



SPIS TREŚCI

NUMERU 1(212)

Wbrew zdrowemu rozsądkowi (II) <i>Tomasz Hofmokl</i>	str. 1
Kwant krętu pola elektromagnetycznego <i>Jerzy Dryzek</i>	str. 1
Konkurs	str. 4
O pewnej nierówności	str. 5
Drobiazgi	str. 6
Elementarny dowód	str. 7
Mała Delta	str. 8
Epsilon	str. 9
Ile jest torusów? <i>Marek Kordos</i>	str.10
Zadania	str.13
Klub 44	str.14
Śmierć Sokratesa	str.16
Patrz w niebo	str.17
Regulamin Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki	str.17

W następnym numerze:

O liczbach Fibonacciego

„Delta”
matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Edukacji Narodowej

Komitet Redakcyjny:
Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichocki
Roman Duda
Jan A. Gaj
Tomasz Hofmokl – wiceprzewodniczący
Tadeusz Jarzębowski
Marcin Kubiak
Andrzej Mąkowski
Andrzej Pelczar
Zbigniew Plochocki
Zdzisław Pogoda
Konrad Rudnicki
Zbigniew Semadeni
Grzegorz Sitarski
Józef I. Smak
Kazimierz Stępień
Mieczysław Subotowicz
Andrzej Szymacha
Aniela Wolska
Andrzej Woszczyk
Wojciech Żakowski – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:
Krzysztof Biesaga
Piotr Hajlasz
Krystyna Kordos – sekr. red.
Marek Kordos – red. nacj.
Paweł Krawczyk – z-ca red. nacj.
Tomasz Kwast
Stanisław Mrówczyński
Anna Rudnik
Joanna Udalska

Adres Redakcji:

Wydział Fizyki UW
ul. Smyczkowa 5/7
02-678 Warszawa

Adres poczty komputerowej
(E-mail address):
DELTA@PLEARN.BITNET

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa

Nakład 10 000 egz.
Wydrukowano
w Zakładach Graficznych
w Warszawie, ul. Srebrna 16

Skład systemem T_EX
wykonała redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na II kwartał 1992 r. wynosi 12000,- zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
 - oddziały RSW właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora – odbioru zamówionych egzemplarzy dokonuje prenumerator w wyznaczonych punktach sprzedaży lub w inny, uzgodniony sposób,
 - urzędy pocztowe i listonosze – od prenumeratorów z terenów wiejskich lub innych miejscowości, w których nie ma oddziałów RSW, a w miastach tylko od osób niepełnosprawnych – poczta zapewnia dostawę zamówionych egzemplarzy pod wskazany adres pod warunkiem uiszczenia dodatkowej opłaty za każdy doręczany egzemplarz – opłata wynosi 500,- zł od egzemplarza,
 - Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – tylko od prenumeratorów zlecających dostawę za granicę.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
 - na kraj – do 20 XI na I kwartał roku następnego
do 20 II na II kwartał
do 20 V na III kwartał
do 20 VIII na IV kwartał
 - na zagranicę – do 31 X na I kwartał
oraz do 1 dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarza zł 5 000,-

Kwant krętu pola elektromagnetycznego

Jerzy DRYZEK

Poniższy artykuł opatrzyliśmy komentarzem redakcyjnym. Zaznaczyliśmy miejsca artykułu, do których komentarz się odnosi.

Pole elektromagnetyczne (EM), będące obiektem fizycznym, ma wszystkie jego atrybuty; ma masę, pęd, a także moment pędu. Ten ostatni w odniesieniu do tego pola może być niejednokrotnie źródłem paradoksalnych zachowań układów fizycznych. Okazuje się bowiem, że izolowany układ może mieć moment pędu będąc w spoczynku, a za sprawą zasady zachowania momentu pędu może zostać wprawiony w ruch po wyłączeniu pola magnetycznego bądź elektrycznego w tym układzie. Jako przykład niech służy tzw. dysk Feynmana opisany w drugim tomie jego popularnych wykładów. Uświadomienie sobie, że taki moment pędu istnieje, pozwala czasami znacznie uprościć nasze rozumienie zjawisk elektromagnetycznych. Oto, na przykład, diamagnetyzm materii uważać można za konsekwencję zasady zachowania momentu pędu – oczywiście – po uwzględnieniu krętu pola EM.

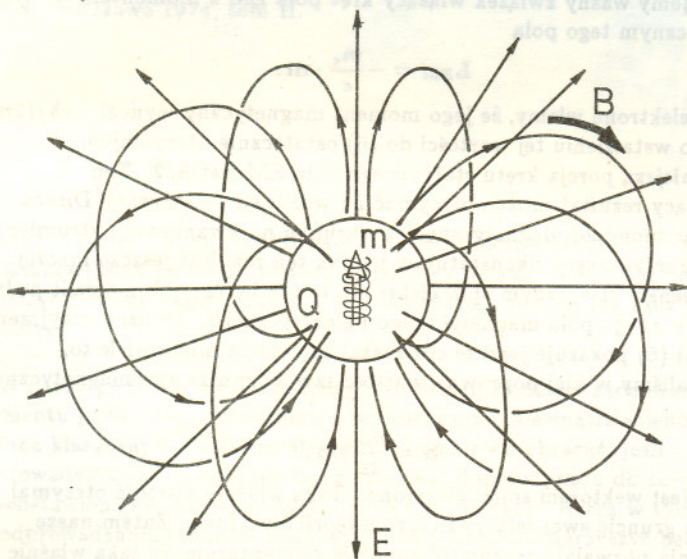
Kręt pola EM wyraża się wzorem

$$(1) \quad \mathbf{L}_{EM} = \epsilon_0 \cdot \int \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV,$$

gdzie \mathbf{E} jest wektorem natężenia pola elektrycznego, a \mathbf{B} jest wektorem indukcji pola magnetycznego w punkcie \mathbf{r} , ϵ_0 jest przenikalnością dielektryczną próżni.

Interesujące ze wszech miar jest pytanie o kwant, o najmniejszą porcję tego właśnie momentu pędu, bo przecież intuicyjnie wydaje się oczywiste, że musi on istnieć. W swoim artykule (*Delta* 10/1986, str. 14) zawarłem sugestie, która wydawała się rozsądna, że foton, a dokładniej jego spin, realizuje właśnie tę najmniejszą porcję \mathbf{L}_{EM} , czyli że wynosi ona \hbar (stała Plancka podzielona przez 2π). Niestety, wbrew zdrowemu rozsądkowi, okazuje się to nieprawdą.

Rozpatrzmy następujący układ fizyczny: niech na nieruchomej sferze o promieniu R rozłożony będzie równomiernie ładunek elektryczny Q , w środku tej sfery niech będzie umieszczony magnetyczny moment dipolowy \mathbf{m} (wytworzony np. przez niewielką cewkę zasilaną baterią), skierowany wzdłuż osi z .



Rys. 1. Rozkład pola elektrycznego i magnetycznego wokół naładowanej sfery z momentem magnetycznym w jej środku.

Wbrew zdrowemu rozsądkowi (II)

(Według wykładów radiowych z audycji IV programu – *Widnokrąg*)

Przyspieszamy, a nie
zwiększamy prędkości

Tomasz HOFMOKL

Poprzednim razem opisywałem Państwu najprostsze zjawiska, których przebieg jest dziś dla nas oczywisty, a które przeczyły zdrowemu rozsądkowi starożytnych uczonych. Cykl naszych artykułów jest poświęcony tym doświadczeniom, które wydają się przeczyć pojęciu tego, co jest możliwe i tym samym zmuszają nas do rozszerzenia naszej wiedzy o świecie.

Wydaje się, że już w tytule artykułu jest jakaś sprzeczność. Czy można przyspieszać, a jednocześnie nie zwiększać prędkości? Wydaje się, że jest to niemożliwe. A jednak ...

Zacznę od bardzo prostego doświadczenia, które w dzieciństwie większość z nas na pewno przeprowadzała po prostu w trakcie zabawy. Mam na myśli puszczanie samolotów z papieru. Ale chciałbym odwołać się do zabaw na świeżym powietrzu i to w wietrzny dzień. Samolot rzucony z wiatrem pięknie i daleko szybował. Puszczony zaś pod wiatr leciał wolno w stosunku do ziemi i po chwili zawracał. Nie było więc obojętne dla prędkości samolotu względem rzucającego, czy start odbywał się pod wiatr czy z wiatrem. Wydaje się to oczywiste. Można nawet sobie wyobrazić, że mierząc prędkość tak samo rzuconego samolotu względem ziemi w przypadku rzutu pod wiatr i z wiatrem można by wyznaczyć prędkość wiatru. Nie jest to, oczywiście, najbardziej praktyczny sposób pomiaru prędkości wiatru, ale zawsze, jakby się ktoś uparł, to taki pomiar może przeprowadzić.

O takim właśnie pomiarze chcę mówić, ponieważ jego wynik zaskoczył tych, którzy go wykonali, tak dalece był sprzeczny z tym, czego można było oczekiwać. Nie był to pomiar prędkości papierowego samolocika rzuconego z wiatrem i pod wiatr, lecz pomiar prędkości światła biegnącego w wietrze eterowym. Tu, oczywiście, należy się parę słów wyjaśnienia.

Pierwszym fizykiem, który zastanawiał się nad możliwością eksperymentalnego sprawdzenia, czy prędkość światła jest nieskończona czy skończona, był Galileusz. Wspomina o próbie takiego doświadczenia w pracy *Dialogi i dowodzenia matematyczne* wydanej w Lejdzie w 1638 r. Na dwóch odległych wzgórzach ustawili się ludzie z latarniami. Gdy jeden odsłonił latarnię, promień światła wędrował do jego towarzysza na drugim wzgórzu i gdy ten zobaczył jej światło, natychmiast odsłaniał swoją latarnię. Pierwszy obserwator mógłby na podstawie opóźnienia w widzianym błysku wyznaczyć prędkość światła. Doświadczenie nie przyniosło wyniku, bo metodą zastosowaną nie można było zmierzyć tak wielkiej prędkości sygnału. Pierwszym, który zmierzył prędkość światła, był duński astronom Olaus Roemer, który w 1676 r., pracując w obserwatorium paryskim badał zaćmienia satelity Jowisza o nazwie Io. Z jego pomiarów wynikało, że prędkość światła wynosi 214 tysięcy km na sekundę. Wartość ta odbiega od znanej dziś wartości, która jest bliska trzystu tysiącom kilometrów na sekundę, ale pamiętajmy, że było to pierwsze stwierdzenie, iż prędkość ta, jakkolwiek bardzo duża, jest skończona.

Tu się właściwie zaczyna nasza historia. Dowiadujemy się, że światło ma skończoną prędkość. Nasuwa się od razu pytanie: w czym światło się rozchodzi? Przenieśmy się od razu w dziewiętnasty wiek. Nie wchodząc w szczegóły ówczesnych poglądów na naturę światła przypomniemy tylko, że w większości teorii tłumaczących rozchodzenie się światła zakładano istnienie eteru – hipotetycznego ośrodka przenikającego wszystko i rozciągającego się wszędzie, nawet w próżni. Opierając się na dotychczasowych doświadczeniach rozumowano przez analogię. Głos może rozchodzić się tylko w jakimś ośrodku, na przykład w powietrzu lub w wodzie. Fale na jeziorze mają też swój ośrodek, w którym biegają. Jeżeli światło się rozchodzi, to musi istnieć ośrodek, który je przenosi.

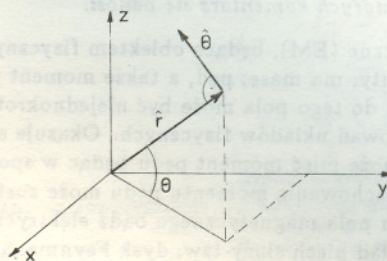
Ten hipotetyczny eter musiałby mieć niezwykle właściwości, musiałby być bardzo sprężysty, bo inaczej światło nie mogłoby biec tak prędko, a równocześnie nie mogłoby stawiać oporu w ruchu planet. Eter wiązano z absolutną nieruchomą przestrzenią mechaniki Newtona i w pewnym sensie był on jej materializacją.

Wiedzano, że Ziemia pędzi w przestworzach w ruchu wokół Słońca z prędkością około 30 km/s. Na Ziemi wieje więc huragan eteru, którego my wprawdzie nie odczuwamy, ale delikatne światło, dla którego eter jest nośnikiem,

Obliczmy teraz moment pędu pola EM w tak skonstruowanym układzie. We wnętrzu sfery pole elektryczne jest równe zeru, zatem interesująca dla nas będzie zachowanie się pola \mathbf{E} i \mathbf{B} poza sferą. I tak pole elektryczne i magnetyczne dla $r > R$ będą równe

$$(2) \quad \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{m}{r^3} \cdot (2 \cos \theta \cdot \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}}),$$

gdzie $\hat{\mathbf{r}}$ i $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ są wersorami skierowanymi odpowiednio w kierunku wektora \mathbf{r} i prostopadle do niego w kierunku wzrostu kąta θ , a μ_0 jest przenikalnością magnetyczną próżni.



