



Dnia 1 stycznia 1992 roku zmarła

## Aniela WOLSKA

fizyk i dydaktyk  
członek Komitetu Redakcyjnego *Delty*

## SPIS TREŚCI

### NUMERU 3(214)

A jednak czarne! <i>Anna Lissowska</i>	str. 1
Sprawdź wymiary! <i>Jan Kalinowski</i>	str. 1
Krok po kroku <i>Waldemar Pompe</i>	str. 2
Patrz w niebo	str. 5
Stefan Banach	str. 6
Drobniaczy	str. 7
Mała Delta	str. 8
27 zbiorów wypukłych bez środka symetrii <i>Marcin Kasperski</i>	str.10
Ile waży neutrino? <i>Wiesław A. Kamiński</i>	str.11
Zadania	str.13
Klub 44	str.14
Miłość i pierwiastek z minus jednościami	str.16
Epsilon	str.17

### W następnym numerze:

#### Paradoksy

Piotr Kaniak  
Uniegoszcz, ul. Dolna 27  
59-800 Lubań Śl.  
poszukuje zdezaktualizowanych  
numerów *Delty*  
oraz *Wiedzy i Życia*.  
*Delta* również na wymianę.

„Delta”  
matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego, Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
Towarzystwa Astronomicznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Edukacji Narodowej

#### Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula  
Bogdan Cichoński  
Roman Duda  
Jan A. Gaj  
Tomasz Hofmokr – wiceprzewodniczący  
Tadeusz Jarzębowski  
Marcin Kubiak  
Andrzej Mąkowski  
Andrzej Pelczar  
Zbigniew Płochocki  
Zdzisław Pogoda  
Konrad Rudnicki  
Zbigniew Semadeni  
Grzegorz SitarSKI  
Józef I. Smak  
Kazimierz Stępień  
Mieczysław Subotowicz  
Andrzej Szymacha  
Andrzej Woszczyk  
Wojciech Żakowski – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

Krzysztof Biesaga  
Piotr Hajłasz  
Jan Kalinowski – z-ca red. nac.  
Krystyna Kordos – sekr. red.  
Marek Kordos – red. nac.  
Tomasz Kwast  
Stanisław Mrówczyński  
Anna Rudnik  
Joanna Udalska

Adres Redakcji:

Wydział Fizyki UW  
ul. Smyczkowa 5/7  
02-678 Warszawa  
tel. 43-02-43 wewn. 21

Adres poczty komputerowej  
(E-mail address):

DELTA@PLEARN.BITNET

Wydawca:

Uniwersytet Warszawski  
Krakowskie Przedmieście 26/28  
00-927 Warszawa

Nakład 9 500 egz.

Wydrukowano  
w Zakładach Graficznych  
w Warszawie, ul. Srebrna 16

Skład systemem T<sub>E</sub>X  
wykonała redakcja.

#### WARUNKI PRENUMERATY

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na III kwartał 1992 r. wynosi 12 000,- zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
  - oddziały RSW właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora
  - odbioru zamówionych egzemplarzy dokonuje prenumerator w wyznaczonych punktach sprzedaży lub w inny, uzgodniony sposób,
  - urzędy pocztowe i listonosze – od prenumeratorów z terenów wiejskich lub innych miejscowości, w których nie ma oddziałów RSW, a w miastach tylko od osób niepełnosprawnych – poczta zapewnia dostawę zamówionych egzemplarzy pod wskazany adres pod warunkiem uiszczenia dodatkowej opłaty za każdy doręczany egzemplarz – opłata wynosi 500,- zł od egzemplarza,
  - Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – tylko od prenumeratorów zlecających dostawę za granicę.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
  - na kraj – do 20 XI na I kwartał roku następnego  
do 20 II na II kwartał  
do 20 V na III kwartał  
do 20 VIII na IV kwartał
  - na zagranicę – do 31 X na I kwartał  
oraz do 1 dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarza 5 000,- zł



Anna LISSOWSKA

W artykule Eugeniusza Szumakowicza pt. *Matematyka i gra w szachy* (*Delta* 4/1991) zostało postawione następujące zadanie:

*Skomponować zadanie szachowe niekonwencjonalnego typu: układ figur i pionów białych i czarnych jest symetryczny względem linii poziomo połowiącej szachownicę; temat: białe zaczynają – czarne wygrywają!*

A oto elementarne rozwiązanie tego problemu.

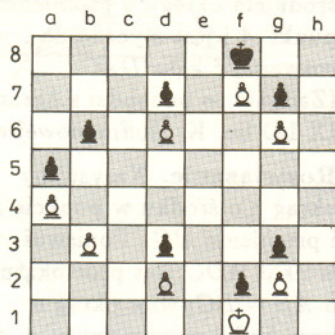
1. b3 – b4 (jedyne **możliwy** ruch na szachownicy), a5 : b4
2. a4 – a5 (j.w.), b4 – b3
- 3'. a5 – a6, b3 – b2 4'. a6 – a7, b2 – b1 Hetman i mat
- 3''. a5 : b6, b3 – b2 4''. b6 – b7, b2 – b1 Hetman i mat.

Niewielka modyfikacja konfiguracji pionków na szachownicy (rys. 2) prowadzi do innego rozwiązania.

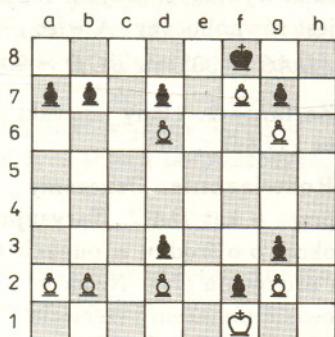
Rozwiązanie to jest o tyle interesujące, że ma w pewnym sensie charakter matematyczny. Mianowicie, można podać algorytm gwarantujący czarnym zwycięstwo. Algorytm jest następujący: białe mogą się ruszać jedynie pionkami stojącymi na liniach a i b. Na każdy ruch białych czarne odpowiadają ruchem symetrycznym, chyba że mają możliwość bicia – wtedy biją. Dalej prosto do Hetmana i mata – tak jak w poprzednim rozwiązaniu.

Na zakończenie podajmy jeszcze jedno zadanie o „matematycznym” rozwiązaniu. Choć czarne mają figurę i piona mniej, to wywalczą remis, jeżeli czarny Król cały czas będzie poruszał się tam i z powrotem po polach f7 i f8. Wtedy bowiem biały Król będzie blokowany i nie ruszy się z pola h8, samym zaś Skoczkiem nie damy mata.

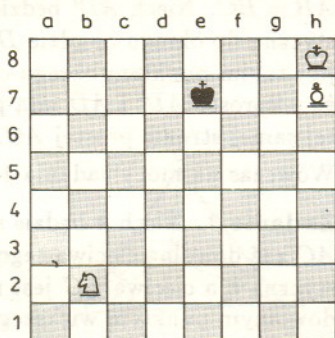
Czy jednak można zadbać o to, aby czarny Król spacerował po polach f7 i f8? Czyli, innymi słowy, czy można zadbać o to, aby Skoczek nie zmusił czarnego Króla do ruchu na inne pole? Można. Wystarczy, aby pierwszy ruch czarny Król wykonał na pole takiego samego koloru co kolor, na którym stoi Skoczek, czyli, w tym przypadku, na pole czarne 1...Kf8. Wówczas po każdym ruchu Skoczka będzie się on znajdował na polu przeciwnego koloru niż kolor pola, na którym stoi czarny Król, a więc Skoczek nie będzie nigdy szachował tego drugiego pola, na które zamierza się ruszyć czarny Król. Gdyby jednak niefortunnie czarny Król wykonał pierwszy ruch 1...Kf7, to białe mogłyby już dać mu mata (jak?).



Rys. 1. Białe zaczynają i przegrywają.



Rys. 2. Białe zaczynają i przegrywają.



Rys. 3. Czarne zaczynają i remisują.

Jan KALINOWSKI

Ten okrzyk często rozlega się na lekcjach fizyki. Czy warto sprawdzać wymiary? Przecież na lekcjach matematyki, gdzie też rozwiązuje się mnóstwo zadań, czegoś takiego się nie robi. Otóż warto. Z kilku powodów. W fizyce mamy do czynienia z wieloma wielkościami fizycznymi, mierzonymi w różnych jednostkach. Nie można porównywać wielkości mierzonych w różnych jednostkach, tak jak nie można porównywać jabłek i gruszek. Jeśli szukaną wielkością w jakimś problemie jest na przykład prędkość, a w wyniku dostajemy kg/s, to wiadomo, że zrobiliśmy błąd w naszych obliczeniach. Sprawdzenie wymiarów pozwala zorientować się bardzo szybko, czy otrzymany wynik może być sensowny. Jeśli wymiary się zgadzają, warto dopiero wtedy obliczyć wartość numeryczną.

Idea analizy wymiarowej pochodzi od Fouriera. Jean Fourier jest, oczywiście, najbardziej znany jako twórca analizy fourierowskiej, wprowadzonej w pracy *Analityczna teoria ciepła* i opublikowanej po raz pierwszy w 1822 r. w Paryżu. W tej samej pracy Fourier wprowadził też analizę wymiarową. Był chyba pierwszym, który tak otwarcie napisał, że każda wielkość fizyczna „ma swój własny wymiar i wyrazy w tym samym równaniu nie mogą być porównywane, jeśli nie mają tej samej potęgi wymiaru”. Fourier pisał wprost, że wprowadził pojęcie wymiaru, aby sprawdzać wyniki obliczeń.

Analiza wymiarów pozwala nie tylko na sprawdzenie rachunków. Dzięki niej można znaleźć sposób na zapamiętanie różnych formułek, a nawet na ich wyprowadzanie. Na tym naprawdę polega siła analizy wymiarowej. Na podstawie uważnej analizy wymiarów wielkości fizycznych, mających wpływ na badane zjawisko, można czasem zgadnąć formułę matematyczną opisującą to zjawisko. Rozpatrzmy dwa przykłady: pierwszy – bardzo prosty i drugi – bardziej skomplikowany.

Weźmy pod uwagę wahadło matematyczne: punkt materialny o masie  $m$  zawieszony na nierozciągliwej nici o długości  $l$ . Jest to, oczywiście, model matematyczny fizycznego wahadła, gdzie zaniedbujemy rozmiary ciała zawieszzonego na nici. Jeśli zgodzimy się na taki model, to tarcie powietrza pomijamy i ruch wahadła może zależeć jedynie od masy, długości nici



i przyspieszenia ziemskiego  $g$ . Zapytajmy się o okres wahań wahadła. Wielkość o wymiarze czasu można dostać tylko na jeden sposób

$$T \sim \sqrt{\frac{l}{g}},$$

a więc okres nie może zależeć od masy wahadła, gdyż nie ma jak pozbyć się kilogramów! Oczywiście, analiza wymiarowa nie pozwala na znalezienie bezwymiarowego współczynnika proporcjonalności w powyższym wzorze. Można go znaleźć wykonując, na przykład, pomiar okresu wahań dla wahadła o zadanej długości w miejscu o znanej wartości  $g$ . W ogólności zależy on od początkowego kąta odchylenia wahadła (też wielkość bezwymiarowa, a więc nie poddająca się analizie wymiarowej). Dla małych wahań wahadła współczynnik ten wynosi  $2\pi$ .

Drugi przykład, który rozpatrzmy, jest bardziej skomplikowany. Rozważmy problem oporu cieczy lepkiej działającej na płynący statek. Jakie wielkości fizyczne mogą mieć wpływ na siłę oporu? Intuicja (doświadczenie) podpowiada nam, że siła oporu może zależeć od wielu czynników. Spróbujmy ograniczyć się do najważniejszych (budujemy więc model matematyczny): siła oporu  $F$  ( $\text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$ ), prędkość statku  $v$  ( $\text{m}/\text{s}$ ), rozmiary statku  $l$  ( $\text{m}$ ), współczynnik lepkości cieczy  $\mu$  ( $\text{kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$ ), gęstość cieczy  $\rho$  ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ), przyspieszenie ziemskie  $g$  ( $\text{m}/\text{s}^2$ ).

W nawiasach podaliśmy wymiary (jednostki). W naszych rozważaniach pominiemy napięcie powierzchniowe cieczy, prędkość wiatru, wielkość fal na powierzchni cieczy itp. Oznacza to, że otrzymane wyniki nie będą stosować się do ruchu owadów ślizgających się po powierzchni cieczy, żaglówek, ruchu statków w czasie silnych sztormów itp. Pomijamy też detale budowy statku wprowadzając tylko jeden parametr charakteryzujący jego rozmiary, to znaczy naszym statkiem będzie kula o promieniu  $l$ .

Ruch cieczy lepkiej opisywany jest równaniami Naviera-Stokesa, których w ogólnym przypadku nie potrafimy rozwiązać. Zastosujmy więc analizę wymiarową. Mamy do dyspozycji sześć wielkości:  $F$ ,  $l$ ,  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $g$  i  $v$ . Może warto wytłumaczyć, dlaczego nie rozpatrujemy masy statku jako niezależnej wielkości fizycznej. Otóż, zgodnie z prawem Archimedesesa masa statku jest równa masie wypartej cieczy, a to z kolei jest rzędu  $\rho l^3$ .

## Krok po kroku

Waldemar POMPE

Na 32 Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej pojawiło się następujące

**ZADANIE.** Niech  $P$  będzie dowolnym punktem wewnątrz trójkąta  $ABC$ . Wykazać, że co najmniej jeden z kątów  $PAB$ ,  $PBC$ ,  $PCA$  jest mniejszy lub równy  $30^\circ$ .

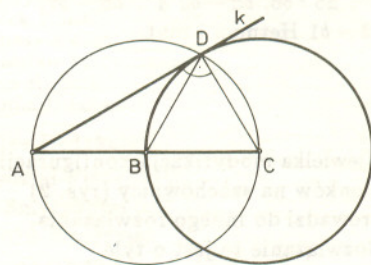
Zanim udowodnimy to twierdzenie, rozwiążmy kilka zadań.

**Zadanie 1.** Punkt  $B$  jest środkiem odcinka  $AC$ , punkt  $C$  jest środkiem okręgu o promieniu  $BC$ . Prosta  $k$  przechodzi przez punkt  $A$  i jest styczna do tego okręgu w punkcie  $D$ . Znaleźć rozwartość kąta  $DAC$ .

(Zadanie to pochodzi z egzaminu wstępnego do klasy matematycznej IX LO im. K. Hoffmanowej w Warszawie z 1989 r.)

