delta

UWAGA !!!

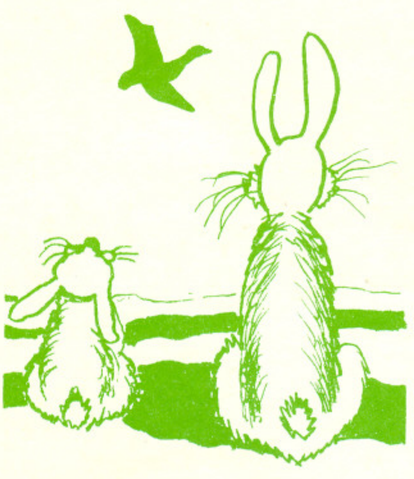
w prenumeracie *Delta* tańsza

SPIS TREŚCI

NUMERU 2(213)

W następnym numerze:

Ile waży neutrino?



„Delta”
matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej

Adres Redakcji:
Wydział Fizyki UW
ul. Smyczkowa 5/7
02-678 Warszawa
tel. 43-02-43 wewn. 21

Adres poczty komputerowej
(E-mail address):
DELTA@PLEARN.BITNET

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa

Nakład 10 000 egz.
Wydrukowano
w Zakładach Graficznych
w Warszawie, ul. Srebrna 16

Skład systemem TEX
wykonała redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na III kwartał 1992 r. wynosi 12 000,– zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
   - oddziały RSW właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora – odbioru zamówionych egzemplarzy dokonuje prenumerator w wyznaczonych punktach sprzedaży lub w inny, uzgodniony sposób,
   - urzędy pocztowe i listonosze – od prenumeratorów z terenów wiejskich lub innych miejscowości, w których nie ma oddziałów RSW, a w miastach tylko od osób niepełnosprawnych – poczta zapewnia dostawę zamówionych egzemplarzy pod wskazany adres pod warunkiem uiszczenia dodatkowej opłaty za każdy doręczany egzemplarz – opłata wynosi 500,– zł od egzemplarza,
   - Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – tylko od prenumeratorów zlecających dostawę za granicę.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
   - na kraj – do 20 XI na I kwartał roku następnego
     do 20 II na II kwartał
     do 20 V na III kwartał
     do 20 VIII na IV kwartał
   - na zagranicę – do 31 X na I kwartał
     oraz do 1 dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarza zł 5 000,–

Jak nie świecą gwiazdy?

Tomasz KWAST

Gwiazdy, a więc i Słońce, świecą dzięki zachodzącym w ich wnętrzach reakcjom termojądrowym. Kto o tym słyszał, tak się prawdopodobnie do tego faktu przyzwyczaił, że nie wyobraża sobie, iż kiedyś można było przypuszczać co innego. Zrozumiałe byłoby, gdyby przed odkryciem przemian jądrowych astronomowie nie mieli żadnego poglądu na przyczyny świecenia gwiazd. Tymczasem rozważane były różne hipotezy, może naiwne z dzisiejszego punktu widzenia, a odrzucenie przedostatniej – robiącej podówczas wrażenie całkiem dobrej – nastąpiło dzięki osiągnięciom wcale nie astronomów.

Aby móc zrozumieć, co dzieje się na Słońcu, musimy wpierw zdobyć przekonanie, że prawidłowo znamy jego odległość od Ziemi; od tej odległości wszystko dalej zależy. Otóż znając prawa ruchu planet można uprawiać mechanikę nieba nie znając żadnych odległości – wystarczy znać stosunki odległości. W mechanice nieba za jednostkę odległości przyjmuje się średnią odległość Ziemi od Słońca i nie trzeba się troszczyć, ile to jest metrów. Jest to jednak ważne, gdy chcemy poznać fizyczne warunki na Słońcu. Wystarczy więc zmierzyć w metrach jakąkolwiek odległość jakiejkolwiek planety czy planetoidy od Ziemi – np. dziś radarowo. I tak nieco okrężnymi drogami stwierdzono, że do Słońca jest $r = 1,5 \times 10^{11}$ m – jest to tzw. jednostka astronomiczna (j.a.). Promień Słońca otrzymujemy już natychmiast; wynosi on tyle, co iloczyn odległości i promienia kątowego tarczy Słońca. Wynik brzmi: $R = 6,96 \times 10^{8}$ m.

Następny krok to zorientowanie się, jaka jest moc i temperatura Słońca. Potrzebny jest tu następny pomiar: ilość energii padającej prostopadle na jednostkę powierzchni Ziemi w ciągu sekundy. Mniejsza o szczegóły techniczne – pomiar tej tzw. stałej słonecznej jest wykonalny rozmaitymi metodami i daje wynik $S = 1,36$ kW/m^2. Ilość energii przenikającej przez sferę o promieniu 1 j.a. jest równa ilości energii przenikającej przez powierzchnię Słońca, czyli przez sferę o promieniu R – jest to bowiem ten sam strumień energii. Pełna moc Słońca wynosi więc

$$L = 4\pi r^2 S = 3,82 \times 10^{26}\ \mathrm{W},$$

a jego powierzchnia promieniuje z natężeniem

$$F = \frac{L}{4\pi R^2} = 6,28 \times 10^{7}\ \mathrm{W/m^2}.$$

Wreszcie temperaturę mamy z prawa Stefana-Boltzmanna, głoszącego, że $F = \sigma T^4$, gdzie $\sigma = 5,67 \times 10^{-8}$ W/m^{2}K^4. Łatwo więc dostajemy temperaturę powierzchni Słońca $T = 5770$ K.

W takiej temperaturze wszelkie substancje istnieją tylko w stanie gazowym (no, chyba że rzecz się dzieje na gwieździe neutronowej!), a przyczyna tej temperatury, czyli źródło energii może, w zasadzie, być na powierzchni lub we wnętrzu Słońca. Rozpatrzmy wpierw pierwszą możliwość. Pomysł, że Słońce może jest płonącą bryłą węgla czy innego paliwa chemicznego, jest wręcz żenujący. Skąd tlen w przestrzeni kosmicznej? Gdzie produkty spalania? Ponadto spalanie węgla nie daje tak wysokiej temperatury. Wreszcie Czytelnik sam może obliczyć, że bryła węgla o masie Słońca spaliłaby się (gdyby płonęła z mocą L) w kilka tysięcy lat. A skąd znamy masę Słońca $M = 1,989 \times 10^{30}$ kg?

Liczby Fibonacciego

Piotr CHRZĄSTOWSKI

Kiedy Leonardo Bonacci z Pizy, zwany Fibonaccim, opublikował w 1202 roku swoją słynną książkę *Liber abaci* stanowiącą kompendium z algebry na znakomitym jak na ówczesną Europę poziomie, nie przypuszczał zapewne, że liczby, które wprowadził dla rozwiązania jednego z zadań, zostaną nazwane jego imieniem. Tym bardziej chyba nie przypuszczał, że blisko 800 lat później będą często używane w informatyce, gdzie wystąpią przy analizie wielu algorytmów, a także przy konstrukcji efektywnych typów danych.

Oryginalne zadanie, które Fibonacci rozważał, dotyczyło rozmnażania się królików. Chodziło mianowicie o określenie, ile par królików będzie liczyła po 12 miesiącach populacja zaczęta przez jedną parę, przy założeniu, że po urodzeniu każda para królików dojrzewa przez pierwszy miesiąc, a począwszy od drugiego wydaje na świat potomstwo co miesiąc (przyjmuje się przy tym, że każda para jednorazowo płodzi jedną parę królicząt). Przy tych założeniach rozumowanie Fibonacciego przebiegało następująco:

Ponieważ pierwsza para w pierwszym miesiącu daje jako potomstwo parę, więc w tym miesiącu będą dwie pary; z nich jedna para, a mianowicie pierwsza, rodzi również w następnym miesiącu, więc w drugim miesiącu będą 3 pary; z nich w następnym miesiącu będą dawały potomstwo dwie pary, a więc w trzecim miesiącu urodzą się jeszcze dwie pary królików i liczba par królików w tym miesiącu osiągnie wartość 5...

Dalej analogiczny wywód ciągnie się aż do dwunastego miesiąca, aby po kilku dodawaniach dojść do liczby 377, będącej końcowym wynikiem. Idea wywodu daje się streścić następująco:

W pierwszym miesiącu mamy dwie pary, w drugim – trzy. Chcąc uzyskać liczbę par królików w miesiącu $n+2$ powinniśmy do ich liczby z miesiąca $n+1$ dodać te, które istniały w miesiącu n i wydały właśnie na świat kolejne (być może pierwsze) młode.

Załóżmy, zgodnie z tradycją oznaczania liczb Fibonacciego (a niezgodnie z oryginałem), że zarówno pierwsza, jak i druga liczba Fibonacciego są jedynkami (tak jak gdyby w pierwszym miesiącu macierzysta para powstała, a w drugim – jeszcze dojrzewała). Definiujemy zatem

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1,$$
$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \quad \text{dla} \quad n \geq 1\,.$$

Kolejne liczby, uzyskane bezpośrednio z definicji, to

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}...
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233...

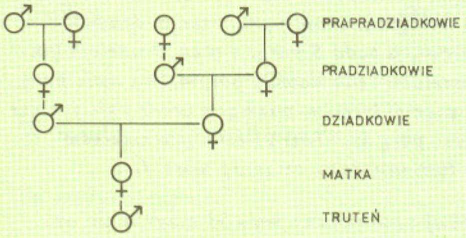
Pomysł doprawdy ciekawy: zamiast podać wynik zadania, podaje się jedynie sposób, w jaki każdy może do niego dojść. Czy można uznać to zadanie za rozwiązane?

Jeżeli mamy ochotę odrzucić tego typu „algorytmiczne" rozwiązania, to zdajmy sobie sprawę, że w wielu przypadkach trudno jest inaczej zaatakować problem, niż w taki, rekurencyjny, sposób, w jaki zrobił to Fibonacci.

Przykładowo rozważmy trzy takie problemy:

Problem 1.
Ile $\underbrace{\textit{pra-pra-...pra-}}_{n}$ *dziadków i babć ma pszczeli truteń?*

Trzeba, oczywiście, wiedzieć, że u pszczół trutnie mają tylko matkę – królową, powstają bez udziału ojca, podczas gdy królowe mają już dwoje rodziców – inną królową i trutnia. Drzewo genealogiczne trutnia wygląda więc tak:



Niech T_n oznacza liczbę n-praprzodków. Widzimy już, że na poziomie pierwszych pradziadków truteń ma dwie prababcie i jednego pradziadka, łącznie troje; piętro wyżej – na poziomie drugich pradziadków – pięcioro: trzy praprababcie i dwóch prapradziadków. Ogólnie na poziomie n-tych pradziadków ma dokładnie T_{n-1} n-prababć oraz T_{n-2} n-pradziadków – łącznie $T_n = T_{n-1} + T_{n-2}$ n-praprzodków. Otrzymaliśmy zatem

Oczywiście, z trzeciego prawa Keplera: $\dfrac{T^2}{r^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM}$, gdzie T jest okresem obiegu Ziemi wokół Słońca (czyli po prostu rokiem gwiazdowym), a stała grawitacji G jest znana z pomiarów fizycznych. Tak więc hipoteza „węglowa" prowadzi natychmiast do wielu sprzeczności; odrzucamy również inną, zgodnie z którą energia Słońca byłaby energią spadających na nie meteorytów. Gdyby bowiem meteoryty spadały na Słońce z prędkością rzędu prędkości ucieczki $v = \sqrt{2GM/R}$, to dla zapewnienia obserwowanej mocy musiałyby te meteoryty spadać w tempie

$$\dot{m} = \frac{2L}{v^2} = \frac{LR}{GM} = 2 \times 10^{15}\ \mathrm{kg/s}\,.$$

Pod takim samym ostrzałem znajdowałaby się też Ziemia, a musiałoby na nią spadać meteorytów w przybliżeniu 10^4 razy mniej, tyle razy bowiem powierzchnia Ziemi jest mniejsza od powierzchni Słońca. Tymczasem szacuje się, że na Ziemię spada około 10^5 kg materii meteorowej dziennie, czyli w przybliżeniu 1 kg/s zamiast 2×10^{11}. Rozbieżność zbyt wielka.

Zajmijmy się więc drugą możliwością: źródło energii Słońca tkwi w jego wnętrzu. W połowie XIX w. Helmholtz wysunął hipotezę, że Słońce czerpie swą energię z kurczenia się, tzn. jego promieniowanie jest przetworzoną energią grawitacyjną. Energia ta, wyzwolona przy skurczeniu się Słońca do obecnej postaci wynosi GM^2/R razy pewien czynnik zależny od szczegółów budowy wewnętrznej. Drogą dość drobiazgowych rozważań można wykazać, że czynnik ten niezbyt różni się od jedności dla każdej zwyczajnej gwiazdy. Łatwo zatem obliczyć, że Słońce, świecąc według tego mechanizmu i z taką mocą jak obecnie, powinno mieć w przybliżeniu $(GM^2/R) : L = 10^{15}$ s $= 32$ mln lat. W czasach Helmholtza czas ten wydawał się już bardzo długi, a jednak i tę hipotezę trzeba było odrzucić. Mianowicie, oceny wieku Ziemi zarówno na podstawie pomiarów promieniotwórczości skał, jak i tempa przemian geologicznych zaczęły o rzędy wielkości przekraczać dziesiątki milionów lat. Dziś wiemy, że zapadanie się gwiazdy bywa źródłem jej energii, ale albo w bardzo wczesnym etapie jej życia (gdy zapada się jeszcze obłok, z którego gwiazda powstaje), albo w bardzo późnym (gdy gwałtownie zapada się jej gęste jądro, czyli eksploduje supernowa).

Rozwiązanie problemu nastąpiło dopiero po odkryciu przemian jądrowych. W latach czterdziestych naszego stulecia Hans Albrecht Bethe zaproponował mechanizm produkcji energii w gwiazdach w wyniku łączenia się jąder wodorowych w jądra helu. Hipoteza ta jest nie do obalenia do dziś, a nawet przeciwnie – jest już porządnie ugruntowaną teorią, uhonorowaną Nagrodą Nobla.

A idea jest prosta. Spojrzawszy do dowolnych tablic fizycznych każdy stwierdzi, że jądro atomu helu jest nieco lżejsze od czterech protonów, niedużo, zaledwie o 0,0285 jednostki masy atomowej. Jednak właśnie ten ubytek masy pomnożony przez kwadrat prędkości światła daje 26,72 MeV, a to pomnożone przez jakąś fantastyczną liczbę reakcji zachodzących w Słońcu w ciągu sekundy daje obliczone przez nas L. Jak widać, ubywa 0,0071 masy w każdej reakcji i gdyby czysto wodorowe Słońce zużyło ten wodór doszczętnie, to też tyle straciłoby na masie. A przy obecnej mocy starczyłoby tego paliwa na $0,0071Mc^2/L = 3,3 \times 10^{18}$ s $= 10^{11}$ lat. Jest to ocena, oczywiście, zawyżona, niechby nawet o rząd wielkości, i tak pozostanie nam świadomość, że tym razem znaleźliśmy jakąś cząstkę prawdy o Wszechświecie.