Rys. 2

Wektor Poyntinga, czyli strumień energii poza sferą, jest równy

$$(3) \quad \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{Qm}{(4\pi)^2 \epsilon_0 r^5} \cdot \sin \theta \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}},$$

gdzie $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ jest wersorem skierowanym w kierunku wzrostu kąta ϕ . Podstawiając powyższe do (1) i zauważając, że ze względu na symetrię pól tylko składowa w kierunku z wniesie wkład do L_{EM} , otrzymujemy

$$(4) \quad L_{EM} = \frac{\mu_0 m Q}{(4\pi)^2} \cdot \int_R^\infty dr \cdot \int_0^\pi r^2 \sin \theta \left(\frac{\sin \theta}{r^5} \right) 2\pi \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{mQ}{3R}.$$

Obliczony moment pędu odnosi się tylko do statycznego pola EM i gdyby teraz w jakiś sposób odprowadzić ładunek Q lub przerwać dopływ prądu do cewki wytwarzającej moment magnetyczny, to sfera znacznie się obracać wokół osi z , a jej mechaniczny moment pędu, zgodnie z zasadą zachowania momentu pędu, będzie równy L_{EM} (komentarz).

Niech nasza sfera wyobraża klasyczny model elektronu. Wówczas $Q = -e$, masa zaś elektronu m_e (pomnożona przez c^2) równa jest jego energii elektrostatycznej. Klasyczny promień takiego elektronu będzie równy

$$(5) \quad R = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{m_e c^2},$$

gdzie c jest prędkością światła (komentarz). Podstawiając (5) do (4) otrzymujemy ważny związek wiążący kręt pola EM z momentem magnetycznym tego pola

$$(6) \quad L_{EM} = -\frac{m_e}{e} \cdot \mathbf{m}.$$

Z teorii elektronu wiemy, że jego moment magnetyczny wynosi $-e\hbar/(2m_e)$, zatem po wstawieniu tej wartości do (6) ostatecznie otrzymujemy, że najmniejszą porcją krętu statycznego pola EM jest $\hbar/2$. Ten zaskakujący rezultat można otrzymać i z warunku kwantyzacji Diraca angażując monopol magnetyczny, i z warunku na kwantyzację strumienia pola magnetycznego. Skonstatujmy jednak ten rezultat jeszcze inaczej. Otóż w sensie klasycznym spin elektronu to nic innego jak moment pędu jego statycznego pola magnetycznego i elektrycznego. Uważne przyjrzenie się relacji (6) pokazuje jeszcze coś zaskakującego, a mianowicie to, że uzyskaliśmy w niej poprawną wartość tzw. czynnika żyromagnetycznego $g = 2$

$$(7) \quad \mathbf{S} = \frac{m_e}{2e} g \mathbf{m},$$

gdzie \mathbf{S} jest wektorem spinu elektronu. Taką właśnie wartość otrzymał Dirac na gruncie swej relatywistycznej teorii elektronu. Zatem nasze rozważania pozwalają zrozumieć zupełnie elementarnie, że taka właśnie wartość czynnika g jest wynikiem własności pól elektronu, a nie trudnej do zrozumienia teorii Diraca (komentarz).

Warto w tym miejscu uświadomić sobie, że rozpatrując klasyczny elektron jako „kulę bilardową” o promieniu R ze wzoru (5), mającą kręt własny równy $\frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$, otrzymamy na jej powierzchni maksymalną prędkość około 300 razy większą od prędkości światła. Zatem istotnie klasyczne wyobrażenia spinu elektronu jako mechanicznego krętu wokół jego osi jest mocno niepewne.

Otrzymany przez nas wynik niesie w sobie jeszcze jedną niespodziankę. Rozpatrywany w szkole model Bohra atomu wodoru to nic innego jak pewien układ pól EM. Po orbicie wokół ładunku dodatniego (protonu) krąży ujemnie naładowany elektron. Postulaty Bohra, pozwalające wyjaśnić serie widmowe atomu wodoru, pojawiają się *a priori* i dopiero głębsze studia pozwalają je wyprowadzić. O ile drugi postulat o kwantowaniu energii emitowanego z atomu fotonu można wydedukować z hipotezy Plancka postawionej do opisu ciała doskonale czarnego, to pierwszy postulat o momencie pędu elektronu na stacjonarnej orbicie (patrz poniżej) nie znajduje łatwego uzasadnienia bez wejścia w mechanikę kwantową. Rozpatrzmy jednak pola w takim modelu atomu wodoru. Proton wytwarza radialne pole elektryczne. Niech rozkład jego ładunku dodatniego będzie taki jak w naszym klasycznym modelu elektronu. Krążący elektron zaś to nic innego jak zamknięty obwód z prądem, który wytwarza moment magnetyczny prostopadły do płaszczyzny ruchu

$$(8) \quad \mathbf{m}_{orb} = -\frac{e}{2m_e} \cdot \mathbf{L}_{orb},$$

gdzie \mathbf{L}_{orb} jest momentem orbitalnym krążącego elektronu. Wraz z istnieniem równocześnie dwóch składowych pola EM musi istnieć jego kręt. Ponieważ przedstawiony model atomu wodoru ma rozkład pól identyczny jak analizowany powyżej model elektronu, zatem podstawiając (8) do (6) otrzymujemy

$$(9) \quad \mathbf{L}_{EM} = \frac{\mathbf{L}_{orb}}{2}.$$

Z kolei wiemy, że najmniejszą porcją dla \mathbf{L}_{EM} może być $\hbar/2$ lub jej wielokrotność, zatem ostatecznie otrzymujemy, że

$$(10) \quad \mathbf{L}_{orb} = n\hbar,$$

co jest niczym innym jak pierwszym postulatem Bohra.

Być może, wielu wyda się nieprawdopodobne, aby coś tak subtelnego, tajemniczego i – by pojąć – wymagającego ogromnej wiedzy z mechaniki kwantowej – jak spin elektronu, było w sensie klasycznym po prostu krętem pola EM wytworzonego wokół tej cząstki. No cóż, czasami tak to bywa z rzeczami oczywistymi.

Literatura

R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *Feynmana wykłady z fizyki*, PWN, Warszawa 1974, tom II.

Komentarz

Artykuł Jerzego Dryzka wydał nam się zdecydowanie ciekawy i postanowiliśmy go opublikować. Uznaliśmy jednak, że artykuł należy opatrzyć komentarzem, gdyż pewne stwierdzenia autora, jak sądzimy, idą za daleko.

I tak nasza pierwsza uwaga dotyczy obserwacji, że dzięki zachowaniu momentu pędu naładowana sfera z umieszczonym wewnątrz solenoidem, będąca klasycznym modelem elektronu, zacznie się obracać, jeśli odprowadzić ze sfery ładunek bądź przerwać dopływ prądu do cewki. Przedstawiona sytuacja jest tylko jedną z możliwych. Rzecz w tym, że odprowadzaniu ładunku bądź wyłączeniu prądu towarzyszyć będzie powstanie zmiennego w czasie pola elektromagnetycznego i emisja fali elektromagnetycznej, która może unieść moment pędu naszego klasycznego elektronu. Wówczas sfera nie będzie się obracać.

musi odczuwać ten wiatr. Prędkość światła mierzona względem Ziemi pod wiatr eterowy powinna być mniejsza niż z wiatrem. Wpływ będzie mały, bo 30 km/s to mało w porównaniu z trzystoma tysiącami kilometrów na sekundę, ale dokładne pomiary powinny wpływ ten wykryć. Byłoby to proste potwierdzenie tego, czego się spodziewano, więc właściwie niezbyt ciekawy eksperyment, którego wynik logicznie można przewidzieć. Podjął się przeprowadzenia takiego doświadczenia Albert Michelson, fizyk amerykański polskiego pochodzenia, urodzony w 1852 r. w Strzelnie w Wielkopolsce. Mierzył on różnicę prędkości światła w kierunkach wzajemnie prostopadłych sądząc, że w ten sposób wykaże istnienie wiatru eterowego.

Wynik doświadczenia był negatywny, żadnego wiatru eterowego nie udało się wykryć mimo ogromnej dokładności pomiarów. Było to tak nieoczekiwane i, dodajmy, sprzeczne ze zdrowym rozsądkiem, że wielu fizyków nie dało temu wiary. Konieczne stało się w tej sytuacji powtórzenie eksperymentu. Dokonał tego Michelson wraz z E. Morleyem. Zwiększono dziesięciokrotnie dokładność i znowu wynik był negatywny. Wiatru eterowego nie ma, a może nie ma eteru? A może trzeba zaproponować coś całkiem innego, zwariowanego i sprzecznego ze zdrowym rozsądkiem? Może prędkość światła nie zależy od prędkości źródła i jest zawsze w próżni stała. Pomyślmy nad tym, to przecież przeczy naszym codziennym obserwacjom. Kamień rzucony przez okno pędzącego pociągu (tego, oczywiście, nie należy robić) w kierunku ruchu na pewno porusza się szybciej względem torów niż kamień rzucony w tym samym kierunku przez dróżnika (ten chyba nie rzuca kamieniami). Przecież kamień wyrzucony z pociągu ma prędkość pociągu i prędkość nadaną przez rzucającego. My zaś chcemy założyć, że światło wysłane przez latarnie elektrowozu ma tę samą prędkość, co światło emitowane przez lampę na przejeździe kolejowym. Czy to nie wydaje się absurdalne? A jednak taki właśnie postulat wysunął Albert Einstein w 1905 r. w swojej pracy *O elektrodynamice ciał w ruchu*. Założył on po prostu, że prędkość rozchodzenia się jakichkolwiek sygnałów elektromagnetycznych w próżni jest stała i nie zależy od ruchu źródła ani od ruchu obserwatora i, co więcej, jest to maksymalna prędkość, z jaką można przekazywać sygnały w przyrodzie. Można, oczywiście, postulować każdą niedorzeczność. Postulat taki ma tylko wtedy wartość, jeżeli można sprawdzić doświadczalnie wnioski, jakie z takiego założenia wynikają. Założenie o stałości prędkości światła legło u podstaw tak zwanej szczególnej teorii względności, która jest dziś teorią bardzo dobrze

zgadzającą się z doświadczeniem, ale już nie tak dobrze z naszym poczuciem tego, co jest możliwe, a co nie. W wielu swoich wynikach jest ona, szczególnie teoria względności, sprzeczna ze zdrowym rozsądkiem i trzeba ją jakoś włączyć do zbioru naszej wiedzy, czyli zmienić kryteria zdrowego rozsądku w taki sposób, aby coś, co jest prawdziwe, nie wydawało się niemożliwe.

Powiedziałem, że szczególna teoria względności jest prawdziwa. Co to znaczy? A tylko tyle, że wszystkie przewidywania tej teorii, jakie umiemy wyprowadzić, zgadzają się z doświadczeniem.

Doświadczeń potwierdzających szczególną teorię względności jest dziś bardzo wiele. Warto wspomnieć chociaż o kilku takich doświadczeniach. Jedno nazwałbym doświadczeniem z szybko poruszającą się latarką. Zmierzymy prędkość światła wysyłanego przez nieruchomą względem obserwatora latarkę i następnie powtórzmy ten sam pomiar wprawiając latarkę w ruch z prędkością bliską prędkości światła. Czy to możliwe? Zaraz się o tym przekonamy. Muszą się Państwo zgodzić, aby nazwą latarki objąć każde źródło światła. W szczególności niech naszą latarką będą mezonony π^0 . Cóż to takiego, może ktoś zapytać. Otóż w katalogu różnych cząstek, jakie zna przyroda, figurują również cząstki, które są prawie trzysta razy cięższe od elektronów, obojętne elektrycznie i bardzo krótkożyłowe. Po swoim króciutkim życiu rozpadają się przeważnie na dwa fotony, czyli na dwie porcje promieniowania elektromagnetycznego, można by powiedzieć, na dwie porcje światła, tylko w zakresie niewidzialnym dla ludzkiego oka. Mezonon π^0 możemy więc traktować jak latarkę wysyłającą promieniowanie elektromagnetyczne. Umiemy nadawać tym mezononom bardzo duże prędkości. W jednym z doświadczeń wykonanym w międzynarodowym laboratorium CERN pod Genewą przez zespół pod kierunkiem Alvagera utworzono wiązkę bardzo wielu mezononów π^0 o prędkości 299 717 km/s. Prędkość światła wynosi zaś 299 792 km/s. Uzyskano więc prędkość niezwykle zbliżoną do prędkości światła. Możemy więc mówić o latarce poruszającej się prawie z prędkością światła. Pędzące mezonony rozpadają się emitując falę elektromagnetyczną. Pytamy, z jaką prędkością biegnie ta fala? Dokonano pomiaru tej prędkości i okazało się, że zmierzona prędkość fali elektromagnetycznej, powstałej w wyniku rozpadu pędzących mezononów, jest dokładnie taka sama jak światła wysyłanego przez źródło w spoczynku. Einstein miał rację. Jego postulat stałości prędkości światła został potwierdzony

Autor uzyskuje zaskakujący wynik, że minimalny moment pędu statycznego pola elektromagnetycznego wynosi $\hbar/2$, nie zaś \hbar (jak można było oczekiwać) przy wyborze szczególnej wartości elektromagnetycznej masy elektronu, a mianowicie

$$(1) \quad m_e c^2 = \frac{2}{3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R}$$

Jeśli przyjąć, że masie elektronu odpowiada elektrostatyczna energia zgromadzona w kuli o promieniu R , otrzymujemy współczynnik 3/5 zamiast 2/3 w równaniu (1), które natomiast można otrzymać uwzględniając dodatkowo energię niesioną przez pole magnetyczne. Obie te interpretacje masy elektronu mają jednak tę wadę, że nie uwzględniają pewnych sił (których istnienie klasyczny model elektronu powinien zakładać), a zatem i energii z nimi związanej, sprawiających, że nasza naładowana kulka nie rozlatuje się na kawałki na skutek elektrostatycznego odpychania jednoimiennych ładunków.