**Rozwiązanie.** Narysujmy okrąg  $o$  o środku w punkcie  $B$  i promieniu  $BC$ . Ponieważ trójkąt  $ADC$  jest prostokątny, a  $AB = BC$ , więc okrąg  $o$  przechodzi przez punkty  $A$ ,  $C$ ,  $D$ . A zatem  $BD = BC = CD$ , skąd wynika, że trójkąt  $BCD$  jest równoboczny. A więc

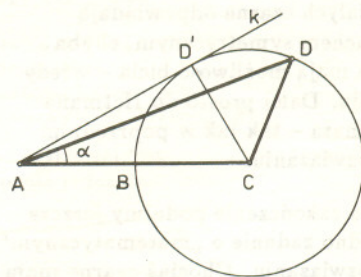
$$\angle DAC = 90^\circ - \angle BCD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$



**Zadanie 2.** Dany jest taki trójkąt  $ACD$ , że  $AC = 2CD$ . Wykazać, że  $\angle CAD \leq 30^\circ$ .

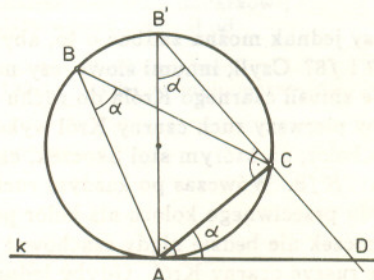
**Rozwiązanie.** Oznaczmy przez  $\alpha$  kąt  $DAC$ . Narysujmy okrąg  $o$  o środku w punkcie  $C$  i promieniu  $CD$ . Niech  $B$  będzie punktem przecięcia odcinka  $AC$  z okręgiem  $o$ . Ponieważ  $AC = 2CD$ , więc  $AB = BC$ . Niech  $AD'$  będzie styczną do okręgu  $o$ , gdzie  $D'$  jest takim punktem okręgu  $o$ , że półproste  $AD'$  i  $AD$  leżą po tej samej stronie prostej  $AC$ .

Wówczas na mocy zadania 1 mamy  $\alpha = \angle CAD \leq \angle CAD' = 30^\circ$ .



**Zadanie 3.** Niech  $k$  będzie styczną do okręgu  $o$  w punkcie  $A$ ,  $AC$  zaś dowolną cięciwą tego okręgu. Dowieść, że kąt ostry między styczną  $k$  a cięciwą  $AC$  jest równy kątowi  $ABC$ , gdzie  $B$  jest dowolnym punktem większego z łuków  $AC$  okręgu  $o$ . (W przypadku, gdy  $AC$  jest średnicą okręgu  $o$ , nie ma czego dowodzić.)

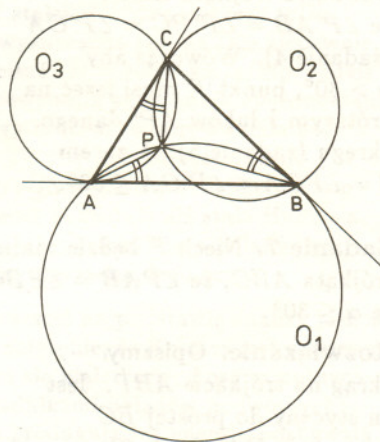
**Rozwiązanie.** Niech  $AB'$  będzie średnicą okręgu  $o$ . Prosta  $B'C$  przecina styczną  $k$  w punkcie  $D$ . Trójkąty  $ADC$  i  $B'DA$  są podobne ( $\angle ADC = \angle ADB'$ ,  $\angle B'AD = \angle ACD$ ), więc  $\angle CAD = \angle AB'C = \angle ABC$ .





**Zadanie 4.** Dowieść, że wewnątrz dowolnego trójkąta  $ABC$  istnieje taki punkt  $P$ , że  $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$ .

**Rozwiązanie.** Narysujmy okrąg  $o_1$ , który przechodzi przez punkt  $A$  i jest styczny do prostej  $BC$  w punkcie  $B$  oraz okrąg  $o_2$  przechodzący przez punkt  $B$  i styczny do prostej  $AC$  w punkcie  $C$ . Okrąg  $o_2$  przechodzi przez dwa różne punkty prostej  $BC$ , więc nie może być do niej styczny, a zatem nie może też być styczny do okręgu  $o_1$ . Tak więc  $o_1$  i  $o_2$  oprócz wspólnego punktu  $B$  mają jeszcze jeden wspólny punkt. Nazwijmy go  $P$ . Korzystając z zadania 3 wnosimy, że  $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$ . Należy jeszcze udowodnić, że  $P$  leży wewnątrz trójkąta  $ABC$ .

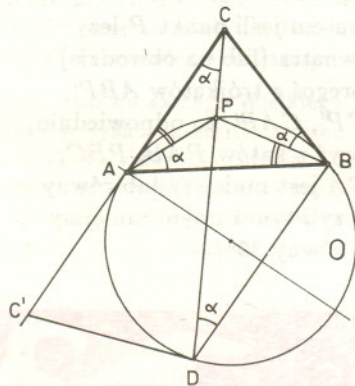


W tym celu narysujmy jeszcze okrąg  $o_3$  styczny do prostej  $AB$  w punkcie  $A$  i przechodzący przez punkt  $C$ . Okrąg  $o_3$  przechodzi również przez punkt  $P$  (zadanie 3). Zatem  $P$  jest punktem wspólnym trzech okręgów  $o_1, o_2, o_3$ . Okrąg  $o_1$  leży w całości po tej samej stronie prostej  $BC$  co punkt  $A$ ,  $o_2$  leży w całości po tej samej stronie prostej  $AC$  co punkt  $B$ ,  $o_3$  zaś leży w całości po tej samej stronie prostej  $AB$  co punkt  $C$ . Tak więc punkt wspólny okręgów  $o_1, o_2, o_3$  musi należeć do części wspólnej tych trzech półpłaszczyzn, czyli do wnętrza trójkąta  $ABC$ .

**Zadanie 5.**

Niech  $P$  będzie takim punktem wewnątrz trójkąta równoramiennego  $ABC$  ( $AC = BC$ ), że  $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = \alpha$ . Wykazać, że  $\alpha \leq 30^\circ$ .

**Rozwiązanie.** Opiszmy okrąg  $o$  na trójkącie  $ABP$ . Ponieważ trójkąt  $ABC$  jest równoramienny oraz  $\angle PAB = \angle PBC$ , więc  $\angle PAC = \angle PBA$ . A zatem okrąg  $o$  jest styczny do prostych  $AC$  i  $BC$  odpowiednio w punktach  $A$  i  $B$  (zadanie 3). Niech  $D$  będzie punktem przecięcia prostej  $CP$  z okręgiem  $o$ , przy czym  $D \neq P$ . Wówczas  $\angle ACP = \angle PAB = \angle PDB$ . Tak więc prosta  $AC$  jest równoległa do prostej  $BD$ . Niech  $C'$  będzie takim punktem prostej  $AC$ , że  $AC = AC'$  i  $C \neq C'$ .



Symetralna odcinka  $CC'$  przechodzi przez punkt  $A$ , jest średnicą okręgu  $o$  oraz symetralną odcinka  $BD$ , z czego wynika, że  $AC' = C'D$ . A zatem trójkąt  $CDC'$  jest takim trójkątem, w którym  $2C'D = CC'$ , skąd na mocy zadania 2  $\alpha = \angle PCA = \angle C'CD \leq 30^\circ$ .

Zauważmy, że mamy jedynie trzy podstawowe jednostki: kilogram, metr i sekundę, w których mierzy się sześć wielkości. A więc jedynie trzy bezwymiarowe ich kombinacje mogą być niezależne. Wybierzmy je w następujący sposób:

$$C_D = \frac{F}{\rho v^2 l^2},$$

$$R = \frac{vl\rho}{\mu},$$

$$N_F = \frac{v^2}{lg}.$$

Oczywiście, dowolna ich kombinacja też jest bezwymiarowa, ale wybraliśmy je tak, gdyż każda z nich wiąże się z inną cechą badanego problemu. Stała Reynoldsa  $R$  związana jest z lepkością cieczy  $\mu$ , stała Froude'a  $N_F$  wiąże siły bezwładności ( $\sim mv^2/l$ ) z siłami ciężkości ( $\sim mg$ ) w przepływie cieczy. Charakteryzuje, na przykład, fale i zawirowania na powierzchni cieczy spowodowane ruchem statku. W końcu współczynnik oporu czołowego  $C_D$  nie zależy ani od  $\mu$ , ani od  $g$ .

Analiza wymiarowa mówi nam, że bezwymiarowy współczynnik oporu czołowego  $C_D$  musi być pewną funkcją dwóch pozostałych bezwymiarowych wielkości, to znaczy

$$C_D = f(R, N_F).$$

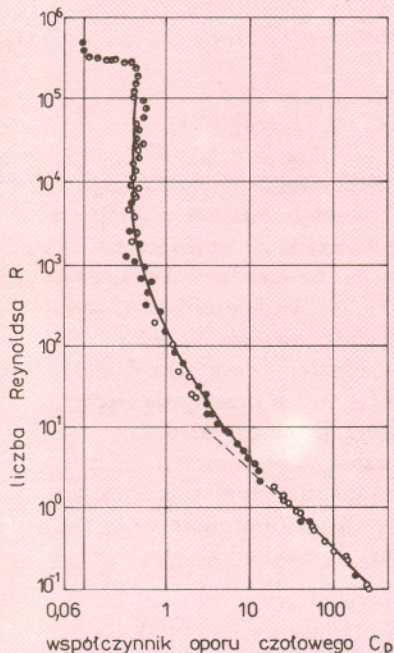
Zalóżmy w końcu, że efekt fal tworzonych na powierzchni cieczy przez płynący statek jest zaniedbywalny (krajowym przykładem będzie okręt podwodny). Wówczas stała  $g$ , odpowiedzialna za fale na wodzie, nie powinna wejść do rozwiązania, a więc stała Froude'a w powyższym wzorze może być pominięta. W języku wyjściowych wielkości wymiarowych dostajemy więc ostateczny wzór na siłę oporu

$$(*) \quad F = \rho v^2 l^2 f(vl\rho/\mu).$$

W tym momencie można powiedzieć: no dobrze, ale przecież nie znamy funkcji  $f$ , więc jaki jest pożytek z otrzymanego wyniku? Żeby zrozumieć korzyść z naszych rozważań, zauważmy, że jeśli odłożyć na wykresie wartość siły  $F$  w zależności od długości  $l$ , to otrzymamy wiele różnych krzywych dla różnych cieczy, z których nic ciekawego nie da się odczytać. Jeśli natomiast odłożyć  $C_D$  w zależności od  $R$ , to wszystkie punkty powinny ułożyć się na jednej krzywej dla różnych cieczy i różnych rozmiarów statków!



Na rysunku przedstawione są wyniki pomiarów dla kul o różnych średnicach poruszających się w różnych cieczach.



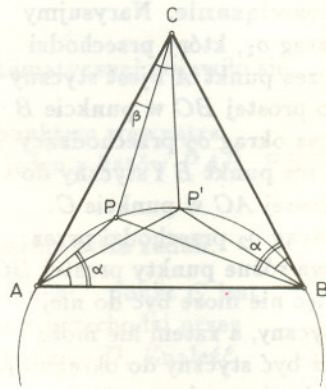
Współczynnik oporu czołowego dla ruchu kulki w zależności od liczby Reynoldsa. Dane układają się na jednej krzywej.

Dane rzeczywiście układają się na jednej krzywej dla  $R$  zmieniającego się o 7 rzędów wielkości. Tego typu krzywa nosi nazwę krzywej skalowania. Znamy ją z wyników pomiarów. Zauważmy, że znalezione prawo skalowania (\*) pozwala wyciągnąć wnioski o ruchu wielkich statków ( $l \rightarrow \infty$ ) z zachowania się małych statków poruszających się z dużymi prędkościami ( $v \rightarrow \infty$ ), gdyż oba graniczne przypadki opisane są tą samą funkcją  $f(R)$ . Ścisłe mówiąc, nie jest to prawda, gdyż dla bardzo dużych prędkości statków należy uwzględnić nowe parametry, na przykład prędkość dźwięku w cieczy, zjawiska termiczne spowodowane tarcieniem itp. Powyższa obserwacja jest podstawą teorii modelowania, tak ważnej przy projektowaniu statków, samolotów, dużych budowli itp. z użyciem tuneli aerodynamicznych. Zauważmy też, że z przedstawionego przez nas prawa skalowania wynika, że stosunek siły oporu do masy statku maleje ze wzrostem jego rozmiarów liniowych, gdyż

$$\frac{F}{m} \sim \frac{1}{l}.$$

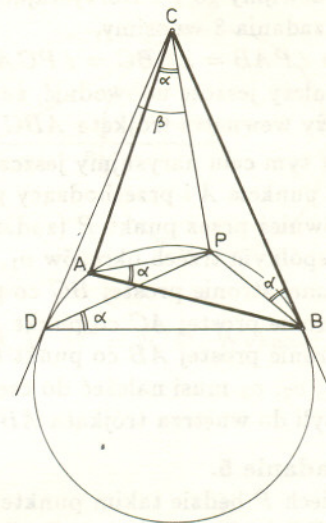
**Zadanie 6.** Niech  $P$  będzie takim punktem wewnątrz trójkąta równoramiennego  $ABC$  ( $AC = BC$ ), że  $\angle PAB = \angle PBC = \alpha > 30^\circ$ . Udowodnić, że  $\beta = \angle PCA < 30^\circ$ .

**Rozwiązanie.** Zadanie to jest natychmiastowym wnioskiem z zadania 5. A mianowicie: niech  $P'$  będzie takim punktem wewnątrz trójkąta  $ABC$ , że  $\angle P'AB = \angle P'BC = \angle P'CA$  (zadanie 4). Wówczas aby  $\alpha > 30^\circ$ , punkt  $P$  musi leżeć na krótszym z łuków  $AP'$  danego okręgu (zadanie 5). A zatem  $\beta = \angle PCA < \angle P'CA \leq 30^\circ$ .



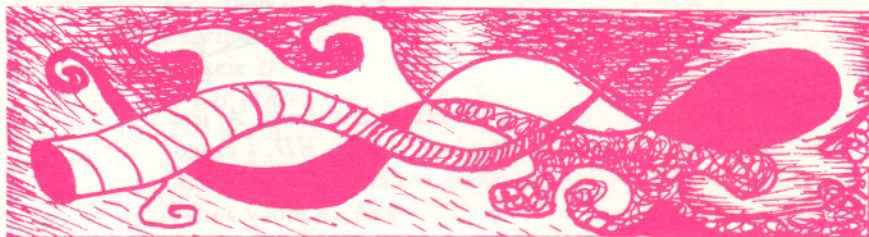
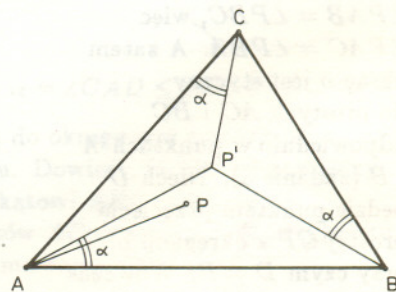
**Zadanie 7.** Niech  $P$  będzie takim punktem wewnątrz dowolnego trójkąta  $ABC$ , że  $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = \alpha$ . Dowiedź, że  $\alpha \leq 30^\circ$ .