System reprezentantów, czyli rzecz o tłumaczach, komisjach itp.

Przemysław GRZEGORZEWSKI

Polska firma translatorska świadcząca usługi w zakresie tłumaczeń kabinowych z polskiego na angielski, francuski, hiszpański i niemiecki otrzymała zlecenie na obsługę międzynarodowej konferencji. Każda osoba zatrudniona w tej firmie zna co najmniej jeden język obcy. Interesuje nas odpowiedź na pytanie, kiedy firma ta może przyjąć zlecenie, tzn. czy istnieje taki sposób doboru tłumaczy, którymi dysponuje firma, aby zapewniona była jednoczesna obsługa wymaganych języków.

Rozpatrzmy inny przykład, tzw. problem komisji. Otóż w pewnej instytucji (np. sejmie) działa kilka komisji, przy czym członkowie owej instytucji (posłowie) mogą należeć do kilku komisji jednocześnie. Nasuwa się pytanie, czy w tej sytuacji jest możliwe wybranie przewodniczących każdej komisji w taki sposób, aby każda komisja miała innego przewodniczącego.

Te dwa przykłady są ilustracją matematycznego problemu znanego pod nazwą wyboru systemu reprezentantów.

Weźmy pod uwagę ciąg $X_1, X_2, \ldots, X_n$ podzbiorów pewnego skończonego zbioru Z (podzbiory te są, być może, równe). Systemem reprezentantów dla ciągu $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nazywamy taki ciąg $x_1, x_2, \ldots, x_n$ parami różnych elementów, że $x_i \in X_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Szukamy odpowiedzi na pytanie, czy dla danego ciągu zbiorów $X_1, X_2, \ldots, X_n$ istnieje system reprezentantów, innymi słowy, czy z każdego zbioru X_i można wybrać po jednym elemencie w taki sposób, by były one parami różne. Jeszcze inaczej, interesuje nas, czy istnieje taka różnowartościowa funkcja $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \bigcup_{i=1}^{n} X_i$, że $f(i) = x_i \in X_i$. System reprezentantów będziemy oznaczali przez $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$.

Przeanalizujemy to zagadnienie na przykładzie wspomnianego na wstępie problemu tłumaczeń. Niech $Z = \{A, B, C, D\}$ oznacza zbiór zatrudnionych w firmie tłumaczy. Niech X_1 oznacza zbiór tych osób, ze zbioru Z, które znają język angielski, X_2 tych, które znają francuski, X_3 – hiszpański, X_4 – niemiecki.

a) Załóżmy, że $X_1 = \{A, B, C, D\}$, $X_2 = \{A, D\}$, $X_3 = \{C\}$, $X_4 = \{C, D\}$. W tym przypadku, jak łatwo zauważyć, $\langle B, A, C, D \rangle$ jest poszukiwanym systemem reprezentantów (w terminach naszego przykładu osoba B powinna prowadzić tłumaczenie na język angielski, A – na francuski, C – na hiszpański, a D – na niemiecki). Zatem dla danego ciągu zbiorów istnieje rozwiązanie i jest ono jedyne (firma może przyjąć zlecenie).

identyczne równanie rekurencyjne, jak w przypadku królików. Pozostaje określić warunki początkowe: $T_0 = 2$ (przyjmujemy dziadków za 0-pradziadków), $T_1 = 3$ i jasne jest, że ogólnie zachodzi po prostu $T_n = F_{n+3}$.

Problem 2.
Elfy skacząc po schodach czasami przeskakują po dwa schodki. Na ile sposobów może elf wskoczyć na n schodów?

Tym razem od razu poddamy się i zaczniemy rozumowanie indukcyjne. Oznaczmy przez E_n liczbę sposobów, za pomocą których elf może wskoczyć na n schodów. Aby wskoczyć na n-ty schodek, elf musi to zrobić ze schodka $n-1$ lub $n-2$. W związku z tym $E_n = E_{n-1} + E_{n-2}$. Zauważając jeszcze, że $E_1 = 1$, $E_2 = 2$ dostaniemy oczywistą odpowiedź, że $E_n = F_{n+1}$.

Problem 3.
Ile jest eleganckich sposobów posadzenia łącznie n pań i panów na podłużnej ławie. Eleganckich, czyli takich, aby żadne dwie panie nie siedziały obok siebie (interesują nas jedynie różne wzajemne rozmieszczenia pań i panów, to znaczy interesuje nas tylko, które miejsca są zajęte przez panie, a które przez panów).

Widać, że jeżeli mamy do dyspozycji samych panów, to możemy ich posadzić na jeden sposób. Jedną panią z $n-1$ panami można posadzić na n sposobów. Z dwiema już będzie trochę kłopotu. Z trzema – tym bardziej. Łatwo zauważyć, że pań nie może być więcej niż $\lceil n/2 \rceil$ ($\lceil x \rceil$ – najmniejsza liczba całkowita większa lub równa x).

Rekurencja ze względu na liczbę pań przy ustalonym n jest trudna do wyprowadzenia. Zastanówmy się jednak, czy nie dałoby się przeprowadzić rozumowania rekurencyjnego ze względu na n?

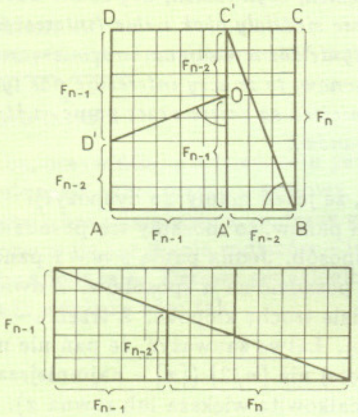
Oznaczmy przez S_n liczbę takich n-posadzeń, że żadne dwie panie nie siedzą obok siebie i załóżmy, że znamy S_k dla wszystkich $k < n$. Zliczając wszystkie n-posadzenia musimy zdecydować, czy na n-tym miejscu będzie siedziała pani, czy też pan. Jeżeli pani, to na $n-1$ miejscu musi siedzieć pan, a na pierwszych $n-2$ miejscach możemy posadzić dowolny z S_{n-2} układów. Jeżeli pan, to ze względu na to, że pan na n-tym miejscu nie czyni żadnego kłopotu, widzimy, że na pierwszych $n-1$ miejscach możemy użyć dowolny z S_{n-1} układów. Łącznie, oczywiście, znowu uzyskujemy $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$. A ponieważ $S_1 = 2$ i $S_2 = 3$, więc $S_n = F_{n+2}$.

Jeżeli Czytelnik odniósł wrażenie, że każde rozumowanie rekurencyjne daje w wyniku liczby Fibonacciego, to pragnę go uspokoić, że nie jest aż tak dobrze. Wystarczy nieco zmienić każdy z tych trzech problemów (np. dopuścić, aby elfy skakały także po trzy schodki, albo rozważyć posadzenia przy okrągłym stole), aby nie tylko warunki początkowe, ale i same równania wyszły inne.

Z liczbami Fibonacciego niewiele działo się przez parę wieków i oto francuski astronom Jean Dominique Cassini (ten od szczeliny w pierścieniach Saturna) udowodnił w 1660 roku bodaj pierwsze twierdzenie o liczbach Fibonacciego:

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n .$$

Tożsamość Cassiniego była podstawą do skonstruowania ulubionego przez Lewisa Carrolla paradoksu o rozcięciu kwadratu.



Jeżeli kwadrat o boku $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ jednostek (w oryginale Carrolla $n = 6$) rozetniemy wzdłuż zaznaczonych linii i ułożymy z uzyskanych części „prostokąt" – tak jak na rysunku, to zyskamy (dla n parzystych) lub zgubimy (dla n nieparzystych) jeden mały kwadracik. W przykładzie z rysunku pole kwadratu wynosi $F_6^2 = 64$, pole zaś „prostokąta": $F_7 \cdot F_5 = 65$, mimo iż „prostokąt" zbudowaliśmy z tych samych figur. Rzecz jasna, wyjaśnienie tego paradoksu leży w tym, że w wyniku podanej konstrukcji kąty $A'BC'$ oraz $A'OD'$ nie są równe. W rzeczywistości więc „prostokąt" będzie miał równoległobokową dziurę (o polu 1). A ponieważ, jak wynika z tożsamości Cassiniego, kąty $A'BC'$ oraz $A'OD'$ różnią się bardzo niewiele, więc ta równoległobokowa dziura będzie bardzo wąska – praktycznie niezauważalna.

b) Jednakże dla innego ciągu zbiorów (innego rozkładu znajomości języków wśród pracowników firmy), np. dla $X_1 = \{A, B, C, D\}$, $X_2 = \{D\}$, $X_3 = \{C\}$, $X_4 = \{C, D\}$ nie istnieje system reprezentantów.

c) Z kolei może się zdarzyć, że dla pewnego ciągu zbiorów istnieje więcej niż jeden system reprezentantów. Na przykład dla $X_1 = \{B, C, D\}$, $X_2 = \{A, D\}$, $X_3 = \{C\}$, $X_4 = \{A, C, D\}$ mamy dokładnie dwa systemy reprezentantów: $\langle B, A, C, D\rangle$ i $\langle B, D, C, A\rangle$.

Widzimy więc, że istnienie systemu reprezentantów zależy od ciągu rozpatrywanych zbiorów. Warunki, jakie musi spełniać ów ciąg, aby istniał dlań system reprezentantów, określa następujące twierdzenie Philipa Halla.

Twierdzenie.
Na to, aby ciąg zbiorów skończonych $X_1, X_2, \ldots, X_n$ miał system reprezentantów, potrzeba i wystarcza, aby dla każdego zbioru indeksów $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ spełniony był następujący warunek (warunek Halla):

$$\left|\bigcup_{i\in I} X_i\right| \geq |I|$$

($|X|$ oznacza liczbę elementów zbioru X).

Zauważmy, że w sytuacji b), dla której nie istniał system reprezentantów, warunek Halla nie był spełniony, bo

$$|X_2 \cup X_3 \cup X_4| = 2 < |\{2, 3, 4\}| = 3 .$$

Naturalne staje się obecnie pytanie o możliwość ewentualnych uogólnień powyższego twierdzenia. Otóż istnieje taka „nieskończona" wersja twierdzenia Halla, mianowicie:

Dowolna indeksowana rodzina zbiorów skończonych $(X_t)_{t\in T}$ ma system reprezentantów wtedy i tylko wtedy, gdy każda jej skończona podrodzina $(X_i)_{i\in I}$, gdzie I jest skończonym podzbiorem T, spełnia warunek Halla.

Powyższe twierdzenie przestaje, niestety, być prawdziwe, gdy choć jeden ze zbiorów X_t jest nieskończony. Nie znamy także żadnych warunków koniecznych i dostatecznych na istnienie systemu reprezentantów dla dowolnej rodziny zbiorów.

Twierdzenie Halla określając warunki istnienia systemu reprezentantów odpowiada w zasadzie na postawiony przez nas problem. Jest to twierdzenie ważne, a zarazem piękne dzięki swojej prostocie. Nie ma ono jednak większego znaczenia z algorytmicznego punktu widzenia, bowiem sprawdzenie warunku Halla wymaga rozważenia wszystkich 2^n możliwych podzbiorów zbioru indeksów $\{1, 2, \ldots, n\}$. Twierdzenie to jest nieefektywne, tzn. mówi, przy jakich założeniach istnieje system reprezentantów, ale nie wskazuje sposobu jego wyznaczenia. Najszybszym znanym algorytmem konstruującym system reprezentantów dla danego ciągu zbiorów, o ile taki system istnieje, jest algorytm Hopcrofta-Karpa. Problem ten można również rozwiązać sprowadzając go do wyznaczenia maksymalnego przepływu zero-jedynkowego w odpowiedniej sieci (zainteresowanych odsyłam do literatury, tam też można znaleźć dowody przytoczonych twierdzeń).

Twierdzenie Halla ma jednakże znaczenie nie tylko poznawcze czy estetyczne. Jest ono użytecznym narzędziem wykorzystywanym w dowodzeniu innych ważnych twierdzeń. Takim klasycznym zastosowaniem uogólnionej wersji twierdzenia Halla jest dowód równoliczności baz przestrzeni liniowej, który zamieścimy na zakończenie.

Twierdzenie.
Niech L będzie przestrzenią liniową nad ciałem K, a X i Y dwiema bazami tej przestrzeni.
Bazy te są równoliczne, tzn. $|X| = |Y|$.
Dowód.
Każdy wektor $x \in X$ ma przedstawienie (jednoznaczne) postaci $\sum_{i=1}^{n} a_i y_i$, gdzie $y_i \in Y$, $a_i \in K$, $a_i \neq 0$. Oznaczmy przez Y_x te wektory z bazy Y, które występują w rozwinięciu wektora x względem bazy Y (tzn. $Y_x = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$). Okazuje się, że każda skończona podrodzina rodziny zbiorów $(Y_x)_{x \in X}$ spełnia warunek Halla. Gdyby tak bowiem nie było, to mielibyśmy $|Y_{x_1} \cup Y_{x_2} \cup \ldots \cup Y_{x_k}| < k$ dla pewnego ciągu $x_1, x_2, \ldots, x_k$, co oznaczałoby, że każdy spośród liniowo niezależnych wektorów $x_1, x_2, \ldots, x_k$ wyraża się jako kombinacja liniowa wektorów ze zbioru co najwyżej $k-1$-elementowego $Y_{x_1} \cup Y_{x_2} \cup \ldots \cup Y_{x_k}$, co jest, oczywiście, niemożliwe.
Istnieje zatem system reprezentantów dla rodziny $(Y_x)_{x \in X}$, czyli istnieje pewna różnowartościowa funkcja $f : X \to Y$. Wobec symetrii zagadnienia istnieje również różnowartościowa funkcja $g : Y \to X$. Zatem na mocy twierdzenia Cantora-Bernsteina $|X| = |Y|$.

c.b.d.o.

Literatura:
W. Lipski, *Kombinatoryka dla programistów*, WNT, Warszawa 1989.
W. Lipski, W. Marek, *Analiza kombinatoryczna*, PWN, Warszawa 1986.

Mówimy, że dwa zbiory A i B są równoliczne, jeżeli istnieje odwzorowanie $f : A \to B$ różnowartościowe i na. A więc każdy punkt a zbioru A został połączony w parę z dokładnie jednym punktem $f(a)$ zbioru B i każdy punkt b zbioru B został połączony z dokładnie jednym punktem $f^{-1}(b)$ zbioru A. Jeżeli zbiory A i B są skończone, to takie połączenie w pary jest możliwe jedynie w przypadku, gdy zbiory A i B mają tyle samo elementów. A więc pojęcie równoliczności jest uogólnieniem pojęcia równej liczby elementów na przypadek, gdy zbiory są dowolne – skończone lub nieskończone.

