt{9 - 6t - 3t^2}.$$

Prawdziwość tej nierówności można udowodnić porównując jej lewą i prawą stronę z wyrażeniem $3 - t - t^2$:

$$\tag{4} \frac{(3 - t^2)^2}{3 + t} \leq 3 - t - t^2 \leq \sqrt{9 - 6t - 3t^2}.$$

Pierwsza z nierówności (4) sprowadza się łatwo do postaci $t^2 + t - 2 \leq 0$, a druga — do $t^2 + 2t - 2 \leq 0$. Wobec oszacowań (1) zmienna t przebiega przedział $\langle 0; \sqrt{2} - 1\rangle$, w którym obie te nierówności są spełnione. To kończy dowód.

232. Oznaczmy pierwszą z podanych sum przez $F(n,k)$, a drugą — przez $G(n,k)$. Mamy równość

$$\binom{n}{2j}\binom{n-2j}{2k-2j} = \frac{n!}{(2j)!(n-2j)!} \cdot \frac{(n-2j)!}{(2k-2j)!(n-2k)!} =$$
$$= \frac{n!}{(2k)!(n-2k)!} \cdot \frac{(2k)!}{(2j)!(2k-2j)!} = \binom{n}{2k}\binom{2k}{2j}.$$

Podobnie sprawdzamy, że

$$\binom{n}{2j+1}\binom{n-2j-1}{2k-2j-1} = \binom{n}{2k}\binom{2k}{2j+1}.$$

Zatem

$$F(n,k) = \binom{n}{2k} f(n,k), \qquad G(n,k) = \binom{n}{2k} g(n,k),$$

gdzie

$$f(n,k) = \sum_{j=0}^{k} \binom{2k}{2j}, \qquad g(n,k) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{2k}{2j+1}.$$

Zauważmy, że

$$f(n,k) + g(n,k) = \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k}{i} = (1+1)^{2k} = 2^{2k},$$

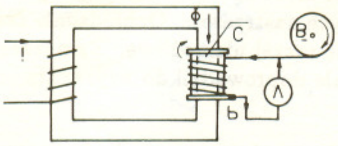
$$f(n,k) - g(n,k) = \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k}{i}(-1)^i = (1-1)^{2k} = 0.$$

Stąd $f(n,k) = g(n,k) = 2^{2k-1}$ i ostatecznie

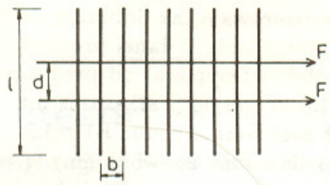
$$F(n,k) = G(n,k) = 2^{2k-1}\binom{n}{2k}.$$

Zadania z fizyki nr 137, 138

Redaguje Jerzy B. BROJAN



137. Przez wnętrze cewki C przechodzi stały strumień Φ pola magnetycznego wytworzonego przez magnes stały lub – jak na rysunku – elektromagnes. Cewka obraca się ze stałą prędkością kątową ω, nawijając drut z bębna B (i zwiększając w ten sposób liczbę zwojów). Woltomierz V jest dołączony jedną końcówką ślizgową do pierścienia P, a drugą do drutu. Obliczyć wskazania woltomierza.



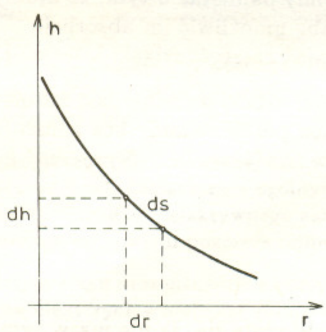
138. Dwie równoległe nici odległe o d są napięte, każda siłą F. Do nici są prostopadle przymocowane jednorodne pręty w odległości wzajemnej b, każdy o masie m i długości l (rys.). Środki prętów są w połowie odległości między nićmi. Obliczyć prędkość fali torsyjnej wzdłuż nici (fala ta polega na obrocie kolejnych prętów w płaszczyźnie prostopadłej do nici). Założyć, że kąty obrotu sąsiednich prętów niewiele się różnią.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/1991