**Rozwiązanie.** Opiszmy okrąg na trójkącie  $ABP$ . Jest on styczny do prostej  $BC$  w punkcie  $B$  (zadanie 3). Przez punkt  $C$  poprowadźmy styczną  $CD$  w punkcie  $D$  różnym od  $B$ . Załóżmy, że  $\alpha > 30^\circ$ . Trójkąt  $DBC$  jest równoramienny ( $DC = BC$ ), ponadto  $\alpha = \angle PBC = \angle PAB = \angle PDB$ . A zatem  $\beta = \angle DCP < 30^\circ$  (zadanie 6). Z drugiej zaś strony  $\beta \geq \alpha > 30^\circ$ . Uzyskana sprzeczność dowodzi, że  $\alpha \leq 30^\circ$ .



W tym momencie zaproponowane na początku **ZADANIE** rozwiązuje się niemal samo. A mianowicie:

Przez  $P'$  oznaczmy taki punkt wewnątrz dowolnego trójkąta  $ABC$ , że  $\angle P'AB = \angle P'BC = \angle P'CA = \alpha \leq 30^\circ$ . A zatem jeśli punkt  $P$  leży wewnątrz (lub na obwodzie) któregoś z trójkątów  $ABP'$ ,  $BCP'$ ,  $CAP'$ , to odpowiednio któryś z kątów  $PAB$ ,  $PBC$ ,  $PCA$  jest mniejszy lub równy  $\alpha$ , czyli tym samym mniejszy lub równy  $30^\circ$ .





Ile lat ma Wszechświat? Na to bardzo zasadnicze pytanie najczęstszą odpowiedzią jest, że można to obliczyć znając tempo rozbiegania się galaktyk. Skoro prędkość ucieczki jest wprost proporcjonalna do odległości – a tak wynika z obserwacji – to kiedyś wszystkie galaktyki musiały znajdować się „w jednym punkcie”. Współczynnik proporcjonalności w przytoczonym tu prawie Hubble’a wynosi w przybliżeniu  $50 \text{ km/s/Mpc}$ , więc wiek Wszechświata, jako odwrotność stałej Hubble’a, wynosi 20 mld lat ( $1 \text{ pc} = 3 \cdot 10^{16} \text{ m}$ ). Wynik ten jest jednak mocno niedokładny z kilku powodów. Podana tu wartość stałej Hubble’a dotyczy tylko obserwowanej części Wszechświata i wyznaczona jest na tyle niepewnie, że ostrożniejsi badacze do dziś wolą pisać:  $H = 100 h \text{ km/s/Mpc}$ , gdzie  $\frac{1}{2} \leq h < 1$ . Ponadto Wszechświat z pewnością ekspanduje niejednostajnie, podobnie jak porusza się kamień, który rzucony w górę zwalnia bez względu na to, jak silnie go rzucono. Tę niejednostajność opisuje tzw. parametr deceleracji. Mniejsza o jego formalną definicję, faktem jest, że jest on wyznaczony jeszcze mniej dokładnie niż stała Hubble’a. W rezultacie wypada przyznać, że wiek Wszechświata oceniany jest na 10 do 20 mld lat i że przydałaby się niezależna jego ocena.

Okazuje się, że można takiej oceny dokonać na podstawie analizy jasności białych karłów. Wydaje się rozsądne założenie, że Kosmos jest starszy niż najstarsze gwiazdy, a do takich zalicza się białe karły. Losy samotnych białych karłów (tzn. nie będących składnikami układów podwójnych) są przesądzone. Te gęste gwiazdy nie produkują już energii, pozbywają się jedynie wewnętrznego ciepła zgromadzonego we wcześniejszych fazach życia. Krótko mówiąc – świecą stygnąc i ich jasności muszą stopniowo maleć. Jest to proces bardzo powolny, ale najważniejsze, że można go opisać matematycznie, gdyż budowa i ewolucja białych karłów jest łatwiejsza do teoretycznego prześledzenia niż, na przykład gwiazd ciągu głównego. Jeżeli więc Wszechświat jest odpowiednio młody, to żaden z białych karłów nie powinien jeszcze tak wystygnąć, by stać się niewidocznym – istniałaby wtedy dolna granica ich jasności absolutnych.

Fakt ten został odkryty przez Jamesa Leiberta i jego współpracowników z University of Arizona. Stwierdzili oni, że liczba białych karłów wprawdzie rośnie ze spadkiem jasności absolutnej (tzn. coraz słabszych gwiazd tego typu jest coraz więcej), ale przy jasności absolutnej 16 mag gwałtownie spada. Teoretyczne przewidywania zależności liczby białych karłów od ich jasności nieźle zgadzają się z obserwacjami, są więc powody, by wierzyć w ocenę wieku tych najśłabszych gwiazd – około 9 mld lat.

By na tej podstawie oszacować wiek Wszechświata, trzeba uwzględnić jeszcze inne czynniki. Przede wszystkim: ile czasu ewoluuje gwiazda do stadium białego karła? Jeżeli nasze poglądy na ewolucję gwiazd są trafne, to biały karzeł o jasności absolutnej 16 mag ma masę około 0,8 masy Słońca, a z tego wynika, że jego macierzysta gwiazda miała masę zawartą między dwiema a czterema masami Słońca, gdy jeszcze spalała wodór. Teoria zaś mówi, że gwiazdy o takich masach ewoluują 300 mln lat do stadium białego karła, co należy doliczyć do dziewięciu miliardów.

Na tym nie koniec. Trzeba jeszcze doliczyć czas od samego Wielkiego Wybuchu do powstania pierwszych gwiazd w dysku naszej Galaktyki. Ocena tego jest znowu niepewna, aczkolwiek wszystkie akceptowane modele kosmologiczne skłaniają do przyjęcia tu w przybliżeniu 1 mld lat. Końcowy wynik byłby zatem 10,3 mld lat, co dowodziłoby, że stała Hubble’a wynosi raczej  $100 \text{ km/s/Mpc}$ , a nie 50, na co zgadza się obecnie chyba większość astronomów.

Autorzy przedstawionych tu w skrócie rozważań twierdzą, że ich błąd oceny wieku Wszechświata jest rzędu  $\pm 2$  mld lat i że może on zostać zredukowany w wyniku dalszych prac. W każdym razie w świetle tych badań i przy stałej Hubble’a wyznaczonej z obserwacji ucieczki galaktyk można by próbować oceniać parametr deceleracji, stąd średnią gęstość Wszechświata, która może silnie zależeć od masy (obecnie nie znanej) neutrin itd. Ciekawe, kiedy te wszystkie parametry ułożą się w naprawdę spójny model Wszechświata?...

Tomaz KWAST

W XIX w. była to bardzo ważna obserwacja pokazująca, że opłacało się budować duże statki parowe do przewozu towarów.

Użycie starannie dobranych zmiennych pozwala więc na przedstawienie wyników doświadczeń w sposób wskazujący bezpośrednio na fizykę badanych zjawisk. Odkrycie prawa skalowania jest często punktem wyjścia do budowy nowej teorii fizycznej. Pod koniec lat sześćdziesiątych J.D. Bjorken wysunął hipotezę, że w rozpraszaniu elektronów na nukleonach odpowiednio zdefiniowane wielkości, zwane funkcjami struktury nukleonu, powinny zależeć jedynie od jednej bezwymiarowej kombinacji dwóch zmiennych wymiarowych (tak zwana hipoteza skalowania Bjorkena).

Na przełomie lat sześćdziesiątych i siedemdziesiątych hipoteza skalowania została potwierdzona doświadczalnie. Można by się zapytać znowu: i co z tego? Otóż, można teoretycznie wyprowadzić skalowanie Bjorkena jedynie wówczas, jeśli założy się, że nukleony składają się z punktowych, swobodnych składników – kwarków! W ten sposób hipoteza skalowania przyczyniła się do ugruntowania roli kwarków (wprowadzonych wcześniej jako hipotetyczne obiekty tłumaczące niektóre właściwości cząstek elementarnych) jako rzeczywistych składników materii. W tym sensie kwarki zostały zaobserwowane doświadczalnie.

Analiza wymiarowa i skalowanie jest integralną częścią fizyki od ponad stu lat. Zastosowanie jej metod dwadzieścia lat temu w fizyce jądrowej i cząstek elementarnych spowodowało radykalne zmiany w naszym rozumieniu podstawowych składników materii i przyczyniło się do przyjęcia kwantowej teorii pól jako podstawy do budowy teorii oddziaływań fundamentalnych. Sprawdzajcie więc wymiary!







**Rozwiązanie zadania F 329.** Ruch wahadła możemy w przybliżeniu opisać za pomocą równania  $x = x_0(t) \sin \omega t$ ,  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ,  $x_0(0) = x_m$ , przy czym  $x_0(t)$  jest wolno zmienną funkcją czasu, a prędkość wynosi  $v = x_0 \omega \cos \omega t$ . Siła oporów aerodynamicznych jest równa

$$F = -Av^2 = -Ax_0^2 \omega^2 \cos^2 \omega t = -(x_0^2 - x^2) A \omega^2.$$

Praca w ciągu półokresu  $T$  wynosi

$$W = \int_{-x_0}^{x_0} F dx = \frac{4}{3} A \omega^2 x_0^3.$$

Zmiana energii wahadła wynosi

$$\frac{dE}{dt} \approx \frac{W}{T} = -\frac{4}{3} \frac{A \omega^2}{T} x_0^3,$$

ale

$$E = \frac{m \omega^2 x_0^2}{2},$$

gdzie  $m$  – masa wahadła, stąd

$$\frac{dE}{dt} = m \omega^2 x_0 \frac{dx_0}{dt}.$$

Porównując dwa wyrażenia otrzymujemy zależność

$$\frac{dx_0}{dt} \sim x_0^2.$$

Rozwiązanie możemy odgadnąć w postaci

$$x_0(t) = \frac{x_m t_0}{t_0 + t}.$$

Stąd

$$x(2t_0) = \frac{x_m}{3}.$$



**Rozwiązanie zadania F 330.** Skorzystamy z prawa skalowania (\*) ze str. 3 dla siły oporu wody

$$F = \rho v^2 l^2 f(R).$$

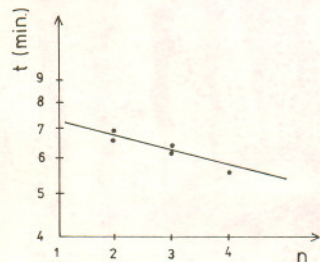
Moc potrzebna do jej pokonania jest dana przez

$$P = vF = \rho v^3 l^2 f(R).$$

Zauważmy teraz, że moc oraz masa łodzi z wiosłarzami ( $m \sim \rho l^3$ ) jest proporcjonalna do liczby wiosłarzy. Stąd dostajemy

$$v \sim n^{1/9},$$

a więc prędkość łodzi rośnie bardzo wolno ze wzrostem liczby wiosłarzy.



Wyniki regat międzynarodowych w Grünan (21. 06. 1964) w konkurencjach męskich na 2000 m w zależności od liczby wiosłarzy.

W tym roku obchodzimy setną rocznicę urodzin Stefana Banacha, uznawanego przez wielu za najwybitniejszego matematyka polskiego. W związku z tym do końca tego roku będą się pojawiały w kolejnych numerach *Delty* (z pewnymi przerwami) artykuły związane z twórczością Banacha, a także z samą jego postacią.

## Stefan Banach

Stefan Banach urodził się 20 marca 1892 roku w Krakowie. Jego ojciec nazywał się Greczek i pochodził z góralskiej rodziny. Zaraz po urodzeniu Banach został oddany na wychowanie do pewnej pracznki nazwiskiem Banachowa, od której to przez wdzięczność przybrał nazwisko.

Dzieciństwo miał bardzo ciężkie. Mając 15 lat musiał zarabiać na swoje utrzymanie udzielając korepetycji.

Początkowo studiował matematykę jako samouk. Przez krótki czas uczęszczał na Uniwersytet Jagielloński, a następnie wstąpił na Politechnikę Lwowską. Gdy wybuchła I wojna światowa, przerwał studia i wrócił do Krakowa.

Jego sytuacja uległa radykalnej zmianie, gdy w 1916 roku Hugo Steinhaus idąc wzdłuż Plant usłyszał słowa „całka Lebesgue’a”. Było to tak nieoczekiwane, że zaintrygowany zapoznał się z dyskutantami. Byli nimi Stefan Banach i Otto Nikodym. Steinhaus przedstawił wówczas problem, nad którym bezskutecznie pracował od dłuższego czasu. Ku jego zdziwieniu kilka dni później Banach przyniósł gotowe rozwiązanie.

Steinhaus uważał Banacha za swoje największe „odkrycie” matematyczne. To przypadkowe spotkanie otworzyło Banachowi drogę do błyskotliwej kariery.

W 1920 roku mimo braku ukończonych studiów został asystentem na Politechnice Lwowskiej. W tymże roku uzyskał stopień doktora. W 1922 roku odbyła się jego habilitacja, a po upływie dwóch miesięcy został mianowany profesorem. Warto może nadmienić, że wówczas na uniwersytecie we Lwowie było jedynie czterech profesorów matematyki (Banach, Ruziewicz, Steinhaus i Żyliński).

Banach jest twórcą analizy funkcjonalnej – jednej z najważniejszych gałęzi matematyki współczesnej. I choć podstawy analizy funkcjonalnej były już przed Banachem, to o jego roli przy powstaniu tej teorii może świadczyć choćby fakt, że trzy najważniejsze twierdzenia w analizie funkcjonalnej to twierdzenie Hahna-Banacha, Banacha-Steinhausa i twierdzenie Banacha o operatorze odwrotnym.

Najważniejszym dziełem Banacha była *Teoria operacji* wydana w 1931 roku po polsku, a rok później po francusku. Było to jedno z tych dzieł, które wywarło największy wpływ na rozwój matematyki współczesnej.

Banach w swojej twórczości nie ograniczał się do analizy funkcjonalnej. Położył również duże zasługi w takich dziedzinach, jak teoria funkcji rzeczywistych, teoria szeregów ortogonalnych, opisowa teoria mnogości i teoria miary. Nic więc dziwnego, że wokół Banacha powstała błyskawicznie grupa matematyków tworząc słynną na cały świat Szkołę Lwowską – najsilniejszy wówczas na całym świecie ośrodek analizy funkcjonalnej.