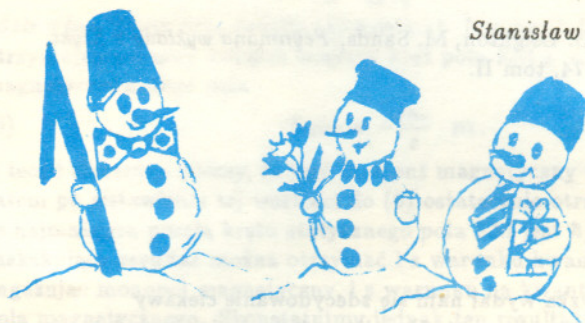
Nie można uznać opisanego modelu elektronu za całkowicie klasyczny, gdyż autor „przemycza” do swoich rozważań *kwantową* wielkość momentu magnetycznego elektronu $-e\hbar/(2m_e)$.

Wymaga również komentarza użycie w artykule wielkości „krętu własnego” czy raczej spinu elektronu $\sqrt{3}\hbar/2$, nie zaś powszechnie przyjętej wartości $\hbar/2$. Rzecz w tym, że autor interpretuje w sposób *klasyczny* pewne wyrażenia otrzymane na gruncie mechaniki kwantowej. Przyjmuje on mianowicie, że moment pędu układu wyraża się wzorem $\sqrt{l(l+\hbar)}$, gdzie l można uważać za maksymalną wielkość rzutu momentu pędu na dowolnie wybraną oś. Wówczas przy $l = \hbar/2$ otrzymujemy wartość momentu pędu $\sqrt{3}\hbar/2$. Jeśli natomiast przyjąć, że moment pędu równy jest maksymalnej wielkości rzutu, co zachodzi zarówno w mechanice klasycznej, jak i kwantowej, to otrzymujemy standardową wartość momentu pędu równą $\hbar/2$.

I jeszcze jedna uwaga. Przedstawiony model spinu może być jedynie zastosowany do cząstek naładowanych, takich jak elektron. Spin jednak mają również niektóre cząstki neutralne i przedstawiony model zupełnie wówczas zawodzi.

Czytelnik może zapytać, czy wobec tylu krytycznych komentarzy omawiany artykuł w ogóle powinien się w *Delcie* ukazać. Naszym zdaniem tak. Problem, czym jest spin, nurtuje wielu fizyków, autor artykułu zaś przedstawiając ciekawe rozważania próbuje ten problem rozwiązać. A to, że się w wielu punktach nie zgadzamy? Cóż, fizyka, nie ta ze szkolnych podręczników, ale ta, jaką obecnie się „robi”, taka właśnie często bywa.

Stanisław MRÓWCZYŃSKI



Konkurs

Jedyny znany dowód poniższego twierdzenia jest bardzo, bardzo nieelementarny (szkic tego dowodu był opublikowany w *Delcie* 6/1988). Ogłaszamy więc otwarty konkurs na elementarny dowód. Jeśli nie będzie on zbyt długi, to z chęcią go opublikujemy. A poza tym będzie to z pewnością bardzo dobry temat na Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki.

A oto zapowiedziane twierdzenie:

Kwadratu nie można podzielić na nieparzystą liczbę trójkątów o równych polach.

Redakcja

O pewnej nierówności

Udowodnimy na początku następujące

Twierdzenie. Jeżeli $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ oraz j_1, j_2, \dots, j_n jest permutacją ciągu $1, 2, \dots, n$, to

$$a_1 b_n + \dots + a_n b_1 \leq a_1 b_{j_1} + \dots + a_n b_{j_n} \leq a_1 b_1 + \dots + a_n b_n.$$

Dowód. Naszkicujemy tylko uzasadnienie prawej nierówności (dowód lewej jest analogiczny). Dowód indukcyjny sprowadza się do wykazania następującej nierówności:

$$a_1 b_k + a_l b_1 \leq a_1 b_1 + a_l b_k.$$

Ta zaś nierówność równoważna jest następującej oczywistej nierówności:

$$a_1(b_1 - b_k) + a_l(b_k - b_1) = (a_l - a_1)(b_k - b_1) \geq 0.$$

Pokażemy teraz kilka zastosowań udowodnionego przez nas twierdzenia.

Przykład 1. Jeżeli $x_1, \dots, x_n > 0$, to

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$

Dowód. Niech a_1, \dots, a_n będzie taką permutacją ciągu x_1, \dots, x_n , że $a_1 \leq \dots \leq a_n$. Wówczas jeżeli przyjmiemy $b_i = 1/a_{n+1-i}$ dla $i = 1, \dots, n$, to $b_1 \leq \dots \leq b_n$. Stąd dla pewnej permutacji (j_i) mamy

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} = a_1 b_{j_1} + \dots + a_n b_{j_n} \geq a_1 b_n + \dots + a_n b_1 = n.$$

Przykład 2. Jeżeli $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ oraz $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$, to

$$n \sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right).$$

Dowód.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i b_i &\geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n, \\ \sum_{i=1}^n a_i b_i &\geq a_1 b_2 + a_2 b_3 + \dots + a_n b_1, \\ \sum_{i=1}^n a_i b_i &\geq a_1 b_3 + a_2 b_4 + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_2, \\ &\dots \\ \sum_{i=1}^n a_i b_i &\geq a_1 b_n + a_2 b_1 + \dots + a_n b_{n-1}. \end{aligned}$$

Dodając stronami i przypatrując się uważnie prawej stronie otrzymamy żadaną nierówność.

Przykład 3. Jeżeli funkcje f i g są ciągłe, niujemne i niemalejące na przedziale $[0, 1]$, to

$$\int_0^1 f(x)g(x) dx \geq \left(\int_0^1 f(x) dx \right) \left(\int_0^1 g(x) dx \right).$$

Dowód. Ustalmy n . Niech $a_i = f\left(\frac{i}{n}\right)$, $b_i = g\left(\frac{i}{n}\right)$. Korzystając z przykładu 2 mamy nierówność:

$$\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) g\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \geq \left(\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \right) \left(\sum_{i=1}^n g\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \right).$$

Stąd przechodząc do granicy przy n dążącym do nieskończoności otrzymamy tezę.

Podobnie można udowodnić, że jeżeli funkcja f jest niemalejąca, funkcja zaś g jest nierosnąca, to

$$\int_0^1 f(x)g(x) dx \leq \left(\int_0^1 f(x) dx \right) \left(\int_0^1 g(x) dx \right).$$

Bogdan WOJCIESZYK

doświadczalnie. Czy przez to postulat ten staje się zrozumiały, czy umiemy sobie wyobrazić, jak to jest możliwe? Wątpię. Do tego trzeba się przyzwyczaić. Można się zapytać, a jak to jest z rzucaaniem kamienia z pędzącego pociągu. Kamień na pewno porusza się szybciej niż kamień rzucony przez dróżnika. Czy fizyka kamienia jest inna niż fizyka światła? Byłoby to również niezrozumiałe. Otóż, szczególna teoria względności umie te sprzeczności pogodzić. Fizyka kamienia i fizyka światła jest jedna. Wzory szczególnej teorii względności są słuszne i dla dużych, i dla małych prędkości. Dla małych prędkości przewidywania szczególnej teorii względności prawie nie różnią się od tego, czego oczekiwaliśmy na podstawie wzorów fizyki klasycznej, które są w tym zakresie prędkości wzorami przybliżonymi, ale dającymi bardzo dobre wyniki. Kamień porusza się wolno w stosunku do prędkości światła, więc można z powodzeniem stosować wzory uproszczone. Dla obiektów poruszających się z prędkościami porównywalnymi do prędkości światła robić tego nie wolno.

Pokażmy to na przykładzie. Niech pociąg jedzie z prędkością stu kilometrów na godzinę. Niech prędkość rzuconego kamienia względem pociągu wynosi 10 kilometrów na godzinę. Z doświadczenia wiemy, że prędkość kamienia względem ziemi będzie równa sumie tych obu prędkości, czyli 110 kilometrów na godzinę. Szczególna teoria względności mówi co innego. Prędkość ta będzie mniejsza od sumy prędkości i wyniesie nie 110 km/h, ale mniej, z tym że różnica wystąpi na piętnastym miejscu po przecinku. Dla prędkości spotykanych w życiu codziennym jest to różnica nie do zauważenia. Co innego, gdyby i pociąg, i kamień poruszały się z prędkością np. połowy prędkości światła. Wtedy prędkość wypadkowa nie równałaby się sumie, czyli prędkości światła, tylko 0,8 prędkości światła. A to już byłoby zauważalne.

Jak to więc jest z tym tytułowym przyspieszaniem? Otóż, póki poruszamy się z prędkościami małymi w porównaniu z prędkością światła, to możemy normalnie przyspieszać. Rakieta kosmiczna porusza się wolno. Przy włączonym silniku nabiera coraz większej prędkości. I to jest dla nas zrozumiałe. A gdyby to była superrakieta pędząca z prędkością bliską prędkości światła, to co wtedy? Również można by włączyć jakiś silnik, np. fotonowy. Silnik mógłby pracować, a rakieta zwiększałaby energię, ale prawie nie zwiększałaby się jej prędkość. Jak to możliwe? Otóż, wzrastałaby masa rakiety. O tym, że każdy z nas ma masę kilku ton i przeżył już tysiąc lat, opowiem w następnym artykule.

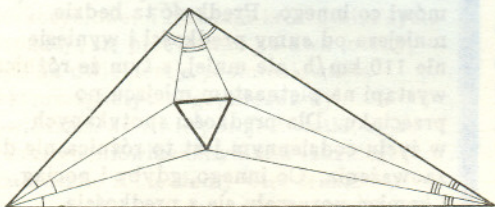


DROBIAZGI

Wszystko wskazuje na to, że w centrum Wielkiej Mgławicy w Andromedzie M31 jest czarna dziura o masie 10^7 mas Słońca. Do takiego wniosku doszedł John Kormendy (Dominion Astrophysical Observatory) obserwując tę galaktykę dużym teleskopem na Hawajach. Miejsce to odznacza się wyjątkowo dobrym seeingiem (spokojną atmosferą nie powodującą drgań obrazów gwiazd), dzięki czemu można osiągać rozdzielczość $0,75$ i śledzić ruchy gwiazd w galaktyce bardzo blisko jej jądra. Charakter tych ruchów może posłużyć do oszacowania masy centralnej. Z badań Kormendy'ego wynikało, że w obszarze o średnicy nie większej niż $1,5$ pc jest skupiona taka właśnie masa, w dodatku dająca dziesiątki razy mniej światła, niż dawałaby, gdyby tworzyły ją gwiazdy. Najłatwiej fakt ten wytłumaczyć właśnie obecnością czarnej dziury, chociaż zagadkowa staje się wtedy bardzo słaba aktywność jądra M31.



Jeżeli każdy kąt trójkąta został podzielony na trzy równe części, to linie podziału leżące przy tym samym boku przecinają się w punktach tworzących trójkąt równoboczny. Niezależnie od tego, jaki to trójkąt.

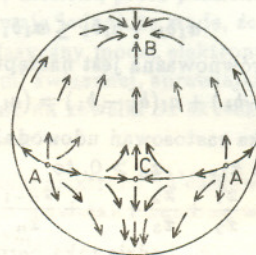


Badacze z Naval Air Development Center w Warminster (Pennsylvania, USA) stwierdzili, że meteoryty można znajdować w lodach Antarktydy za pomocą radaru. Okazało się, że pięciokilogramowe bryłki może zauważyć radar zainstalowany w samolocie, a kilkakrotne przeczesanie jednego obszaru może ujawnić na nim bryłki jeszcze mniejsze. Ocenia się, że tą metodą można prześledzić 1000 mil kwadratowych terenu na godzinę.



Kometa Halleya, najokazalsza kiedyś ze wszystkich regularnie się pojawiających komet, została w ostatnim pojawieniu zaobserwowana po raz pierwszy przy rekordowo małej jasności: $24,2$ mag. Również rekordowa była wtedy jej odległość od Słońca: 16 X 1982 r. wynosiła ona $11,4$ j.a. Najdalej od Słońca w chwili odkrycia znajdowała się natomiast kometa 1976c Schuster: $7,41$ j.a.

Jeśli po powierzchni kuli cieknie miód, to ruch jego cząstek w dowolnym punkcie opisuje zaczepiony tam wektor prędkości. Mamy więc sferę oblepioną polem wektorowym. W niektórych punktach wektor ten ma długość zero – są to miejsca osobliwe pola. Osobliwości mogą być w zasadzie trzech typów: źródło (A), ściek (B) lub siodło (C). Okazuje się, że osobliwości pola są w pewnym stopniu wymuszone przez kształt sfery, na której $(\text{liczba źródeł}) - (\text{liczba siodła}) + (\text{liczba ścieków}) = 2$.



Stąd np. wynika, że nie może być w ogóle ciągłego pola bez żadnej osobliwości, tj. sfery nie można „uczesać”.



Jedno uderzenie skrzydeł motyla może po odpowiednio długim czasie wywołać huragan: Do takiego wniosku doszedł w latach 60. Edward N. Lorenz, meteorolog z MIT. W układach chaotycznych – takich jak ruch mas powietrza – niewielkie zakłócenie warunków początkowych może spowodować szybko narastające z upływem czasu zmiany sytuacji. Wynika stąd górna granica czasowa jakichkolwiek szczegółowych prognoz meteorologicznych – około dwóch tygodni. Ponieważ jednak obecnie w miarę niezawodne prognozy sięgają zaledwie 36 godzin, więc pozostaje duży margines na ich udoskonalenie.