Przypominamy treść zadań:

129. Cienki jednorodny łańcuszek o masie m i długości l został zamocowany za jeden z końców w polu grawitacyjnym o natężeniu g. Nadajemy mu prędkość kątową ω wokół pionowej osi przechodzącej przez punkt zawieszenia, tak że w obracającym się układzie odniesienia łańcuszek osiąga stan równowagi. Jaka jest minimalna wartość prędkości kątowej, przy której możliwy jest stan równowagi różny od zwisu pionowego? Wykazać, że ta minimalna prędkość kątowa jest proporcjonalna do $\sqrt{g/l}$ i obliczyć numerycznie stałą proporcjonalności.

130. W dwóch jednakowych naczyniach znajduje się ta sama ilość tego samego gazu o tej samej temperaturze początkowej; na zewnątrz naczyń jest próżnia. Otwarto mały otworek w każdym naczyniu, tak że gaz zaczął wypływać. Otworki różnią się wielkością: w pierwszym naczyniu otwór ma średnicę mniejszą od średniej drogi swobodnej cząsteczek, a w drugim ma średnicę znacznie większą od średniej drogi swobodnej. Przez oba otworki wypuszczono jednakową ilość gazu (w ciągu niejednakowego czasu). W którym naczyniu gaz oziębił się silniej? Dopływ ciepła z naczynia i z otoczenia pominąć.



129. Zbadajmy kształt łańcuszka i zmienność siły napięcia wzdłuż niego, gdy znajduje się on w stanie równowagi w obracającym się układzie odniesienia (rysunek). Przy przesunięciu o ds wzdłuż łańcuszka w górę pionowa składowa F_h siły napięcia przyrasta o

(1) $$\mathrm{d}F_h = \mathrm{d}m \cdot g = \rho g \mathrm{d}s\,,$$

gdzie $\rho = \frac{m}{l}$. Składowa pozioma F_r przyrasta zaś o

(2) $$\mathrm{d}F_r = \mathrm{d}m \cdot a_{odśr} = \omega^2 r \mathrm{d}m = \rho\omega^2 r \mathrm{d}s\,.$$

Dla wiotkiego łańcuszka siła napięcia ma w każdym punkcie kierunek styczny do niego, tzn.

(3) $$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}r} = -\frac{F_h}{F_r}$$

(minus pochodzi stąd, że $\mathrm{d}r < 0$, podczas gdy F_h i F_r uważamy za dodatnie). Wynika stąd procedura numeryczna pozwalająca wyznaczyć długość łańcuszka l przy danych g, ρ, ω i danej odległości r_0 dolnego końca od osi obrotu. Wybrawszy odpowiednio mały krok $\mathrm{d}s$ zaczynamy od $F_h = F_r = 0$ w dolnym końcu, znajdujemy z równań (1) i (2) przyrosty $\mathrm{d}F_h$ i $\mathrm{d}F_r$, następnie obliczamy $\mathrm{d}h = \mathrm{d}sF_h/F$ i $\mathrm{d}r = -\mathrm{d}sF_r/F$ (gdzie F jest całkowitą siłą, $F = \sqrt{F_h^2 + F_r^2}$) i powtarzamy operacje tak długo, dopóki r nie osiągnie zera. Długość l można na koniec obliczyć ze wzoru $l = \frac{F_h}{g\rho}$. W praktyce możemy w tych rachunkach położyć $g = \rho = \omega = 1$, gdyż jest to równoważne wyrażeniu długości r_0 i l w jednostkach g/ω^2. Analiza numeryczna wykazuje, że im mniejsze r_0, tym mniejsza jest wyliczona wartość l, przy czym dla $r_0 \to 0$ dąży ona do minimalnej wartości 1,45... Przekształcając

$$1,45 \approx \frac{l}{g/\omega^2} = \frac{l\omega^2}{g}$$

znajdujemy $\omega_{min} \approx \sqrt{1,45\frac{g}{l}} \approx 1,20\sqrt{\frac{g}{l}}$. Proporcjonalność ω_{min} do $\sqrt{\frac{g}{l}}$ (bez stałej) można wyprowadzić szybciej z analizy wymiarowej. Analogiczne zadanie dotyczące punktu materialnego zawieszonego na nieważkiej nici jest znacznie łatwiejsze i występuje w wielu zbiorach zadań – współczynnik przed pierwiastkiem jest wtedy równy 1.