Zamiłowanie do życia kawiarnianego i brak mieszczańskiej cnoty oszczędności wpędziły Banacha w długi. Chcąc wybrnąć z trudnej sytuacji finansowej zaczął pisać podręczniki. Tak powstał dwutomowy *Rachunek różniczkowy i całkowy*, a także kilka podręczników do szkół średnich.

Znaczna część dyskusji matematycznych odbywała się w Kawiarni Szkockiej we Lwowie. Bardzo często rezultaty owych dyskusji były zapisywane ołówkiem na marmurowym blacie, który następnie był starannie czyszczony przez sprzątaczkę. W taki sposób przepadło niejedno twierdzenie. Aby uniknąć takich sytuacji, założono „Księgę Szkocką” – gruby zeszyt przechowywany w kawiarni, w którym zapisywane były problemy. Za rozwiązanie niektórych z nich autorzy obiecywali nagrody – do żywej gęsi włącznie.

Banach spędził okupację we Lwowie. Tam też doczekał upadku hitlerowskich Niemiec.

Na krótko przed śmiercią otrzymał zaproszenie z Uniwersytetu Jagiellońskiego do objęcia katedry matematyki, lecz z tego zaproszenia nie zdołał już skorzystać.

Zmarł 31 sierpnia 1945 roku.

Opracował P. H.



# PROFIBIAZGI

Diody laserowe są obecnie tanim źródłem promieniowania podczerwonego. W wielu zastosowaniach, np. w optycznych dyskach pamięci komputerowej, potrzebne jest światło o większej częstotliwości – w zakresie widzialnym. Naukowcy z Konica Corporation wynaleźli ostatnio nowy rodzaj kryształu organicznego, który może podwoić częstotliwość promieniowania podczerwonego, dając zielono-niebieskie światło. Proces podwojenia częstotliwości wymaga zastosowania kryształów molekularnych o wysokiej nieliniowej polaryzowalności. Po przebadaniu wielu pochodnych fenolu naukowcy wybrali 2-methoxy-5-nitrophenol. Zastosowanie tego związku pozwala uzyskać światło niebieskie z lasera Nd-YAD. (wg *Science*, 19 stycznia 1990)



Czy istnieje wzór na  $n$ -tą liczbę pierwszą? Ależ tak. Oto jeden z nich

$$p_n = 2 + \sum_{i=2}^{2^n} \left( \left[ \frac{\sum_{m=2}^i \left[ \frac{1}{\sum_{k=2}^m \left[ 1 - \frac{m}{k} + \left\lceil \frac{m}{k} \right\rceil \right]} \right]}{n-1} \right] - \left[ \frac{\sum_{m=2}^i \left[ \frac{1}{\sum_{k=2}^m \left[ 1 - \frac{m}{k} + \left\lceil \frac{m}{k} \right\rceil \right]} \right]}{n-1} - 1 \right] \right)$$

gdzie wszędzie nawias klamrowy  $[x]$  oznacza część całkowitą liczby  $x$ . Poprawność wzoru została udowodniona przez Mikołaja Rotkiewicza w pracy, która zdobyła wyróżnienie w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki w 1991 roku.



Od dawna przypuszczano, że dwutlenek węgla występuje w przestrzeni kosmicznej. Jednak na potwierdzenie tego przypuszczenia trzeba było długo czekać. Stało się tak, ponieważ molekula  $\text{CO}_2$  jest niewidoczna dla radioteleskopów, a duża zawartość dwutlenku węgla w atmosferze ziemskiej wyklucza przeprowadzenia badań optycznych z powierzchni Ziemi. Dopiero analiza danych zebranych przez satelitę IRAS pozwoliła zlokalizować w Obłokach Rosette i Cone trzy źródła promieniowania  $15,2 \mu\text{m}$ , charakterystycznego dla  $\text{CO}_2$  „zamrożonego” w lodzie. Prawdopodobnie lód pokrywa grudki pyłu międzygwiazdowego. (wg *Science*, 19 stycznia 1990)



Zastraszający jest fakt, że w szkołach średnich w klasach o profilu matematyczno-fizycznym na pytanie, gdzie jest wykładana matematyka na wyższym poziomie, na politechnice czy na uniwersytecie, przeciętnie 90% uczniów odpowiada, że na politechnice. Oczywiście, w klasach o profilu ogólnym dezorientacja jest jeszcze większa.

Pierwszy dokładny pomiar prędkości rozchodzenia się dźwięku w powietrzu został dokonany w 1738 r. Była to wspólna praca członków Paryskiej Akademii Nauk. Mierzono czas, jaki jest potrzebny na to, aby usłyszeć wystrzał armaty z odległości 30 km. Dla wyeliminowania błędu spowodowanego obecnością wiatru strzelano jednocześnie z dwóch armat oddalonych o 30 km.



Jesienią 1989 r. M.J. Geller i J.P. Huchra z Astrophysical Harvard-Smithsonian Center donieśli o odkryciu „Wielkiego Muru” – systemu tysięcy galaktyk zgrupowanych w obszarze o kształcie olbrzymiego, poszarpanego pasa. Była to największa struktura zaobserwowana w kosmosie – miała rozmiary rzędu 500 milionów lat świetlnych. Pojawiło się natychmiast intrygujące pytanie: czy jest to jedynie fluktuacja statystyczna rozkładu galaktyk, czy jest to coś więcej. W styczniu 1990 r. na zjeździe Amerykańskiego Towarzystwa Astronomicznego A.S. Szalay z Uniwersytetu Johna Hopkinsa i D.C. Koo z Obserwatorium Licka przedstawili wyniki obserwacji rozkładu galaktyk wokół północnego i południowego bieguna galaktycznego. Chociaż badaniami objęto niewielkie fragmenty nieba, to sięgnięto daleko „w głąb” kosmosu uwzględniając bardzo dalekie galaktyki. Stwierdzono, że „Wielki Mur” nie jest jedyną strukturą o tak wielkich rozmiarach. Zaobserwowano inne zgrupowania galaktyk pojawiające się niemal periodycznie w odstępach około 400 milionów lat świetlnych.



Wyobraźmy sobie, że mamy w przestrzeni trzy bryły. Czy istnieje płaszczyzna, która dzieli każdą z tych brył na części o równych objętościach?

Pytanie to zostało postawione przez Hugona Steinhausa, pozytywnie zaś rozwiązane przez Stefana Banacha. Wynik ten nazywa się „twierdzeniem o kanapce”, gdyż ma następującą interpretację. Mamy kanapkę złożoną z chleba, sera i szynki. Wówczas jednym cięciem noża można podzielić ją na dwie części tak, aby w obu tych częściach była jednakowa ilość chleba, sera i szynki.



W ostatnich latach ogromną furorę w produkcji odzieży sportowej zrobił materiał o nazwie Gore-Tex. Podstawowym surowcem do jego wyrobu jest politetrafluoroetylen (PTFE) znany też jako teflon. Powodem popularności Gore-Texu jest fakt, że odpowiednio preparowany PTFE zatrzymuje wodę, a przepuszcza parę wodną. PTFE ma jednak jeszcze jedną zadziwiającą cechę – przy rozciąganiu zwiększa swoją grubość.



Ostatnie badania sugerują, że dotychczasowe poglądy na wewnętrzną strukturę jąder atomowych były nierealistycznie uproszczone. Najprawdopodobniej protony i neutrony wewnątrz jądra mają tendencję do grupowania się i tworzenia odrębnych jednostek. I tak jądro tlenu  $^{16}\text{O}$  wygląda podobnie do związku cząstki  $\alpha$  i jądra  $^{12}\text{C}$ , jądro fluoru  $^{18}\text{F}$  przypomina cząstkę  $\alpha$  i jądro azotu  $^{14}\text{N}$ , a jądro magnezu  $^{24}\text{Mg}$  – dwa jądra węgla  $^{12}\text{C}$ . Takie „jądrowe molekuly” mają czas życia rzędu  $10^{-20}$  s i są – jak na warunki jądrowe – stosunkowo trwałe (nukleon potrzebuje na przejście przez całe jądro około  $10^{-23}$  s).





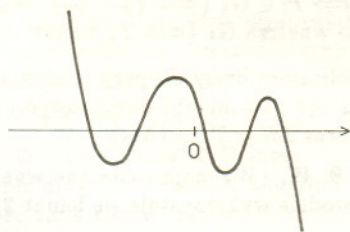
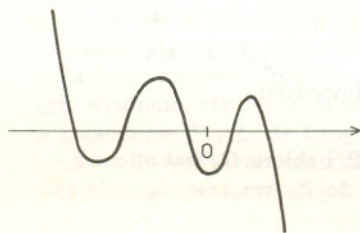


Oglądając wzory na rozwiązanie równań stopnia 3 i 4 spostrzegamy, że są one podane dla przypadku, gdy współczynnik przy najwyższej potędze jest 1, a przy następnej  $-0$ . Pierwsza sprawa jest oczywista – możemy zawsze wszystkie współczynniki równania algebraicznego podzielić przez współczynnik przy najwyższej potędze otrzymując równanie równoważne i mające pierwszy współczynnik równy 1 (równoważne, to znaczy o tych samych pierwiastkach).

Aby uzyskać kolejny współczynnik równy 0, posługujemy się właśnie przesunięciem – zamianą zmiennych postaci  $x + p$ . Liczba  $p$  dla równania

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

powinna być równa  $-a_{n-1}/n$ ; wówczas przy zamianie  $x \rightarrow x + p$  potęga  $n - 1$  nie pojawi się (co łatwo uzasadnić). Warto tu zwrócić uwagę, że naszą operację można geometrycznie opisać tak: przesuwamy oś x względem wykresu wielomianu tak, aby zero tej osi było średnią arytmetyczną (lub, co na jedno wychodzi – środkiem ciężkości) pierwiastków wielomianu (także zespolonych!).



Jeśli jest to wykres wielomianu stopnia 5, to z lewej jest  $a_4 \neq 0$ , a z prawej  $a_4 = 0$ .

Równanie  $x^3 + px + q = 0$  ma pierwiastek

$x_0 = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} - \frac{q}{2}}$ . Pozostałe pierwiastki znajduje się po podzieleniu wielomianu przez  $(x - x_0)$ .

Równanie  $x^4 + px^2 + qx + r = 0$  rozwiązuje się tak: rozwiązujemy pomocnicze równanie

$$8y \left( y^2 + py - r + \frac{p^2}{4} \right) - q^2 = 0$$

otrzymując pierwiastek  $y_0$ , a następnie równanie

$$\left( x^2 + \frac{p}{2} + y_0 \right)^2 = 2y_0 \left( x - \frac{q}{4y_0} \right)^2,$$

które ma wtedy te same pierwiastki, co równanie wyjściowe.

Ciekawe są tu dwa spostrzeżenia: po pierwsze – ów środek ciężkości możemy znaleźć nie znając samych pierwiastków (w istocie wynika to ze wzorów Vieté'a), po drugie – tak usytuowane równanie daje się łatwiej rozwiązać.

Likwidując współczynnik przy pierwszej potędze w równaniu  $x^2 + px + q = 0$  za pomocą przesunięcia otrzymujemy równanie

$$x^2 + r = 0,$$

które ma pierwiastki  $\pm\sqrt{-r}$ . Stąd pierwotne równanie ma pierwiastki  $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{-r}$ . Tak więc szkolna metoda rozwiązywania równań kwadratowych w istocie polega na zręcznym przesunięciu.

Można więc zadać pytanie, czy nie dałoby się tak zręcznie przesunąć równania, by zniknął nie akurat współczynnik przy potędze  $n - 1$ , lecz jakiś inny. I jak to zrobić? Okazuje się, że na ogół nie można dobrać takiego przesunięcia, by dowolnie wybrany współczynnik zniknął. Już dla równania

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

nie istnieje przesunięcie likwidujące współczynnik przy pierwszej potędze. A np. współczynnik  $a_0$  można zawsze zlikwidować, tyle że aby to zrobić (tj. znaleźć liczbę  $p$ ), trzeba znać jakiś pierwiastek naszego równania, a więc takie przesunięcie nie nadaje się jako pomoc przy rozwiązywaniu równań. A może ktoś z Czytelników umiałby zbudować ogólną teorię likwidacji współczynników przez przesunięcie?



# 27 zbiorów wypukłych bez środka symetrii

Marcin KASPERSKI

Jest to skrót pracy nagrodzonej złotym medalem na Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki w 1991 roku.

## FIZYCZNE NOWINKI

Redaguje Andrzej HENNEL

### WĘGLOWA PIŁKA FUTBOLOWA

Natura bardzo lubi płatać naukowcom figle. Ostatnim takim przypadkiem jest odkrycie nowej klasy niezwykle symetrycznych i pustych w środku cząsteczek węgla zwanych fullerenami. Nazwa ta pochodzi od nazwiska amerykańskiego architekta Richarda Buckminstera Fullera (1895–1983), którego azurowe konstrukcje kopułowe (jak na przykład pawilon USA na EXPO 67) weszły już do historii architektury. Przed kilku laty okazało się, że w odpowiednich warunkach termicznych przy laserowym odparowywaniu grafitu w atmosferze helu powstają cząsteczki węgla przypominające owe kopuły Fullera. Najlepiej zbadaną spośród nich jest zbudowana z sześciokątów i pięciokątów foremnych cząsteczka węgla  $C_{60}$ , idealnie w kształcie piłki futbolowej o średnicy 7 Å. Poza cząsteczką  $C_{60}$  otrzymano jeszcze inne fullereny, jak np.  $C_{70}$  o kształcie piłki do rugby i szereg większych  $C_{240}$ ,  $C_{540}$  czy  $C_{960}$ . Własności chemiczne i fizyczne nowych cząsteczek zaczęto badać dopiero w 1990 roku po otrzymaniu ich w większych ilościach przez grupę fizyków pracujących w USA (University of Arizona) i RFN (Instytut Maxa Plancka w Heidelbergu). Ze względu na występowanie w fullerenach pięciocłonowych pierścieni węgla połączonych z pierścieniami sześciocłonowymi ich własności chemiczne przypominają nieco związki organiczne nazywane aromatycznymi. Niezwykle interesujące okazały się za to ich własności fizyczne. Fullereny  $C_{60}$  krystalizują tworząc strukturę regularną płasko centrowaną o stałej sieci równej 14,2 Å. Otrzymane złote kryształy tworzą półprzewodnik molekularny o przerwie energetycznej wynoszącej około 2 eV. Jest to nowa, nie znana dotychczas postać alotropowa węgla. Jeżeli wolne miejsca pomiędzy piłkami węglowymi wypełnimy atomami potasu, wówczas otrzymujemy pierwszy w pełni trójwymiarowy metal molekularny o wzorze chemicznym  $K_3C_{60}$ . Metal ten okazał się nadprzewodnikiem o temperaturze krytycznej wynoszącej 18 K. Fakt ten wywołał zrozumiałe zainteresowanie i dalsze poszukiwania. Po zastąpieniu potasu innymi metalami udało się ostatnio podnieść temperaturę krytyczną do 43 K. Wrócić jednak do związku z potasem. Dalsze powiększanie ilości tego pierwiastka prowadzi do nowej substancji o wzorze chemicznym  $K_6C_{60}$  i odmiennej strukturze krystalicznej. Są to kryształy regularne, przestrzennie centrowane o stałej sieci wynoszącej 11,4 Å. Piłka węglowa umieszczona w środku każdego z sześciokątów otoczona jest 24 atomami potasu. Kryształ  $K_6C_{60}$  jest znów półprzewodnikiem o przerwie energetycznej około 1 eV. W przeciwieństwie jednak do krystalicznego  $C_{60}$  jest on materiałem silnie jonowym, w którym cząsteczka  $C_{60}$  wiąże 6 nadliczbowych elektronów dostarczanych przez otaczające atomy potasu. Intensywne badania fullerenów i ich związków trwają obecnie w wielu laboratoriach świata i w każdej chwili możemy oczekiwać nowych zaskakujących rezultatów.

