



## SPIS TREŚCI

### NUMERU 9(208)

Czy astronom nie lubi kolorów? <i>Tomasz Kwast</i>	str. 1
Wbrew zdrowemu rozsądkowi <i>Tomasz Hofmokl</i>	str. 1
Uwięzienie kwarków <i>Stanisław Mrówczyński</i>	str. 4
Zadania	str. 6
Korespondencja komputerowa	str. 6
Od kiedy i dlaczego istnieje $\pi$ <i>Marek Kordos</i>	str. 7
Patrz w niebo	str.10
Wzór na pole koła	str.10
Lemat Spenera, punkty stałe i algebra <i>Janusz Dronka, Jarosław Górnicki</i>	str.11
Klub 44	str.14
Epsilon	str.17

### W następnym numerze:

Rozmowa o średnich

„Delta”  
 matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
 miesięcznik popularny  
 Polskiego Towarzystwa  
 Matematycznego, Polskiego  
 Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
 Towarzystwa Astronomicznego  
 wydawany przy poparciu  
 Ministerstwa Edukacji Narodowej

#### Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula  
 Bogdan Cichocki  
 Roman Duda  
 Jan A. Gaj  
 Tomasz Hofmokl – wiceprzewodniczący  
 Tadeusz Jarzębowski  
 Marcin Kubiak  
 Andrzej Małowski  
 Andrzej Pelczar  
 Zbigniew Płochocki  
 Zdzisław Pogoda  
 Konrad Rudnicki  
 Zbigniew Semadeni  
 Grzegorz Sitarski  
 Józef I. Smak  
 Kazimierz Stępień  
 Mieczysław Subotowicz  
 Andrzej Szymacha  
 Aniela Wolska  
 Andrzej Woszczyk  
 Wojciech Żakowski – przewodniczący

#### Redaguje kolegium w składzie:

Krzysztof Biesaga  
 Krystyna Kordos – sekr. red.  
 Marek Kordos – red. nac.  
 Paweł Krawczyk – z-ca red. nac.  
 Tomasz Kwast  
 Stanisław Mrówczyński  
 Anna Rudnik  
 Joanna Udalska

#### Adres Redakcji:

Centrum Informatyczne UW  
 Krakowskie Przedmieście 26/28  
 00-927 Warszawa  
 tel. 20-03-81 wewn. 841

Adres poczty komputerowej  
 (E-mail address):  
 DELTA@PLEARN.BITNET

#### Wydawca:

Uniwersytet Warszawski  
 Krakowskie Przedmieście 26/28  
 00-927 Warszawa

Nakład 10 000 egz.  
 Wydrukowano  
 w Zakładach Graficznych  
 w Warszawie, ul. Srebrna 16

Skład systemem  $\text{\TeX}$   
 wykonała redakcja.

#### WARUNKI PRENUMERATY

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na I kwartał 1992 r. wynosi 8 400,- zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
  - oddziały RSW właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora
  - odbioru zamówionych egzemplarzy dokonuje prenumerator w wyznaczonych punktach sprzedaży lub w inny, uzgodniony sposób,
  - urzędy pocztowe i listonosze – od prenumeratorów z terenów wiejskich lub innych miejscowości, w których nie ma oddziałów RSW, a w miastach tylko od osób niepełnosprawnych – poczta zapewnia dostawę zamówionych egzemplarzy pod wskazany adres pod warunkiem uiszczenia dodatkowej opłaty za każdy doręczany egzemplarz – opłata wynosi 500,- zł od egzemplarza,
  - Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – tylko od prenumeratorów zlecających dostawę za granicę.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
  - na kraj – do 20 XI na I kwartał roku następnego  
 do 20 II na II kwartał  
 do 20 V na III kwartał  
 do 20 VIII na IV kwartał
  - na zagranicę – do 31 X na I kwartał  
 oraz do 1 dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