130. Gdy otwór ma rozmiary znacznie większe od średniej drogi swobodnej, wypływ gazu następuje według praw mechaniki płynów, a rozkład prędkości cząsteczek w gazie wypływającym jest taki sam, jak wewnątrz naczynia. Gdy otwór jest mniejszy od średniej drogi swobodnej, cząsteczki wylatują „pojedynczo", przy czym większe prawdopodobieństwo trafienia do otworu i wydostania się mają cząsteczki szybsze. Dlatego spadek energii wewnętrznej (i temperatury) jest silniejszy przy wypływie zadanej ilości gazu przez mniejszy otwór.

NOWINKI FIZYCZNE

Redaguje Jan KALINOWSKI

Piękny barion odkryty

Pod koniec ubiegłego roku grupa doświadczalna UA1 z CERNu (Genewa) doniosła o odkryciu barionu (cząstki zbudowanej z trzech kwarków) zawierającego kwark piękny. Znamy już pięć kwarków oznaczanych literami
u (up – górny),
d (down – dolny),
s (strange – dziwny),
c (charm – powabny),
b (beauty – piękny).
Najpowszechniej występujące bariony: protony i neutrony, są zbudowane z kwarków u i d – proton $= uud$, neutron $= udd$. Kwark s został odkryty pod koniec lat 40., chociaż pojęcie kwarku zostało wprowadzone znacznie później, bo w połowie lat 60. Zaobserwowano wówczas dziwnie zachowujące się cząstki, które zawsze produkowane były parami – stąd nazwa cząstki dziwne i odpowiadający im kwark s. Np. barion $\Lambda = uds$, a „najdziwniejszy" barion to $\Omega = sss$. Następny kwark c został odkryty wraz z zaobserwowaniem mezonu (układu kwark-antykwark) $J/\psi = c\bar{c}$. Kwark powabny c był oczekiwany i przewidziano nawet jego masę. Kwarku b nikt się nie spodziewał. Został odkryty w 1977 r. przez obserwację mezonu $\Upsilon = b\bar{b}$. Teraz oczekujemy odkrycia szóstego (ostatniego?) kwarku t (top – ?). Wiadomo jedynie, że jest on cięższy co najmniej 90 razy od protonu ($m_p = 938$ MeV). Jeśli istnieje kwark b, to powinny istnieć też bariony piękne zawierające kwark b. Zderzenia protonów i antyprotonów przy wysokich energiach są dobrym źródłem produkcji cząstek pięknych. Jednak zaobserwowanie pojedynczej cząstki pięknej w gąszczu innych cząstek produkowanych w tym samym zderzeniu nie jest łatwe. Dopiero kilkuletnia analiza danych doświadczalnych zebranych w latach 1988-89 pozwoliła na wyselekcjonowanie odpowiednich przypadków. Szukano przypadków rozpadu barionu $udb \to \Lambda + J/\psi$. Cząstka J/ψ identyfikowana jest przez rozpad na parę leptonów μ: $J/\psi \to \mu^+\mu^-$, natomiast Λ rozpada się na proton i ujemnie naładowany mezon π^-. Znaleziono 16 ± 5 takich przypadków. Na ich podstawie oceniono, że masa pięknego barionu wynosi $5640 \pm 50 \pm 30$ MeV.

Chłodzenie światłem

Fakt, że światło oddziałując z jakimkolwiek układem może spowodować jego ogrzanie, jest dla nas intuicyjnie zrozumiały i nie budzi żadnych zastrzeżeń. Ochłodzenie czegoś poprzez skierowanie na nie wiązki światła wydaje się raczej niemożliwe. Tymczasem „świetlny" mechanizm chłodzenia nie tylko działa, ale doprowadził do uzyskania zadziwiająco niskich temperatur.