Przypomnijmy jedno z zadań zeszlórocznej Olimpiady Matematycznej.

Znaleźć największą liczbę naturalną  $n$  o tej własności, że istnieje  $(n + 1)$  takich wielościanów wypukłych  $W_0, W_1, \dots, W_n$ , że

- (1)  $W_k$  jest obrazem  $W_0$  przy pewnym przesunięciu (dla  $k = 1, 2, \dots, n$ ).
- (2) Jeśli  $k \neq l$ , to  $W_k$  i  $W_l$  mają rozłączne wnętrza.
- (3)  $W_k$  i  $W_0$  mają punkt wspólny dla  $k = 1, 2, \dots, n$ .
- (4)  $W_0$  ma środek symetrii.

Rozwiązanie tego zadania znajduje się w tym numerze *Delty* (str. 16). Okazuje się, że  $n = 26$ . Przykładem takiej sytuacji jest „Kostka Rubika”.

Zauważmy, że rozwiązanie przenosi się bez zmian na przypadek, gdy  $W_0, W_1, \dots, W_n$  są dowolnymi, ograniczonymi, domkniętymi bryłami wypukłymi o niepustych wnętrzach.

Celem mojej pracy jest dowód faktu, że mimo odrzucenia warunku (4), nadal mamy  $n = 26$ . Zanim przejdziemy do dowodu, podamy dwa lematy. Ich dowody pomijamy. Niech  $\beta$  będzie wektorem. Przez  $T_\beta$  będziemy oznaczali przesunięcie o wektor  $\beta$ .

**Lemat 1.** Niech  $W$  będzie ograniczoną bryłą wypukłą o niepustym wnętrzu,  $\alpha$  dowolnym wektorem długości 1. Wówczas istnieje takie  $p > 0$ , że

- (a)  $|\alpha| > p \Rightarrow W$  i  $T_{\alpha\alpha}(W)$  nie mają punktów wspólnych.
- (b)  $|\alpha| < p \Rightarrow W$  i  $T_{\alpha\alpha}(W)$  mają wspólne punkty wewnętrzne.
- (c)  $|\alpha| = p \Rightarrow W$  i  $T_{\alpha\alpha}(W)$  mają punkty wspólne, ale wnętrza mają rozłączne.

**Lemat 2.** Niech  $A$  i  $B$  będą ograniczonymi bryłami wypukłymi o środkach symetrii  $P_A$  i  $P_B$ ,  $B = T_{\vec{P_A P_B}}(A)$ ,  $M$  – środek  $\overline{P_A P_B}$ . Wówczas

- (A)  $A$  i  $B$  mają punkt wspólny  $\Leftrightarrow M \in A$  i  $M \in B$ .
- (B)  $A$  i  $B$  mają wspólny punkt wewnętrzny  $\Leftrightarrow M$  jest takim punktem.

Ponieważ dowód naszego twierdzenia jest bardzo długi, więc go tylko naszkicujemy pokazując główne kroki w dowodzie.

Niech  $W_0, W_1, \dots, W_n$  będą ograniczonymi i domkniętymi bryłami wypukłymi o niepustych wnętrzach, spełniającymi warunki (1) – (3). Niech  $P_0$  będzie dowolnym punktem przestrzeni. Punkty  $P_1, P_2, \dots, P_n$  niech będą takie, że  $W_i = T_{\vec{P_0 P_i}}(W_0)$  (ich istnienie wynika z (1)). Oznaczmy przez  $G_i$  zbiór takich punktów  $X$ , że  $W_i$  ma punkt wspólny z  $T_{\vec{P_i X}}(W_i)$ , a przez  $F_i$  zbiór takich  $X$ -ów, że  $W_i$  i  $T_{\vec{P_i X}}(W_i)$  mają punkt wspólny, ale rozłączne wnętrza. A oto główne kroki w dowodzie:

- 1)  $G_i = T_{\vec{P_0 P_i}}(G_0)$ ,  $F_i = T_{\vec{P_0 P_i}}(F_0)$ .
- 2) Częścią wspólną każdej prostej przechodzącej przez  $P_i$  i zbioru  $G_i$  jest odcinek niezerowej długości o środku w  $P_i$  i końcach należących do  $F_i$  (wnętrze tego odcinka nie zawiera punktów z  $F_i$ ). Krok 2) wynika z lematu 1.
- 3)  $G_i$  i  $F_i$  są środkowo symetryczne. Ich wspólnym środkiem symetrii jest  $P_i$ .
- 4)  $G_i$  jest bryłą wypukłą, a  $F_i$  jej brzegiem. (Korzystamy tu z wypukłości  $W_i$ .)
- 5)  $W_k$  ma punkt wspólny z  $W_l \Leftrightarrow P_l \in G_k (\Leftrightarrow P_k \in G_l)$ .  $W_k$  ma punkt wspólny z wnętrzem  $W_l \Leftrightarrow P_l$  należy do wnętrza  $G_k (\Leftrightarrow P_k$  należy do wnętrza  $G_l)$ .

Niech  $M_i$  będzie jednokładnym obrazem bryły  $G_i$  przy jednokładności o środku  $P_i$  i skali 1/2. Wiemy już, że  $M_i$  są ograniczonymi i domkniętymi bryłami wypukłymi mającymi środek symetrii w  $P_i$  oraz  $M_i = T_{\vec{P_0 P_i}}(M_0)$ .

- 6)  $W_i \cap W_j \neq \emptyset \Leftrightarrow M_i \cap M_j \neq \emptyset$ .  $W_i$  i  $W_j$  mają rozłączne wnętrza  $\Leftrightarrow M_i$  i  $M_j$  mają rozłączne wnętrza. (W dowodzie wykorzystuje się lemat 2.)

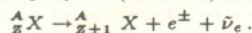
Wykazaliśmy więc, że dla dowolnego układu ograniczonych i domkniętych brył wypukłych o niepustych wnętrzach:  $W_0, \dots, W_n$ , spełniających warunki (1) – (3) istnieją bryły  $M_0, \dots, M_n$  spełniające wszystkie warunki nałożone na  $W_i$ , a ponadto (4). A więc sprowadziliśmy problem do poprzedniego – znacznie prostszego – zadania, z którego rozwiązania wynika, że  $n = 26$ .

Na koniec zauważmy, że warunek wypukłości  $W_0$  też nie wydaje się konieczny (prawdopodobnie wystarczy spójność). Drugim ciekawym problemem związanym z moją pracą byłoby rozstrzygnięcie, jakie bryły dają  $n = 26$  (czy tylko równoległosciany?) i dokładniejsze oszacowanie liczby  $n$  dla różnych klas wielościanów – chociażby dla czworoscianów.



Mam nadzieję, że na końcu tego artykułu będę mógł odpowiedzieć na tytułowe pytanie podając przynajmniej oszacowanie masy tej intrygującej cząstki. Na początek muszę cofnąć się jednak o ponad sześćdziesiąt lat, do grudnia 1930 r., kiedy to Wolfgang Pauli w słynnym liście do uczestników międzynarodowego kongresu w Tybindze powołał do życia naszego niesforneho bohatera. Neutrino było potrzebne Pauliemu do ratowania prawa zachowania energii w rozpadzie  $\beta$ .

W rozpadzie  $\beta^{(\pm)}$  jądro  ${}^A_Z X$  przekształca się w jądro  ${}^A_{Z\pm 1} X$  emitując jednocześnie pozyton (elektron) oraz (anty)neutrino



Gdyby neutrino nie występowało wśród produktów rozpadu (tzn. rozpad byłby dwuczłonowy), to zasady zachowania energii i pędu w sposób jednoznaczny determinowałyby energię elektronu (a także, oczywiście, jądra potomnego). Widmo elektronów obserwowane w spektrometrze wyglądałoby wówczas jak pojedyncza linia. W rzeczywistości widmo elektronów jest rozmyte (ciagle). Fakt ten stwierdził w 1914 r. J. Chadwick.

Nie wszyscy uznawali potrzebę uszczęśliwienia fizyki nową cząstką elementarną, a nawet przejawiali wobec pomysłu nieukrywaną niechęć. Nad wątpliwe okoliczności poczęcia neutrina przedkładano np. efektowną hipotezę autorstwa Nielsa Bohra obalającą prawo zachowania energii w procesach mikroświata. Trzeba też przyznać, że nasz bohater nie ułatwiał zadania swoim zwolennikom. Był nieuchwytny, a przemysłne doświadczenia, ażeby go pośrednio „zobaczyć” np. analizując odrzut emitującego neutrino jądra atomowego, nie na wiele się zdały.

Początkowo przypuszczano, że pupil Pauliego może mieć masę rzędu 0,01 masy protonu, ale już w 1933 r. E. Fermi zdecydowanie odrzucił cielesność cząstki i pozbawił ją masy spoczynkowej. Odkrycie przez Irenę i Frédérica Joliot-Curie rozpadu  $\beta^+$  postawiło na porządku dziennym dodatkowo problem drugiego neutrina, o którym nie było wiadomo, czy różni się od cząstki emitowanej w przemianie  $\beta^-$ . L. de Broglie poparł swoją powagą hipotezę dwu różnych neutrino, co zgadzało się też z teorią Diraca: nasz bohater byłby fermionem o spinie  $1/2$ , bezmasowym lub o bardzo małej masie, mającym odpowiadającego mu antymaterialnego partnera właśnie w postaci cząstki emitowanej w rozpadzie  $\beta^+$ .

Wierność zwolenników neutrino długo była wystawiana na próbę wytrwałości. Dopiero mozolne pomiary przekroju czynnego w tzw. odwrotnym rozpadzie  $\beta$



wykonane w latach 1953 – 1956 przez F. Reinesa i C. Cowana namacalnie ujawniły obecność neutrino w przyrodzie. Wielkość zmierzonego przekroju czynnego  $\sigma = 9,4(\pm 1,3) \times 10^{-44}$  cm<sup>2</sup> wymownie potwierdziła, jak zwiewny i nieuchwytny to fermion. Niestety, o masie nic pewnego w dalszym ciągu nie było wiadomo.

Zresztą i poglądy na naturę neutrino były podzielone. Na początku lat sześćdziesiątych przy okazji badań nad nową teorią oddziaływań słabych A. Salam, T. D. Lee i C.N. Yang powrócili do starej koncepcji E. Majorany odnoszącej się do nienaładowanych fermionów, w której cząstka i jej antycząstka nie są między sobą rozróżnialne. Możemy więc o neutrinie myśleć bądź jako o fermionie Diraca, bądź jako o fermionie Majorany. Spór nie jest

tylko językowy i estetyczny, bowiem idą za nim głębokie konsekwencje fizyczne. Ich wyjaśnienie wymaga jednak sięgnięcia do poglądów na unifikację oddziaływań fizycznych, które na potrzeby tego artykułu przedstawię w niezbędnym zarysie.

W latach siedemdziesiątych fizycy zaczęli coraz poważniej myśleć o połączeniu w ramach jednej teorii oddziaływań elektromagnetycznych, słabych i silnych. Podstawą jest idea jednakowego potraktowania leptonów (elektronów i neutrino) oddziałujących słabo i elektromagnetycznie oraz kwarków oddziałujących silnie, słabo i elektromagnetycznie.

Od dawna wiemy dobrze, że oddziaływanie dwu elektronów wynika z posiadanego przez nie ładunku elektrycznego. Pódstulujemy więc, że i w przypadku innych oddziaływań muszą być one związane z występowaniem odpowiednich ładunków: elektroslabego – dla leptonów i koloru – dla kwarków. Ponadto wierzymy, że każda teoria oddziaływań musi spełniać postulat cechowania. Wymaga on, by fizyka procesów zachodzących w przyrodzie nie zależała od tego, jak w danym punkcie czasoprzestrzeni ładunki takie nazwiemy. W przypadku kwarków nie jest więc decydujące, czy kolory to umownie czerwony, niebieski i zielony, lecz fakt, że „abstrakcyjna” przestrzeń kolorów jest trójwymiarowa.

Najprostszym pomysłem na zunifikowanie oddziaływania silnego i słabego jest „doklejenie” do trójwymiarowej przestrzeni sił silnych dwu wymiarów słabych: „elektronu” i „neutrino”, co prowadzi do pięciowymiarowej abstrakcyjnej przestrzeni wspólnej dla leptonów i kwarków (leptokwarków). Takie eleganckie i nietuzinkowe pociągnięcie, zaproponowane przez H. Georgiego i S.L. Glashowa w 1974 r., owocuje bardzo ciekawymi konsekwencjami. Jedną z bardziej spektakularnych jest hipoteza rozpadu protonu z czasem życia  $10^{29} - 10^{31}$  lat. Jest to wprawdzie fantastycznie długo, ale znaleźli się fizycy doświadczalnicy, którzy wykonali wiarygodne pomiary wskazujące, że ten czas musi być jednak dużo dłuższy, a więc że teoria Glashowa nie jest dobrym pomysłem na unifikację wymienionych oddziaływań. Oczywiście, sama koncepcja jednolitej teorii sił fizycznych jest bardzo pociągająca, dzięki czemu mamy „na rynku” wiele innych możliwości, na przykład unifikację H. Fritzscha i P. Minkowskiego (zwaną unifikacją SO(10)), teorie supergrawitacyjne, w których unifikacja obejmuje także oddziaływanie grawitacyjne oraz modele superstrun (zwane też teoriami wszystkiego!). W propozycjach tych roi się od egzotycznych efektów wyprowadzających poza usankcjonowany Nagrodami Nobla model standardowy.