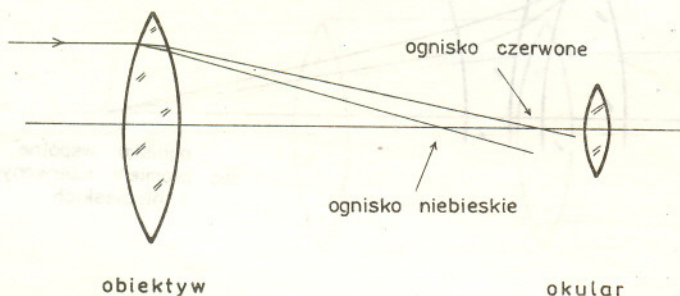
Cena 1 egzemplarza zł 2 800,-

# Czy astronom nie lubi kolorów?

Tomasz KWAST

Przez wiele lat astronomia bardzo dobrze radziła sobie bez klisz czułych na barwy. Informacje o wyglądzie nieba w rozmaitych zakresach światła uzyskiwano na podstawie kilku zdjęć czarnobiałych, ale wykonanych przez odpowiednie filtry przepuszczające światło o żądanej barwie. Rzecz jasna, pojawienie się dostatecznie czułych klisz barwnych ogromnie sprawę uprościło i to, co dawniej można było wywnioskować dopiero z serii zdjęć, teraz można już zobaczyć od jednego rzutu oka. Na współczesnych zdjęciach barwnych od razu widać, że gwiazdy są kolorowe (efekt temperatury), że rozproszone mgławice gazowe są na ogół czerwone (bo świeci tam głównie wodór w linii  $H_{\alpha}$ ), że galaktyki spiralne mają czerwieniejsze części centralne, a bardziej niebieskie ramiona (efekt występowania różnych populacji gwiazd), że mgławice planetarne są często kolorowe (bo świecą tam różne atomy o różnych stopniach wzbudzenia), że kolorowe są planety i ich satelity itd.

Tak więc barwa w astronomii jest również nauką informacją. W jednym jednak przypadku astronom kolorów nie lubi, mianowicie, gdy przejawiają się jako aberracja chromatyczna. Zjawisko to polega na tym, że każda soczewka oprócz załamania promieni powoduje rozszczepienie światła białego. Soczewkę można wszak uważać za układ nieskończenie wielu pryzmatów. Rozszczepienie jest więc nieuniknione, a skutkiem jest fakt, że np. obiektów lunety w innym miejscu skupia promienie niebieskie niż czerwone (rys. 1) i jeżeli przy oglądaniu gwiazdy nastawi się okular na ostrość dla ogniska niebieskiego, to widać gwiazdę z czerwoną obwódką – i odwrotnie.



Rys. 1. Schemat najprostszej lunety.

Jak z tym walczyć? Jeden sposób zaradzenia złu znajdziemy od razu, gdy przypomnimy sobie podstawowy wzór soczewkowy

$$(1) \quad \frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right),$$

gdzie  $f$  oznacza ogniskową soczewki,  $n$  – współczynnik załamania szkła,  $r_1$  i  $r_2$  – promienie krzywizny powierzchni soczewki. Dla ustalonego kształtu soczewki ogniskowa jest funkcją współczynnika załamania różnego dla różnych częstotliwości promieniowania. Zróżniczkowawszy stronami wzór (1) względem długości fali dostajemy

$$(1a) \quad \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{1}{f} \right) = \frac{dn}{d\lambda} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \frac{1}{(n - 1)f} \frac{dn}{d\lambda}$$

## Wbrew zdrowemu rozsądkowi

(Według wykładów radiowych z audycji IV programu – *Widnokrąg*)

*Widzę, lecz nie wierzę*  
Georg Cantor (1845 – 1918)

Tomasz HOFMOKL

Często zdarza się słyszeć zdanie, że coś jest niemożliwe, bo jest sprzeczne ze zdrowym rozsądkiem. Mogłoby się wydawać, że ten zdrowy rozsądek jest ostatecznym kryterium prawdziwości wypowiedzanych sądów. Co więcej, opieranie się na nim świadczy o ogromnym zaufaniu do potęgi ludzkiego rozumu. Zaufanie to jest szczególnie silne u ludzi młodych, którzy ufają (i słusznie) potędze logicznego rozumowania zapominając (i w tym miejscu popełniają błąd), że należy sprawdzić również poprawność wyjściowych przesłanek. Wiedzie to często do wypowiedzania kategoriycznych sądów, które nie zawsze są prawdziwe. A to z kolei prowadzi niekiedy do różnego rodzaju kryzysów; czy to kryzysu wiary u ludzi wychowanych w duchu określonej religii, czy też do gwałtownych zmian w poglądach społecznych lub politycznych. W wymienionych dziedzinach bardzo trudno jest podejmować racjonalną dyskusję, ponieważ wykazanie fałszywości przyjętych przesłanek może nie być wcale łatwe. Nie tymi też dziedzinami chciałbym zająć się w moich wykładach, które zatytułowałem *Wbrew zdrowemu rozsądkowi*.

Jestem fizykiem i zajmuję się fizyką najdrobniejszych składników materii, tak zwaną fizyką cząstek elementarnych. Jestem fizykiem doświadczalnym, to znaczy, że odpowiedzi na postawione pytania szukam przede wszystkim w wynikach doświadczenia; można to ująć bardziej górnolotnie, że pytania te zadaję samej przyrodzie. Trzeba może powiedzieć od razu, że będę mówił o odpowiedziach, jakich udziela przyroda nie mnie osobiście. Byłoby to ogromne, piramidalne samochwalstwo. Jest rzeczą oczywistą, że wyniki, o których będę wspominał w toku prezentowanego cyklu wykładów *Wbrew zdrowemu rozsądkowi*, zostały otrzymane przez bardzo wielu badaczy w całej historii rozwoju nauki.