Przejdźmy od razu do konkretnego przykładu. Niech układem naszym będą atomy sodu w fazie gazowej, a chłodzącym światłem wiązka laserowa o tak dobranej częstości promieniowania, aby mogła być absorbowana przez atomy sodu o danej prędkości. Jak pamiętamy, częstość rezonansowa zależy (w wyniku efektu Dopplera) od prędkości atomu. Każdemu aktowi wzbudzenia atomu będzie towarzyszyło przekazanie mu pędu fotonu. Jest to po prostu konsekwencja zasady zachowania pędu. Kierując wiązkę światła przeciwnie do kierunku poruszającego się atomu spowodujemy w ten sposób zwolnienie jego ruchu. Każdy akt absorpcji zmniejszy jego prędkość bardzo nieznacznie, bo zaledwie o 3 cm/s. Jednakże wzbudzony atom po czasie równym 10^{-8}s wysyła foton, powraca do stanu podstawowego i jest ponownie gotów do kolejnego aktu absorpcji zwalniającego jego ruch.

Jeśli przyjmiemy, że termiczna prędkość atomu jest rzędu 10^5 cm/s, to po około 30 tysiącach aktów absorpcji i reemisji atom zostanie zahamowany. A przecież zwolnienie ruchu atomów wchodzących w skład naszego układu oznacza właśnie jego ochłodzenie. W ten sposób podstawy fizyczne chłodzenia atomów przy użyciu światła mamy już opanowane, co nie znaczy, że wiemy już wszystko, co potrzeba, aby móc takie doświadczenie przeprowadzić. Konieczne dla pełnego sukcesu są dwie bardzo istotne uwagi techniczne.

W opisany wyżej sposób możemy zwalniać ruch atomów w jednym tylko wymiarze, a nawet kierunku. Ochłodzenie wszystkich atomów możemy zrealizować w konfiguracji sześciu wiązek biegnących po dwie (przeciwnie do siebie) wzdłuż trzech osi prostokątnego układu współrzędnych. Ponadto musimy pamiętać o tym, że atomy zwalniając zmieniają swoją częstość rezonansową i aby umożliwić im absorpcję fotonów, musimy w rytm zwalniania ich biegu zmieniać częstość wiązki laserowej.

Na zakończenie wynik opisanego wyżej doświadczenia: udało się ochłodzić atomową parę sodu do temperatury poniżej 10^{-3} K! Wynik ten pozostawiamy bez komentarza.

Krzysztof ERNST

Pękające rury

Zimą często się zdarza, że pękają zamarznięte rury. Wydaje się, że nie ma w tym nic dziwnego. Słoik lub butelka z wodą wystawione zimą na dwór też pękają. Wiadomo, że przy zamarzaniu woda rozszerza się, szkło nie wytrzymuje i pęka. Zamarzająca woda rozsadza też skały. Ale w przypadku rur zastanawiające jest to, że rury zwykle pękają nie w miejscu, w którym woda zamarzła, lecz gdzie indziej. Poznać to można choćby po tym, że z rury w miejscu pęknięcia leje się woda, a nie wylatuje lód. Co w takim razie powoduje pęknięcia rur? Niektórzy zalecają też, żeby nie zakręcać szczelnie kranów zimą, gdyż zapobiega to pękaniu rur. Czy jest w tym sens?