Twierdzenie Cantora-Bernsteina brzmi tak:

Jeśli zbiór A jest równoliczny z pewnym podzbiorem zbioru B, zbiór B zaś jest równoliczny z pewnym podzbiorem zbioru A, to zbiory A i B są równoliczne.

Intuicyjnie twierdzenie to jest oczywiste. Można je bowiem – używając języka obrazowego – przeformułować tak:
Jeśli zbiór A ma nie więcej elementów niż zbiór B, zbiór B zaś ma nie więcej elementów niż zbiór A, to zbiory A i B mają tyle samo elementów.

Kolejną ciekawą własnością liczb Fibonacciego jest istnienie granicy $\lim_{n\to\infty} F_{n+1}/F_n$. Granica ta wynosi $\phi = (\sqrt{5}+1)/2$, zbieżność zaś jest bardzo szybka. Liczba ϕ sama w sobie kryje wiele tajemnic, m.in. wyraża tzw. złoty stosunek dający miłe dla oka proporcje kształtu prostokąta. Proporcja ta była często używana przez starożytnych artystów.

Liczby Fibonacciego do dziś kryją w sobie wiele wciąż odkrywanych faktów. Ukazuje się nawet pismo *Fibonacci Quarterly*, w którym co kwartał publikowane są nowe wyniki dotyczące tych liczb. Zaskakujące, że dopiero w 1972 roku E. Zeckendorf udowodnił następującą ciekawą, a zarazem elementarną własność liczb Fibonacciego:
Twierdzenie. Każda liczba naturalna n ma *jednoznaczne* przedstawienie w postaci

$$n = F_{k_1} + F_{k_2} + \ldots + F_{k_r},$$

gdzie $k_1 \gg k_2 \gg \ldots \gg k_r \gg 0$,
symbol zaś $i \gg j$ oznacza, że $i > j+1$.
(Ostatnia nierówność pozwala na używanie tylko jednej jedynki: F_1.)

Innymi słowy – liczby Fibonacciego mogą służyć jako baza binarnego systemu pozycyjnego. Rozwinięcie każdej liczby n będzie w tym układzie takim ciągiem zer i jedynek, że żadne dwie jedynki nie będą sąsiadowały, zaś na $i-1$ miejscu od prawej wystąpi jedynka wtedy i tylko wtedy, gdy liczba F_i występuje w rozwinięciu z twierdzenia Zeckendorfa. Dla przykładu

$$50 = 34 + 13 + 3 = (10100100)_F .$$

Algorytm zamiany liczb na układ Fibonacciego jest prosty: należy do rozkładu brać jak największe liczby Fibonacciego, na które jest jeszcze miejsce.

Ponieważ każda liczba Fibonacciego F_n ma rozkład $1\underbrace{00\ldots000}_{n-2\ \text{zer}}$, więc jest jasne, że musimy umieć zapisać liczby mniejsze od F_n (łącznie z zerem jest ich F_n) na $n-2$ pozycjach. Przypomnijmy sobie, ile jest takich ciągów zerojedynkowych o $n-2$ elementach, że żadne dwie jedynki nie występują koło siebie. Oczywiście, jest ich tyle, ile jest posadzeń pań (jedynek) i panów (zer) na ławie przy $n-2$ nakryciach tak, aby żadne dwie panie ze sobą nie sąsiadowały, czyli właśnie F_n. Wykazaliśmy więc, że na $n-2$ pozycjach jest wystarczająco dużo miejsca do reprezentacji F_n liczb za pomocą „eleganckich" ciągów zerojedynkowych.
Aby udowodnić twierdzenie Zeckendorfa, wystarczy wykazać, że po pierwsze

– maksymalną liczbą reprezentowalną na $n-2$ pozycjach w układzie Fibonacciego jest $F_n - 1$, a po drugie – że każde dwa różne „eleganckie" ciągi zerojedynkowe wyznaczają różne liczby w układzie Fibonacciego. Elementarne te fakty pozostawiamy bez dowodu, aby nie psuć do końca Czytelnikowi przyjemności odkrywania praw dotyczących liczb Fibonacciego.

W każdym w miarę normalnym układzie pozycyjnym do przyjemności należy wykonywanie działań sprowadzających się do dopisywania zer na końcu liczb bądź skreślania tych najmniej znaczących cyfr. Odpowiada to zazwyczaj mnożeniu i dzieleniu przez bazę układu. Czemu odpowiadają te operacje na liczbach w układzie Fibonacciego? Oczywiście, przesunięciu indeksów o jeden w prawo lub w lewo. Ze względu na to, że $F_{n+1} \simeq \phi F_n$, dopisanie zera na końcu liczby będzie odpowiadało pomnożeniu, a skreślenie ostatniej cyfry – podzieleniu przez wartość bliską ϕ. Spytamy się natychmiast, do czego może się przydać mnożenie i dzielenie przez ϕ?

Okazuje się, że całkowicie przypadkowo jedna mila angielska to 1,609344 km, podczas gdy $\phi \simeq 1,618034$ – czyli bardzo podobnie. Możemy więc użyć tej niezwykłej reprezentacji do szybkiej przybliżonej zamiany kilometrów na mile i na odwrót. Dla przykładu: jedziemy samochodem po autostradzie w Stanach Zjednoczonych i widzimy ograniczenie do 55 mil (bardzo częste ograniczenie). Szybko rozwijamy 55 w układzie Fibonacciego (akurat 55 jest dziesiątą liczbą Fibonacciego) i przesuwamy o 1 dostając 89 km. Błąd – mniejszy od 0,5. Na odwrót – chcemy się dowiedzieć, ile to jest w milach 30 km? Proszę bardzo! $30 = 21 + 8 + 1$. Bierzemy liczby Fibonacciego z indeksami o 1 mniejszymi, czyli $13 + 5 + 1 = 19$ mil (przy tej metodzie ostatnią jedynkę zostawiamy ze względu na to, że $F_1 = 1$).

Inna, bardzo ciekawa własność liczb Fibonacciego dotyczy ich podzielności:

$$\mathrm{NWD}(F_n, F_m) = F_{\mathrm{NWD}(n,m)},$$

czyli – innymi słowy – największy wspólny dzielnik dwóch liczb Fibonacciego jest również liczbą Fibonacciego o indeksie równym największemu wspólnemu dzielnikowi ich indeksów. Twierdzenie to zostało użyte w 1970 roku przez Jurija Matiasewicza przy dowodzie bardzo ważnego twierdzenia mówiącego, że nie

Czy matematyk musi być ateistą?

W literaturze polskiej (i w ogóle słowiańskiej) końca XIX wieku i pierwszej połowy XX wieku dość często trafiającym się sztafażem jest małe miasteczko. Warto przywołać i dziś jego obraz przed oczy, a to dlatego, że wracać przecież mamy do dawnych, dobrych, sprawdzonych sytuacji, a jeszcze bardziej dlatego, że już za dwa lata oświata przestanie wreszcie ciążyć na barkach państwa i będzie w rękach gmin (a więc w przeważającej części właśnie małych miasteczek).

Z bogatego, kolorowego pejzażu Iksinowów, P-sków czy jak tam im było, chcę przywołać tylko jeden element. Otóż częstym składnikiem takiego małomiasteczkowego życia była malutka grupka miejscowych ateistów. Jeśli wierzyć literaturze, należał tam przeważnie (z niewiadomych powodów) szewc, aptekarz, rzadziej lekarz i bardzo często matematyk – profesor miejscowego gimnazjum. Zbierali się owi ateiści u któregoś z nich i, jak sądziła miejscowa społeczność, przeważnie raczyli się różnymi nalewkami. Autorzy opisujący tę prowincję mieli do powoływanych przez siebie do życia ateistów stosunek pełen pobłażliwej życzliwości, a to głównie dlatego, że w dobrym tonie było potępianie dewocji i chwalenie wszystkiego, co się jej przeciwstawiało.

Oderwijmy się jednak od minionej rzeczywistości prowincjonalnej i zastanówmy się, dlaczego wśród ateistów tak chętnie wymieniany był matematyk (o ile pamiętam, ten z *Szatana z siódmej klasy* też ma ten grzech na sumieniu)? A może rzeczywiście było coś takiego, co prowincjonalnego matematyka ku ateizmowi popychało?

Istotnie, coś takiego było. Autorem owego czegoś był żyjący sto lat wcześniej od naszych bohaterów Pierre Simon (de) Laplace. Napisałem de w nawiasie nie bez powodu. Laplace był bowiem charakterologicznie (przepraszam za rusycyzm) bohaterem naszych czasów. Już na studiach zaskarbił sobie uznanie d'Alemberta (a więc ówczesnej opozycji), co dało mu profesurę w szkole wojskowej w Paryżu, by wystartować stamtąd do funkcji urzędniczych przy Ludwiku XVI. Podczas rewolucji (jako syn drobnego właściciela ziemskiego) organizował z Lagrange'm Ècole Normale i Ècole Polytechnique, by potem stać się ulubionym uczonym Napoleona i następnie (jako syn drobnego właściciela ziemskiego) Ludwika XVIII. Słowem *łatwość zmiany przekonań ułatwiła mu uprawianie czysto matematycznej działalności niezależnie od zmian politycznych* (to cytat ze Struika).

To, co nas tu interesuje, zawarte jest w jego monumentalnym dziele *Mècanique celeste*, a można to zaprezentować cytatem:
Inteligencja, która by w danym momencie znała wszystkie siły ożywiające naturę oraz wzajemne położenia bytów tworzących ją i przy tym byłaby dostatecznie wielka, by dane te poddać analizie, mogłaby w jednym wzorze objąć ruch największych ciał Wszechświata i najmniejszych atomów: nic nie byłoby dla niej niepewne i miałaby przed oczyma zarówno przyszłość, jak przeszłość. Umysł ludzki daje słabe pojęcie o tej inteligencji, której doskonałość można było osiągnąć tylko w astronomii.

Cytat ten nie wydaje się wyznaniem wiary ateisty. A jednak (zupełnie bez intencji autora) stał się wyznaniem wiary konsekwentnie ateistycznego ruchu filozoficznego, który zwie się determinizmem. Jeśli bowiem pełna znajomość stanu rzeczy pozwala (to nieważne, że nie nam) przewidzieć wszystko i to dowolnie dokładnie, to wśród jednoznacznie zdeterminowanych obiektów znaleźć się musimy i my sami. A tym samym nasza dusza nieśmiertelna istnieć nie może, gdyż pozbawiona wolnej woli (jako zdeterminowana) byłaby obiektem śmiechu wartym. Nie ponosilibyśmy żadnej odpowiedzialności za nasze grzechy, bo byłyby one na nas wymuszone przez nieuniknioną konieczność itd.

Determinizm, jako kierunek intelektualny, cieszył się sporym wzięciem wśród uczonych drugiej połowy XIX wieku (szczególnie wśród matematyków i fizyków stosujących jego najsprawniejsze narzędzia – równania różniczkowe i mechanikę analityczną). I zgasł z końcem stulecia, gdy jego wielbiciele bądź wymarli, bądź zdali sobie jasno sprawę, że grzeszą najcięższym grzechem w religiach judejsko-chrześcijańskich, czyli pychą (dla tej części w 98% katolickiej publiczności, która nie wie, że pycha jest najcięższym grzechem, objaśniam, że za to szatan został wykluczony z grona aniołów i strącony z Nieba).

Jednak w naszych prowincjonalnych miasteczkach (podwójnie prowincjonalnych, bo w Europie Wschodniej) determinizm przetrwał, i to za sprawą matematyków, o pół stulecia dłużej.

Tak więc nie martwmy się. Matematyk (nawet uprawiający równania różniczkowe) nie musi być ateistą. Wystarczy tylko, by uwierzył, że on i jego matematyka nie są w stanie przy żadnej bazie danych i przy żadnej mocy obliczeniowej objaśnić całości świata. Tylko, czy taka rezygnacja z potencjalnych choćby możliwości uprawianej nauki nie okalecza człowieka bardziej niż ateizm?

Marek KORDOS

istnieje algorytm pozwalający na sprawdzenie, czy dane równanie algebraiczne o współczynnikach całkowitych (dowolnej liczby zmiennych i dowolnego stopnia) ma rozwiązanie w liczbach całkowitych. Twierdzenie to jest negatywnym rozwiązaniem dziesiątego problemu Hilberta.

Teraz, kiedy już chyba zgodzimy się, że liczby Fibonacciego są ciekawe, a poza tym rozwiązania całkiem normalnych problemów wyrażają się wygodnie za ich pomocą, powstaje pytanie, czy rzeczywiście nie ma jakiegoś sposobu, aby wprost, bez rekurencji, móc obliczyć n-tą liczbę Fibonacciego?

Otóż już w XIX wieku został udowodniony przez J. Bineta przyprawiający o zawrót głowy wzór

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\right)$$

Aż trudno uwierzyć, że wzór ten może w wyniku dawać dla każdego n liczby naturalne.