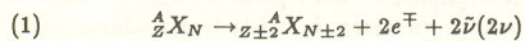
W teorii SO(10) mamy do dyspozycji aż 10-wymiarową „scenę” procesów fizycznych.

W modelu standardowym unifikacja została dokonana jedynie na poziomie oddziaływania elektromagnetycznego i słabego. Oddziaływanie silne niezależnie opisuje chromodynamika. Silnym potwierdzeniem unifikacji Salama-Weinberga było odkrycie postulowanych przez model bozonów pośredniczących  $W^\pm$  i  $Z^0$ . Dla podkreślenia, że pierwszy krok został dokonany, próby jednolitego opisu oddziaływania elektroslabego i silnego zwykle się nazywać wielką unifikacją.



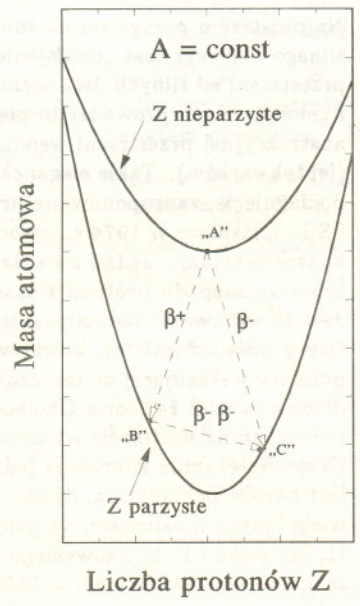
Wśród nich jest przypuszczenie, że procesy fizyczne mogą przebiegać z łamaniem prawa zachowania liczby leptonowej; że, być może, należy podwoić i tak już liczną rodzinę cząstek elementarnych (fundamentalnych?) przez dodanie kwarkom – skwarków, a leptonom – sleptonów; że powinny istnieć ciężkie prawoskrętne bozony pośredniczące, a dowód pani Wu na „leworęczność” Boga zbyt pochopnie przyjmujemy za wystarczającą. W większości tych propozycji neutrino pojawia się jako cząstka Majorany o małej, ale skończonej masie ( $10^{-5}$  eV – 1 eV). Niestety, skala energii ( $10^3$  –  $10^6$  GeV), jakie są konieczne do sprawdzenia takich rewelacji, przekracza możliwości działających i budowanych akceleratorów. Odsuwa to także możliwości bezpośredniego pomiaru masy neutrina w trudno przewidywalną przyszłość.

W tym miejscu chcę opowiedzieć Czytelnikowi o mniej spektakularnej (początkowo) historii podwójnego rozpadu  $\beta$ . Historii, która obecnie nabiera „rewolucyjnego” charakteru dzięki niebywałemu rozwojowi fizyki „podziemnej”. Podwójny rozpad  $\beta$  przebiegający według schematu



został zaproponowany ponad pół wieku temu przez M. Geppert-Mayer. Rozpad taki może zdarzyć się, gdy dla kolejnych trzech pierwiastków masa drugiego z nich jest większa od masy pozostałych, różnica zaś mas pierwiastków skrajnych jest większa od masy spoczynkowej dwu elektronów  $2m_e c^2 \approx 1022$  keV.

Rys. 1. Parabole masy izobarów (atomów o tej samej liczbie atomowej  $A$ ) o parzystej liczbie atomowej  $A$ . Jądra atomowe o nieparzystym  $Z$  leżą na wyższej paraboli, co powoduje, że są niestabilne. Na przykład jądro „A” może rozpaść się w procesie  $\beta^-$  lub  $\beta^+$ . Także parzysto-parzyste jądro „B” jest niestabilne. Możliwy jest jego rozpad z emisją dwu elektronów, o ile różnica masy między nim a jądrem „C” jest większa niż  $2m_e c^2$ .



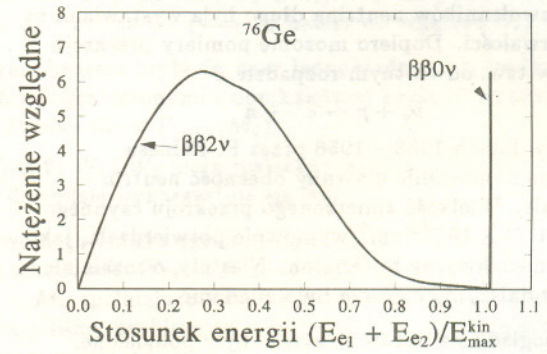
W układzie okresowym pierwiastków sytuacja taka nie jest rzadkością, gdyż możemy znaleźć ponad 30 jąder atomowych podejrzewanych o ten typ rozpadu, m.in. cynku  ${}^{70}\text{Zn}$ , germanu  ${}^{76}\text{Ge}$ , selenu  ${}^{82}\text{Se}$ , telluru  ${}^{128,130}\text{Te}$ , a nawet uranu  ${}^{238}\text{U}$ . Ostatnio (w 1987 r.) przewidywania te zostały potwierdzone znakomitym odkryciem grupy M.K. Moe z Irvine w Kalifornii. Badacze ci stwierdzili, że połowkowy czas życia w rozpadzie selenu  ${}^{82}\text{Se}$  do kryptonu  ${}^{82}\text{Kr}$  wynosi  $(1,1^{+0,8}_{-0,3}) \times 10^{20}$  lat.

Jest to najrzadszy zaobserwowany w bezpośrednim pomiarze proces w przyrodzie. W pomiarach trwających prawie rok (7960 godzin) zarejestrowano tylko 36 przypadków rozpadu z emisją neutrin (proces typu  $2\beta 2\nu$ ).

Podstawowa idea fizyki „podziemnej” to umieszczenie laboratoriów fizycznych jak najgłębiej pod ziemią, by eliminując różnorodne efekty promieniowania kosmicznego móc rejestrować procesy bardzo rzadkie, przewidywane w teoriach unifikacyjnych. Nakłady na takie laboratoria są wielokrotnie niższe niż na wielkie akceleratory fizyki współczesnej. Do słynniejszych należy laboratorium Uniwersytetu w Mediolanie umieszczone w tunelu pod Mont Blanc, laboratorium Uniwersytetu Kalifornijskiego w Santa Barbara utworzone we współpracy z Lawrence Berkeley Laboratory, umieszczone na głębokości 200 m w elektrowni w Oroville, wspólne laboratorium Uniwersytetów w Saragossie i w Bordeaux umieszczone w tunelu Frejus, podziemne laboratorium Kamiokande w Japonii, laboratorium Uniwersytetu w Erewanie zbudowane w kopalni węgla kamiennego w Awańsku. Dla przykładu podam, że np. w eksperymencie Kalifornijskiego Instytutu Technologicznego i Instytutu Paula Scherrera (Szwajcaria) przeprowadzonym w tunelu św. Gottharda otaczające aparaturę skały redukują tło promieniowania kosmicznego  $10^6$  razy, co odpowiada umieszczeniu przyrządów pomiarowych pod 4000 m warstwą wody. Co roku są organizowane wielkie międzynarodowe konferencje fizyki podziemnej. W 1991 r. konferencja taka odbyła się w Toledo.

Naprawdę interesujący jest jednak inny wariant podwójnego rozpadu  $\beta$  zaproponowany w 1939 r. przez W.H. Furry’ego. W trakcie tego procesu emitowane byłyby tylko elektrony (rozpad typu  $2\beta 0\nu$ ). Jak obecnie wiemy, nie mieści się on w gronie zjawisk przewidywanych przez model Salama-Weinberga: przebiega z łamaniem prawa zachowania liczby leptonowej, neutrino wyposażone w masę spoczynkową ( $m_\nu \neq 0$ ) koniecznie musi być cząstką Majorany, a na dodatek pożądane jest, by w minimalnym chociaż stopniu przywrócona została symetria między lewą i prawą stroną przez dopuszczenie w oddziaływaniu słabym prądów prawoskrętnych, zakazanych w modelu standardowym. Nic dziwnego, że od lat trwają „łowy” na podwójny rozpad  $\beta$  bez emisji neutrin, a sukces M.K. Moe rozbudził nowe apetyty i rozgrzał emocje. Odkrycie tego „cudacznego” rozpadu byłoby bowiem pierwszym sygnałem fizyki spoza modelu standardowego.

Problem można jednak odwrócić i to jest przyczyna, dla której proces  $2\beta 0\nu$  znalazł się w mojej opowieści o wazieniu neutrina. W wielu podziemnych laboratoriach czułość aparatury nie pozwala jeszcze bezpośrednio stwierdzić, czy rozpad  $2\beta 0\nu$  występuje, ale umożliwia wyznaczenie dolnej granicy czasu życia różnych pierwiastków, które podejrzewamy o rozpad bez emisji neutrin. Technika obserwacyjna zasadza się na fakcie występowania zasadniczej różnicy między widmem ciągłym emitowanych elektronów w przemianie  $2\beta 2\nu$  a spodziewanym widmem liniowym w przypadku rozpadu  $2\beta 0\nu$ .



Rys. 2. Widmo energetyczne w podwójnym rozpadzie  $\beta$  germanu  ${}^{76}\text{Ge}$  do selenu  ${}^{76}\text{Se}$ . Różnica masy między tymi jądrami wynosi 3280 keV, co oznacza, że łączna energia kinetyczna cząstek emitowanych w procesie wynosi 2041 keV. Dzieli się ona statystycznie pomiędzy elektrony i (anty)neutrina w rozpadzie  $2\beta 2\nu$ . Natomiast w rozpadzie  $2\beta 0\nu$  tylko elektrony unoszą całą energię procesu.



Suma energii emitowanych elektronów w procesie bez emisji neutrin musi bowiem być dokładnie równa energii dostępnej w przemianie. Wyznaczone dotychczas granice czasu są oształmiające. Na przykład ocenia się, że german  $^{76}\text{Ge}$  powinien rozpaść się z połowkowym czasem życia rzędu  $10^{21} - 10^{24}$  lat, ale po sukcesie grupy z Irvine nadzieje na bezpośrednie zaobserwowanie procesu bardzo wzrosły.

Te istniejące, dolne oszacowania czasu życia wystarczają teoretykom do powiedzenia czegoś bliższego o masie naszego tytułowego bohatera. W teorii podwójnego rozpadu  $\beta$  istnieje prosty związek między połowkowym czasem życia w procesie  $2\beta 0\nu$  a masą lekkiego neutrina elektronowego:

$$(2) \quad T_{\frac{1}{2}}^{-1} = M_{mm} \left( \frac{m_\nu}{m_e} \right)^2$$

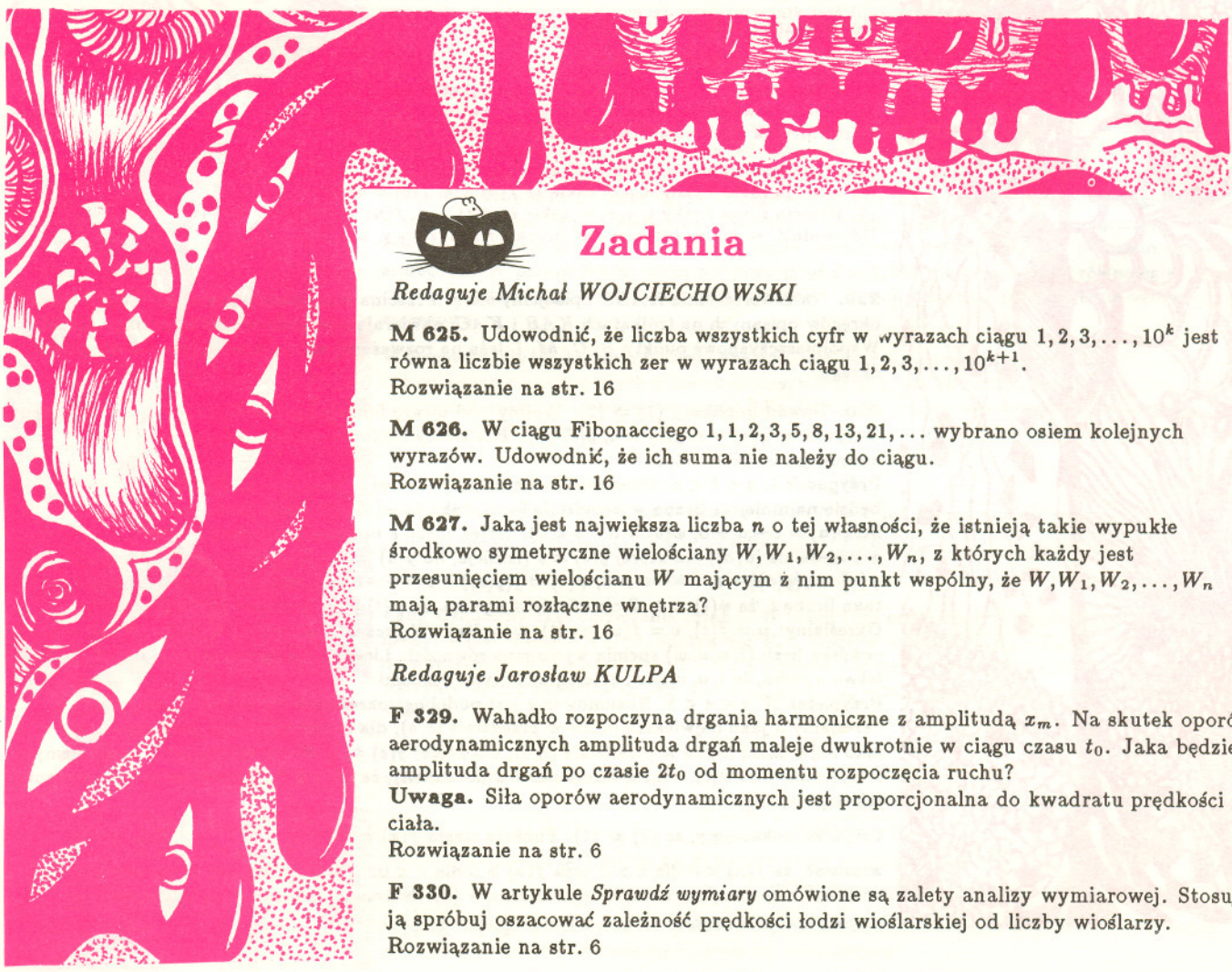
Podstawiając z lewej strony równania znaną doświadczalnie dolną wartość czasu  $T_{\frac{1}{2}}$  łatwo otrzymać ograniczenie od góry  $m_\nu$ , o ile potrafimy wiarygodnie obliczyć występujący we wzorze (2) współczynnik  $M_{mm}$ . Jego wielkość zależy od subtelnych szczegółów struktury jąder  $(A, Z)$ ,  $(A, Z \pm 1)$  i  $(A, Z \pm 2)$  biorących udział w przemianie, a szczególnie jądra pośredniego  $(A, Z \pm 1)$ . W przypadku germanu  $^{76}\text{Ge}$  jest nim jądro arsenu  $^{76}\text{As}$ . W ciągu ostatnich czterech lat rozwinięto wiarygodne metody obliczania wartości współczynnika  $M_{mm}$  w kilku centrach fizyki teoretycznej, np. w Pasadenie (USA), w Heidelbergu i w Tybindzie (Niemcy), w Janinie (Grecja).