Rzeczywiście, rury (i nie tylko rury) pękają na skutek zamarzania wody, ale czynnikiem rozrywającym jest woda, a nie lód. Lód tworzy się najpierw przy samej rurze i postępuje radialnie do środka rury, aż w końcu zablokuje rurę. Nic się złego na razie nie dzieje, gdyż zamarzająca woda wypycha wodę w głąb rury i ciśnienie lodu na rurę jest równe ciśnieniu wody. Dopiero dalsze, postępujące wzdłuż rury zamarzanie wody, gdy utworzy się już blokada, powoduje znaczny wzrost ciśnienia wody w rurze. Jeśli woda nie ma ujścia, to wówczas rura pęka w najsłabszym miejscu. Może to być tuż przy zamarzniętym fragmencie, a może być w zupełnie innym miejscu. Widać więc, że zostawienie lekko niedokręconego kranu nie uratuje rury przez zamarznięciem, ale może uratować przed pęknięciem nie dopuszczając do wytworzenia się zbyt wysokiego ciśnienia. Chyba że rura zamarznie w kilku miejscach, wtedy i cieknący kran nie pomoże. Zresztą słoiki i butelki też rozsadza woda, a nie lód. Najpierw zamarza woda na powierzchni blokując wodę i postępujące w głąb zamarzanie doprowadza do pęknięcia naczynia.

Jan KALINOWSKI

epsilon
4/92
(14)

O metodzie bezpośredniej

Jan E. MŁODZIENIASZEK

Research partially supported by Scientific Grant CHRZAN.04.92

1. Ogólne cechy metody.

Metoda bezpośrednia (po angielsku: *straightforward principle*) jest zasadą heurystyczną pomocną przy rozwiązywaniu różnorodnych zadań. Mimo szerokiego rozpowszechnienia samej idei jej jedność i uniwersalność pozostają skryte za bogactwem form, jakie przybiera ona w różnych dziedzinach, na gruncie których się pojawia. Urzekająca jest także zadziwiająca łatwość jej stosowania. Wyróżniamy trzy rodzaje (odmiany) metody bezpośredniej, które wygodnie będzie zapisać symbolicznie:
a) metoda bezpośrednia standardowa lub klasyczna (*classical straightforward principle*): $Z \to T$ – polegająca na wystartowaniu od założenia i dojściu do tezy,
b) metoda bezpośrednia odwrotna (*converse straightforward principle*): $\sim T \to \sim Z$ – polegająca na zaprzeczeniu tezie i osiągnięciu na tej podstawie zaprzeczenia założenia,
c) metoda bezpośrednia mieszana (*mixed straightforward principle*): $\sim T \wedge Z \to S$ – polegająca na otrzymaniu sprzeczności na podstawie wniosków z założenia i zaprzeczenia tezy.

Wydaje się, że ujęcie omawianej idei w ramy pewnej metody heurystycznej jest dostatecznie ogólnym punktem widzenia, dającym możliwość jej efektywnego zastosowania i pozwalającym na systematyzację wielu pozornie odmiennych zagadnień.

W dalszym ciągu prezentujemy pewną liczbę przykładów. Prostota niektórych z nich jest zamierzona i nie powinna skłaniać do uznania samej idei za całkiem trywialną.

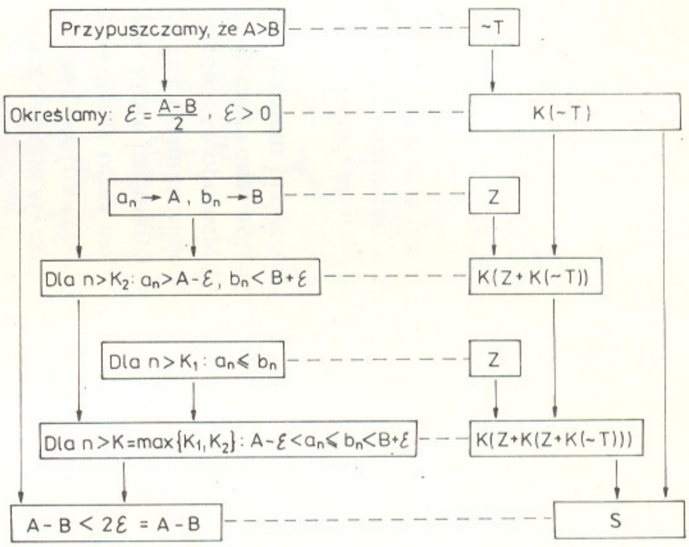
2. Przykłady zastosowań.