Tak zwany zdrowy rozsądek kształtuje się na podstawie doświadczeń z życia codziennego, zjawisk obserwowanych bezpośrednio w otaczającym nas świecie. Jest rzeczą oczywistą, że częściej mamy okazję obserwować spadek rzuconego kamienia niż kwantowe zachowanie się elektronu. Na podstawie tych właśnie codziennych obserwacji wytwarzamy sobie, najczęściej bezwiednie, przekonanie o tym, co jest możliwe, a co nie. Inaczej mówiąc, cò jest zgodne ze zdrowym rozsądkiem, a co jemu przeczy. W badaniach naukowych, dzięki odpowiednim urządzeniom, możemy obserwować zjawiska, z którymi nie spotykamy się na co dzień. Niektóre z tych zjawisk zdają się przeczyć naszemu poczuciu, co jest możliwe. Obserwacja ich stanowi najcenniejszą podniętą do weryfikowania naszego poglądu na otaczający świat i przy okazji uczy nas pokory. Nie wszystko, co jest sprzeczne ze zdrowym rozsądkiem, jest rzeczywiście niemożliwe. Przykładem takiego zjawiska, które w sposób oczywisty wydaje się na pierwszy rzut oka niemożliwe, jest interferencja elektronu samego ze sobą. Omówię to zjawisko w jednym z dalszych wykładów. Teraz, dla podkreślenia jego zaskakującego przebiegu, przedstawię je przez analogię.

Proszę sobie wyobrazić następującą sytuację. Jesteś samotnie w pomieszczeniu, w którym jest dwoje drzwi. Aby być jeszcze bardziej precyzyjnym, powiem, że są tam dwa otwory drzwiowe odległe od siebie i nie stykające się. Nie ma więc mowy o podchwytliwym stawianiu problemu, na przykład przez proponowanie jednego otworu dwudrzwiowego. Mamy więc pomieszczenie o dwóch nie stykających się otworach. Proponuję wykonanie następującego zadania: wyjść przez oba otwory jednocześnie nie rozdzielając się przy tym na dwie części. Czy to możliwe? W oparciu o nasze codzienne doświadczenia, czyli w ramach zdrowego rozsądku jest to zadanie bezsensowne do tego stopnia, że nie warte nawet poważnego zastanawiania się. A jednak ... Elektron potrafi to wykonać, a przynajmniej zachowuje się tak, jakby to wykonywał. Mamy na to dowody eksperymentalne. Okazuje się, że nasz zdrowy rozsądek może prowadzić do fałszywych wniosków, jeżeli zastosujemy go w sytuacji skrajnie nietypowej dla życia codziennego. Co więcej, nie potrafimy wyobrazić sobie, jak to elektron robi, aby przejść przez dwa otwory równocześnie będąc przy tym cząstką niepodzielną.

Widać, że aby ogniskowe dla różnych barw były możliwie najbardziej zbliżone, ogniskowa w ogóle musi być jak największa. W ten sposób walczył z aberracją chromatyczną m.in. Heweliusz, budując niesłychanie długie teleskopy.

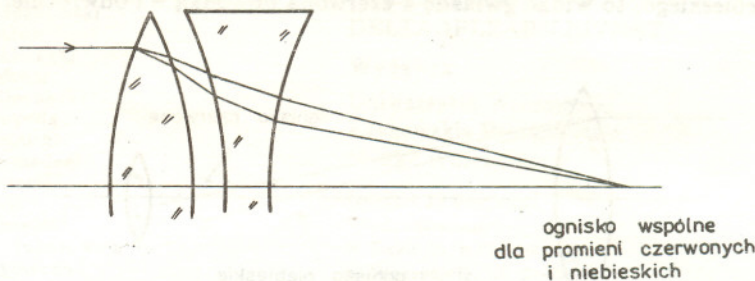
Zgodzimy się chyba, że nie jest to sposób zadowalający. Na szczęście około 1730 r. w Anglii wpadł ktoś na pomysł zbudowania obiektywu lunety z dwóch soczewek z różnych gatunków szkła. By zrozumieć ten pomysł, trzeba przypomnieć jeszcze jeden zasadniczy wzór na ogniskową  $F$  układu dwóch soczewek rozdzielonych odległością  $\Delta$ :

$$(2) \quad \frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{\Delta}{f_1 f_2}$$

Obiektyw ma stanowić zwartą całość, niech więc  $\Delta=0$ , a wtedy mając dwie soczewki możemy doprowadzić do pokrycia się ognisk dla dwóch barw. Wtedy bowiem ma być

$$d\left(\frac{1}{F}\right) = 0 = d\left(\frac{1}{f_1}\right) + d\left(\frac{1}{f_2}\right) = \frac{dn_1}{(n_1-1)f_1} + \frac{dn_2}{(n_2-1)f_2}$$

Widać, że aby ostatnia suma dała zero, jedna z ogniskowych musi być ujemna. Dlatego taki obiektyw, zwany achromatem, składa się z jednej soczewki skupiającej i jednej rozpraszającej (rys. 2). Pokrycie się ognisk dla dwóch tylko barw daje, wbrew pozorom, całkiem niezłą jakość obrazu. Oczywiście, obiektywy teleskopów profesjonalnych są budowane z większej liczby soczewek. Również bardzo skomplikowane są obiektywy mikroskopów i aparatów fotograficznych, ponieważ muszą być wolne nie tylko od aberracji chromatycznej, lecz i od innych wad soczewek, które silnie przejawiają się przy dużej zbieżności wiązki światła przechodzącej przez taki układ.