Otrzymane w różnych ośrodkach wartości współczynnika są zbliżone, co podnosi zaufanie do oszacowania masy neutrina przeprowadzonego w oparciu o wzór (2). Na tytułowe pytanie grupa teoretyków z Tybingi i Janiny – w której badaniach uczestniczy również autor – odpowie, że masa neutrina nie może być większa od 0,8 eV ( $\approx 1,5 \times 10^{-33}$  g). Niestety, w dalszym ciągu nie potrafimy podać dolnej granicy masy, która jest najbardziej frapującą zagadką z punktu widzenia kosmologii.

Pomiary gęstości materii widzialnej wskazują, że jest ona równa granicznej gęstości, przy której modele rozszerzającego się nieograniczenie Wszechświata przechodzą w modele Wszechświata zamkniętego. Gdyby neutrina miały istotnie różną od zera masę spoczynkową, mogłoby to wystarczyć do zamknięcia Wszechświata.

Bardziej precyzyjne „ważenie” naszego bohatera musi zaczekać na bezpośredni pomiar czasu życia w rozpadzie  $2\beta 0\nu$ . Rozwijane są też inne metody pomiaru jego masy, ale to już temat na inny artykuł.

**P.S.** Rozpad  $\beta$  znowu nas zaskoczył. W 1991 roku potwierdzone zostały obserwacje sprzed 6 lat: około 1% jąder rozpada się wyrzucając zagadkowe neutrin o masie 17 keV. Wynik ten jest ciągle kontrowersyjny, gdyż niektóre grupy doświadczalne nie obserwują tego neutrina. Może jednak jest to pierwszy sygnał fizyki spoza modelu standardowego?



## Zadania

Redaguje Michał **WOJCIECHOWSKI**

**M 625.** Udowodnić, że liczba wszystkich cyfr w wyrazach ciągu  $1, 2, 3, \dots, 10^k$  jest równa liczbie wszystkich zer w wyrazach ciągu  $1, 2, 3, \dots, 10^{k+1}$ .  
Rozwiązanie na str. 16

**M 626.** W ciągu Fibonacciego  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$  wybrano osiem kolejnych wyrazów. Udowodnić, że ich suma nie należy do ciągu.  
Rozwiązanie na str. 16

**M 627.** Jaka jest największa liczba  $n$  o tej własności, że istnieją takie wypukłe środkowo symetryczne wielościany  $W, W_1, W_2, \dots, W_n$ , z których każdy jest przesunięciem wielościanu  $W$  mającym z nim punkt wspólny, że  $W, W_1, W_2, \dots, W_n$  mają parami rozłączne wnętrza?  
Rozwiązanie na str. 16

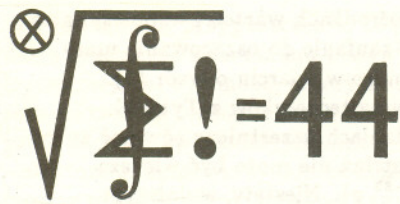
Redaguje Jarosław **KULPA**

**F 329.** Wahadło rozpoczyna drgania harmoniczne z amplitudą  $x_m$ . Na skutek oporów aerodynamicznych amplituda drgań maleje dwukrotnie w ciągu czasu  $t_0$ . Jaka będzie amplituda drgań po czasie  $2t_0$  od momentu rozpoczęcia ruchu?

**Uwaga.** Siła oporów aerodynamicznych jest proporcjonalna do kwadratu prędkości ciała.  
Rozwiązanie na str. 6

**F 330.** W artykule *Sprawdź wymiary* omówione są zalety analizy wymiarowej. Stosując ją spróbuj oszacować zależność prędkości łodzi wioślarskiej od liczby wioślarzy.  
Rozwiązanie na str. 6





## Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki,  
Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Czołówka ligi zadaniowej  
**Klub 44 M**

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 219 ( $WT=3,52$ ) i 220 ( $WT=1,67$ )  
z numeru 4/1991

Paweł Kubit	- Krosno	43,17
Krzysztof Zawislowski	- Warszawa	42,82
Tomasz Wlęcha	- Tarnów	37,48

Termin nadsyłania rozwiązań:  
30 VI 1992

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 3$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1992.

### Zadania z matematyki nr 237, 238

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**237.** Wyznaczyć wszystkie czwórki dodatnich liczb całkowitych  $(x, y, u, v)$  spełniające równanie  $x^{u+v} + y = x^u y^v$ .

**238.** Wykazać zbieżność i znaleźć granicę ciągu  $(x_n)$  danego wzorem rekurencyjnym:  $a_0 = 44$ ,  $a_{n+1} = 2^{1-a_n}$  dla  $n \geq 1$ .

Zadanie 238 zaproponował pan Dariusz Laskowski z Troszyna (woj. szczecińskie).

Rozwiązania zadań z numeru 11/1991

Przypominamy treść zadań:

**229.** Dany jest czworokąt  $OABC$  oraz trójkąt  $KLM$  o wierzchołkach  $K \in OA$ ,  $L \in OB$ ,  $M \in OC$ . Dowiedź, że jeżeli na każdym z czworokątów  $ABLK$  i  $ACMK$  można opisać okrąg, to również na czworokąt  $BCML$  można opisać okrąg.

**230.** Dla funkcji ciągłej  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  rozważamy warunki:

- (1) Istnieją różne liczby  $a, b, c$ , takie że  $f(a) = b$ ,  $f(b) = c$ ,  $f(c) = a$ .
  - (2) Istnieją różne liczby  $t, u, v, w$ , takie że  $f(t) = u$ ,  $f(u) = v$ ,  $f(v) = w$ ,  $f(w) = t$ .
- Udowodnić, że (1)  $\Rightarrow$  (2) oraz dać przykład pokazujący, że (2)  $\not\Rightarrow$  (1).

**229.** Na czworokątnie  $KABC$  opisujemy sferę. Przecina ona płaszczyzny  $OAB$  i  $OAC$  wzdłuż okręgów opisanych na trójkątach  $KAB$  i  $KAC$ , zawierających (odpowiednio) punkty  $L$  i  $M$ . Współpłaszczyznowe punkty  $B, C, M, L$  leżą na rozważanej sferze, a więc leżą na wspólnym okręgu.

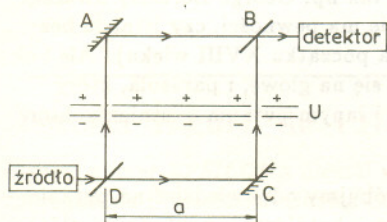
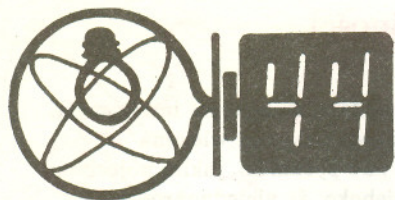
**230.** Dowód implikacji (1)  $\Rightarrow$  (2). Weźmy pod uwagę funkcje  $g(x) = f(f(x))$  i  $h(x) = g(g(x))$ . Oczywiście,  $g(a) = c$ ,  $g(b) = a$ ,  $g(c) = b$ . Bez straty ogólności można przyjąć, że  $a$  jest najmniejszą z liczb  $a, b, c$ .

Przypadek I.  $a < b < c$ . Oznaczmy:  $\varphi(x) = g(x) - x$ ,  $\psi(x) = h(x) - x$ . Niech  $d$  będzie najmniejszą liczbą w przedziale  $(a; b)$ , taką że  $\varphi(d) = 0$  (taka liczba istnieje, bo  $\varphi(a) = c - a > 0$ ,  $\varphi(b) = a - b < 0$ ). Dalej, niech  $e$  będzie najmniejszą liczbą w przedziale  $(a; d)$ , dla której  $g(e) = b$  (istnieje, bo  $g(a) = c > b$ ,  $g(d) = d < b$ ). Ponieważ  $\psi(a) = g(g(a)) - a = b - a > 0$ ,  $\psi(e) = g(g(e)) - e = a - e < 0$ , znajdujemy w przedziale  $(a; e)$  taką liczbę  $t$ , że  $\psi(t) = 0$ . Z określenia  $d$  wynika, że  $\varphi(t) \neq 0$ . A zatem  $h(t) = t \neq g(t)$ . Określamy:  $u = f(t)$ ,  $v = f(u) = g(t)$ ,  $w = f(v)$ . Wówczas  $f(w) = g(v) = h(t) = t$ ; tak więc czwórka liczb  $(t, u, v, w)$  spełnia wymagane równości. Liczby  $t$  i  $v$  są różne ( $v = g(t) \neq t$ ). Stąd łatwo wynika, że  $t, u, v, w$  są czterema różnymi liczbami.

Przypadek II.  $a < c < b$ . Rozumowanie jest podobne: określamy  $\varphi$  i  $\psi$ , jak w przypadku I; określamy  $d$  jako największą liczbę w przedziale  $(c; b)$ , dla której  $\varphi(d) = 0$ , oraz określamy  $e$  jako największą liczbę w przedziale  $(d; b)$ , dla której  $g(e) = c$ . W przedziale  $(e; b)$  znajdujemy taką liczbę  $t$ , że  $\psi(t) = 0$  i z określenia  $d$  wnioskujemy, że  $\varphi(t) \neq 0$ . Dokończenie rozumowania, jak w przypadku I.

Przykład pokazujący, że (2)  $\not\Rightarrow$  (1). Funkcja ciągła  $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{dla } x \leq 1/\sqrt{2} \\ -1/x & \text{dla } x \geq 1/\sqrt{2} \end{cases}$  ma tę własność, że  $f(x) < 0$  dla  $x > 0$  oraz  $f(x) > 0$  dla  $x < 0$ . Nie istnieje więc trójka różnych liczb  $a, b, c$  spełniająca warunki wymienione w (1). Natomiast warunek (2) jest spełniony na przykład dla czwórki  $(t, u, v, w) = \left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ .





Czołówka ligi zadaniowej  
**Klub 44 F**  
 po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
 zadań 121 (WT=2,20) i 122 (WT=1,15)  
 z numeru 8/1991

Adam Sikorski	- Lublin	36,71
Aleksander Borowski	- Aleksandrów K.	17,33
Tomasz Wietecha	- Tarnów	12,12

Niestety, liga traci uczestników: w tej serii rozwiązania przysłali tylko pan Sikorski i pan Wietecha.



Redaguje Jerzy B. BROJAN

**135.** Elektrony mają w mechanice kwantowej własności falowe i mogą ulegać interferencji. Rysunek przedstawia schemat takiego interferometru. Występują w nim zwierciadła całkowicie odbijające *A* i *C* (tę rolę mogą pełnić odpowiednie kryształy) i zwierciadła półprzepuszczalne *B* i *D*. Wiązka nierelatywistycznych (niezbyt szybkich) elektronów o energii *E* pada na zwierciadło *D*, skąd część wiązki biegnie dalej drogą *DAB*, a część drogą *DCB*. Na odcinkach pionowych energia kinetyczna elektronów zmienia się w wyniku przejścia do obszaru o innym potencjale. Za zwierciadłem *B* rozdzielone wiązki nakładają się, a obraz interferencyjny jest rejestrowany przez detektor. O ile prążków przesunie się obraz interferencyjny, gdy różnicę potencjałów zwiększymy od zera do *U*?

**136.** Gdy temperatura powietrza atmosferycznego szybko maleje w miarę wzrostu wysokości, występuje intensywna konwekcja (pionowe ruchy mas powietrza), natomiast gdy temperatura maleje powoli lub rośnie, konwekcja nie występuje. Wyjaśnić przyczynę tej zależności i obliczyć minimalny spadek temperatury suchego powietrza przy wzroście wysokości o 100 m, dla którego jeszcze występuje konwekcja.

**Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 11/1991**

Przypominamy treść zadań:

**127.** Mamy 70 jednakowych ogniw o oporze wewnętrznym 1 Ω. Jak je należy połączyć, aby przez dołączony do baterii opornik *R* popłynął jak największy prąd? Rozważmy dwa przypadki:  
 a) *R* = 1 Ω,  
 b) *R* = 2 Ω.

**128.** Ogrzewamy wodę od temperatury *T*<sub>0</sub> do *T* na palniku gazowym lub grzejniku elektrycznym. Uplwy ciepła z naczynia do otoczenia na jednostkę czasu wynosi *P*<sub>u</sub> (zakładamy dla uproszczenia, że jest stały). Sprawność grzejnika, tzn. stosunek ciepła przekazanego naczyniu do ciepła wydzielonego przez grzejnik jest funkcją mocy *P* grzejnika

$$W(P) = a - bP,$$

gdzie *a*, *b* – dane stałe dodatnie. Jak należy wybrać moc grzejnika, aby zużyć najmniejszą ilość energii?

**127.** Autor otrzymał w przypadku a) maksymalną wartość prądu *I* = 4,1739 (w odpowiednich jednostkach, wynikających z przyjęcia jednostkowej siły elektromotorycznej ogniwa) dla baterii składającej się z dwóch zespołów połączonych szeregowo: pierwszy z dziewięciu połączonych równolegle zestawów po sześć ogniw szeregowo i drugi z ośmiu połączonych równolegle zestawów po dwa ogniwa szeregowo. Identyczna wartość prądu wystąpi dla połączonych równolegle sześciu zestawów po dziewięć ogniw szeregowo i dwóch zestawów po osiem ogniw szeregowo. W przypadku b) autor otrzymał prąd *I* = 2,955 dla połączonych równolegle czterech zestawów po dwanaście ogniw szeregowo i dwóch zestawów po jedenaście ogniw szeregowo.

Wskazówką, jak szukać optymalnego obwodu, jest potraktowanie liczby połączeń równoległych *x* i szeregowych *y* jako zmiennych ciągłych, tak że bateria ma siłę elektromotoryczną *y* i opór wewnętrzny  $\frac{y}{x}R_w$  (gdzie *R*<sub>w</sub> – opór wewnętrzny pojedynczego ogniwa). Prąd jest zatem równy

$$I = \frac{y}{R + \frac{y}{x}R_w},$$

a jego maksymalną wartość przy warunku *xy* = *N* = const można znaleźć przez różniczkowanie. Otrzymuje się  $x = \sqrt{\frac{NR_w}{R}}$ ,  $y = \sqrt{\frac{NR}{R_w}}$ . Nie będą to jednak na ogół liczby całkowite, więc nie obejdzie się bez „kombinowania”.