Zadania

Redaguje Michał WOJCIECHOWSKI

M 622. Na okręgu napisano 50 liczb. Każda z nich jest równa 1 lub -1. Należy obliczyć ich iloczyn zadając pytania o iloczyny trzech kolejnych liczb. Jaką najmniejszą liczbę pytań trzeba zadać?
Rozwiązanie na str. 12

M 623. Na rzece o szerokości 100 m (brzegi rzeki są liniami prostymi) znajduje się pewna liczba wysp o łącznym obwodzie 800 m. Udowodnić, że ruszając z dowolnego punktu na jednym brzegu można przepłynąć łódką na drugi brzeg po drodze nie dłuższej niż 300 m.
Rozwiązanie na str. 12

M 624. Na obwodnicy (droga w kształcie pętli) znajduje się pewna liczba stacji benzynowych zawierających w sumie ilość paliwa wystarczającą dla zrobienia samochodem jednej pętli. Udowodnić, że istnieje taka stacja, że podstawiony pod nią samochód z pustym bakiem będzie mógł przejechać całą obwodnicę.
Rozwiązanie na str. 12

Redaguje Jarosław KULPA

F 327. Oszacuj, ile razy średnia droga swobodna s elektronu w miedzi w temperaturze $t = 20°C$ jest większa od odległości między najbliższymi atomami. Dane dotyczące miedzi: gęstość $d = 9 \cdot 10^3$ kg/m^3, opór właściwy $\rho = 1,55 \cdot 10^{-8}$ Ω·m, masa molowa $\mu = 0,064$ kg/m^3, sieć jest płasko centrowana (cztery atomy na komórkę).
Rozwiązanie na str. 11

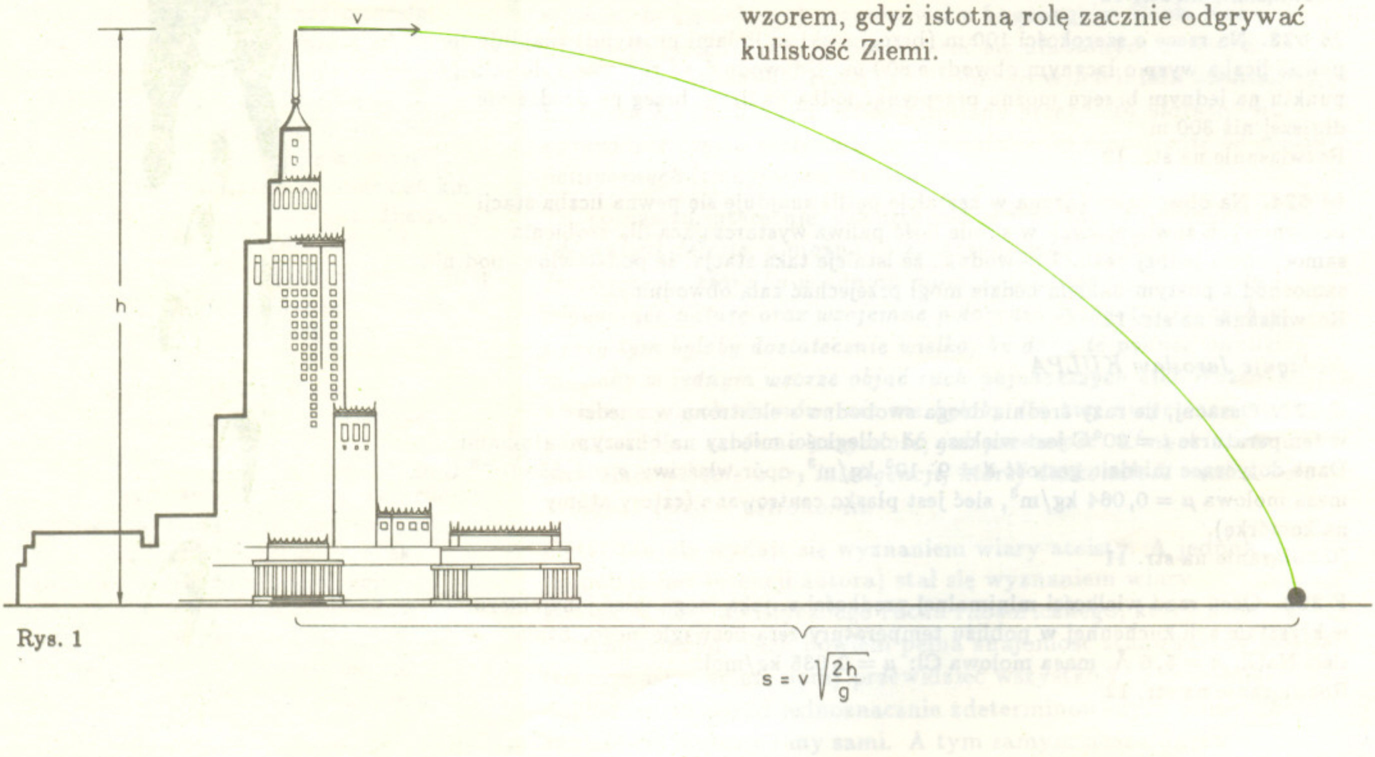
F 328. Oceń rząd wielkości minimalnej prędkości v, jaką mogą mieć jony chloru w krysztale soli kuchennej w pobliżu temperatury zera bezwzględnego. Stała sieci NaCl: $a = 5,6$ Å, masa molowa Cl: $\mu = 0,035$ kg/mol.
Rozwiązanie na str. 12

mała delta

Rzut kamieniem na orbitę

Będziemy rzucali kamieniem. Poziomo i bardzo, bardzo daleko. Musimy jednak poczynić pewne założenia upraszczające nasze zadanie (fizycy zawsze tak robią). Po pierwsze zakładamy, że na kamień nie działa opór powietrza. Po drugie zaś zakładamy, że kamień nie napotka na drodze żadnej przeszkody: drzewa, domu, roztargnionych przechodniów (odpukać w niemalowane) i wielu innych. Ponieważ będziemy rzucali naprawdę bardzo daleko, więc oba te założenia są bardzo istotne.

No to zaczynamy rzucać. Rzućmy kamień poziomo z wysokości h i z dosyć małą prędkością początkową tak, żeby upadł niedaleko.



Rys. 1

Na kamień działa przyspieszenie ziemskie g. Wobec tego, jeśli przez t oznaczymy czas, jaki upłynie od chwili wyrzucenia kamienia do momentu jego upadku, to, jak wiadomo,

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

Skąd

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Stąd zaś wynika, że w ciągu tego czasu kamień przeleci w poziomie drogę długości

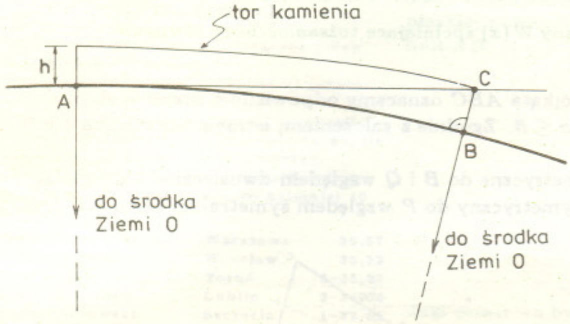
$$s = v\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Załóżmy teraz, że rzucamy kamieniem z bardzo dużą prędkością początkową v tak, że kamień przeleci co najmniej kilkadziesiąt kilometrów. W tym przypadku odległość, w jakiej upadnie kamień, nie będzie się już wyrażała powyższym wzorem, gdyż istotną rolę zacznie odgrywać kulistość Ziemi.

Po czasie

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

tor kamienia przetnie (w punkcie C) linię prostą – styczną w punkcie A do powierzchni Ziemi.



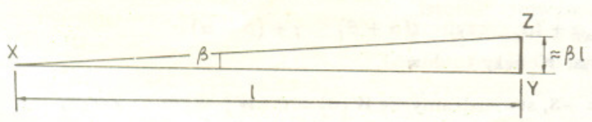
Rys. 2. $|AC| = s = v\sqrt{\frac{2h}{g}}$, $|AC|$ jest styczną do powierzchni Ziemi w punkcie A. $|AO| = |BO| = r$ – promień Ziemi, $\angle AOB = \alpha$ – bardzo mały kąt, O – środek Ziemi.

Co prawda, podobnie jak poprzednio,

$$|AC| = v\sqrt{\frac{2h}{g}},$$

lecz tym razem po przebyciu tej drogi kamień nie upadnie na Ziemię, ale nadal będzie się znajdował w powietrzu, bo Ziemia już zdążyła „zakręcić w dół".

Obliczmy, na jakiej wysokości będzie znajdował się kamień po doleceniu do punktu C, czyli obliczmy $|BC|$. Skorzystamy w tym celu z pewnej własności bardzo małych kątów. Jeżeli w trójkącie równoramiennym XYZ (rys. 3) kąt β jest bardzo mały, to możemy pisać w przybliżeniu $|YZ| = \beta l$ (kąt β jest wyrażony w radianach).



Rys. 3

Powróćmy teraz do naszego zadania. Przyjmijmy oznaczenia takie jak na rysunku 2. Otóż

$$\angle BAO = \frac{\pi - \alpha}{2},$$

skąd

$$\angle CAB = \frac{\alpha}{2}.$$

A ponieważ trójkąt ABC jest prawie równoramienny i kąt CAB jest bardzo mały, więc

$$|BC| = \frac{\alpha}{2}s.$$

Ale trójkąt AOB też jest równoramienny, więc

$$s = |AB| = \alpha r,$$

czyli

$$\alpha = \frac{s}{r},$$

skąd

$$|BC| = \frac{s^2}{2r} = \frac{v^2h}{rg}.$$

Czy możliwe jest, aby $|BC| = h$? Sprawdźmy:

$$\frac{v^2h}{rg} = h,$$

skąd

$$v = \sqrt{rg}.$$

Możliwe!

Ale co to oznacza? Oznacza to, że jeżeli rzucimy kamieniem z prędkością $v = \sqrt{rg}$, to mimo iż przeleci on kilkadziesiąt kilometrów, będzie leciał cały czas na tej samej wysokości! A więc nigdy nie spadnie! Czyli będzie latał dookoła Ziemi. Oznacza to, że latanie po orbicie to nic innego jak nieustanne spadanie, z tym że spadanie jest równoważone przez „zakręcanie Ziemi" i wskutek tego kamień nigdy nie spadnie na Ziemię.

Powróćmy na koniec do dwóch założeń, które poczyniliśmy, a więc do zaniedbywania oporów powietrza i nienapotykania przeszkód.

Jeżeli przyjmiemy, że wysokość h jest równa np. 1000 km, to, oczywiście, oba te założenia będą spełnione. A przecież na takiej i na większych wysokościach latają sputniki.

No i już na sam koniec obliczmy konkretną wartość liczbową prędkości v. Ponieważ na powierzchni Ziemi $g = 9,81\ \mathrm{m/s^2}$, zaś $r = 6370$ km, więc $v = \sqrt{rg} = 7,9$ km/s. A więc tyle, ile jest podawane w podręcznikach fizyki. Prędkość ta nosi nazwę pierwszej prędkości kosmicznej.

Małą Deltę przygotował Piotr HAJŁASZ

Zadania z matematyki nr 235, 236

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 1992

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 221 (WT=3,38) i 222 (WT=1,35) z numeru 5/1991

Paweł Kubit	– Krosno	43,17
Krzysztof Zawisławski	– Warszawa	1–42,82
Józef Siwy	– Łaziska Grn.	1–40,89
Dariusz Rybacki	– Kraśnik	40,18
Tomasz Wietecha	– Tarnów	37,48
Jan Ciach	- Ostrowiec Św.	2-36,75
Leszek Krawczyk	– Włodawa	36,37
Mirosław Matlęga	– Skoczów	35,59
Andrzej Bonk	– Chełmża	3–33,92
Jerzy Mikuta	– Zielona Góra	2–33,87
Anna Gluza	– Toruń	1–32,96
Leszek Krzywonos	– Ornatowice	32,51
Piotr Kumor	– Olsztyn	2–29,66
Marek Prauza	– Poraj	2–29,18
Łukasz Wiechecki	– Legnica	28,96
Marek Karaś	– Tarnów	28,62
Krystyna Witek	– Ostrów Maz.	1–27,51
Ryszard Pagacz	– Zawadzkie	2–27,16
Andrzej Kondracki	– Białystok	26,60
Henryk Mikołajczak	– Wałbrzych	1–26,04
Janusz Olszewski	– Suwałki	25,73
Leszek Gasiński	– Stalowa Wola	24,35
Krzysztof Jedziniak	– Katowice	2–24,32
Henryk Kornacki	– Augustów	1–23,69
Tomasz Szymczyk	– Bielsko-Biała	1–23,06
Krzysztof Zapisek	– Warszawa	22,91
Wojciech Skut	– Warszawa	22,43
Jerzy Janowicz	– Bolesławiec	7–22,08
Tadeusz Józefczyk	– Poznań	2–21,36
Adam Czornik	– Bytom	1–20,43

Legenda (przykładowo): stan konta 7 – 22, 08 oznacza, że uczestnik już siedmiokrotnie zdobył **44** punkty, a w kolejnej (ósmej) rundzie ma 22,08 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:
– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;
– przysłali rozwiązanie przynajmniej jednego zadania z rocznika 1989, 1990 lub 1991.

Zaprzestajemy więc drukowania nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście, jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani Klubu 44M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):
J. Janowicz (7), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał (3), T. Rawlik (3), M. Mazur(3), A. Bonk (3), K. Serbin (3)
(cyfra w nawiasie wskazuje, ile razy uczestnik przekroczył barierę 44 punktów).

Pozostali członkowie **Klubu 44M** (alfabetycznie; nie powtarzamy nazwisk figurujących na liście powyżej):
Z. Bartold (2), T. Biegański (1), W. Boratyński (1), M. Czerniakowska (1), P. Figurny (1), M. Fiszer (1), P. Gadziński (1), Z. Galias (1), T. Grzesiak (1), K. Hryniewiecki (1), K. Jachacy (1), P. Jędrzejewicz (2), H. Kasprzak (2), T. Komorowski (2), Z. Koza (2), A. Krzysztofowicz (1), D. Kurpiel (2), A. Langer (1), R. Latała (1), J. Małopolski (2), J. Mańdziuk (1), M. Marczak (1), R. Mazurek (1), M. Mikucki (1), J. Milczarek (1), R. Mitraszewski (1), W. Olszewski (1), E. Orzechowski (2), K. Pióro (2), M. Roman (1), A. Ruszel (1), S. Solecki (2), Z. Surduka (1), A. Smolczyk (1), W. Szymczyk (1), K. Trautman (1), P. Wach (1), A. Wyrwa (1), M. Zając (1), G. Zakrzewski (2), Z. Zaus (1).

235. Okręgi k i k' są styczne zewnętrznie. W okrąg k wpisano trójkąt równoboczny ABC. Na okręgu k' tak obrano punkty A', B', C', że proste AA', BB', CC' są styczne do k'. Dowieść, że długość jednego z odcinków AA', BB', CC' równa się sumie długości pozostałych dwóch.

236. Dla każdej liczby naturalnej n wyznaczyć wszystkie funkcje f, określone na zbiorze $M = \{0, 1, \ldots, n\}$, o wartościach w tym samym zbiorze, spełniające następujący warunek: dla każdego $m \in M$ istnieje dokładnie $f(m)$ różnych liczb $k \in M$, takich że $f(k) = m$. [Równoważnie: $f(m) = |f^{-1}(\{m\})|$ dla $m \in M$, gdzie $|X|$ oznacza moc (liczbę elementów) zbioru X.]
Zadanie **236** zaproponował Czytelnik z Warszawy, pragnący zachować incognito.

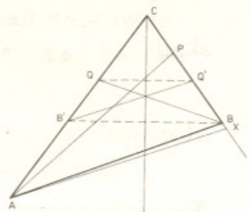
Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/1991

Przypominamy treść zadań:

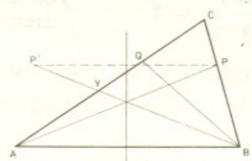
227. Na bokach BC i AC trójkąta ABC tak obrano punkty P i Q, że $|\angle BAP| : |\angle BAC| = |\angle ABQ| : |\angle ABC|$. Dowieść, że jeśli $|AC| \geq |BC|$, to $|AP| \geq |BQ|$.

228. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $W(x)$ spełniające tożsamościowo równanie $(x-1)W(x+1) = (x+3)W(x-1)$.

227. Miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC oznaczmy odpowiednio przez α, β, γ. Zakładamy, że $|AC| \geq |BC|$; zatem $\alpha \leq \beta$. Zgodnie z założeniem, istnieje taka liczba $t \geq 0$, że $|\angle BAP| = t\alpha$ i $|\angle ABQ| = t\beta$.
Oznaczmy przez B' i Q' punkty symetryczne do B i Q względem dwusiecznej kąta BCA (rys. 1); przez P' oznaczmy punkt symetryczny do P względem symetralnej boku AB (rys. 2).



Rys. 1



Rys. 2

Niech X będzie takim punktem prostej BC, że $AX \parallel B'Q'$ i niech Y będzie punktem przecięcia odcinków AC i BP'. Zauważmy, że
$$|BQ| = |B'Q'| \leq |AX| \quad \text{oraz} \quad |AP| = |BP'| \geq |BY|.$$
Dla uzyskania tezy zadania wystarczy więc, by zachodziła jedna z nierówności:

(1) $|AX| \leq |AP|$; równoważnie: $|\angle APX| \leq |\angle AXP|$

lub

(2) $|BY| \geq |BQ|$; równoważnie: $|\angle BQY| \geq |\angle BYQ|$.

Mamy następujące równości kątów:
$$|\angle CAP| = (1-t)\alpha, \quad |\angle CAX| = |\angle CB'Q'| = |\angle CBQ| = (1-t)\beta \quad \text{(rys. 1)}$$
oraz
$$|\angle ABQ| = t\beta, \quad |\angle ABY| = |\angle BAP| = t\alpha \quad \text{(rys. 2)}.$$
Wynika z nich, że
$$|\angle CAP| \leq |\angle CBX| \quad \text{oraz} \quad |\angle ABQ| \geq |\angle ABY|.$$
Zatem punkt P leży na odcinku CX, a punkt Q leży na odcinku CY. Wobec tego
$$|\angle APX| = |\angle APB| = 180^\circ - |\angle ABC| - |\angle BAP| = 180^\circ - \beta - t\alpha,$$
$$|\angle AXP| = |\angle B'Q'C| = |\angle BQC| = |\angle BAQ| + |\angle ABQ| = \alpha + t\beta,$$
$$|\angle BQY| = |\angle BQA| = 180^\circ - |\angle CAB| - |\angle ABQ| = 180^\circ - \alpha - t\beta,$$
$$|\angle BYQ| = |\angle CAB| + |\angle ABY| = \alpha + t\alpha.$$
A zatem nierówności (1) i (2) są odpowiednio równoważne następującym nierównościom (1′) i (2′):

(1′) $180^\circ - \beta - t\alpha \leq \alpha + t\beta$, czyli $t(\alpha + \beta) \geq \gamma$,

(2′) $180^\circ - \alpha - t\beta \geq \alpha + t\alpha$, czyli $t(\alpha + \beta) \leq \gamma + (\beta - \alpha)$.

Jedna z nich jest na pewno spełniona. Kończy to dowód.

228. Kładąc $x = 1$, a następnie $x = -3$, stwierdzamy, że $W(0) = 0$ i $W(-2) = 0$. Zatem na mocy twierdzenia Bézouta istnieje taki wielomian $V(x)$, że $W(x) = x(x+2)V(x)$. Wstawiamy to do wyjściowego równania i uzyskujemy związek $V(x+1) = V(x-1)$ (spełniony tożsamościowo). Stąd $V(x) = \text{const}$ i $W(x) = cx(x+2)$. Bez trudu sprawdzamy, że każdy wielomian tej postaci spełnia podane równanie.

Zadania z fizyki nr 133, 134

Redaguje Jerzy B. BROJAN

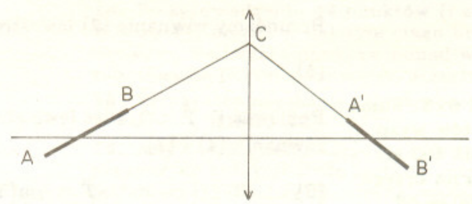
133. Po wewnętrznej stronie pionowego cylindra o promieniu R toczy się bez poślizgu kulka o promieniu $r < R$. Znaleźć zależność od czasu współrzędnej pionowej kulki oraz kąta obiegu w płaszczyźnie poziomej. (Patrz artykuł *Jak potoczy się wirująca kulka?*.)

134. Pocisk karabinowy o masie m lecący z prędkością v trafia w drewniany klocek o masie M i grubości d. Siła oporu działająca na pocisk w drewnie nie zależy od prędkości i jest równa T. Przy jakiej wartości v klocek uzyska maksymalną prędkość, jeśli początkowo był nieruchomy? Długość pocisku i siły zewnętrzne pominąć. Zadanie zostało oparte na projekcie p. Arkadiusza Kowalskiego z Lublina.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/1991

Przypominamy treść zadań:

125. Przez soczewkę skupiającą przechodzą wiązki światła wybiegające z różnych punktów płaskiej powierzchni σ prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przecinającej się z nią wzdłuż linii AB.

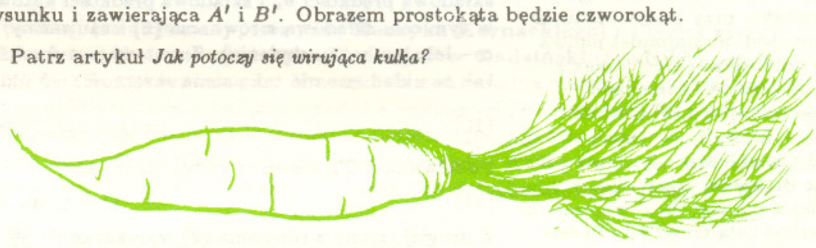


Jaki powinien być kształt ekranu, aby wszystkie punkty powierzchni σ były zogniskowane na tym ekranie ostro? Jeśli przedmiotem jest prostokąt należący do σ, to jaki kształt będzie miał obraz tego prostokąta na ekranie?

126. Jednorodna kulka toczy się bez poślizgu po płaszczyźnie poziomej z prędkością v_0 w kierunku osi x, przy czym jej oś obrotu tworzy z pionem (osią y) kąt β. Kulka wtacza się na wznoszącą się powierzchnię o symetrii translacyjnej wzdłuż osi z. Jaką maksymalną wysokość osiągnie kulka? Przyjąć, że kulka nie odrywa się od podłoża i styka się z nim tylko w jednym punkcie.

125. Weźmy dwa dowolne punkty A i B, których obrazami w soczewce są A' i B' (pomijamy standardową konstrukcję A' i B' z wykorzystaniem promieni przechodzących przez ogniska). Ponieważ promień ABC należy zarówno do wiązki wychodzącej z A, jak i do wiązki wychodzącej z B, więc po załamaniu musi on przechodzić przez oba punkty A' i B', tzn. A', B' i C muszą leżeć na jednej prostej. Widać też, że obraz dowolnego punktu D należącego do odcinka AB musi leżeć na odcinku $A'B'$, a rozpatrując problem w trzech wymiarach dochodzimy do wniosku, że obrazem powierzchni σ jest płaska powierzchnia σ' prostopadła do rysunku i zawierająca A' i B'. Obrazem prostokąta będzie czworokąt.

126. Patrz artykuł *Jak potoczy się wirująca kulka?*



Jak potoczy się wirująca kulka?

Niewiele jest ściśle rozwiązywalnych problemów z zakresu mechaniki bryły sztywnej, które mają „istotnie trójwymiarowy" charakter, tzn. w których występują wszystkie trzy współrzędne wektora prędkości kątowej i momentu pędu. Jedno spojrzenie na układ nieliniowych równań dynamicznych Eulera (do których należy jeszcze dodać niemniej skomplikowane warunki kinematyczne) skutecznie odstrasza amatorów łatwych sukcesów. Dziwne jednak, że zbiory zadań i podręczniki (także akademickie) pomijają prostszy szczególny przypadek tego problemu – ruch ciała sferycznie symetrycznego, np. toczenie się kulki po „istotnie trójwymiarowym" torze. Uproszczenie wynika tu z symetrii momentu bezwładności, który może być uznany za wielkość skalarną, tak że moment pędu i prędkość kątowa są równoległe. Do tej klasy zagadnień należy zadanie 126 z ligi zadaniowej **Klubu 44 F** (patrz „Przypominamy treść zadań").

Wprowadźmy oznaczenia: m – masa kulki, r – jej promień, $\vec{r}$ – wektor poprowadzony od środka kulki do punktu styczności z podłożem, $\vec{\omega}$ – wektor prędkości kątowej, $\vec{v} = \vec{r} \times \vec{\omega}$ – prędkość środka kulki, $\vec{K} = I\vec{\omega} = \gamma m r^2 \vec{\omega}$ – wektor momentu pędu kulki względem środka (dla kulki jednorodnej $\gamma = \frac{2}{5}$, dla cienkiej kulki wydrążonej $\gamma = \frac{2}{3}$), $\vec{T}$ – siła tarcia

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 119 (WT=2,45) i 120 (WT=3,15) z numeru 5/1991

Adam Sikorski	– Lublin	34,68
Paweł Perkowski	– Szczecin	32,65
Andrzej Borowski	– Aleksandrów K.	17,33

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po 120 zadaniach

obejmuje uczestników spełniających jeden z poniższych warunków:
– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania w latach 1989 – 1991 i mają co najmniej 20 punktów lub są członkami **Klubu 44F** (cyfra przed kreską oznacza, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty).
– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania w roku 1991 i mają co najmniej 10 punktów.

Paweł Koczyński	– Warszawa	39,57
Wojciech Peisert	– Wrocław	35,32
Piotr Bała	– Toruń	3–35,27
Adam Sikorski	– Lublin	2–34,68
Paweł Perkowski	– Szczecin	1–32,65
Mariusz Bogacz	– Pińczów	28,86
Jacek Stelmach	– Zabrze	1–29,44
Marek Karaś	– Tarnów	29,30
Dzierżysław Lipniacki	– Lublin	3–25,46
Anna Gluza	– Toruń	1–24,35
Andrzej Bonk	– Chełmża	23,22
Bogusław Mikielewicz	– Brodnica	1–21,99
Andrzej Borowski	– Aleksandrów	1–17,33
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	12,08
Jacek Piotrowski	– Rezszów	10,03
Leszek Motyka	– Kraków	1– 2,00
Aleksander Surma	– Myszków	2– 1,53
Roman Musiał	– Katowice	1– 4,40
Wiesław Kacprzak	– Kraków	1– 2,47
Jerzy Lipkowski	– Elbląg	2– 1,50
Tomasz Wietecha	– Tarnów	1– 1,45
Przemysław Gworys	– Częstochowa	1– 1,13

Pozostali członkowie **Klubu 44F** w kolejności zdobycia tytułu (liczba w nawiasach oznacza wielokrotność przekroczenia 44 punktów:
Tomasz Rawlik (1), Robert Repucha (1), Piotr Wach (1), Leszek Szalast (1).

Rozwiązanie zadania F 327. Jeżeli do przewodu o długości l przyłożymy napięcie U, to elektron będzie poruszał się z przyspieszeniem $a = \frac{eU}{ml}$. Średnia prędkość unoszenia $v = \frac{1}{2}a\tau$, τ – czas między kolejnymi zderzeniami z atomami sieci; prąd $I = envS$, gdzie $n = \frac{dN_A}{\mu}$ – koncentracja wolnych elektronów, S – przekrój przewodnika, N_A – stała Avogadro. Porównując wyrażenie na I z prawem Ohma ($I = \frac{U}{R}$, $R = \rho\frac{l}{S}$) otrzymujemy zależność $\tau = \frac{2m}{e^2 n\rho}$. W rzeczywistości elektron porusza się z dużo większą prędkością termiczną $v_1 = \frac{s}{\tau}$, która nie ma preferowanego kierunku. Ponieważ $\frac{mv_1^2}{2} = \frac{3}{2}kT$, droga swobodna jest dana wzorem $s = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \cdot \frac{2m}{e^2 n\rho} = 63$ Å.
Stała sieci wynosi $a = \sqrt[3]{\frac{4}{n}} = 3{,}6$ Å, odległość między najbliższymi atomami zaś $x = \frac{\sqrt{2}}{2}a = 2{,}5$ Å. Ostatecznie otrzymujemy $\frac{s}{x} = 25$.

statycznego, tzn. prostopadła do $\vec{r}$ składowa siły reakcji podłoża, $\vec{P}$ – prostopadła do $\vec{r}$ składowa siły ciężkości. Obowiązują równania:

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}_{\perp} \tag{1}$$

– II zasada dynamiki zapisana dla rzutów na płaszczyznę prostopadłą do $\vec{r}$ (odpowiednie składowe przyspieszenia oznaczono $\vec{a}_{\perp}$),

$$\vec{r} \times \vec{T} = \frac{d\vec{K}}{dt} = \gamma m r^2 \frac{d\vec{\omega}}{dt} \tag{2}$$

– II zasada dynamiki ruchu obrotowego.