Rys. 2. Bieg światła w achromacie.

Uzyskawszy achromatyczny obraz w ognisku lunety należy go teraz obejrzyć przez achromatyczny okular. W zasadzie może nim być analogiczny układ dwóch soczewek o odpowiednio dobranej łącznej ogniskowej  $F$

$$\left( \text{powiększenie lunety} = \frac{\text{ogniskowa obiektywu}}{\text{ogniskowa okularu}} \right)$$

Przyjęto się stosować jednak inną konstrukcję, mianowicie z dwóch soczewek z tego samego szkła, za to przy  $\Delta \neq 0$ . Wzór (2) daje teraz warunek achromatyzacji

$$d\left(\frac{1}{F}\right) = 0 = d\left(\frac{1}{f_1}\right) + d\left(\frac{1}{f_2}\right) - \frac{\Delta}{f_1} d\left(\frac{1}{f_2}\right) - \frac{\Delta}{f_2} d\left(\frac{1}{f_1}\right),$$

skąd po podstawieniach wg (1a) mamy

$$\frac{dn_1}{(n_1-1)f_1} + \frac{dn_2}{(n_2-1)f_2} = \frac{\Delta}{f_1 f_2} \left( \frac{dn_1}{n_1-1} + \frac{dn_2}{n_2-1} \right)$$

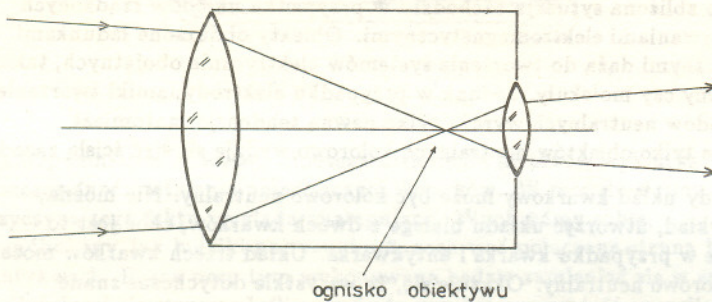
Jeżeli ma być  $n_1 = n_2 = n$ , to

$$\frac{dn}{n-1} \left( \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \right) = \frac{\Delta}{f_1 f_2} \cdot \frac{2dn}{n-1},$$

skąd

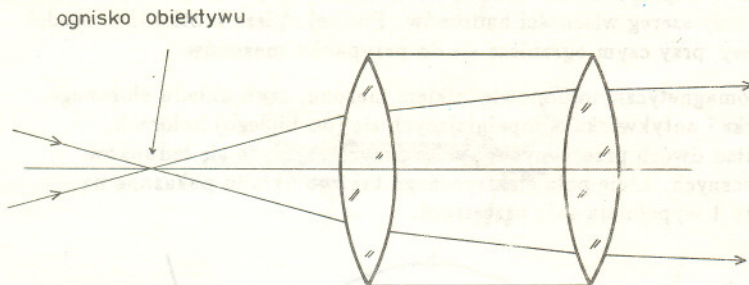
$$\Delta = \frac{f_1 + f_2}{2}.$$

Jak widać, achromatyczny okular można zbudować na mnóstwo sposobów. Najpopularniejsze są dwa typy. Tzw. okular Huygensa ma  $f_1 : \Delta : f_2 = 3 : 2 : 1$ , przy czym soczewka o dłuższej ogniskowej jest po stronie obiektywu lunety.



Rys. 3. Okular Huygensa.

W drugim, zwanym okulariem Ramsdena, jest  $f_1 : \Delta : f_2 = 1 : 1 : 1$ .



Rys. 4. Okular Ramsdena.

Każdy z nich ma swoje wady i zalety. Okular Huygensa ma większe pole widzenia, ale efektywne ognisko obiektywu znajduje się między soczewkami okularu i trudno tam zamontować np. mikrometr. Nie ma tego problemu w okularze Ramsdena, bo ognisko leży tu na zewnątrz okularu, za to skoro soczewki są w odległości ogniskowej, to widać osiadający na nich kurz; by tego uniknąć, dobiera się je nie całkiem ściśle według proporcji 1:1:1. Inne lepsze okulary są udoskonalonymi wariantami tych dwóch. Łatwo domyśleć się, że np. każdą soczewkę okularu można sporządzić jako mały achromat, wtedy proporcje odległości mogą być inne, a okular będzie miał inne cechy pożyteczne w specjalnych zastosowaniach. Rzecz jasna, będzie wtedy odpowiednio droższy.