**128.** Oznaczmy czas ogrzewania przez *t*. W ciągu tego czasu dopływ ciepła z grzejnika do naczynia jest równy *PW*(*P*)*t*, odpływ zaś *P*<sub>u</sub>*t*. Dopływ netto [*PW*(*P*) – *P*<sub>u</sub>]*t* przyrównujemy do wyrażenia  $\pi\Delta T$ , gdzie  $\Delta T = T - T_0$  – przyrost temperatury, a  $\pi$  – pojemność cieplna naczynia wraz z zawartością, tzn.  $\pi = m_{wody} \cdot c_{wody} + m_{naczynia} \cdot c_{naczynia}$ . Stąd wynika równanie

$$[PW(P) - P_u]t = \pi\Delta T.$$

Zużycie energii jest dane wyrażeniem

$$E = Pt = \frac{\pi P \Delta T}{PW(P) - P_u}.$$

Szukając minimum ze względu na *P* otrzymujemy równanie

$$P_u = -P^2 W'(P) = bP^2,$$

którego rozwiązaniem jest  $P = \sqrt{P_u/b}$ . Wynik ten można bez trudu uogólnić na przypadek, gdy upływ ciepła *P*<sub>u</sub> zmienia się zależnie od temperatury.





**Rozwiązanie zadania M 625.**  
Wstawmy 0 po dowolnej cyfrze dowolnej liczby z pierwszego ciągu (wstawiamy tylko jedno zero). Otrzymamy liczbę z drugiego ciągu. Ta operacja zadaje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między cyframi pierwszego ciągu i zerami drugiego.



**Rozwiązanie zadania M 626.** Mamy  
 $a_{k+10} = a_{k+9} + a_{k+8} =$   
 $= a_{k+8} + a_{k+7} + a_{k+6} + a_{k+7} =$   
 $= a_{k+8} + a_{k+7} + a_{k+6} + a_{k+5} + a_{k+6} =$   
 $= \dots =$   
 $= a_{k+8} + a_{k+7} + \dots + a_{k+1} + a_{k+2} =$   
 $= S + a_{k+2},$   
 gdzie  $S = a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{k+8}$ .  
 Stąd otrzymujemy  
 $a_{k+9} = a_{k+8} + a_{k+7} < S <$   
 $< S + a_{k+2} = a_{k+10}$ . Tym samym  $S$   
 nie należy do ciągu Fibonacciego.



**Rozwiązanie zadania M 627.**  
Wybermy układ współrzędnych o początku w środku symetrii wielościanu  $W$ . Niech  $a$  będzie takim wektorem przesunięcia, że  $W' = W + a$  ma punkt wspólny z  $W$ . Biorąc  $b \in W \cap W'$  otrzymujemy wniosek, że  $b - a \in W$ . Ze względu na symetrię  $W$  również  $a - b \in W$ , a ze względu na wypukłość  $W$  środek  $b$  i  $a - b$ , czyli  $\frac{b + (a - b)}{2} = \frac{a}{2}$ , należy do  $W$ . Korzystając jeszcze raz z wypukłości, dla dowolnego punktu  $c \in W$  mamy

$$d = \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} + \frac{1}{3} \cdot c \right) \in W.$$

Zauważmy, że  $c + a \in W'$ , ale  $3d = c + a$ , z czego wynika, że  $c + a$  należy do obrazu jednokładnego  $W$  (względem początku układu) o skali 3. Objętość tego obrazu jest 27 razy większa od objętości  $W$ . Zatem wszystkie obrazy  $W'$  wielościanu  $W$  w takich przesunięciach, że przecięcie  $W$  i  $W'$  jest niepuste, mieszczą się w tym obrazie jednokładnym  $W$ . Stąd, jeśli  $W, W_1, W_2, \dots, W_n$  mają rozłączne wnętrza, to  $n \leq 26$  (bo objętość każdego z tych wielościanów jest taka sama). Liczby 26 nie można zmniejszyć, na co wskazuje przykład z sześcianem.

Dawno temu ludzie z warstwy, która w Europie Wschodniej zwana jest inteligencją, mieli chyba niesłuchanie wiele wolnego czasu. Zastanawiali się nad wieloma zupełnie niepraktycznymi problemami, a wśród nich nad pytaniem, jakim pojęciem przysługuje atrybut istnienia. Zastanawiali się tak głęboko, że niejednokrotnie zaczęli wypowiadać poglądy wręcz patologiczne. I tak np. George Berkeley uważał, iż wszystko, co postrzegamy, złudą jeno być może i nie ma pewności, czy istnieje bez postrzegającego (a było to nie tak dawno temu, bo na początku XVIII wieku). Ale i ci, którzy nie wątpili w istnienie deszczu, gdy ten lał im się na głowę, i parasola, który chronił ich przed zamoczeniem, umieli zadawać sobie i innym pytania o istnienie, które wprawiały w pomieszenie.

Nie próbując śledzić rozwoju filozoficznego sporu spróbujmy odpowiedzieć na pytanie o istnienie miłości, pierwiastka z minus jedności, klasy robotniczej i, powiedzmy, zbioru. Każde z tych pojęć (wymieniłem je w kolejności, w jakiej – chyba – pojawiły się na świecie) ma obfitą literaturę na swój temat. Żadne z nich nie poddaje się weryfikacji eksperymentalnej. Istnienie każdego z nich było zdecydowanie kwestionowane, choć fakt, że się o nich od czasu do czasu mówi, nie jest odbierany jako bredzenie.

Pierwiastek z minus jedności (żeby zająć się czymś matematycznym) powstał z racji rozwiązywania równań stopnia trzeciego. Takie równania mają tę przyjemną cechę, że (jako nieparzystego stopnia) zawsze mają pierwiastek rzeczywisty. Nie zawsze jednak istnieje algorytmiczna droga do tego pierwiastka, przebiegająca w obrębie liczb rzeczywistych (nie istnieje, gdy pierwiastków rzeczywistych jest trzy – nazywa się to *casus irreducibilis*). Droga taka biegnie wtedy opłotkami, które zwą się liczbami zespolonymi, a prawie każda z tych liczb jest blisko z omawianym pierwiastkiem z minus jedności spokrewniona. Cardano, jeden z twórców algorytmu rozwiązywania równań stopnia trzeciego, sytuację opisywał bardzo klarownie: umysł nie jest obowiązany trzymać się ziemi; może on pozwolić sobie na hiperbolę, gdzie (przebywając na niedosiężnych dla profanów wyżynach) rozwikła to, co na ziemi rozwikłane być nie może, a potem (już z wynikiem) na ziemię powróci.

Istnienie liczb zespolonych kwestionowali nawet ci, którzy przyczyniali się do ich rozwoju. Np. Euler w *Algebrze* (1770), która jest podręcznikiem teorii liczb zespolonych, pisze: *Pierwiastki kwadratowe z liczb ujemnych nie są zerem, ani nie są ujemne, ani dodatnie. Stąd wynika, że pierwiastki te nie mogą się znajdować wśród możliwych liczb. W konsekwencji są to niemożliwe liczby. I tak dochodzimy do pojęcia liczb na ogół zwanych urojonymi, albo wyobraźalnymi, dlatego że istnieją one tylko w wyobraźni.* Dla matematyków liczby zespolone (a wśród nich i pierwiastek z minus jedności) zaczęły istnieć **naprawdę** w 1799 roku, kiedy to Gauss (w swojej pracy doktorskiej) udowodnił tzw. podstawowe twierdzenie algebry orzekające, że każdy wielomian o współczynnikach zespolonych ma zespolony pierwiastek – liczby o tak pięknej własności były zbyt pociągające, aby nie istnieć. Później, w latach 30. XIX wieku Hamilton wskazał, jak mówić o liczbach zespolonych tak, by o żadnych pierwiastkach z liczb ujemnych nie wspominać.

Warto zwrócić uwagę, że pytanie o istnienie można sensownie i bez klarownej odpowiedzi odnieść do większości pojęć matematyki. Czy faktycznie istnieje *długość bez szerokości*, czyli linia (mniejsza już o to: prosta czy nie)? A przecież oczywistość jej istnienia jest tak wielka, że nawet filozof zastanowi się chwilę, czy wypada zadać pytanie o istnienie linii np. prostych.

Właśnie, w tej oczywistości mieści się chyba jedyna sensowna odpowiedź na pytanie o istnienie różnych pojęć. Kartezjusz na pytanie o Boga odpowiedział: *Bóg istnieje, bo nie można sobie wyobrazić, by było inaczej.* Później wyobrażenia ludzka stała się istotnie większa i wszystko już wyobrazić sobie było można. I wtedy stanęliśmy przed koniecznością zdecydowania się na opinię Pirandella: *jest tak, jak nam się zdaje.*

A w ten, jakże słuszny sposób, każdy może rozstrzygnąć problem, czy istnieje linia prosta, miłość, pierwiastek z minus jedności, klasa robotnicza, zbiór, Bóg i Bóg wie co jeszcze. Wymaga to jednak czegoś, od czego nawet filozofowie często uciekają – podjęcia na własną odpowiedzialność decyzji jak, mianowicie, nam się zdaje.



## Historia reguły de l'Hospitala

Ostatni numer *EPSILONA* niemal w całości poświęcony był regule de l'Hospitala. Chyląc czoła przed siłą tego twierdzenia, protestowaliśmy przeciwko jego niewłaściwemu oraz przesadnemu stosowaniu. Dziś jeszcze raz zajmujemy się tą regułą, ale w nieco innym aspekcie.

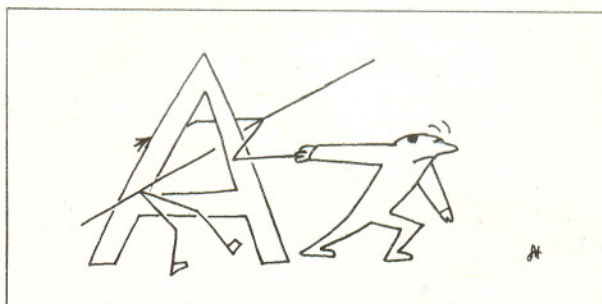
Markiz Guillaume François Antoine de l'Hospital uznany jest za autora pierwszego wydrukowanego podręcznika rachunku różniczkowego. Książka ta ukazała się w 1696 roku pod tytułem *Analysé des infiniment petits* (*Analiza nieskończenie małych*). Znalazło się w niej wiele ważnych i nowych twierdzeń, w szczególności metoda obliczania granic pewnych symboli nieoznaczonych, dziś znana jako reguła de l'Hospitala. Czy jednak ten, który ogłosił regułę w podręczniku, był także jej twórcą?

Pretensje do autorstwa twierdzenia zgłosił młodszy z braci Bernoullich, Johann. Powoływał się on na swój list do de l'Hospitala z 1694 roku; tam Bernoulli udzielił odpowiedzi na pytanie, jak można postępować w sytuacji, gdy przy obliczaniu granicy pojawia się symbol nieoznaczony typu  $\frac{0}{0}$ .

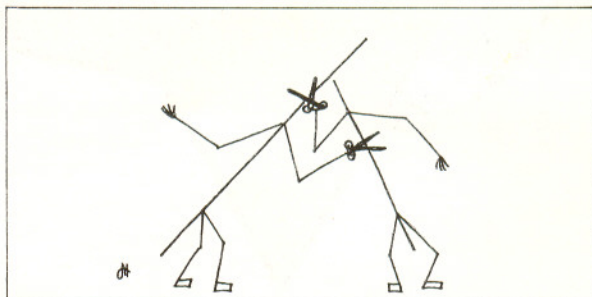
Przyjrzyjmy się tej historii bliżej. Johann Bernoulli pełnił rolę prywatnego wykładowcy i nauczyciela matematyki markiza de l'Hospitala. W zamian za prywatne lekcje – wykłady z rachunku różniczkowego (pierwsze w historii) otrzymywał stałą, dość pokaźną, pensję. Podobno wynagrodzenie miało być jeszcze wyższe, gdy Bernoulli zdecydował się na pewne dodatkowe warunki: kopie wykładów nie miały być nikomu udostępniane – z wyjątkiem, oczywiście, de l'Hospitala, a związane z przygotowaniem wykładów nowe przemyślenia i twierdzenia miały być przekazywane również tylko de l'Hospitalowi; ponadto Bernoulli był zobowiązany do rozwiązywania problemów stawianych przez „uczniar” i, naturalnie, do zachowania rozwiązań w tajemnicy. Cicha umowa utrzymała się do momentu ukazania się *Analizy nieskończenie małych*. Wtedy to Bernoulli postanowił dochodzić swoich praw do wielu rezultatów umieszczonych w książce. Sam, w listach do Leibniza pisał, iż de l'Hospital jest autorem zaledwie kilku stron podręcznika, reszta to wykłady, które przekazał markizowi także na piśmie. Bardziej zdecydowanie o uznanie swego autorstwa Bernoulli zaczął się ubiegać po śmierci de l'Hospitala.

Dodajmy, że Johann Bernoulli miał dość trudny charakter; znane są jego sprzeczki i nieporozumienia z bratem Jacobem i synem Danielem, Newtonem i całą szkołą angielską...

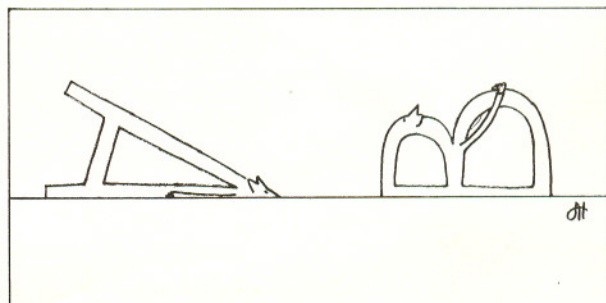
## Wizualizacja Matematyki



Prowadzimy prostą przez A.



Proste się przecinają.



A i B leżą na prostej.

*EPSILON* dziękuje Zbigniewowi Marciniakowi za inspirację działu „Wizualizacja Matematyki”

Przy wielu rezultatach matematycznych figuruje dziś nazwisko *Bernoulli*. We wszystkich jednak przypadkach dotyczy ono starszego z braci, Jacoba. Johann natomiast miał wyjątkowego pecha; jego wyniki (a było ich немало) przypisano, wprowadzając nazewnictwo, innym matematykom, lub pozostawiono bez nazwy. W szczególności, wracając do twierdzenia ułatwiającego badanie symboli nieoznaczonych, powinniśmy chyba dziś mówić: „reguła Bernoulliego-de l'Hospitala”, ale przyzwyczajenia bardzo trudno przełamać.

W zbiorze zadań z analizy matematycznej pod redakcją B. Demidowicza twierdzenie figuruje jako „reguła l'Hospitala-Bernoulliego”

Krzysztof CIESIELSKI, Zdzisław POGODA