Pierwszą uwiecznioną w historii kometą była zapisana w chińskich kronikach kometa z 2316 r.p.n.e. Pierwszą obserwowaną przez teleskop była kometa 1618 I. Obserwowali ją Johann Kepler w Austrii, Johann Baptist Cysat w Szwajcarii, oraz John Bainbridge w Anglii. Odkryta zaś przez teleskop została jako pierwsza Wielka Kometa 1680. Odkrył ją 14 XI 1680 r. w Coburgu (Niemcy) Gottfried Kirch, współpracownik Jana Heweliusza.



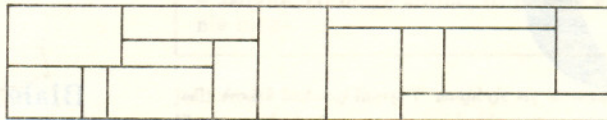
Na granicy Ryb i Andromedy leży galaktyka znana jako NGC 262, zaliczana też do galaktyk Seyferta (pewien typ galaktyk z aktywnym jądrem). Jednak jej obraz w świetle niebieskim jest drastycznie inny niż w czerwonym – przede wszystkim jest kilkakrotnie większy. Potwierdzają to też obserwacje radiowe na fali wodorowej 21 cm. W rezultacie galaktyka została wciągnięta do katalogu osobliwie niebieskich obiektów jako Markarian 348. O ile znajomość stałej Hubble'a, a więc odległość tej galaktyki, jest pewna, to obiekt ten jest – być może – największą znaną dotychczas galaktyką. Jej rozmiary wynosiłyby 400 kpc, a więc o ponad rząd wielkości przewyższałyby rozmiary naszej Galaktyki.

Jest to drugie elementarne rozwiązanie tego zadania zamieszczone w *Delcie*. Pierwsze zostało zamieszczone w numerze 11/1991.

Elementarny dowód

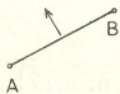
Poniższe zadanie wraz z adnotacją, że redakcja nie zna elementarnego rozwiązania zostało zamieszczone w *EPSILONIE* nr 7 (*Delta* 9/1991).

Prostokąt P dzielimy na skończoną liczbę mniejszych prostokątów (w ten sposób, że dowolne dwa z nich mogą zahaczać o siebie jedynie bokami – porównaj z rysunkiem). Załóżmy, że każdy z mniejszych prostokątów ma przynajmniej jeden bok o długości będącej liczbą całkowitą. Udowodnić, że prostokąt P ma bok o długości będącej liczbą całkowitą.



Rozwiązanie zadania M 619.

Jeżeli liczba zapisana w punkcie A jest mniejsza od liczby zapisanej w sąsiednim punkcie B , to rysujemy strzałkę w lewo od odcinka AB (idąc z A do B), jak na rysunku:



Jeżeli liczby zapisane w wierzchołkach jakiegoś trójkąta rosną zgodnie z ruchem wskazówek zegara, to wewnątrz tego trójkąta leży jedna strzałka, jeżeli w kierunku przeciwnym – to dwie. Oznaczmy przez n liczbę trójkątów drugiego rodzaju. Wówczas całkowita liczba strzałek leżących wewnątrz sześciokąta równa jest $2n + (24 - n) = 24 + n$. Wystarczy teraz zauważyć, że musi ona być nie mniejsza niż 31 (30 strzałek pochodzi od wewnętrznych odcinków i co najmniej jedna od granicznych).

A oto elementarny dowód.

Niech wierzchołki prostokąta P mają współrzędne $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, b)$ i (a, b) . Załóżmy, że $b \notin N$. Mamy wykazać, że $a \in N$.

Dzieląc w razie potrzeby prostokąt, z których składa się prostokąt P , na mniejsze prostokąciki możemy założyć, że mają one boki o długościach nie większych niż 1 (co najmniej jeden z boków ma wówczas długość 1).

Udowodnimy następujący fakt:

Niech $n \leq a$ będzie liczbą naturalną (lub zerem). Wówczas suma wysokości prostokącików przecinanych pionową prostą $x = n$ (tzn. takich, przez których wnętrze przechodzi ta prosta) jest liczbą całkowitą.

Jednak zanim udowodnimy ten fakt, pokażemy, jak za jego pomocą dokończyć zadanie.

Niech m oznacza największą liczbę całkowitą mniejszą od a (to nie to samo, co *entier*).

Ponieważ suma wysokości prostokącików przecinanych przez prostą $x = m$ oraz tych, które przylegają do niej lewym bokiem, jest równa $b \notin N$, więc – jak wynika z (*) – istnieje prostokącik przylegający lewym bokiem do prostej $x = m$, mający wysokość mniejszą niż 1. Stąd jego poziomy bok ma długość 1, a więc $a \geq m + 1$, co wobec definicji liczby m daje $a = m + 1 \in N$.

Pozostaje więc wykazać (*). Udowodnimy to za pomocą indukcji. Dla $n = 0$ – oczywiste. Wystarczy więc udowodnić, że jeżeli suma wysokości prostokącików przecinanych przez prostą $x = t$ ($0 \leq t \leq a - 1$) jest liczbą całkowitą, to suma wysokości prostokącików przecinanych przez prostą $x = t + 1$ też jest liczbą całkowitą.

Niech $\{x\} = x - [x]$ oznacza część ułamkową liczby x . Otóż wysokość prostokąta P , czyli b , jest równa sumie wysokości prostokącików przecinanych przez prostą $x = t$ oraz wysokości prostokącików przylegających do niej lewym bokiem.

Ale ponieważ suma wysokości prostokącików przecinanych jest liczbą całkowitą oraz suma wysokości prostokącików przylegających o poziomych bokach krótszych niż 1 też jest całkowita, więc $\{b\}$ jest równe

części ułamkowej sumy wysokości prostokącików przylegających lewym bokiem do prostej $x = t$, których poziomy bok ma długość 1.

Ponieważ podobnie wysokość b prostokąta P jest równa sumie wysokości prostokącików przecinanych przez prostą $x = t + 1$ oraz prostokącików przylegających do niej prawym bokiem, więc $\{b\}$ jest równe

części ułamkowej sumy wysokości prostokącików przecinanych przez prostą $x = t + 1$ oraz prostokącików przylegających do niej prawym bokiem, których bok poziomy ma długość 1.

Ale ponieważ prostokącik o boku poziomym długości 1 przylega lewym bokiem do prostej $x = t$ wtedy i tylko wtedy, gdy prawym bokiem przylega do prostej $x = t + 1$, więc z (**) i (***) wynika, że część ułamkowa sumy wysokości prostokącików przecinanych przez prostą $x = t + 1$ jest równa zero, co kończy dowód.

Bolesław GAWEL

Rozwiązanie zadania M 620. Ponieważ żadne dwie z tych lamanych nie mogą mieć wspólnego odcinka, więc w każdym spośród 12 punktów na obwodzie, z których wychodzą 3 odcinki, musi znajdować się koniec lamanej. Ale 5 lamanych może mieć co najwyżej 10 końców.

Rozwiązanie zadania M 621. Niech A, B, C będą kolejnymi wierzchołkami. Wówczas każde dwa spośród odcinków AB, BC, CA i $n - 3$ przekątnych wychodzących z B mają punkt wspólny. Trzeba więc co najmniej n kolorów. Jest to również liczba wystarczająca: należy pomalować k -tym kolorem wszystkie odcinki tworzące z bokiem AB kąt $\frac{k}{n} \cdot 180^\circ$ dla $k = 0, 1, \dots, n - 1$.



Mała delta

Białe czarniejsze od czarnego

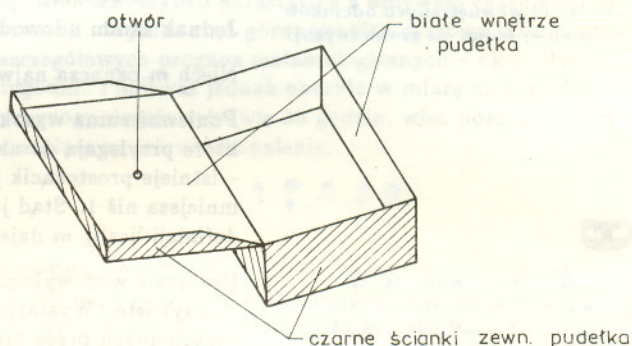
Każdy słyszał uwagę o kotach, które w nocy są wszystkie czarne, mimo że – różnej maści – w dzień są łatwo rozróżnialne. Czytelnik może sam przeprowadzić doświadczenie oparte na powyższej uwadze. Należy w tym celu wziąć dwie kartki, dla lepszego kontrastu białą i czarną, i umieścić je w pokoju absolutnie ciemnym. Jak myślicie, co zobaczycie, a ... co zobaczyliście? Okaze się, że żadnej kartki nie zobaczycie, obie będą czarne. Rodzi się pytanie o warunki, które muszą być spełnione, by biała kartka była zauważalna, lub by była czarniejsza od czarnej. Zaproponowany eksperyment w ciemnym pomieszczeniu mógłby być zignorowany, ponieważ nic nie mówimy o warunkach fizjologicznych naszego oka, które to warunki mogą być dla każdego obserwatora inne.

Zanim przejdziemy do propozycji drugiego doświadczenia, powiedzmy coś o ciele doskonale czarnym. Ciało, które przy danej temperaturze całkowicie absorbuje (pochłania) padające na nie promieniowanie w szerokim zakresie częstotliwości, jest nazywane ciałem doskonale czarnym. Domyślamy się, że jest to idealizacja i w przyrodzie ciał doskonale czarnych nie spotykamy. Takie ciała, jak sadza czy czarny tusz, są substancjami, które częściowo pochłaniają, a częściowo rozpraszają padające na nie światło.

Spróbujmy jednak z białej kartki zrobić ciało, którego własności będą bliskie własnościom ciała doskonale czarnego.

Konkretną „pomoc” dla tego doświadczenia można zrobić w następujący sposób: Z brystolu lub innego sztywnego materiału należy

wykonać otwierane pudełko o wymiarach $100 \times 100 \times 100$ mm. Wnętrze należy pomalować białą farbą lub okleić białym materiałem-kartką, a część zewnętrzną pomalować najczarniejszym tuszem, jaki mamy do dyspozycji, lub inną substancją, także, oczywiście, czarną. W jednej ze ścianek pudełka należy wykonać okrągły otwór, o średnicy nie większej niż 10 mm. Na rysunku widzimy przykład takiego pudełka.



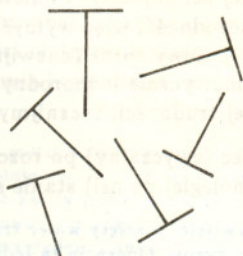
Wykonując doświadczenie należy oświetlić pudełko np. lampą stołową. Gdy to zrobicie, na pewno zobaczycie, że otwór jest czarniejszy od czarnych zewnętrznych ścianek pudełka. Teraz – w trakcie pokazu – dla efektu można otworzyć pudełko. Ukażą się wówczas naszym oczom bardzo białe ścianki, które są czarniejsze od czarnej obudowy pudełka.

Na zakończenie proponujemy zastanowić się nad warunkami, jakie powinny być stworzone, by otwór w ściance był bielszy od ścianek pudełka.

*Małą Deltę opracował na podstawie artykułu
B. B. Majera z Kwanta 10/1987
Kazimierz MIKULSKI*

Litery T i nie tylko

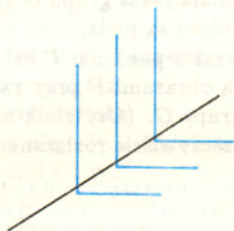
Wyobraźmy sobie, że chcemy umieścić na płaszczyźnie pewną ilość liter T (bez „grubości”, czyli złożonych tylko z odcinków). Litery te mogą być różnych rozmiarów, rozmaicie położone, chcemy jedynie, by były parami rozłączne (tzn. dwie różne nie mogą mieć punktów wspólnych).



Oczywiście, można ich „położyć” dowolną skończoną liczbę albo umieścić nieskończenie wiele. Nieskończoności jednak bywają różne...

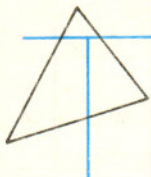
Jeśli elementy zbioru nieskończonego można ponumerować liczbami naturalnymi (ustawić w ciąg nieskończony), to zbiór taki nazywany jest *przeliczalnym*. Przeliczalny jest np. zbiór liczb całkowitych $(0, 1, -1, 2, -2, \dots)$. Ma tę własność również zbiór liczb wymiernych, oznaczany przez \mathbb{Q} . Zbiory uporządkowanych par, trójek, szóstek elementów ze zbiorów przeliczalnych (np. \mathbb{N}^2 , \mathbb{Q}^6) też są zbiorami przeliczalnymi. Każdy nieskończony podzbiór zbioru przeliczalnego jest przeliczalny. Nie wszystkie jednak zbiory nieskończone są przeliczalne; na przykład, zbiór liczb rzeczywistych czy punktów płaszczyzny w ciąg ustawić się nie da. Informacja, czy dany zbiór nieskończony jest przeliczalny, czy nie, często jest dla matematyków bardzo istotna.

Zbiór parami rozłącznych liter L na płaszczyźnie nie musi być przeliczalny. Istotnie: można narysować na płaszczyźnie prostą i w każdym jej punkcie „zaczepić” literę L jej wierzchołkiem, tak, by rysowane litery mogły być, otrzymane jedna z drugiej za pomocą przesunięcia wzdłuż prostej. Może więc być liter L tyle, ile punktów na prostej, a to jest zbiór nieprzeliczalny.