Musimy zmienić nasz pogląd na świat, a tym samym wzbogacić rozumienie procesów, jakie zachodzą w przyrodzie. Do tego doświadczenia wrócimy w jednym z dalszych wykładów. Wybrałem je tutaj jako przykład, aby zilustrować, co mam na myśli mówiąc o procesach przebiegających wbrew zdrowemu rozsądkowi. Zaskakujące wyniki doświadczeń spotykamy zarówno w fizyce klasycznej, jak i we współczesnej, chociaż trzeba przyznać, że w tej ostatniej jest ich naprawdę bardzo dużo. Nie ma w tym nic dziwnego, do wyników fizyki klasycznej zdążyliśmy się już przyzwyczaić. Weszły już one, można się tak wyrazić, do skarbicy doświadczenia życia codziennego i wobec tego stanowią jeden z elementów budujących zdrowy rozsądek. W fizyce klasycznej zaskakuje nas na ogół przebieg zjawiska, mimo że jest on logiczną konsekwencją podstawowych zasad, do których jesteśmy przyzwyczajeni i które akceptujemy jako zgodne ze zdrowym rozsądkiem. W fizyce współczesnej wyjaśnienie przebiegu zjawiska wymaga niekiedy zrewidowania podstawowych zasad lub pojęć i jest znacznie trudniejsze do zaakceptowania. Oczywiście, trudniejsze tylko dla nas, bowiem to, co nazywamy fizyką współczesną, znowu stanie się za jakiś czas fizyką klasyczną, zgodną ze zdrowym rozsądkiem.

W dalszej części wykładu zatrzymam się na zjawisku oczywistym dla każdego: zastanówmy się, czy rozumiemy rzut kamieniem. Bierzymy kamień do ręki, krótki zamach ramieniem i kamień leci. Czy jest w tym coś, co może nas zaniepokoić, czego nie rozumiemy? – dziś chyba nie. Za czasów Arystotelesa sytuacja była cokolwiek odmienna. Nasze pojęcia o otaczającym świecie czerpiemy nie tylko z własnych obserwacji i doświadczeń, ale korzystamy z dorobku pokoleń przekazywanego lepiej lub gorzej w procesie zorganizowanej edukacji, czyli na ogół ze szkoły. Nic więc dziwnego, że „zdrowy rozsądek” współczesnego ucznia liceum różni się od zdrowego rozsądku, na przykład, Arystotelesa, który urodził się 384 lata przed Chrystusem. Arystoteles obserwował bardzo uważnie otoczenie. Stwierdzał oczywiste fakty: wóz jedzie, jeżeli ktoś lub coś go ciągnie. Jeżeli brak siły pociągowej, wóz stoi. Trudniej ciągnąć po piasku niż po równej, płaskiej drodze. W każdym ruchu, twierdzi Arystoteles, są dwa główne czynniki: siła napędzająca ( $F$ ) i opór ( $R$ ). Aby ruch mógł zaistnieć, siła napędzająca musi być większa niż opór. Stwierdzenie to można nazwać pierwszą

# Uwięzienie kwarków

Stanisław MRÓWCZYŃSKI

zasadą ruchu. Prowadząc dalej rozważania stawiamy pytanie, od czego zależy prędkość ( $v$ ) poruszającego się ciała? Zgodzimy się zapewne bez trudu, że im większa działa siła, tym szybciej obiekt się porusza. Proszę mi tu wybaczyć, że mówię nieścisłe, a nawet wręcz błędnie, ale staram się odtworzyć tok rozumowania w tej dziedzinie myślicieli starożytnych, którzy opierali się, czasem nawet nieświadomie, na doświadczeniach dnia codziennego. Idąc tą drogą również zapewne zgodzimy się, że im większe opory ruchu, tym mniejsza jest prędkość. Zapisując to, co powiedziałem, wzorem matematycznym otrzymamy zależność zwaną czasem prawem ruchu Arystotelesa. To nic, że jest ona nieprawdziwa, ale za to jest zgodna z powierzchownymi obserwacjami. Prowadźmy więc dalej nasze rozważania i zajmijmy się wspomnianym już rzutem kamieniem. Dopóki kamień styka się z ruszającą ręką, nie widać większych problemów. Na kamień działa siła ręki. Kamień porusza się coraz szybciej w miarę zamachu ręką, ale w pewnej chwili odrywa się od dłoni. I co wtedy? Na kamień nie działa już żadna siła, a jednak się porusza. Co lub kto powoduje ten ruch? Przez wiele wieków ze zmiennym powodzeniem usiłowano zrozumieć, dlaczego kamień rzucony porusza się, chociaż każdy wiedział, że można rzucić kamieniem. Rzut taki wydawał się być sprzeczny ze zdrowym rozsądkiem i próbowano uratować sytuację tworząc, między innymi, teorię wirów powietrza, które popychały kamień.