Obok układu xyz możemy wprowadzić lokalny układ współrzędnych prostokątnych ruz, gdzie oś r będzie skierowana wzdłuż $\vec{r}$, a oś u w płaszczyźnie zy prostopadle do $\vec{r}$. Różniczkując względem czasu równanie $\vec{v} = \vec{r} \times \vec{\omega}$ otrzymamy

$$\vec{a} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{\omega} + \vec{r} \times \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \tag{3}$$

Drugi składnik jest – oczywiście – prostopadły do $\vec{r}$, natomiast w pierwszym składniku wektor $\frac{d\vec{r}}{dt}$ ma kierunek osi u, zatem składowa z wektora $\vec{\omega}$ daje iloczyn wektorowy o kierunku $\vec{r}$, a składowa $\vec{\omega}_r$ daje iloczyn wektorowy o kierunku osi z. Stąd

$$\vec{a}_{\perp} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{\omega}_r + \vec{r} \times \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \tag{4}$$

Pomnóżmy równanie (2) lewostronnie wektorowo przez $\vec{r}$.

$$\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{T}) = \gamma m r^2 \vec{r} \times \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \tag{5}$$

Ponieważ $\vec{r} \cdot \vec{T} = 0$, więc lewa strona jest równa $-\vec{T}r^2$. Po prawej podstawiamy kolejno równania (4) i (1)

$$-\vec{T} = \gamma m(\vec{a}_{\perp} - \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{\omega}_r) = \gamma(\vec{P} + \vec{T}) - \gamma m \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{\omega}_r. \tag{6}$$

Równanie to ma dwie składowe wzdłuż osi u i z, przy czym ostatni wyraz ma tylko składową z, a $\vec{P}$ – tylko składową u. Wynika stąd natychmiast

$$T_u = -\frac{\gamma}{1+\gamma} P \tag{7}$$

i z równania (1) mamy

$$m a_u = P + T_u = \frac{1}{1+\gamma} P = \frac{1}{1+\gamma} m g \sin\alpha, \tag{8}$$

gdzie α – lokalny kąt nachylenia pochylni. Widzimy, że ruch kulki w płaszczyźnie xy (tzn. w płaszczyźnie ru) jest całkowicie niezależny od skośnego kierunku osi obrotu kulki i związanego z nim ruchu w kierunku osi z. Korzystając z zasady zachowania energii (lub dalej przekształcając równanie (8)) znajdujemy odpowiedź

$$h = \frac{1+\gamma}{2g} v_0^2 \quad (\text{jeśli } \gamma = \frac{2}{5}, \text{ to } h = \frac{0,7}{g} v_0^2). \tag{9}$$

Kończy to część „ligową" rozwiązania, ale bynajmniej nie kończy się na tym lista pytań, na które można znaleźć odpowiedź w tym problemie. Okazuje się, że można również obliczyć składową prędkości v_z i składową prędkości kątowej ω_r w każdym punkcie pochylni. Weźmy w tym celu składową z równania (6) i zauważmy, że $\frac{d\vec{r}}{dt} = r\frac{d\alpha}{dt}\vec{i}_u$ (gdzie $\vec{i}_u$ – wersor osi u, α – lokalny kąt nachylenia). Zwrot osi u wybraliśmy tu w górę pochylni, a zwrot osi r – w dół, tak że układ ruz ma taką samą skrętność, jak układ xyz. Stąd

$$-(1+\gamma)T_z = +\gamma m r \frac{d\alpha}{dt} \omega_r. \tag{10}$$

Podstawiając $T_z = m a_z = m dv_z/dt$ mamy

$$-(1+\gamma)dv_z = \gamma r \omega_r d\alpha. \tag{11}$$

Z drugiej strony z równania (2) wynika, że $\vec{r} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$, czyli $r d\omega_r = d(r\omega_r) = d(\vec{r} \cdot \vec{\omega}) = \vec{\omega} \cdot d\vec{r} = \omega_u r d\alpha = v_z d\alpha$.

$$r d\omega_r = v_z d\alpha. \tag{12}$$

Całkując układ równań (11) i (12) otrzymujemy ostatecznie

$$\omega_r = \omega_r^{pocz} \cos(\lambda\alpha), \tag{13}$$

$$v_z = -r\omega_r^{pocz} \lambda \sin(\lambda\alpha), \quad \text{gdzie } \lambda = \sqrt{\frac{\gamma}{1+\gamma}}, \tag{14}$$

przy czym ω_r^{pocz} wyraża się przez dany w zadaniu kąt β wzorem $\omega_r^{pocz} = \omega_z \mathrm{ctg}\beta = \frac{v_0}{r}\mathrm{ctg}\beta$. Uzyskany elegancki wynik ukazuje nieoczekiwaną własność badanego ruchu: składowa z prędkości zależy tylko od danych początkowych v_0 i β oraz od lokalnego nachylenia pochylni, nie zależy zaś od kształtu pochylni na całej jej długości. Na przykład, jeśli pochylnia jest „progiem" łączącym dwie poziome półpłaszczyzny, to po przejściu kulki na inny poziom współrzędna v_z wraca do wartości początkowej zero, czyli tor kulki ulega przesunięciu równoległemu. Jeszcze bardziej zaskakujące jest rozwiązanie zbliżonego charakterem zadania 133 (patrz **Klub 44F** na poprzedniej stronie).

Jerzy B. BROJAN

Rozwiązanie zadania M 622. W 50 pytaniach dowiemy się o iloczyny $a_1a_2a_3$, $a_2a_3a_4$, ..., $a_{50}a_1a_2$. Ich iloczyn da sześcian poszukiwanej wartości. Z drugiej zaś strony, jeżeli zadamy mniej niż 50 pytań, to nie będziemy znać iloczynu pewnej trójki, np. $a_1a_2a_3$. Zauważmy teraz, że dla układu, w którym $a_1 = a_3 = a_6 = a_9 = \ldots = a_{48} = 1$, a pozostałe liczby są równe -1, wszystkie iloczyny $a_ia_{i+1}a_{i+2}$ są równe 1 z wyjątkiem a_1, a_2, a_3. Te same odpowiedzi na pytania otrzymamy dla układu samych jedynek, mimo że iloczyny obu tych układów są różne.

Rozwiązanie zadania M 623. Suma długości prostopadłych rzutów wysp na brzeg jest nie większa niż 400 m. Stąd dla dowolnego punktu na brzegu w odległości co najwyżej 200 m od niego leży na tym brzegu drugi punkt nie należący do rzutu prostopadłego żadnej z wysp. Należy przepłynąć przy brzegu do tego punktu, a dalej prostopadle na drugi brzeg.

Rozwiązanie zadania M 624. Przypuśćmy, że samochód ma w baku ilość paliwa pozwalającą na przejechanie całej obwodnicy i że przejeżdża ją zaczynając od dowolnej stacji. Załóżmy ponadto, że zbiera z każdej mijanej stacji całe paliwo. Spośród wszystkich stacji wybierzmy taką, przy podjechaniu do której samochód ma najmniej paliwa w baku – oznaczmy tę ilość przez x. Przypuśćmy teraz, że samochód rozpoczyna podróż od tej właśnie stacji, mając w chwili startu x paliwa. Samochód ten objedzie całą trasę i przy podjeździe do każdej stacji będzie miał co najmniej x paliwa. Stąd wniosek, że może objechać całą trasę, gdy będzie podstawiony do tej stacji z pustym bakiem.

Rozwiązanie zadania F 828. Masa atomu chloru jest równa $m = \mu/N_A$, gdzie N_A – stała Avogadro. Można przyjąć, że jon chloru jest uwięziony w sześcianie o boku a. Z zasady nieoznaczoności możemy oszacować minimalną prędkość jonów chloru

$$mVa \approx \hbar,$$

stąd

$$V \approx \frac{\hbar N_A}{\mu a} \approx 3\ \mathrm{m/s}.$$

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Regulamin

1. Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego oraz Redakcja miesięcznika *Delta* organizują konkurs – ligę zadaniową pod nazwą **Klub 44**.

2. Zadania konkursowe są ogłaszane w miesięczniku *Delta*, po cztery zadania w każdym numerze: dwa z matematyki i dwa z fizyki, z dwumiesięczną przerwą (nr 6 i 7 każdego roku).

3. Uczestnikiem ligi może być każdy.

4. Uczestnictwo w lidze polega na rozwiązywaniu zadań konkursowych i przysyłaniu opracowanych rozwiązań do redakcji *Delty*. Uczestnikiem zostaje się po przysłaniu rozwiązania co najmniej jednego zadania.

5. Moment przystąpienia do ligi można wybrać dowolnie. Nie ma konieczności rozwiązywania zadań z każdego miesiąca.

6. Rozwiązania zadań z numeru n należy nadsyłać do końca miesiąca $n+3$ (dodawanie modulo 12; na przykład termin nadsyłania rozwiązań zadań z numeru 11/1992 upływa 28 lutego 1993). W numerze $n+4$ podane są szkicowe rozwiązania.

7. Rozwiązanie każdego zadania powinno być pisane na oddzielnym arkuszu papieru oraz podpisane imieniem i nazwiskiem. Uczniowie proszeni są o podanie klasy, studenci – roku i uczelni. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, z dopiskiem na kopercie: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**.

8. Prace powinny być samodzielne. Jednobrzmiące rozwiązania pisane przez różnych uczestników nie będą brane pod uwagę.

9. Rozwiązanie każdego zadania jest ocenione w skali od 0 do 1, z dokładnością do 0,1. Przy ocenie brana jest pod uwagę nie tylko poprawność merytoryczna i rachunkowa, lecz także pomysłowość metody i elegancja rozwiązania.

10. Każde zadanie otrzymuje współczynnik trudności ustalany po wystawieniu ocen. Współczynnik ten jest liczbą pomiędzy 1 a 4 obliczaną według następującej reguły: jeśli N oznacza liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (matematyka lub fizyka), a S oznacza sumę ocen uzyskanych przez wszystkich uczestników za dane zadanie, wówczas otrzymuje ono współczynnik trudności $WT = 4 - 3S/N$. Za nadesłane rozwiązanie uczestnik otrzymuje w punktacji ligowej liczbę punktów równą iloczynowi uzyskanej oceny przez współczynnik trudności (z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku).

11. Niektóre z zadań można znaleźć (w brzmieniu identycznym lub bardzo zbliżonym) wraz z rozwiązaniami w różnych książkach i czasopismach. Uczestnicy, którzy w takich przypadkach przyślą zamiast własnego rozwiązania dokładny odsyłacz do literatury, otrzymają ocenę maksymalną, pod warunkiem, że w cytowanym źródle istotnie znajduje się pełne rozwiązanie (dowód, obliczenie, konstrukcja).

12. Czytelnicy *Delty* mogą zgłaszać propozycje zadań; jeśli zadanie nie jest własnego autorstwa, należy podawać źródło. Gdy zadanie wykorzystane w lidze pochodzi z propozycji uczestnika ligi (tj. osoby, która przysłała już rozwiązanie jakiegoś zadania – por. p. 4), a dostarczone zostało wraz z rozwiązaniem (choćby szkicowym, ale poprawnym, ewentualnie odsyłaczem do literatury), uczestnik otrzymuje ocenę maksymalną.

13. Punkty zdobyte przez każdego uczestnika za rozwiązania poszczególnych zadań, obliczone według reguły podanej w p. 10, są sumowane – oddzielnie dla matematyki i dla fizyki. Z chwilą osiągnięcia sumy 44 punktów w jednej z tych dwóch dziedzin uczestnik staje się członkiem **Klubu 44**.

14. Po zgromadzeniu 44 punktów (i zostaniu członkiem **Klubu 44**) można w dalszym ciągu brać udział w konkursie ligowym. Nadwyżka punktów ponad wartość 44 zostaje zaliczona na poczet ponownego uczestnictwa w lidze.

15. Trzykrotne uzyskanie członkostwa **Klubu 44** daje tytuł **Weterana Klubu 44**.

16. Aby uzyskać informacje o swoich wynikach, należy przysłać do redakcji *Delty* kartkę pocztową (oddzielną dla matematyki i dla fizyki), ofrankowaną i zaadresowaną do siebie, ze sporządzoną tabelką z umieszczonymi w jej rubrykach numerami zadań i z pustymi okienkami do wpisania ocen. Zaleca się przysyłanie takich kartek nie częściej niż co kilka miesięcy, gdy uzbiera się materiał dotyczący rozwiązań kilkunastu zadań.

17. Czołówka listy ligowej jest systematycznie ogłaszana w miesięczniku *Delta*. Nazwisko uczestnika może być wymienione w czołówce z nie zmienioną sumą punktów co najwyżej trzykrotnie; następny raz ukaże się wtedy, gdy wykona ruch w górę.

18. Raz do roku, w numerze lutowym, drukowane jest omówienie przebiegu konkursu, prezentowane są w skrócie ciekawsze rozwiązania i uogólnienia oraz ogłaszana jest obszerna czołówka (kilkadziesiąt nazwisk).

19. Członkowie **Klubu 44** są zapraszani na spotkania **Klubu 44**.

20. Organizatorzy zastrzegają sobie wyłączne prawo interpretacji i możność zmian regulaminu.

Kolejny „sezon ligowy" minął. I to długi sezon, bo półtoraroczny. Dwa lata temu, gdy była pora na coroczne omówienie, *Delta* w ogóle nie wychodziła. Cieszymy się, że udało nam się przeżyć ten kolejny „zakręt historii".

Czas jakiś temu zapraszaliśmy Czytelników do dyskusji (zainicjowanej przez pana **Henryka Kornackiego**) na temat zasady ustalania „współczynnika trudności" (WT), jego wad i zalet. Jako jedyny zabrał głos pan **Przemysław Gadziński** (Środa Śl.) proponując utrzymanie dotychczasowego wzoru $WT = 4 - 3S/N$, z tą tylko różnicą, by N oznaczało maksymalną wartość dotychczasowego N z ostatnich sześciu miesięcy. (Na przykład, jeśli n_1 osób przysłało rozwiązania zadań sierpniowych, n_2 osób przysłało rozwiązania zadań wrześniowych, itd., aż do stycznia, to ustalając współczynnik trudności w styczniu należałoby przyjąć $N = \max(n_1, \ldots, n_6)$.) Cytujemy słowa autora propozycji: „...taki WT będzie lepiej uwzględniać różnice między trudnością zadań z kilku numerów; pozytywną cechą tego sposobu liczenia jest też mała zmiana i niewiele większe skomplikowanie w stosunku do dotychczasowego systemu". Brzmi nieźle. Co o tym myślą inni Czytelnicy?

Jak zwykle, drukujemy regulamin ligi. Odnotowujemy jedną zmianę: w dotychczasowym brzmieniu regulaminu, w punkcie 19, była mowa o „corocznych spotkaniach". Słówko „corocznych" z żalem wykreślamy, i mamy nadzieję, że ten punkt nie okaże się całkowitą fikcją, że jeszcze kiedyś uda nam się spotkanie **Klubu 44** zorganizować. Trudności, jakie w tej chwili stają nam na przeszkodzie, są tak banalne, że nie warto ich nazywać po imieniu (a i *słuchać hadko*). Ale może dożyjemy pomyślniejszych czasów...

Teraz o zadaniach („okres sprawozdawczy" obejmuje piętnaście numerów!). Jak zwykle, uczestnicy ligi znajdują dowody, przykłady, konstrukcje ogólniejsze lub bardziej pomysłowe od naszych rozwiązań.

Zadanie 194. [Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ tylko skończenie wiele par liczb całkowitych (x, y) spełnia równanie $x^n + (x+1)^n = y^{2n} + (y+1)^{2n}$] (współczynnik trudności $WT = 4{,}00$; liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 0$). Ten rekord jest już nie do pobicia; nikt z Czytelników nie przysłał nawet częściowego rozwiązania. Co ciekawsze: nie wiemy, czy istnieją trójki liczb naturalnych (n, x, y) spełniające dane równanie i takie, że $\max(|x|, |y|) > 1$; nie zna odpowiedzi na to pytanie ani pan **M. Mazur**, który zadanie zaproponował, ani nikt z indagowanych przez nas matematyków.

Zadanie 195. [Dwie n-kartowe talie stasowano razem. Ile, średnio, kart trzeba odkryć, aby ujrzeć dwie identyczne?] ($WT = 2{,}80$; $LPR = 2$). Dwa poprawne rozwiązania, nie różniące się od naszego, podali: **P. Gadziński** i **A. Langer**.