2.1. Geometria. Wykażemy, że *symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie.* Dowolny punkt S symetralnej boku $\overline{AB}$ spełnia warunek: $SA = SB$, symetralnej zaś odcinka $\overline{BC}$: $SB = SC$. Stąd punkt przecięcia O tych dwóch prostych spełnia warunek: $OA = OB = OC$, czyli należy do symetralnej boku $\overline{AC}$. Jak zapewne Czytelnik zauważył, wykorzystana tu została odmiana klasyczna metody bezpośredniej.

2.2. Algebra. Wykażemy, że *w grupie istnieje dokładnie jeden element neutralny.* Przypuśćmy, że istnieją dwa różne elementy neutralne e_1 i e_2; mamy wtedy $e_1 = e_1 * e_2 = e_2$ (gdyż e_1 i e_2 są elementami neutralnymi). Stąd $e_1 = e_2$, co jest sprzeczne z hipotezą. Zastosowaliśmy odmianę odwrotną.

2.3. Analiza. Stosując odmianę mieszaną (a dokładniej, pewien jej wariant) wykażemy twierdzenie: *Jeśli* $\lim a_n = A$ *i* $\lim b_n = B$ $(n \to \infty)$ *oraz* $a_n \leq b_n$ *dla wszystkich* n *większych od pewnego* K_1, *to* $A \leq B$.

Dla jaśniejszego obrazu użycia metody dowód przedstawimy za pomocą diagramu; $K(W)$ oznacza konsekwencję własności W



3. Uwagi końcowe.

Na zakończenie wymienimy w telegraficznym skrócie kilka hasłowych przykładów. Interpretacje ich w kontekście metody bezpośredniej pozostawiamy Czytelnikom w charakterze pożytecznego ćwiczenia.
- twierdzenie o stratyfikacji zbiorów semi-analitycznych (geometria semi-analityczna),
- twierdzenie o dualności (kohomologie Čecha-Alexandera),
- λ-lemat (gładkie układy dynamiczne),
- twiedzenie Hopfa o bifurkacjach (równania różniczkowe),
- twierdzenie Pitagorasa (geometria elementarna).

Metoda bezpośrednia nie jest, oczywiście, jedyną metametodą heurystyczną (por. *Delta* 5/1989, *Matematyka-Społeczeństwo-Nauczanie* 6/1991).

Pewne bardziej skomplikowane warianty trzech odmian metody bezpośredniej, ich analiza, klasyfikacja, związki między nimi oraz ich zastosowania zostały podane w interesującej pracy mojego kolegi E. Cabackiego i jego współpracownika T. I. Joke'a (Trans. Cuban Math. Soc. 88, 115-247). Nie będę więc tutaj rozwijał tego tematu.

Artykuł stanowi skrót referatu wygłoszonego przez autora na konferencjach w Wichita Falls (Texas, USA) i w Szczechach Wielkich (woj. suwalskie, Polska).

Autor pragnie wyrazić serdeczne podziękowania Prof. G. Sternowi i Dr. R. Crantzowi (uczeni ci znani są Czytelnikom *Delty* z numeru 7/1987 (przyp. red. *EPSILONA*)) z University of Warwick (Wlk. Brytania) za cenne uwagi na temat heurystyki matematycznej w ogóle, a w szczególności zastosowań metody bezpośredniej w teorii liczb.

Praca niniejsza została napisana podczas pobytu autora w II Universitá di Montecatini Terme (Włochy). Pobyt ten sfinansowany został przez Scientific Support For East Europe Foundation. Autor pragnie podziękować SSFEEF za wsparcie i uniwersytetowi za znakomite warunki do pracy.

Autor serdecznie dziękuje Monique za stworzenie ciepłej atmosfery podczas pisania artykułu.

Autor dziękuje Redakcji *EPSILONA* za życzliwe zainteresowanie jego badaniami. W dowód wdzięczności użyte zostaje robocze oznaczenie w dowodzie, w przykładzie 2.3 niniejszej pracy.

EPSILON – niezależny dodatek *Delty*. Redakcja: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Sławomir Cynk, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski. Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ϵ.