W początkach 1630 roku uczony włoski Galileo Galilei ukończył dzieło *Dialog o dwu najważniejszych układach świata: ptolemeuszowym i kopernikowym*, które to dzieło, ogólnie mówiąc, miało mu przynieść wiele kłopotów. Rozmowy *Dialogu* toczą się w Wenecji, w pałacu Sagrada. W usta Filipa Salvatego kładzie Galileusz własne poglądy. Przedstawicielem starych poglądów jest Simplicio, który dziedzicząc imię znanego komentatora Arystotelesa z VI wieku po Chrystusie usiłuje wytrwale bronić straconych pozycji. W jednym z dialogów znajdujemy próbę dawnego wyjaśnienia, dlaczego rzucone ciało porusza się po oderwaniu od ręki.

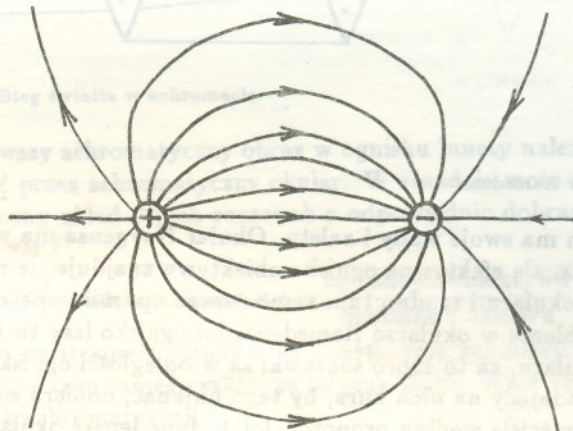
Simplicio:[...] *W całym waszym wywodzie wprowadziliście założenie, z którym w szkole perypatetyków* (tu dodam od siebie, że tak nazywano uczniów Arystotelesa, a potem powstały stąd cały kierunek filozoficzny)

Kwarki to składniki cząstek elementarnych należących do grupy *hadronów*. Wspólną cechą hadronów jest to, że podlegają tzw. *oddziaływaniom silnym jądrowym* lub krócej *oddziaływaniom silnym*. Przykładami hadronów są protony i neutrony tworzące jądra atomowe oraz liczne spośród cząstek produkowanych w zderzeniach dostatecznie szybkich jąder. Kwarki obdarzone są ładunkami kolorowymi, analogicznymi do ładunków elektrycznych. Hipoteza uwięzienia stwierdza, że w przyrodzie istnieją tylko takie układy kwarkowe, które są kolorowo neutralne lub inaczej – białe. Z hipotezy tej w szczególności wynika, że nie można wyizolować z hadronu pojedynczego kwarka, gdyż jest on kolorowy. Zauważmy, że nieco zbliżona sytuacja zachodzi i w przypadku układów rządzonych oddziaływaniami elektromagnetycznymi. Obiekty obdarzone ładunkami elektrycznymi dążą do tworzenia systemów elektrycznie obojętnych, takich jak atomy czy molekuly. Jednak w przypadku elektrodynamiki tworzenie się układów neutralnych wyraża tylko pewną tendencję, natomiast istnienie tylko obiektów neutralnych kolorowo wydaje się być ścisłą zasadą.

Nie każdy układ kwarkowy może być kolorowo neutralny. Nie można, na przykład, utworzyć układu białego z dwóch kwarków, choć jest to możliwe w przypadku kwarka i antykwarka. Układ trzech kwarków może być kolorowo neutralny. Okazuje się, że wszystkie dotychczas znane hadrony, a jest ich kilkaset, można podzielić na dwie grupy cząstek – te zbudowane z kwarka i antykwarka, zwane *mezonami* i *barionami*, tworzone przez trzy kwarki. Hipoteza uwięzienia nie wyklucza istnienia hadronów innych niż mezony i bariony, na przykład kolorowo neutralnego układu dwóch kwarków i dwóch antykwarków, jednak takie obiekty nie były obserwowane.

Natura oddziaływań silnych nie jest jeszcze całkiem poznana, więc nie można z całą pewnością stwierdzić, jaki jest mechanizm uwięzienia kwarków. Zaproponowano jednak kilka modeli, za pomocą których można opisać cały szereg własności hadronów. Poniżej opiszę krótko tzw. model strunowy, przy czym ograniczę się do przypadku mezonów.

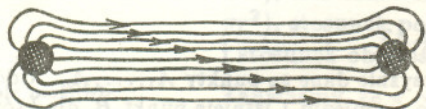
Elektromagnetycznym odpowiednikiem mezonu, czyli układu złożonego z kwarka i antykwarka o dopełniających się (do białego) kolorach, jest układ dwóch przeciwnych, a więc przyciągających się ładunków elektrycznych. Linie pola elektrycznego takiego układu pokazane na rysunku 1 i wypełniają całą przestrzeń.