Czy w przypadku liter T wynik jest taki sam, czy też zbiór taki, jeśli jest nieskończony, musi być przeliczalny? Spróbujmy przeanalizować ten problem.

Każda litera T składa się z trzech odcinków; nazwijmy je „ogonkami”, zaś punkt, w którym się one łączą, „środkiem” litery T. Będziemy mówić, że trójkąt spełnia warunek (*) (ze względu na daną literę T),



– Ja jestem matematykiem i mam obowiązek powiedzieć państwu o rzeczach ciekawych.

– Nie wiem, czy państwa to zadowala, ale ja przynajmniej rozumiem ten dowód.

– Ja nie lubię tych bijekcji, iniekcji i suriekcji. To jest taka francuska infekcja.

– Jakby to państwu wytłumaczyć? Po prostu tak jest!

– Jedyne, co mogę zrobić, to przeprosić; nie przeciągnąć nie mogę.

Jeśli *środek* badanej litery T znajduje się wewnątrz trójkąta, zaś *ogonki* litery „wychodzą” na zewnątrz, każda przez inny bok.

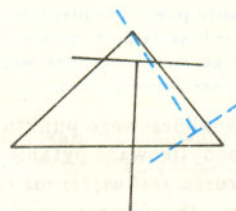
Idea rozwiązania naszego problemu polega na zauważeniu dwóch własności:

- (1) dla dowolnie położonej litery T istnieje trójkąt, spełniający ze względu na tę literę warunek (*), przy czym wierzchołki trójkąta są elementami \mathbb{Q}^2 (do \mathbb{Q}^2 należą punkty płaszczyzny, których obie współrzędne kartezjańskie są liczbami wymiernymi),
- (2) jeśli pewien trójkąt spełnia warunek (*) ze względu na dwie litery T, to litery te muszą mieć punkt wspólny.

Z tych dwóch warunków łatwo wynika, że badany zbiór liter T może być co najwyżej przeliczalny. Istotnie, jeśli litery są parami rozłączne, to nie może ich być więcej niż trójkątów o wierzchołkach z \mathbb{Q}^2 , tych zaś nie może być więcej, niż uporządkowanych „szóstek” liczb wymiernych (\mathbb{Q}^6). Ten ostatni zbiór jest zaś przeliczalny.

Jak natomiast uzasadnić własności (1) i (2)?

Wiemy, że zbiór \mathbb{Q} jest gęsty w \mathbb{R} (w dowolnym przedziale można znaleźć liczbę wymierną). Podobnie \mathbb{Q}^2 jest gęsty na płaszczyźnie – w dowolnym kole znajdziemy punkt o obu współrzędnych wymiernych. Stąd łatwo wykazać możliwość konstrukcji trójkąta z warunku (1). Przypuśćmy teraz, że trójkąt spełnia warunek (*) z dwiema literami T. Pierwsza z nich wycina z trójkąta trzy wielokąty (dwa czworokąty i jeden trójkąt). Litery mają być rozłączne, więc *środek* drugiej z nich leży wewnątrz któregoś z wielokątów.



Ogonki drugiej litery muszą jednak „wyjść” z trójkąta, a więc i z małego wielokąta. Wielokąt taki ma jedynie dwa boki zawarte w bokach wyjściowego trójkąta, tylko dwa ogonki mogą wyjść przez te boki, trzeci zatem musi przeciąć pierwszą literę T. Obie litery mają więc punkt wspólny.

Jedna kreseczka w literze powoduje zatem istotnie inny końcowy efekt. A jak jest w przypadku pozostałych liter alfabetu? Można też badać inne „znaczkę”. Można zażądać, by na badanym rysunku każda z liter była innych rozmiarów albo, by żadne dwie nie były podobne (w sensie geometrycznym) – w przypadku liter takich, jak R, nie jest to bynajmniej żądanie wygórowane... Zadań tego typu może być wiele. Czy zawsze łatwo je rozwiązać?

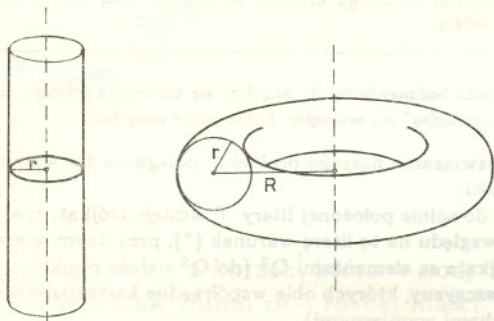
Krzysztof CIESIELSKI

EPSILON nr 11 jest inny, niż miał być pierwotnie. Planowaliśmy w styczniu 1992 umieścić rozmowę z Markiem Kordosem o Delcie, przeprowadzoną z okazji uzyskania pełnoletności przez Deltę (kończy ona właśnie 18 lat). Kolegium Redakcyjne Deltę uznało jednak, że nie wypada pisać w Delcie o Delcie. Przedstawiamy zatem numer kolejny, żalując, że z bardzo interesującymi opowieściami Redaktora Naczelnego (o kularach powstania pisma, hektarach Instytutu Badań Jądrowych i nie tylko...) nie zapoznają się Czytelnicy Deltę.

EPSILON – niezależny dodatek Deltę. Redakcja: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Sławomir Cynk, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiejchowski. Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ϵ .

Zacznijmy od pytania: czy torusów jest więcej niż walców?

Uściślijmy: przez walec będziemy rozumieli powierzchnię powstałą przez obracanie prostej względem ustalonej prostej równoległej do niej; przez torus – powierzchnię powstałą przez obracanie okręgu względem ustalonej prostej leżącej w tej samej co on płaszczyźnie i rozłącznej z nim.



Rys. 1

Wówczas odpowiedź na pytanie będzie brzmiała: *tylko samo*, bo, jak łatwo zauważyć, i walców, i torusów jest nieskończenie wiele. Jeśli jednak zmodyfikujemy pytanie i będzie ono brzmiało: czy różnych torusów jest więcej niż różnych walców?, to odpowiedź może być inna. Zależy to od jasnego określenia, jakie walce czy jakie torusy uważamy za różne. W geometrii euklidesowej za *takie same* uważa się figury podobne – mają one bowiem takie same własności geometryczne. Nie ma takiej własności geometrycznej, która przysługiwałaby jednemu kwadratowi (czy trójkątowi równobocznemu), a nie przysługiwałaby innemu.

Każdy powie: to nieprawda, mogą się różnić wielkością. Jest to jednak tylko konsekwencja faktu, że w szkole uczymy się nie geometrii euklidesowej, lecz geometrii metrycznej (wbrew powszechnemu przekonaniu).

Z euklidesowego punktu widzenia odpowiedź na zmodyfikowane pytanie będzie następująca: *różnych torusów jest więcej niż różnych walców*. Walce bowiem są wszystkie figurami podobnymi, czyli „różnych walców” jest jedna sztuka. Różnych torusów natomiast jest nadal nieskończenie wiele – te, dla których stosunki $\frac{r}{R}$ (patrz rysunek 1) są różne, nie są figurami podobnymi.

Proste stwierdzenie, że czegoś jest nieskończenie wiele, na ogół matematyków nie zadowala. Tam, gdzie jest mowa o nieskończoności, mogą się dziać różne rzeczy (np. można dowieść, że punktów odcinka jest tyle samo co punktów płaszczyzny) i dlatego, gdy czegoś jest nieskończenie wiele, pytamy: *jak?* rozumiejąc przez to nie tylko postulat określenia rodzaju nieskończoności, lecz także postulat określenia jakiejś czytelnej struktury owego nieskończonego zbioru.

Zanim odpowiemy na tak rozumiane tytułowe pytanie, poniekąd zmienimy temat. Otóż w wielu działach matematyki (np. geometria riemannowska, geometria algebraiczna) przez torus rozumie się coś innego niż określiliśmy na początku. Żeby objaśnić powód zmiany pojęcia torusa, przyjrzyjmy się wadom zwykłego torusa, o którym mówiliśmy dotąd. Walec (który znalazł się w tym artykule, by świecić dobrym przykładem) jest

jednorodny metrycznie, co oznacza, że można go bez rozciągania (czy ściągania) przesuwać i przekręcać po nim samym tak, by dowolnie wskazany punkt można było nałożyć na dowolnie wskazany inny. Zwyczajny torus nie ma tej własności. Można go co prawda przekręcać po nim samym, ale tylko „w jedną stronę”. Nie można jednak (bez rozciągania i ściągania) przekręcić go np. tak, aby jakiś punkt leżący najbliżej osi obrotu znalazł się od tej osi najdalej. Ponieważ matematycy wysoce cenią jednorodność, więc wymyślili inne pojęcie torusa. Takie, by ten nowy torus (nazwijmy go torusem abstrakcyjnym) był metrycznie jednorodny. Aby jego określenie sprawiało mniej trudności, zacznijmy od innej definicji walca.

Walec (zwyczajny) po rozcięciu wzdłuż tworzącej (prostej równoległej do osi) stanie się pasem płaszczyzny.

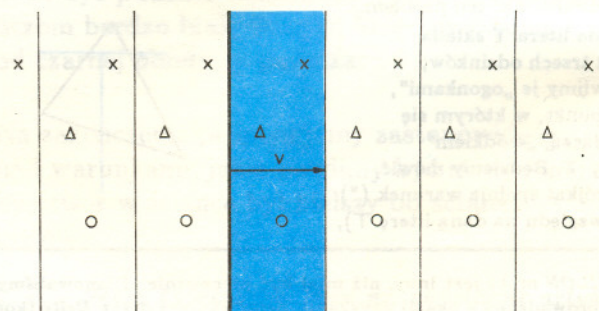
Oczywiście, rozcięty walec trzeba rozciąć, zanim będzie pasem płaszczyzny. Operacja ta jednak nie zmienia żadnej z odległości na powierzchni (nie w przestrzeni, lecz na powierzchni). Tego rodzaju operacje (tj. nie zmieniające odległości na powierzchni) tu i dalej uznajemy za dopuszczalne.

Można go więc traktować jak pas sklejoną brzegami. Można jednak na walec spojrzeć jeszcze inaczej: jest to (cała) płaszczyzna zwinięta w rurkę. Od mniej więcej stu lat operacja „zwiniania w rurkę” została zmatematyzowana w następujący sposób.

Wybermy (na płaszczyźnie) jakiś wektor v , czyli jakieś przesunięcie, i rozważmy wszystkie przekształcenia, jakie można uzyskać przez składanie takich przesunięć i przesunięć do nich odwrotnych. Otrzymamy w ten sposób grupę przekształceń nazywaną C_∞ . Składa się ona z przesunięć o wektory kv , gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą. Jeśli w jakimś zbiorze (tu: na płaszczyźnie) działa jakaś grupa G (tu: C_∞), to wszystkie elementy tego zbioru są podzielone na rozłączne klasy zwane orbitami: wraz z punktem P orbitę tworzą te wszystkie punkty, które są obrazami P przy zastosowaniu któregoś z przekształceń grupy G . (Czytelnik może sam sprawdzić, że orbity są rzeczywiście rozłączne.)

Grupa przekształceń to taki niepusty zbiór przekształceń, w którym wraz z każdym przekształceniem jest przekształcenie do niego odwrotne, a wraz z każdymi dwoma – ich złożenie.

Jeśli narysujemy na płaszczyźnie pas o brzegach prostopadłych do v i o szerokości $|v|$, przy czym jeden z brzegów zaliczymy do pasa, a drugi nie, to w pasie tym każda orbita będzie reprezentowana przez dokładnie jeden punkt.



Rys. 2. Jednakowymi znaczkami oznaczone są punkty należące do tej samej orbity.

Potraktujmy teraz każdą orbitę jako punkt nowej (abstrakcyjnej) przestrzeni. Przestrzenią tą okaże się walec. Żeby to sobie uzmysłowić (i wyobrazić sobie, jak z orbity może stać się jeden punkt), przedstawmy sobie płaszczyznę jak cienką, całkowicie przezroczystą folię i zwińmy ją tak, by punkty z jednej orbity nałożyły się, byśmy widzieli je w tym samym miejscu – rzeczywiście mamy walec.

Opisaną tu operację przejścia od jakiejś przestrzeni Π do przestrzeni orbit grupy G tej przestrzeni nazywa się często dzieleniem przez grupę, a otrzymaną przestrzeń orbit nazywa się ilorazową i oznacza Π/G .

Podejście takie dobrze demonstruje fakt, że otrzymany walec lokalnie dziedziczy własności metryczne płaszczyzny, z której powstał. Ponieważ ona była jednorodna, więc jednorodny jest i on.

Uzyskane tu dziedziczenie własności metrycznych wymaga, by grupa, przez którą dzielimy, składała się z izometrii i była jednostajnie nieciągła, co oznacza, że każdy punkt w każdej z izometrii grupy odsuwa się co najmniej o z góry zadaną odległość. Grupa obrotów o $k \cdot 90^\circ$ względem danego punktu jest przykładem grupy, która nie jest jednostajnie nieciągła, nawet gdy wyłączymy środek obrotu.

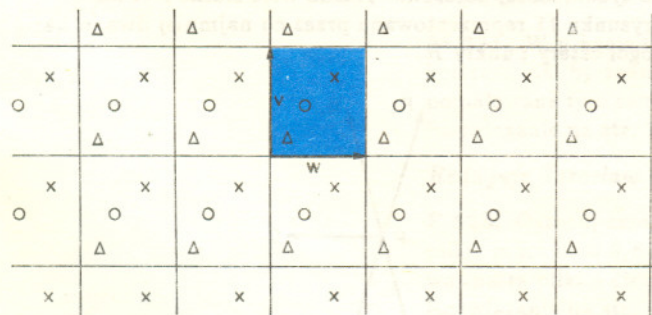
Spróbujemy teraz uzyskać w analogiczny sposób torus abstrakcyjny, czyli coś bardzo podobnego do zwyczajnego torusa, ale coś, co jest metrycznie jednorodne.