Zadanie 202 . [Nierówność cykliczna $\sum a_k \leq \sum a_k^2$, gdy $a_k = x_k/x_{k+1}$, $k = 1, \ldots, n$, $x_{n+1} = x_1$] ($WT = 1{,}57$; $LPR = 25$). Zadanie nietrudne, dobrych rozwiązań dużo. Czytelnicy podają uogólnienie: $\sum a_k^p \leq \sum a_k^q$, jeśli $0 \leq p \leq q$ (**A. Bonk**, **A. Czornik** – dla p, q naturalnych; **P. Kumor** – dla p, q rzeczywistych).

Zadanie 203. [Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną n, dla której istnieje taki 1990-elementowy zbiór $A \subset \{1, \ldots, n\}$, że $(x \in A \Rightarrow 2x \notin A)$] ($WT = 2,00$; $LPR = 15$). Pan **A. Bonk** atakuje problem w postaci ogólnej: oznaczając przez $f(n)$ maksymalną moc zbioru $A \subset \{1, \ldots, n\}$ o podanej własności, znajduje wzór rekurencyjny

$$f(n) - f(n-1) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } n = 2^k m, \quad k, m \text{ nieparzyste,} \\ 1 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

a stąd wzór ogólny

$$f(n) = n - \sum_{j=1}^{\infty} [\frac{1}{2} + 4^{-j}n]$$

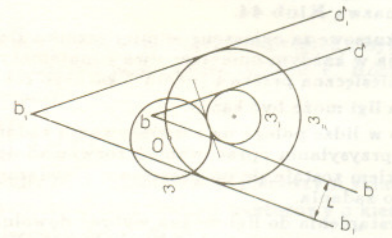
(ta suma ma tylko skończenie wiele niezerowych składników). Najmniejsze n, dla którego $f(n) \geq 1990$, to $n = 2987$.

Zadanie 206. [Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną $n \geq 2$, dla której zapis dziesiętny liczby 44^n zaczyna się i kończy dwiema czwórkami] ($WT = 2,66$; $LPR = 10$). Pan **J. Ciach** rozważa analogiczne zagadnienie dla dłuższych serii czwórek; zauważa, że na końcu nigdy nie pojawią się trzy czwórki oraz znajduje, dla $k = 3$ i $k = 4$, najmniejszą liczbę n, dla której liczba 44^n ma na początku k czwórek, a na końcu – dwie. Liczby te wynoszą, odpowiednio, 13441 oraz 115391.

Zadanie 208. [$f_1(x) = \sin x$, $f_{n+1}(x) = (\sin x)^{f_n(x)}$; $\lim\limits_{x \to 0+} f_n(x) = ?$] ($WT = 3,16$; $LPR = 7$). Stosunkowo duża wartość WT wynika z dużej liczby nadesłanych rozwiązań, w tym wszelako wielu błędnych. Autorami poprawnych rozwiązań są: **P. Gadziński, Ł. Wiechecki, M. Zając, J. Ciach, K. Pióro, T. Wietecha, K. Zapisek**.

Zadanie 211. [Skonstruować trójkąt o minimalnym obwodzie, mający dwa boki zawarte w dwóch danych półprostych p, q o początku P, a trzeci bok styczny do koła ω zawierającego P] ($WT = 3,28$; $LPR = 3$). Konstrukcje zgrabniejsze od podanej przez nas znaleźli panowie **J. Olszewski** i **K. Pióro**.

Oto pierwsze z tych rozwiązań: Wystarczy znaleźć okrąg ω' styczny do p i q oraz styczny zewnętrznie do ω; nietrudno zauważyć (por. np. *Delta* 2/1991), że wspólna styczna do okręgów ω i ω' będzie prostą zawierającą trzeci bok szukanego trójkąta. Oznaczmy środek i promień okręgu ω przez O i r. Rysujemy półproste p' i q' o wspólnym początku P', biegnące równolegle do półprostych p i q, w odległości r od nich i tworzące kąt zawierający p i q w swoim wnętrzu.



W kąt (p', q') wpisujemy okrąg ω'' przechodzący przez punkt O (są dwa takie okręgi; bierzemy większy z nich). Środek okręgu ω'' będzie jednocześnie środkiem okręgu ω'

(Autorem trzeciego rozwiązania, bardziej rachunkowego, jest pan **K. Jedziniak**.)

Zadanie 213. [Czy iloczyn pochodnych dwóch funkcji zawsze jest pochodną pewnej funkcji?] ($WT = 3,60$; $LPR = 4$). Kontrprzykłady (identyczne z naszym lub bardziej zawiłe) znaleźli: **P. Kumor, H. Kornacki, P. Gadziński, A. Krzysztofowicz**.

Zadanie 217. [$f(t) = t^2(t^2+1)^{-2}$; znaleźć maksimum $f(w) + f(x) + f(y) + f(z)$ przy warunku $w + x + y + z = 2$ $(w, x, y, z > 0)$] ($WT = 3,54$; $LPR = 2$). Poprawne rozwiązania (nie mniej uciążliwe od naszego) podali: **P. Gadziński** i **M. Kasperski**.

Zadanie 219. [$x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{k-1}{k}\right)^n$; czy ciąg (x_n/n) jest zbieżny?] ($WT = 3,52$; $LPR = 3$). Dobre rozwiązania: **J. Ciach, M. Kasperski, P. Gadziński**. Oto piękne rozwiązanie, które podał pan **J. Ciach**: Ustalmy $m \in \mathbf{N}$; oznaczmy przez q i r iloraz i resztę z dzielenia n przez m. Mamy oszacowania:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n = \sum_{k=1}^{q} + \sum_{k=q+1}^{2q} + \ldots + \sum_{k=(m-1)q+1}^{mq} + \sum_{k=mq+1}^{mq+r} \begin{cases} \leq q\left(1 - \frac{1}{q}\right)^n + q\left(1 - \frac{1}{2q}\right)^n + \ldots + q\left(1 - \frac{1}{mq}\right)^n + r \\ \geq \qquad q\left(1 - \frac{1}{q}\right)^n + \ldots + q\left(1 - \frac{1}{(m-1)q}\right)^n \end{cases}$$

Stąd (pisząc $q = q(n)$, $r = r(n)$):

$$\frac{q(n)}{n} \sum_{j=1}^{m-1} \left(1 - \frac{1}{jq(n)}\right)^n \leq \frac{x_n}{n} \leq \frac{q(n)}{n} \sum_{j=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{jq(n)}\right)^n + \frac{r(n)}{n}.$$

Przy ustalonym m mamy: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{q(n)}{n} = \frac{1}{m}$, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{r(n)}{n} = 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{jq(n)}\right)^n = \mathrm{e}^{-m/j}$.

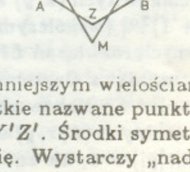
Oznaczając przez α i β granicę dolną i granicę górną ciągu (x_n/n) otrzymujemy nierówności

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m-1} \mathrm{e}^{-m/j} \leq \alpha \leq \beta \leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \mathrm{e}^{-m/j}.$$

Gdy teraz $m \to \infty$, skrajne wyrażenia dążą do wspólnej granicy $\lambda = \int_0^1 \mathrm{e}^{-1/t} dt$. Zatem $\lambda = \alpha = \beta = \lim(x_n/n)$.

Zadanie 220. [Trójkąt ABC ma kąty α, β, γ; P, Q, R to punkty styczności koła wpisanego z brzegiem ABC; trójkąt PQR ma kąty $\alpha', \beta', \gamma' \Rightarrow \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \leq \sin\alpha' \sin\beta' \sin\gamma'$.] ($WT = 1,67$; $LPR = 14$). Uogólnienia: **J. Ciach** zauważa, że teza jest słuszna, gdy P, Q, R są rzutami dowolnego punktu $M \in \triangle ABC$ na boki trójkąta; **P. Gadziński** pokazuje, że teza jest słuszna, dla dowolnych liczb $\alpha \geq \beta \geq \gamma > 0$ i $\alpha' \geq \beta' \geq \gamma' > 0$ takich, że $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma' = \pi$, $\alpha \geq \alpha'$, $\gamma \leq \gamma'$.

Zadanie 221. [Część (b): Dać przykład ściśle wypukłego środkowo-symetrycznego zbioru w $\mathbf{R}^3$ oraz wpisanego weń środkowo-symetrycznego niezdegenerowanego wielościanu tak, by środki symetrii obu figur nie pokrywały się] ($WT = 3,38$; $LPR = 4$). Przykład **P. Gadzińskiego**: Bierzemy trójkąty foremne ABC i KLM, leżące w jednej płaszczyźnie π i usytuowane, jak na rysunku. Trójkąt ABC uzupełniamy do sześciokąta foremnego $AZBXCY$. Trójkąt XYZ rzutujemy prostopadle na dwie płaszczyzny π' i π'', równoległe do π i leżące w jednakowej odległości od π, po różnych jej stronach; otrzymujemy trójkąty $X'Y'Z'$ i $X''Y''Z''$.



Niech V będzie najmniejszym wielościanem wypukłym zawierającym wszystkie nazwane punkty; przez W oznaczmy ośmiościan $ABCX'Y'Z'$. Środki symetrii wielościanów V i W nie pokrywają się. Wystarczy „nadmuchać" ściany wielościanu V, aby otrzymać zbiór ściśle wypukły, spełniający (wraz z wielościanem W) warunki zadania.

Inne dobre przykłady (bardziej skomplikowane) podali: **H. Kornacki, J. Olszewski, W. Kopczuk**.

Po 120 zadaniach i ponad sześcioletnim okresie istnienia **ligi fizycznej** pora na pewne podsumowanie. Tym bardziej że w okolicach zadania 110 nastąpiło przekazanie pałeczki redagującego ligę.

Przez ligę przewinęło się dotychczas ponad dwustu uczestników, wśród nich zaledwie trzy (!) panie. Tytuł Członka **Klubu 44F** uzyskało dziewiętnastu uczestników (dokładniej: osiemnastu uczestników i jedna uczestniczka), w tym trzech dwukrotnie, dwóch zaś trzykrotnie – uzyskując tytuł Weterana.

Wśród uczestników połowę stanowią uczniowie (około 40% wszystkich uczestników) oraz studenci – uczelni technicznych, uniwersytetów (fizyka, informatyka, matematyka), zdarzył się też student medycyny. W drugiej połowie – raczej nieskorej do bliższego ujawniania się – są inżynierowie, nauczyciele, a nawet pracownicy naukowi.

Najwytrwalsi uczestnicy pozostawali wierni lidze przechodząc ze szkoły na uczelnię lub uzyskując dyplom akademicki. Obserwowanie ich rozwoju to rzecz ciekawa sama w sobie. Cieszy też, gdy uczestnik ligi zostaje laureatem Olimpiady Fizycznej – były dwa takie przypadki. Swoistym fenomenem jest jeden z Weteranów – technik geodeta, który erudycją matematyczną mógłby zaćmić większość inżynierów i nie tylko inżynierów ...

Na początku, gdy liga była czymś nowym, wielu próbowało swych sił w jednej czy dwóch seriach zadań i na tym poprzestawało – chociaż zdarzały się powroty, nawet po paru latach. W miarę upływu czasu ta tendencja słabła i obecnie przeważają wytrwali. Dopływ nowych uczestników gwałtownie zmalał – a i starych się wielu wykruszyło – pod koniec 1989 roku, gdy opóźnienie wydawnicze *Delty* zdarzało się przekraczać nawet regulaminowy okres na nadsyłanie rozwiązań (wtedy wydłużono ten okres z dwóch do trzech miesięcy).

Uregulowanie spraw wydawniczych już nic potem nie pomogło – liczba nadsyłanych prac pozostała na bardzo niskim (niekiedy nawet jednocyfrowym) poziomie. Nie spotkały się też z liczniejszym odzewem zadania, do rozwiązania których można wprząc komputer (ale dadzą się rozwiązać i bez komputera). Zadania takie pojawiają się poczynając od numeru 9/1989. Liczymy, że rozwój komputeryzacji – zwłaszcza szkół – przyczyni się do wzrostu zainteresowania nimi.

I gorąco zachęcamy, zwłaszcza młodzież: popróbujcie swych sił w lidze, przysyłajcie też pomysły, jak ligę uczynić bardziej atrakcyjną.

A teraz omówienie wybranych zadań.

Zadanie 92. [Równowaga układu dwóch ciał na prowadnicach] ($WT = 1,23$; $LPR = 9$). Na najwyższą ocenę rozwiązali je: **A. Borowski** (zauważył, że środek masy układu porusza się po elipsie), **P. Gworys, A. Sikorski, Dz. Lipniacki, R. Panowicz, P. Perkowski**. Trzej ostatni rozpatrywali energię potencjalną układu ciał.

Zadanie 94. [Rakieta o zmiennej masie] ($WT = 2,80$; $LPR = 4$). Dobre rozwiązania analityczne przysłali **Dz. Lipniacki** (bez upraszczającego założenia o stałości przyspieszenia ziemskiego wzdłuż toru rakiety), **P. Perkowski** i **A. Sikorski**. Iteracyjnie rozwiązywał **A. Borowski**, natomiast **P. Perkowski** zastosował komputer do numerycznego rozwiązania równania różniczkowego (faktycznie była to druga metoda rozwiązywania) i do sporządzenia wykresów.

Zadanie 97. [Wodne planety] ($WT = 2,97$; $LPR = 1$) jest przykładem zadania „otwartego", w którym samemu trzeba określić, jakie mechanizmy i procesy odgrywają decydującą rolę. Tego typu zadania na ogół nastręczają trudności. Jedyne dobre rozwiązanie nadesłał **P. Gworys**.

Zadanie 98. [Ruch krążka na lodowisku] ($WT = 3,06$; $LPR = 2$). Zadanie nie cieszyło się popularnością. **L. Motyka** podał 3 tory spełniające warunki zadania, **A. Sikorski** – 10. Nikt nie posłużył się komputerem; jedynie **P. Perkowski** podał program sprawdzający poprawność rozwiązań, ale go – niestety – nie zastosował.

Zadanie 105. [Kołysanie statku przez fale] ($WT = 3,76$; $LPR = 0$). Aż dziwne, że na tak proste zadanie nie nadeszło ani jedno satysfakcjonujące rozwiązanie (pewnie dlatego, że nietypowe). W rezultacie uzyskało ono najwyższą wartość WT.