Rys. 1

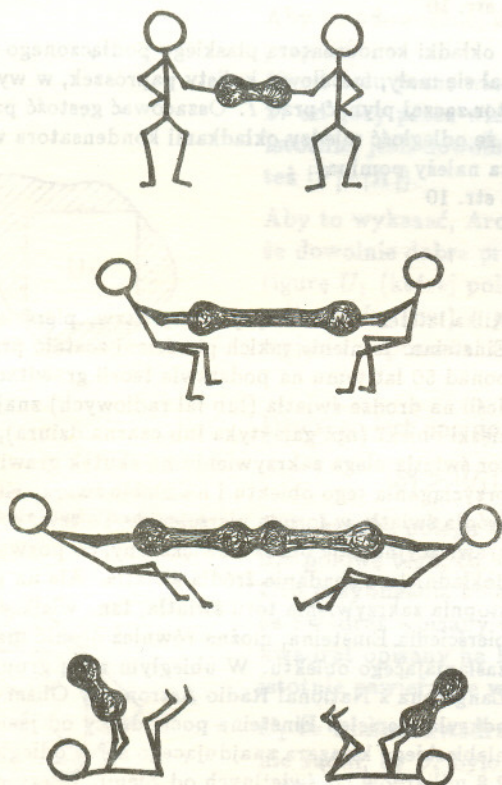
Przypuszcza się, że w przypadku pola wytworzonego przez ładunki kolorowe, zwanego *chromodynamicznym*, próżnia zachowuje się tak jak nadprzewodnik w stosunku do pola magnetycznego, tzn. stara się wypchnąć linie pola poza swój obszar. Jeśli tak dzieje się w istocie, to układ linii pola chromodynamicznego kwarka i antykwarka wygląda jak na rysunku 2, a zatem kwark i antykwark połączone są cienką struną.

Przyjmijmy, że rozmiary poprzeczne struny są wszędzie jednakowe i niezależne od jej długości. Wówczas stwierdzimy, stosując prawo analogiczne do prawa Gaussa z elektrodynamiki, że gęstość strumienia pola chromodynamicznego, a zatem i wielkość pola, nie zależą od długości struny. Z tego wynika, że energia potencjalna oddziaływań między kwarkami wzrasta liniowo z odległością między nimi. Mamy więc tutaj sytuację całkowicie inną niż w elektrodynamice, gdzie, jak pamiętamy, energia potencjalna oddziaływania między ładunkami nie rośnie, lecz zanika odwrotnie proporcjonalnie do ich wzajemnej odległości. Można to wyrazić inaczej mówiąc, że energia oddziaływania kwarków w mezonie jest proporcjonalna do długości struny.



Rys. 2

Jak wspominałem powyżej, hipoteza uwięzienia kwarków wyklucza w szczególności istnienie pojedynczych kwarków. W modelu struny przyczyna tego faktu wygląda następująco. Wyobraźmy sobie, że próbujemy, jak ludziki na rysunku 3, rozerwać połączone struną kwark i antykwark. Praca przy tym wykonywana będzie zamieniać się w energię wydłużającej się struny. Jeśli energia ta przekroczy wartość energii potrzebną do wytworzenia pary złożonej z kwarka i antykwarka, struna zostanie rozerwana i powstaną dwa kolorowo neutralne mezony.



Rys. 3

Uwięzienie kwarków w układach kolorowo neutralnych jest obecnie jedynie hipotezą, choć bardzo dobrze ugruntowaną. Rośnie wśród fizyków przekonanie, że sformułowana już około 20 lat temu teoria oddziaływań kwarków – *chromodynamika kwantowa*, wcześniej czy później dostarczy dowodu poprawności tej hipotezy. Można również oczekiwać, że dowód wart będzie Nagrody Nobla.

*trudno się pogodzić, gdyż jest ono najzupełniej sprzeczne z Arystotelesem, a mianowicie przyjmujecie jako rzecz znaną i oczywistą, że ciało oddzielone od tego, które je wyrzucało, porusza się w dalszym ciągu ruchem udzielonym mu przez ciało wyrzucające. To pojęcie udzielonej siły jest równie dalekie od filozofii perypatetycznej, jak przenoszenie właściwości jednego przedmiotu na drugi. Filozofia ta, jak wam zapewne wiadomo, uczy, że ciało wyrzucone jest przenoszone przez otaczający je ośrodek, a w danym przypadku byłoby nim powietrze [...]*

Simplicio miałby dzisiaj kłopoty z wyjaśnieniem ruchu satelitów w próżni okołozemskiej, chociaż może zdołałby się wybronić stwierdzeniem, że satelity należą już do świata nadksiężycowego, gdzie obowiązuje inna fizyka, bo planety i ciała niebieskie krążą po kolistych orbitach. Nie musimy jednak wyrećzać Galileusza, bowiem przez wypowiedzi Salvatiego zbija on wywody Simplicia. Przytaczam wywody Simplicia nie po to, aby się z nich natrzasać, ale po to, aby uzmysłowić Państwu, że nawet w najprostszym, wydawałoby się, przypadku można było mieć wątpliwości, czy aby rzut kamieniem nie przeczy zdrowemu rozsądkowi.