Tym razem na płaszczyźnie bierzemy pod uwagę dwa nierównoległe wektory v i w . I znów znajdujemy najmniejszą grupę, w której są przesunięcia o te wektory. Grupa ta nazywa się $p1$ i składa się z przesunięć o wektory $kv + lw$, gdzie k i l są dowolnymi liczbami całkowitymi.

Stosowniejszą nazwą tej grupy byłoby $C_\infty \times C_\infty$. Nazwa $p1$ przyjęła się dlatego, że tak oznaczono tę grupę w *International Tables for X-ray Crystallography*. Tego rodzaju grupy mają bowiem konkretne i ważne zastosowania w fizyce ciała stałego.

Jeśli przejdziemy teraz do przestrzeni orbit grupy $p1$ na płaszczyźnie, to otrzymamy abstrakcyjny torus.

Powstaje pytanie, dlaczego takie coś uparto się nazywać torusem. Wyjaśnienie można uzyskać posługując się użytym już przedstawieniem płaszczyzny jako przezroczystej folii. Teraz rysujemy na niej równoległobok, którego boki są, odpowiednio, wektorami v i w . Zapomnijmy na chwilę o wektorze w i zwińmy folię zgodnie z działaniem grupy C_∞ wyznaczonej przez wektor v – otrzymamy walec. Pewne punkty orbity każdego punktu nakryją się, a pewne nie.



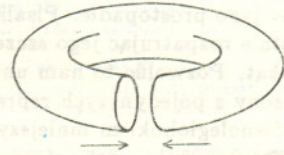
Rys. 3. Po zwińnięciu płaszczyzny w walec utożsamione punkty orbity grupy $p1$ układają się w orbitę grupy C_∞ .

Można zauważyć, że aby nakryć wszystkie punkty orbity, trzeba teraz zwinąć walec zgodnie z działaniem grupy C_∞ wyznaczonej przez wektor w . Tego już fizycznie zrobić się nie da – walec jest sztywny.

Sztywność walca wynika z pięknego *theoremą egregium* udowodnionego przez Gaussa, ale to już zupełnie inna historia.

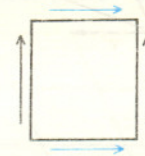
Myślowo można jednak ten eksperyment wykonać: zwijamy walec rozciągając go „z jednej strony” i wyobrażając sobie, że tego nie robimy.

Od razu widać, że jednym ze sposobów zwińnięcia jest „wąż polykający swój ogon” – niewątpliwie powstaje w ten sposób torus.



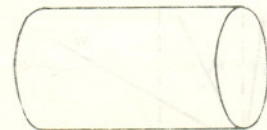
Rys. 4. Oczywiście, zwijanie walca tak nie wygląda, bo ma on nieskończoną długość.

Nie jest to jednak zwykły torus, bo odległości na nim nie są takie, jakie wytworzyły się w wyniku rozciągania folii, lecz takie, jakie były jeszcze przed zwijaniem – można sobie więc wyobrażać torus abstrakcyjny jak zwykły torus, na którym odległość mierzy się inaczej. Mierzy się tak, by długość okręgu punktów najbliższych osi obrotu była taka sama, jak długość okręgu punktów najdalszych od osi. Innymi słowy, tak jak walec to sklejonny brzegami pas, tak torus to równoległobok o sklejonych przeciwległych bokach.



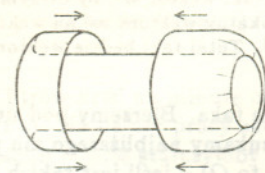
Rys. 5

Zauważmy też, że abstrakcyjny torus lokalnie zachowuje się jak walec – taka jest konsekwencja przyjętego założenia o sposobie mierzenia na nim odległości.



Rys. 6. Tak wygląda kawałek metrycznie jednorodnego torusa. W całości nie można go narysować, bo metrycznie jednorodny torus nie mieści się w przestrzeni euklidesowej.

Naprawdę istotną różnicę między torusem zwyczajnym i abstrakcyjnym dostrzeżemy zwijając walec w inny sposób – można go zwinąć jak obracaną na lewą stronę skarpetkę.



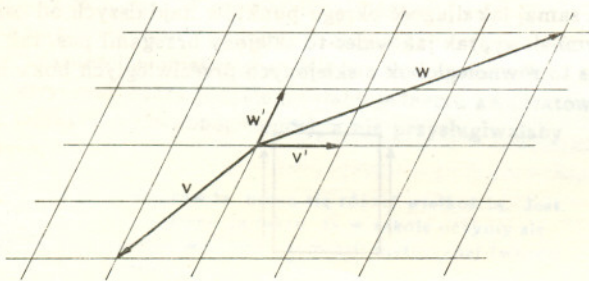
Rys. 7

I wtedy okaże się, że nie można stwierdzić, który z wektorów v i w odpowiada „grubości” dętki (jaka jest torus na rysunku 1), a który „promieniowi” dętki. Na rysunku 4 „grubości” odpowiadał wektor v , a na rysunku 7 – wektor w .

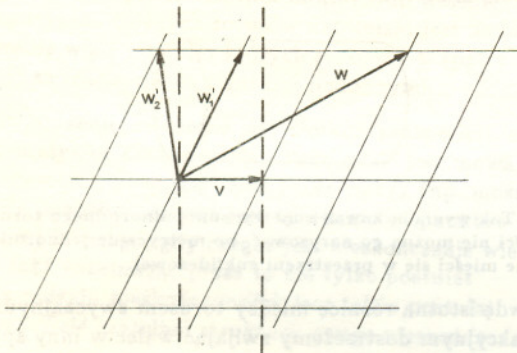
Teraz możemy przystąpić do uogólnionego pytania o to, jak wiele jest różnych abstrakcyjnych torusów. Czyli do pytania o to, na ile nie podobnych siatek równoległoboków można rozbić płaszczyznę. A nawet więcej – jaka jest struktura zbioru takich, różnych w podanym wyżej sensie, siatek.

Pierwsza uwaga dotyczy dotąd stosowanego (nielegalnie) uproszczenia. Rysowaliśmy mianowicie (rysunki 3 i 5) wektory v i w jako prostopadłe. Pisaliśmy o równoległoboku stale rozpatrując jego szczególny przypadek – prostokąt. Pozwoliło to nam uniknąć sytuacji, w której obszar złożony z pojedynczych reprezentantów każdej orbity jest równoległobokiem mniejszym niż równoległobok rozpięty na wektorach v i w . Rysunki 8 i 9 pokazują takie sytuacje (które dla wektorów prostopadłych zdarzyć się nie mogą). W każdej jednak takiej sytuacji można wektory v i w zastąpić innymi, v' i w' , które odpowiadają bokom równoległoboku powstałej siatki.

Za użytym słowem można kryje się spory kawałek matematyki związany z pojęciem grupy unimodularnej i teorią liczb (nie jest to dziwne – wyraźnie widać przecież w grupie pl liczby całkowite).



Rys. 8. Siatka wyznaczona przez wektory v i w jest identyczna z siatką wyznaczoną przez wektory v' i w' . Dowód tego faktu warto zacząć od spostrzeżenia, że $v' = -2v - w$, $w' = 3v + 2w$.

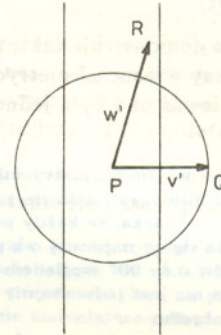


Rys. 9. Dla danej siatki i danego wektora v , krótszego niż w , zawsze można dobrać taki wektor w' , by otrzymać tę samą siatkę i by rzut prostokątny wektora w' na wektor v był nie dłuższy niż połowa $|v|$. Tutaj taki będzie wektor $w - 3v$ lub $w - 2v$.

Droga do tego będzie taka. Bierzemy pod uwagę jakiś (jeden) punkt P i szukamy najbliższego mu punktu jego orbity (niech będzie to Q) – jeśli jest takich kilka (a zawsze są co najmniej dwa), bierzemy dowolny z nich. Jako v' przyjmujemy wektor \overrightarrow{PQ} .

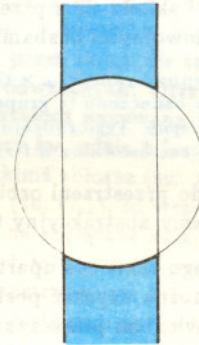
Ponieważ pracujemy z dokładnością do podobieństwa, więc możemy założyć, że dla każdej siatki otrzymaliśmy ten sam wektor v' . Do niego dobierzemy teraz wektor w' .

Z przyjrzenia się rysunkowi 9 wynika, że zawsze może nim być wektor \overrightarrow{PR} , gdzie R leży w pasie o szerokości $|v'|$, o brzegach prostopadłych do v' , dla którego P leży na środkowej. Co więcej, z minimalności PQ wynika, że R nie leży we wnętrzu koła o promieniu $|v'|$ i środku P .



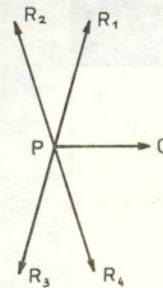
Rys. 10

W ten sposób uzyskaliśmy pewną reprezentację torusów abstrakcyjnych – jest to figura złożona z punktów R otrzymanych dla różnych siatek, a więc pas bez brzegów z wyciętym wnętrzem koła.



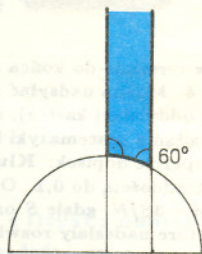
Rys. 11

Jest to reprezentacja dobra, ale nie jednoznaczna. Rysunek 12 dobitnie wskazuje, że punkty R_i położone symetrycznie względem prostej PQ , względem środkowej pasa i względem punktu P dadzą nam siatki takie same, a tylko inaczej położone. Każda więc siatka jest na rysunku 11 reprezentowana przez co najmniej dwa, a na ogół cztery punkty R .



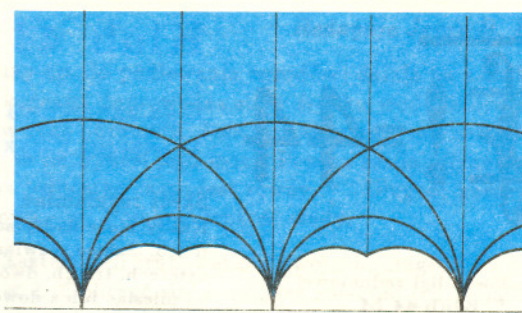
Rys. 12. Aby przekonać się, że siatki wyznaczone przez wektory \overrightarrow{PQ} i \overrightarrow{PR}_i są takie same, należy je narysować. Okaże się, że dla $i = 1, 3$ otrzymamy tę samą siatkę, a dla $i = 2, 4$ siatkę symetryczną względem prostej PQ .

Usunięcie tej wady prowadzi do figury z rysunku 13, który nazywany jest geometryczną interpretacją przestrzeni torusów (abstrakcyjnych).



Rys. 13. To, że zaznaczone kąty rzeczywiście mają taką rozwartość, Czytelnik obliczy bez trudu (kątem między krzywymi to kąt między stycznymi do nich).

W konstruowaniu tej interpretacji była pewna dowolność. Każdy z Czytelników może wybrać inną drogę poszukiwania geometrycznej interpretacji przestrzeni torusów. Jeśli jednak zdecyduje się, by interpretacja ta była obszarem (ew. z pewnymi fragmentami brzegu), to otrzyma jedną z figur widocznych na rysunku 14 w części zabarwionej (lub jeszcze inne figury mieszczące się w nie zabarwionej części półpłaszczyzny). Wzajemna zależność między tymi obszarami upewnia matematyków, że geometryczna interpretacja przestrzeni torusów naprawdę mówi coś o torusach – obszary te można otrzymać z dowolnego z nich za pomocą symetrii osiowych względem tych fragmentów brzegu, które są półprostymi lub odcinkami, i inwersji względem tych fragmentów brzegu, które są łukami okręgów. Obszary te są więc w zdrowy, geometryczny sposób równoważne.



Rys. 14. Wszystkie kąty obszarów są równe 90° , 60° lub 0° (styczność).

Inwersja względem okręgu o środku O i promieniu r to przekształcenie, które każdemu punktowi $X \neq O$ przyporządkowuje taki punkt X' , że $\overrightarrow{OX'} \cdot \overrightarrow{OX} = r^2$ oraz $OX \parallel OX'$. Inwersja zachowuje kąty między krzywymi oraz przeprowadza proste i okręgi na proste i okręgi.

Dalsze badania przestrzeni torusów polegają na takim zmetryzowaniu półpłaszczyzny, w której mieszczą się reprezentujące tę przestrzeń figury, by opisane wyżej przekształcenia były izometriami. Odpowiednim sposobem mierzenia odległości okazuje się metryka zamieniająca półpłaszczyznę na płaszczyznę Bolyai-Łobaczewskiego. Ostatecznie przestrzeń torusów okazuje się być trójkątem prostokątnym niewłaściwym o kącie 60° na płaszczyźnie Bolyai-Łobaczewskiego, o czym warto może bardziej szczegółowo napisać przy innej okazji.