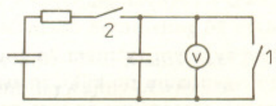
Zadanie 106. [Drgania własne zawieszonego swobodnie łańcuszka] ($WT = 2,74$; $LPR = 3$). **Dz. Lipniacki** zauważył, że problem daje się opisać równaniem różniczkowym, którego rozwiązaniem jest następujące wyrażenie na amplitudę drgań łańcuszka w odległości z od dolnego końca:

$$x(z) = \mathrm{const} \cdot J_0(2\omega\sqrt{z/g}),$$

gdzie J_0 jest funkcją Bessela. Ponieważ w górnym końcu łańcuszka amplituda drgań jest równa zeru, wyznaczenie częstotliwości drgań sprowadza się do znalezienia miejsc zerowych funkcji J_0 (są podane w specjalistycznych tablicach). Rozwiązanie takie jest bardziej eleganckie od opublikowanego w *Delcie* 12/1990, choć odczytywanie wartości z tablic niezupełnie odpowiada podanemu w zadaniu poleceniu „obliczyć numerycznie". **P. Perkowski** i **T. Wietecha** podzielili łańcuszek na n (w praktyce kilka) elementów i analizowali ich ruch stosując równania Eulera-Lagrange'a; metoda ta jest bardzo pracochłonna dla większych n, za to mało dokładna dla niezbyt dużych n. **A. Sikorski** dla odmiany otrzymał bardzo dobre wyniki doświadczalnego pomiaru okresu dwóch pierwszych drgań – znacznie lepsze od obliczonych.

Zadanie 108. [Spadający taternik] ($WT = 2,20$; $LPR = 4$) było także niekonwencjonalne. Zasadniczo dobre rozwiązania przysłali **P. Gworys, L. Motyka, T. Wietecha** i **A. Sikorski**, który jako jedyny rozpatrywał dynamikę „szarpnięcia" (patrz *Mała Delta* w numerze 7/1990). Żadne jednak z tych rozwiązań nie uwzględniło pracy (biernej) sił tarcia liny o taternika B podczas tego szarpnięcia.

Zadanie 115. [Elektryczna metoda pomiaru czasu przelotu pocisku] ($WT = 2,40$; $LPR = 5$). W kilku rozwiązaniach zastosowano odmienny od naszego (*Delta* 7/1991) obwód – jak na schemacie obok. Zamiast rozładowywania kondensatora przez opornik mamy tu jego ładowanie w czasie, jaki upływa między otwarciem klucza 1 a otwarciem klucza 2.



Zadanie 120. [Maksymalna prędkość kątowa wirującej kropli] ($WT = 3,15$; $LPR = 1$). Znalezienie ścisłego rozwiązania jest bardzo trudne i dlatego w treści zadania zamieszczona była sugestia, by przeprowadzić półjakościową, orientacyjną ocenę wyniku. W dwóch rozwiązaniach wykorzystano tę radę, ale tylko jedno z nich – **A. Sikorskiego** jest satysfakcjonujące. Umiejętność przybliżonej oceny danej wielkości, gdy nie można jej obliczyć dokładnie, jest czymś bardzo ważnym. Tym większa szkoda, że tak rzadko się ją spotyka u uczestników ligi.

DROBIAZGI

Spośród matematyków polskich rekordową liczbę publikacji miał Wacław Sierpiński (1882–1969). Opublikował on 724 artykuły i wydał 50 książek.

Tysiące szklanych kapilarek ułożonych razem i odpowiednio ukształtowanych może działać jak soczewka skupiająca promienie Roentgena. Stosując tę metodę osiągnięto około 1000-krotne zwiększenie natężenia wiązki promieni X. Być może, już w niedalekiej przyszłości nauczymy się w ten sposób kontrolować bieg promieni X z niemal równą efektywnością, co bieg zwykłego światła.

Każdego dnia spada na Ziemię prawdopodobnie około 100 ton materii meteorytowej. Większość jej pochodzi od ciał meteorowych stopionych i rozpylonych przy wtargnięciu w atmosferę. Drobne kulki (o średnicy poniżej 1 mm) tej materii znajduje się nawet w osadach oceanicznych. W 1984 r. Michel Maurette z Uniwersytetu Paryskiego zorganizował wyprawę na Grenlandię w celu poszukiwania cząstek meteorowych w jeziorkach powstających u czoła lodowców. Zgodnie z oczekiwaniami znaleziono tych cząstek sporo, bowiem są one nieustannie dostarczane do jezior przez spływające lodowce, natomiast nie wiadomo dlaczego te cząstki różnią się wyraźnie od oceanicznych. Np. okazały się one młodsze, uboższe w żelazo, za to znaleziono wśród nich kulki szklane nie spotykane w osadach oceanicznych.

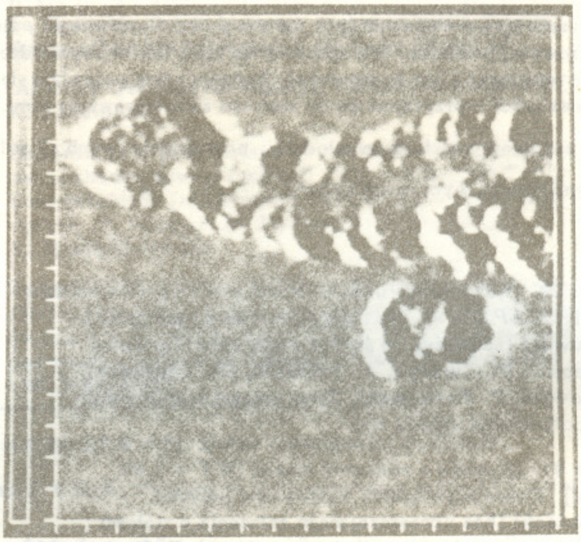
Dwa najważniejsze dla zastosowań w analizie matematycznej twierdzenia o punkcie stałym to twierdzenia polskich matematyków: twierdzenie Banacha (tzw. zasada odwzorowań zwężających) oraz twierdzenie Schaudera.

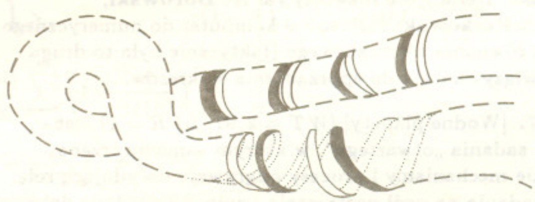
Mitchel Feigenbaum, jeden z twórców teorii chaosu, zajmował się przez pewien czas oddziaływaniem układów periodycznych o niejednakowych okresach. Chcąc lepiej wniknąć w istotę problemu postanowił dokonać szczególnego eksperymentu na sobie. Pewnego dnia, mianowicie, rozpoczął życie z 26 godzinnym cyklem dziennym. I tak każdego dnia kładł się i wstawał o różnych godzinach, oddzielonych jednak zawsze tym samym 26 godzinnym odcinkiem czasu. Oddziaływanie ze światem żyjącym rytmem 24 godzinnym okazało się bardzo trudne i Feigenbaum po kilku miesiącach przerwał swój eksperyment, szczególnie że jego pozornie nieuporządkowanym trybem życia zainteresowała się policja z Los Alamos, niedużego miasta stanu Nowy Meksyk, gdzie wówczas pracował.

Wbrew powszechnemu mniemaniu wydatki na ochronę środowiska w krajach rozwiniętych nie są wcale małe. W 1990 r. w Stanach Zjednoczonych koszty oczyszczania i neutralizacji wszelkiego rodzaju zanieczyszczeń osiągnęły 115 mld. dolarów, tj. 40% całego budżetu obronnego.

Jak wiadomo, matematycy nie otrzymują Nagrody Nobla. Odpowiednikiem Nagrody Nobla w matematyce jest medal Fieldsa przyznawany począwszy od 1936 r. na każdym Międzynarodowym Kongresie Matematycznym najwybitniejszym matematykom, którzy nie przekroczyli czterdziestego roku życia. Kongresy odbywają się przeciętnie co cztery lata. Jak dotąd, żaden Polak nie otrzymał tego medalu.

Naukowcom z Laboratoriów Lawrence'a udało się za pomocą tunelowego mikroskopu skaningowego uzyskać obraz cząsteczki DNA. Kropelka roztworu KCl zawierającego cząsteczki DNA została umieszczona na powierzchni grafitu. Po odparowaniu wody z roztworu wykonano skanowanie. Udało się zaobserwować wyraźnie oba łańcuchy podwójnej spirali DNA. W otrzymanych obrazach skok spirali wynosi od 27 do 63 angstremów.





Według hipotezy Oorta Słońce otoczone jest przez chmurę małych ciał, które od czasu do czasu zbliżając się do niego przekształcają się w komety. Chmura Oorta miałaby rozmiary rzędu 100 000 j.a. Kilka lat temu Alan Stern z University of Colorado obliczał prawdopodobieństwa uderzenia planety przez komety pochodzące ze słonecznej chmury Oorta, z domniemanych chmur Oorta innych gwiazd oraz przez komety prawdziwie międzygwiazdowe. Konkretne wyniki zależą, oczywiście, od przyjętych założeń (np. gęstości tych komet w przestrzeni), ale generalnie najbardziej prawdopodobne okazują się zderzenia planet grupy Ziemi z kometami należącymi do Słońca, a najmniej z kometami międzygwiazdowymi. Natomiast np. Jowisz najchętniej wyłapuje komety z obcych chmur Oorta. Nie wiadomo, jak można by to prosto uzasadnić. Na szczęście okazało się też, że szanse trafienia Ziemi przez duży pocisk są niemal zerowe – w ciągu całego swego życia Ziemia doznała prawdopodobnie około pięciu takich przygód.

epsilon

2/92

(12)

Galeria Jednego Cytatu

„Przy brzegu może zachowywać się paskudnie"
(z wykładu dla studentów matematyki)

Gdy symbol nieoznaczony

Gdy symbol nieoznaczony
Liczyć granic nie pozwala
To najlepiej jest skorzystać
Z reguły de l'Hospitala
Ludolfina

Czy chcąc otworzyć konserwę używamy w tym celu lasera gazowego dużej mocy? Do rzadkości należy próba zabicia muchy, brzęczącej na szybie, za pomocą wiertarki elektrycznej. Chorego na lekki katar nie wysyłamy od razu do szpitala...

szpital – po francusku l'hospital

Reguła de l'Hospitala jest wielce przydatnym, ale i bardzo subtelnym twierdzeniem. Przypomnijmy: Dane są funkcje f i g określone na podzbiorach zbioru liczb rzeczywistych, o wartościach w $\mathbf{R}$, różniczkowalne w sąsiedztwie liczby p (zamiast liczby można rozważać $p = \infty$, a sąsiedztwo może być jednostronne), przy czym $g'(t) \neq 0$ dla dowolnego t z sąsiedztwa. Jeśli $\lim\limits_{t \to p} f(t) = \lim\limits_{t \to p} g(t) = 0$ (albo ∞) i jeśli istnieje granica (może być niewłaściwa) $\lim\limits_{t \to p} \frac{f'(t)}{g'(t)} = \alpha$, to $\lim\limits_{t \to p} \frac{f(t)}{g(t)} = \alpha$.

Propozycja sugerowana w zacytowanym jako motto wierszyku Ludolfiny nie jest zbyt dobra. Dlaczego? Dla osób z niewielkim doświadczeniem matematycznym użycie tak potężnego i delikatnego narzędzia wiąże się z dużym ryzykiem.

Po zaznajomieniu się z regułą de l'Hospitala niejeden będzie próbował obliczać za jej pomocą każdą prawie granicę. A czy należy rozwiązywać zadanie przy użyciu potężnej „machiny matematycznej" w sytuacji, gdy można to zrobić zupełnie elementarnie? Ponadto, jeśli korzysta się z jakiegoś twierdzenia, to należy dokładnie znać jego sformułowanie, a w szczególności założenia. W twierdzeniu de l'Hospitala obok efektownej tezy istnieje cała lista drobnych, lecz istotnych założeń – które niewątpliwie należy sprawdzić przed zastosowaniem reguły. Dodajmy, że istnieją matematycy, którzy uważają (niejednokrotnie nie bez racji), że korzystając z jakiegoś twierdzenia wypada wcześniej zaznajomić się z jego dowodem. A dowód reguły de l'Hospitala nie jest prosty...

Przy zbyt pochopnym stosowaniu reguły de l'Hospitala łatwo o „wypadek przy pracy". Przed czym warto przestrzec?

1) Obliczając granicę, można „z rozpędu" napisać:

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ldots$$

A to przecież nie zawsze jest prawdą! Co dokładnie mówi twierdzenie? Można w ten sposób np. dojść do wniosku, że funkcja: $x \to \frac{x+\sin x}{x}$ nie ma granicy przy x dążącym do nieskończoności, bo po odpowiednim zróżniczkowaniu otrzymamy $\frac{1+\cos x}{1}$...

2) Aż się prosi, by obliczając granicę $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ zastosować regułę de l'Hospitala i zróżniczkować licznik i mianownik. Ale zaraz, zaraz! Ile wynosi pochodna funkcji sinus? To nie jest trudne, wzór można wyprowadzić z definicji pochodnej. No to wyprowadzamy i musimy po drodze skorzystać z faktu, że ... $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Błędne koło!

3) Mamy zbadać $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^2+1}{n^3 \ln n + (\ln n)^2}$. Niektórzy zastosują tu regułę de l'Hospitala. Czy wolno jednak różniczkować ciągi? Nawet jeśli można „podprowadzić" problem pod odpowiednie twierdzenie, to należy to uzasadnić – i rozwiązując zadanie, wystrzegać się zapisu typu: $(n^2+1)'$.

4) Obliczmy granicę $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3 \cos^2 x}{x^3 + \sin^3 x}$. Po chwili zastanowienia zauważymy, że wystarczy licznik i mianownik podzielić przez x^3, a wynik otrzymamy błyskawicznie. Zagorzałym zwolennikom reguły de l'Hospitala życzymy miłego różniczkowania (i to nie raz!).

5) A teraz $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arctg}(x+2)^2}$. Wzory na pochodne funkcji arctg są znane (i doprowadzają do miłych wielomianów), więc dlaczego ich nie wykorzystać – rachunki szybko dadzą wynik. Tyle że błędny... Dlaczego?

6) Przykład, w którym aż się prosi o zróżniczkowanie: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\ln(2-x)}{\ln(x-2)}$. Mamy $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\frac{-1}{2-x}}{\frac{1}{x-2}} = 1$. Rozumowanie to zawiera jednak poważny błąd. Gdzie?

7) Pomyłka, która jest niejako konsekwencją częstego, nawet poprawnego, stosowania reguły de l'Hospitala. Trzeba zróżniczkować iloraz $\frac{f(x)}{g(x)}$. Może pojawić się równość

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Nie strzelajmy z armaty do wróbli. Jeśli mamy otworzyć konserwę, to przede wszystkim używajmy otwieracza. Gdy zadanie nie wygląda na zbyt trudne, spróbujmy najpierw poradzić sobie z nim za pomocą metod najprostszych. A laser i inne subtelne narzędzia niewątpliwie się przydadzą, i to nie raz... Przed ich użyciem zapoznajmy się jednak z instrukcją obsługi!

Krzysztof CIESIELSKI, Zdzisław POGODA

EPSILON – niezależny dodatek *Delty*. Redakcja: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Sławomir Cynk, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski. Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ϵ.