W artykule zakłada się milcząco, że jedyny sposób uczynienia torusa jednorodnym metrycznie to nadanie mu metryzacji lokalnie identycznej z płaszczyzną euklidesową. Nie jest to założenie arbitralne – dowodzi tego, że tak jest, twierdzenie Gaussa-Bonneta.



Zadania

Redaguje Michał WOJCIECHOWSKI

M 619. W węzłach figury z rysunku 1 (sześciokąt foremny rozbity na 24 trójkąty) wpisano parami różne liczby. Udowodnić, że znajdzie się co najmniej 7 takich trójkątów, iż liczby zapisane w ich wierzchołkach rosą w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

Rozwiązanie na str. 7

M 620. Czy można siatkę przedstawioną na rysunku 2 (każda krawędź ma długość 1) przedstawić jako sumę pięciu łamanych długości 8?

Rozwiązanie na str. 7

M 621. W n -kącie foremnym należy każdy bok i każdą przekątną pomalować pewnym kolorem tak, by żadne dwa spośród tych odcinków mające punkt wspólny, nie były pomalowane tym samym kolorem. Ilu co najmniej kolorów należy użyć?

Rozwiązanie na str. 7

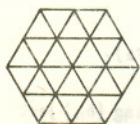
Redaguje Jarosław KULPA

F 325. Oszacuj czas zderzenia piłki futbolowej z betonową ścianą. Dane dotyczące piłki: masa $m = 0,6$ kg, promień piłki $r = 11$ cm, różnica ciśnień między ciśnieniem wewnątrz piłki a ciśnieniem atmosferycznym $p = 0,9$ atm (90 kPa).

Rozwiązanie na str. 16

F 326. Serce ludzkie przepompowuje $q = 5$ litrów krwi na minutę oraz wytwarza nadciśnienie $p \approx 100$ mmHg (13 kPa). Na ile dni pracy sztucznego serca o identycznych parametrach i sprawności $\eta = 50\%$ starczyłoby energii ze standardowego akumulatora samochodowego ($Q = 48$ A·h, $U = 12$ V)?

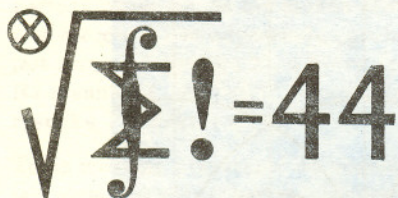
Rozwiązanie na str. 16



Rys. 1



Rys. 2



Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 7/1990.

Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 219 ($WT=3,52$) i 220 ($WT=1,67$)
z numeru 4/1991

Paweł Kubit – Krosno 43,17
Krzysztof Zawistawski – Warszawa 42,82
Tomasz Wietecha – Tarnów 37,48

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 IV 1992

Zadania z matematyki nr 233, 234

233. Dowieść, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y, z zachodzi nierówność

$$\frac{y^2 - x^2}{z + x} + \frac{z^2 - y^2}{x + y} + \frac{x^2 - z^2}{y + z} \geq 0.$$

234. Różnicę symetryczną pary zbiorów określamy wzorem $A \dot{-} B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Dla większej liczby zbiorów określamy indukcyjnie:

$$A_1 \dot{-} A_2 \dot{-} \dots \dot{-} A_k := A_1 \dot{-} (A_2 \dot{-} \dots \dot{-} A_k).$$

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Niech dane będą liczby naturalne $n, k \geq 2$. Obliczyć wartość sumy

$$\sum |A_1 \dot{-} A_2 \dot{-} \dots \dot{-} A_k|,$$

gdzie sumowanie przebiega po wszystkich uporządkowanych układach (A_1, A_2, \dots, A_k) podzbiorów zbioru $\{1, \dots, n\}$, zaś symbol $|X|$ oznacza liczbę elementów (moc) zbioru X .

Zadanie **234** zaproponował pan Tomasz Wietecha z Tarnowa jako kontynuację zadania **214** (*Delta* 1/1991).

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/1991
Przypominamy treść zadań:

225. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ ($\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$), spełniające równanie $f(f(n)) + f(n) = 2n + 6$ dla $n \in \mathbb{N}_0$.

226. Dla danego niemalejącego ciągu liczb dodatnich a_0, a_1, a_2, \dots określamy

$$b_n = n - \left(\frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} \right).$$

Udowodnić, że ciąg (b_n) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg (a_n) jest zbieżny.

225. Załóżmy, że funkcja f spełnia podany warunek. Wybierzmy dowolną liczbę $x_0 \in \mathbb{N}_0$ i przyjmijmy $x_{k+1} = f(x_k)$ dla $k = 0, 1, 2, \dots$. Tak określony ciąg (x_k) spełnia zależność rekurencyjną

$$x_{k+2} = 2x_k - x_{k+1} + 6.$$

Tak więc

$$x_3 = 3x_1 - 2x_0, \quad x_4 = 6x_0 - 5x_1 + 18, \quad x_5 = 11x_1 - 10x_0 - 12,$$

$$x_6 = 22x_0 - 21x_1 + 54, \quad x_7 = 43x_1 - 42x_0 - 72, \dots$$

Biorąc w szczególności jako x_0 liczby 0 i 1 otrzymujemy tą metodą ciągi (a_k) i (b_k) o wyrazach

$$a_0 = 0, \quad a_1 = f(0), \quad \dots, \quad a_5 = 11a_1 - 12, \quad a_6 = 54 - 21a_1, \quad \dots,$$

$$b_0 = 1, \quad b_1 = f(1), \quad \dots, \quad b_6 = 76 - 21b_1, \quad b_7 = 43b_1 - 114, \dots$$

Liczby (całkowite) a_5, a_6, b_6, b_7 mają być nieujemne; stąd wnosimy, że $a_1 = 2, b_1 = 3$. Możemy teraz obliczyć początkowe wyrazy:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 6, \quad \dots,$$

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 3, \quad b_2 = 5, \quad b_3 = 7, \quad \dots$$

Zgadujemy wzory ogólne $a_k = 2k, b_k = 2k + 1$; dowody indukcyjne są natychmiastowe. Zatem $f(a) = a + 2$ dla każdej

liczby parzystej $a \geq 0$ oraz $f(b) = b + 2$ dla każdej liczby nieparzystej $b \geq 1$. Krótko:

$$f(n) = n + 2 \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}_0.$$

Jest to jedyna funkcja spełniająca warunki zadania.

226. Oznaczmy $x_k = a_{k-1}/a_k$ dla $k = 1, 2, 3, \dots$ i zauważmy, że

$$a_n = a_0 \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{-1}, \quad b_n = \sum_{k=1}^n (1 - x_k).$$

Liczby x_k spełniają nierówności $0 < x_k \leq 1$, więc ciąg (b_n) jest niemalejący.

Jeżeli ciąg (x_k) nie dąży do 1, to zarówno ciąg (a_n) , jak i (b_n) , jest rozbieżny.

W dalszym ciągu zakładamy, że $\lim x_k = 1$. Ciąg o wyrazach $t_k = -\ln x_k$ spełnia warunki:

$$t_k \geq 0 \quad \text{dla } k = 1, 2, 3, \dots; \quad \lim t_k = 0.$$

Istnieje taki numer k_0 , że $t_k \leq 1$ dla $k > k_0$. Mamy więc dwustronne oszacowanie

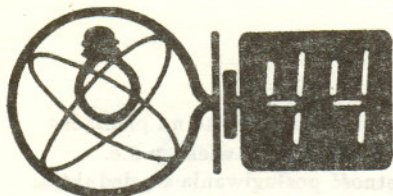
$$x_k = \begin{cases} e^{-t_k} \geq 1 - t_k & \text{dla } k \geq 1, \\ \frac{1}{e^{t_k}} \leq \frac{1}{1 + t_k} = 1 - \frac{t_k}{1 + t_k} \leq 1 - \frac{t_k}{2} & \text{dla } k > k_0. \end{cases}$$

Zatem dla $n > k_0$ zachodzą nierówności:

$$b_n = \sum_{k=1}^n (1 - x_k) \leq \sum_{k=1}^n t_k = -\ln \prod_{k=1}^n x_k = \ln a_n - \ln a_0,$$

$$b_n = \sum_{k=1}^n (1 - x_k) \geq \sum_{k=k_0+1}^n \frac{t_k}{2} = -\frac{1}{2} \ln \prod_{k=k_0+1}^n x_k = \frac{1}{2} (\ln a_n - \ln a_{k_0}).$$

Wobec monotoniczności ciągów (a_n) i (b_n) wynika stąd, że ciągi te są albo oba zbieżne, albo oba rozbieżne.



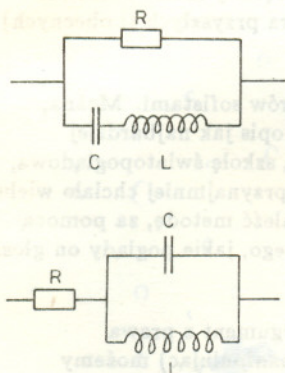
131. Młynek Segnera (stosowany np. do podlewania ogrodów) działa na zasadzie odrzutu: do rurki z zagiętymi końcami doprowadza się w środku wodę, która wypływa przez końce wprawiając rurkę w ruch obrotowy. Jeśli potraktujemy młynek jako silnik (obracający jakieś urządzenie), to ile wynosi jego moc? Pompa zasila młynek wodą pod ciśnieniem p , a dopływ wody na jednostkę czasu jest równy $\frac{m}{t}$. Długość każdej z części rurki wynosi r , a prędkość kątowa – ω . Pominąć lepkość wody.

132. Solenoid bez rdzenia ma kształt linii śrubowej o n zwojach, długości l i promieniu przekroju r , przy czym $\frac{l}{n} \ll r \ll l$. Obliczyć siłę ściskającą solenoid (działającą na końce wzdłuż osi), gdy płynie przez nią prąd o natężeniu I .

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/1991

Przypominamy treść zadań:

128. Pudełko, z którego wychodzą dwa przewody, zawiera kondensator, opornik i cewkę o pomijalnie małym oporze, połączone w nieznaną sposób. Po przyłożeniu napięcia stałego stwierdzono, że opór pudełka wynosi 100 Ω , i taki sam opór wykazuje ono w obwodzie prądu przemiennego bardzo wielkiej częstotliwości. Po przyłożeniu napięcia sinusoidalnego moduł impedancji (zawada) okazał się równy 50 Ω przy częstotliwości 100 Hz i 80 Ω przy częstotliwości 200 Hz. Narysować schemat obwodu i wyznaczyć wartości L i C .



124. Ciecz lepka wypełnia przestrzeń pomiędzy dwoma długimi cylindrami obracającymi się wokół wspólnej osi, przy czym wewnętrzny cylinder ma promień r_1 i prędkość kątową ω_1 , a zewnętrzny – promień r_2 i prędkość kątową ω_2 . Jakim wzorem wyraża się zależność prędkości cieczy od odległości r od osi? Przyjąć, że przepływ jest stacjonarny (niezależny od czasu) i laminarny.

123. Istnieją tylko dwa obwody RLC , których impedancja Z jest równa R zarówno dla $\omega = 0$, jak i dla $\omega = \infty$ (rysunek). Ponieważ dla częstotliwości pośrednich podane w treści zadania wartości Z są mniejsze od R , więc – znajdując w standardowy sposób wzory na impedancję – przekonujemy się, że drugi z narysowanych obwodów jest wykluczony i pozostaje nam tylko pierwszy, którego impedancja jest dana wyrażeniem

$$\frac{1}{Z^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{C^2\omega^2}{(1 - LC\omega^2)^2}$$

Przekształcając ten wzór otrzymujemy

$$\left(\frac{1}{Z^2} - \frac{1}{R^2}\right)^{-1/2} = \left|\frac{1}{C\omega} - L\omega\right|$$

Oznaczmy lewą stronę równania symbolem Y ; wyliczając jej wartość dla $R = 100 \Omega$ i $Z_1 = 50 \Omega$ otrzymujemy $Y_1 = 57,74 \Omega$, a dla $Z_2 = 80 \Omega$ mamy $Y_2 = 133,33 \Omega$. Układ równań

$$Y_1 = \left|\frac{1}{C\omega_1} - L\omega_1\right|, \quad Y_2 = \left|\frac{1}{C\omega_2} - L\omega_2\right|$$

przy podanych wartościach liczbowych ma dwa rozwiązania:

$$(1) \quad L = \frac{Y_1\omega_1 + Y_2\omega_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} = 0,172 \text{ H}, \quad C = \left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2}\right) \left(\frac{Y_1}{\omega_1} + \frac{Y_2}{\omega_2}\right)^{-1} = 9,60 \mu\text{F},$$

$$(2) \quad L = \frac{Y_2\omega_2 - Y_1\omega_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} = 0,111 \text{ H}, \quad C = \left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2}\right) \left(\frac{Y_2}{\omega_2} - \frac{Y_1}{\omega_1}\right)^{-1} = 134 \mu\text{F},$$

124. Zgodnie z definicją współczynnika lepkości cieczy η przy poślizgu warstw cieczy po sobie występuje siła tarcia (lepkości) dana wzorem

$$\frac{F}{S} = \eta \frac{dv}{dz},$$

gdzie S – powierzchnia warstw, dv – zmiana prędkości przy przesunięciu o dz w kierunku prostopadłym do powierzchni. W naszym przypadku ślizgające się po sobie warstwy mają kształt współśrodkowych cylindrów, a siła tarcia wynika z różnicy ich prędkości kątowych. Do powyższego wzoru należy więc podstawić $dv = r d\omega$, skąd

$$F = S\eta r \frac{d\omega}{dr}$$

Równowaga (przepływ stacjonarny) wystąpi wtedy, gdy moment siły działający na każdą warstwę cylindryczną od wewnątrz będzie równy momentowi siły działającemu od zewnątrz, zatem

$$M = Fr = S\eta r^2 \frac{d\omega}{dr} = \text{const.}$$

Ponieważ pole powierzchni bocznej S walca jest proporcjonalna do r , więc otrzymujemy

$$r^3 \frac{d\omega}{dr} = \text{const.}, \quad \text{a stąd} \quad \omega = a + \frac{b}{r^2}.$$

Prędkość liniowa $v = \omega r$ zależy więc od r według wzoru $v = ar + \frac{b}{r}$. Stałe a i b można wyznaczyć z warunków $\omega_1 = a + \frac{b}{r_1^2}$, $\omega_2 = a + \frac{b}{r_2^2}$. Równoważna, lecz ogólniejsza i bardziej zaawansowana metoda rozwiązania opiera się na równaniu Naviera-Stokesa, z którego wynika warunek $\Delta \vec{v} = 0$.

Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 117 (WT=2,93) i 118 (WT=1,60) z numeru 4/1991

Paweł Perkowski	- Szczecin	32,65
Adam Sikorski	- Lublin	30,34
Andrzej Borowski	- Aleksandrów K.	14,11
Andrzej Nowogrodzki	- Chocianów	12,08

Wyrazy uznania dla p. Sikorskiego, który w imponującym stylu zmierza po tytuł Weterana Klubu 44F.



Co pewien czas powraca moda na to, by swoje umiejętności zamieniać na pieniądze. Jeden z nawrotów tej mody przydarzył się w Grecji pod koniec V wieku p.n.e. Ówczesni Grecy (dokładniej – Dorowie) mieli umiejętność posługiwania się dedukcją, co w dzisiejszym i uproszczonym języku można by określić jako umiejętność używania metod naukowych (dziś mówiąc, że coś jest naukowe, mamy na myśli to, że jest uzyskane zgodnie z metodologią dedukcyjną). Z uprawiania nauki można czerpać ogromne korzyści duchowe, czerpanie zaś pieniędzy (wszystko już jedno: z nauki czy nie) wymaga sprawności całkiem innego rodzaju.

Jaką to mianowicie metodę wybrali uczeni Grecy, by zamienić swą intelektualną sprawność na brzęcząca monetę (obola bodajże)? Postanowili służyć politykom. Bo polityków było wówczas w Grecji całe mrowie. Wymyśliwszy demokrację Grecy zabrali się do jej uprawiania z takim zapałem, że niemal bez przerwy urządzali jakieś wybory, stanowili prawa, spierali się do upadłego w swoich organach przedstawicielskich i każdy chciał być wybrany do takowych. A metodą na zwycięstwo w wyborach była wtedy taka, że należało pokonać przeciwnika w dyskusji. Ci, którzy potrafili przeciwnika przegadać, byli w owych czasach niechybnie wybierani przez demos (czyli lud). Jeśli więc ktoś umiał przyuczyć kandydata na polityka do wygrywania dyskusji (uprawiania dialektyki, jak wtedy mówiono), mógł uzyskać od niego znaczne korzyści materialne (bo wówczas politykami częściej chcieli zostawać zamożni ludzie). Powstał nawet stosowny zawód korepetytora przyszłych (i obecnych) polityków.

Niewiele pomylił się ten, kto będzie nazywał tych korepetytorów sofistami. Można, co prawda, znaleźć w podręcznikach historii filozofii bogaty opis jak najbardziej filozoficznych poglądów sofistów i traktować ich jako pewną szkołę światopoglądową, ale tak jest tylko dlatego, że sofisci przedobrzyli. Chcieli, a przynajmniej chciało wielu z nich, uprawiać swój zawód uczciwie. A więc próbowali znaleźć metodę, za pomocą której można obalić w dyskusji przeciwnika, niezależnie od tego, jakie poglądy on głosi. A najbardziej przedobrzył Sokrates.

Wpadł on mianowicie na pomysł, że jeśli weźmiemy jeden argument z prawa naturalnego, a drugi z prawa moralnego, to (zręcznie nimi manipulując) możemy uzasadnić dowolną tezę. W szczególności przeciwną do tej, jaką głosi nasz kontrdyskutant.

I gdyby poszedł z tym wynalazkiem w stronę logiki i zauważył, że jest to prawo

$$(p \wedge \sim p) \rightarrow q,$$

które (mam nadzieję) każdy z Czytelników bez trudu wyprowadzi z własności implikacji, nikt by się go nie czepiał. Ale on, niestety, postąpił inaczej.

Po pierwsze wyraził tę rzecz zrozumiałym językiem. Zdanie ze sprzeczności wynika *wszystko* można jeszcze uznać za niewinne. Ale wyobraźmy sobie kogoś, kto staje np. przed naszym Parlamentem i głosi, że prawo naturalne (wolny rynek, konkurencja) i prawo moralne (miłość bliźniego, etos Solidarności) są sprzeczne. Mało tego, potrafiłby wykazać, że posługujący się obiema tymi przesłankami mogą w zgodzie z logiką uzasadnić każdą, naprawdę każdą tezę. Przecież z tego wynika, że uzyskana w ten sposób teza nie ma nic wspólnego z przesłankami, z których formalnie została wyprowadzona. A więc ci, którzy posługują się takimi przesłankami...

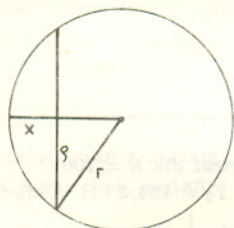
Zamiast rozwijać dalszy tok powyższego rozumowania lepiej znajdziemy (lub przynajmniej poszukajmy) w sobie trochę zrozumienia dla parlamentarzystów Starożytnej Grecji, którzy czuli się zmuszeni skazać Sokratesa na śmierć za bezbożność. A że byli to ludzie szlachetni, zlecili mu, by sam wyrok wykonał wychylając kielich cykuty (to taka roślina i u nas pospolita, podobna do marchwi, tylko z białym korzeniem). I tak się stało.

Znalazł się wiele stuleci później filozof, który usiłował dokonać intelektualnej rehabilitacji Sokratesa – stworzył mianowicie oryginalną konstrukcję intelektualną i nazwał ją dialektyką. Jednym z jej kanonów była jedność przeciwieństw. Ale, czy można mieć pewność, że zawsze ci, którzy chcą równocześnie korzystać z prawa naturalnego i z prawa moralnego, czynią to w duchu Hegla?

Marek KORDOS



Rozwiązanie zadania F 325. Użyjmy najprostszego modelu deformacji piłki – modelu ściętej kuli. Załóżmy małe odkształcenie piłki $x \ll r$.



Powierzchnia styku piłki ze ścianą jest równa

$$S = \pi r^2 = \pi(2rx - x^2),$$

czyli

$$S \approx 2\pi r x.$$

Siła oddziaływania ściany na piłkę $F = p \cdot s = 2\pi r p x$ jest proporcjonalna do wychylenia x . Zatem ruch można traktować jako ruch harmoniczny $m\omega^2 x = 2\pi r p x$, gdzie $\omega = \sqrt{\frac{2p}{m}}$. Stąd $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2\pi r p}}$. Czas zderzenia jest połową okresu, a więc $t = \frac{T}{2} \approx 0,01$ sekundy.



Rozwiązanie zadania F 326. Niech t oznacza czas pracy sztucznego serca na jednym akumulatorze. Moc serca jest równa $P = qp = 1,3$ W, energia zaś zgromadzona w akumulatorze $E = QU$. Porównując energię pobraną z akumulatora ηE z pracą wykonaną przez sztuczne serce $W = Pt$ otrzymujemy

$$t = \frac{\eta QU}{qp} \approx 9 \text{ dni}.$$

Patrz w niebo

Za pomocą nawet amatorskiego teleskopu, aczkolwiek przy zastosowaniu dość dużego powiększenia (i, oczywiście, filtru chroniącego oko – pamiętajmy o nim!) można stwierdzić, że powierzchnia Słońca cała pokryta jest jasnymi plamkami na nieco ciemniejszym tle. Obraz tych plamek zmienia się z godziny na godzinę. Jest to tzw. granulacja, czyli efekt konwekcji nieustannie odbywającej się w powierzchniowych warstwach Słońca. Jasne plamki to bańki gorącej materii wydostające się z wnętrza Słońca, a ciemniejsza siatka to obszary chłodniejszego gazu zapadającego się w głąb. Można podejrzewać, że takie „gotowanie się” materii zachodzi też na innych gwiazdach, przynajmniej na podobnych do Słońca, wydaje się jednak niemożliwe zaobserwowanie granulacji na gwieździe, której obraz nawet w największych teleskopach jest jedynie punktem. Rzeczywiście, argumentów za występowaniem granulacji gwiazdowej trzeba szukać metodami pośrednimi.

Kilka lat temu szwedzki astronom Dainis Dravins i duński Ake Nordlund szukali przejawów granulacji gwiazdowej poprzez jej możliwy wpływ na wygląd linii widmowych gwiazdy. Dominująca część promieniowania pochodzi – a w każdym razie tak można przypuszczać – z gorących baniek unoszących się w górę, a więc biegnących ku obserwatorowi, mniejsza część od chłodniejszego gazu oddalającego się od obserwatora. Większa część promieniowania gwiazdy będzie zatem lekko poniebieszczona, a mniejsza poczerwieniona wskutek zjawiska Dopplera. W rezultacie linia widmowa powinna być asymetryczna i przesunięta ku fioletowi. Przesunięcia te są niewielkie – prędkości wznoszącego się lub zapadającego gazu w fotosferach gwiazd wyrażają się, jak się okazało, setkami metrów na sekundę, są jednak mierzalne na widmach o wielkiej dyspersji. Oczywiście, w przypadku gwiazd nie można sobie pozwolić na zbyt wysokie dyspersje, bo np. gwiazda około 2 mag. daje okrągło licząc milion razy mniej światła niż jedna słoneczna granula. Niemniej jednak niezbędne pomiary zostały wykonane dla kilku najjaśniejszych gwiazd i powyższe rozumowanie zostało potwierdzone.

Ale może to dowodzić jedynie obecności granulacji i umożliwić oszacowanie prędkości ruchów konwektywnych, nic jednak nie mówi o skali zjawiska, tzn. jak wielkie są granule (na Słońcu są one rzędu 1000 km). Dlatego w drugim etapie pracy Dravins i Nordlund modelowali atmosfery gwiazd i ruchy w nich przy danych wyjściowych uzyskanych z obserwacji. Wynikiem obliczeń były m.in. profile linii widmowych. Okazały się one bardzo dobrze zgodne z obserwacjami, a niejako przy okazji otrzymano przykładowe obrazy granulacji, jakby gwiazdy te oglądało się z bliska. Widzimy je na okładce.

Tomasz KWAST

Regulamin Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

1. Konkurs organizowany jest corocznie przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Redakcję miesięcznika *Delta*, przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
2. W konkursie mogą brać udział uczniowie wszystkich typów szkół.
3. Konkurs składa się z eliminacji i finału.
4. W eliminacjach bierze udział uczeń, który w terminie do dnia 1 maja prześle pod adresem Redakcji *Delt*y jeden egzemplarz swojej pracy matematycznej. Do pracy należy dołączyć następujące informacje: adres prywatny autora, klasa, nazwa i adres szkoły, imię, nazwisko i adres nauczyciela – opiekuna pracy.
5. Praca powinna zawierać samodzielny wkład ucznia i pełną informację o źródłach, z których korzystał jej autor. Prace czysto kompilacyjne nie będą dopuszczone do finału konkursu.
6. Prace nadesłane na eliminacje zostaną ocenione przez Komisję Konkursu i kompetentnych recenzentów. Te spośród prac, które spełniają warunki konkursu, zostaną przedstawione Jury Konkursu. Jury zakwalifikuje najlepsze prace do finału, który odbędzie się w trakcie dorocznej Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

7. Zawiadomienia o zakwalifikowaniu do finału zostaną przesłane autorom prac oraz nauczycielom – opiekunom prac przed końcem roku szkolnego.
8. Finałiści i nauczyciele opiekujący się ich pracami otrzymują od Zarządu Głównego PTM zaproszenie do udziału w Sesji na koszt Towarzystwa.
9. Finał polega na wygłoszeniu (nie na odczytaniu) przez ucznia, podczas specjalnego otwartego posiedzenia Sesji, referatu (trwającego nie dłużej niż 15 minut) i wzięciu udziału w dyskusji na temat, któremu poświęcona była praca.
10. Rezultaty finału oceni Jury Konkursu. Jury będzie brało pod uwagę, oprócz merytorycznej wartości pracy, również samodzielność i oryginalność ujęcia tematu oraz przebieg referatu i dyskusji. Jury przyznaje medale: złoty, srebrny i brązowy, wyróżnienia oraz nagrody pieniężne ufundowane przez Ministerstwo Edukacji Narodowej.
11. Ogłoszenie wyników finału następuje w trakcie Walnego Zgromadzenia Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Medale wręcza Prezes Towarzystwa. Wszyscy uczestnicy finału otrzymują dyplomy.
12. Wyniki konkursu i skrót zwycięskiej pracy będą opublikowane w miesięczniku *Delta*.
13. Komisję Konkursu oraz Jury Konkursu powołuje Zarząd Główny PTM na wniosek Komitetu Redakcyjnego *Delt*y.