Podobne trudności napotymano chcąc wykazać, że Ziemia obraca się wokół osi raz na dobę. W dziele *O niebie (Peri Uranu)* Arystoteles wspomina, że są tacy, którzy utrzymują, iż Ziemia się obraca, ale zaraz uzasadnia, dlaczego jest to niemożliwe. Warto poznać argumenty uzasadniające, dlaczego Ziemia nie może się obracać. Są to przecież argumenty wykazujące, że rzeczony obrót jest sprzeczny ze zdrowym rozsądkiem. Arystoteles zauważa bowiem, że wszystkie ciała w swobodnym spadku dążą po liniach prostych ku środkowi Ziemi. A to, oczywiście, jest nie do pogodzenia z ruchem obrotowym naszego globu. Wyraźnie pisze o tym Ptolemeusz w klasycznej pracy *Almagest* poświęconej astronomii geocentrycznej. Zgodnie z zasadami Arystotelesa: *gdyby Ziemia była w ruchu wyprzedzałaby wszystkie spadające ciała, a biorąc pod uwagę jej ogromne rozmiary, wszystkie zwierzęta i obiekty byłyby pozostawione w tyle pływając w powietrzu, a sama Ziemia z powodu znacznej prędkości wypadłaby ze Wszechświata.* Widać wyraźnie, że koncepcje, dziś dla nas oczywiste, kłóciły się ze zdrowym rozsądkiem starożytnych do tego stopnia, że albo



## Zadania

Redaguje Rafał SZTENCEL

negowali istnienie zjawisk, które dały się negować (ruch obrotowy Ziemi), albo starali się znaleźć dla nich takie wytłumaczenie, które nie naruszało raz przyjętych poglądów. Zastanówmy się nad tymi przykładami. Czy czasami nie jesteśmy i dzisiaj w podobnej sytuacji, gdy mówimy, że coś jest niemożliwe. Nim się o czymś wyrokuje, warto przedtem odwołać się do doświadczenia. A może niemożliwe jest możliwe?

W następnym wykładzie zastanowimy się nad tym, jak można przyspieszać nie zwiększając prędkości.

**M 607.** Udowodnić, że pole wielokąta o średnicy 1 nie przekracza  $\pi/4$  (średnicą zbioru nazywamy kres górny odległości punktów należących do zbioru).

Rozwiązanie na str. 16

**M 608.** Przypuśćmy, że  $n$  chłopców ma dziewczyny, ponadto każda grupa  $k$  chłopców (gdzie  $1 \leq k \leq n$ ) ma co najmniej  $k$  dziewczyn (tzn. każda z nich ma co najmniej jednego przyjaciela w wymienionej grupie chłopców). Udowodnić, że każdy chłopiec może ożenić się ze swoją dziewczyną.

Rozwiązanie na str. 13

**M 609.** Na płaszczyźnie dane są punkty  $A_1, \dots, A_n$ . Udowodnić, że na dowolnym okręgu o promieniu 1 istnieje punkt  $B$ , dla którego

$$A_1B + \dots + A_nB \geq n.$$

Rozwiązanie na str. 11

Redagują Jarosław i Krzysztof KULPA

**F 317.** Metalową rurkę o promieniu  $r_1$  zanurzono pionowo w oleju o gęstości  $\rho$  i względnej przenikalności elektrycznej  $\epsilon_r$ . Do rurki i pręta o promieniu  $r_2$  znajdującego się w środku rurki przyłożono napięcie  $U$ . O ile podniesie się poziom oleju w rurce?

**Wskazówka:** Pojemność kondensatora walcowego wynosi  $C = \frac{2\pi h \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln \frac{r_1}{r_2}}$ ,

gdzie  $h$  oznacza długość kondensatora.

Rozwiązanie na str. 10

**F 318.** Między okładki kondensatora płaskiego podłączonego do napięcia  $U$  dostał się mały, metalowy, kulisty paproszek, w wyniku czego przez kondensator zaczął płynąć prąd  $I$ . Oszacować gęstość paproszka, jeżeli wiadomo, że odległość między okładkami kondensatora wynosi  $d$ . Opory powietrza należy pominąć.

Rozwiązanie na str. 10



## Korespondencja komputerowa

Kilka miesięcy temu Centrum Informatyczne UW zostało podłączone do sieci komputerowej EARN umożliwiającej prawie natychmiastową łączność z użytkownikami komputerów niemal na całym świecie. Redakcja *Delty* również z tej sieci korzysta i, jak uważny Czytelnik być może spostrzegł, w redakcyjnej stopce pojawił się adres komputerowy. Właśnie dzięki owej sieci otrzymaliśmy dwie zamieszczone niżej notatki.

Sonda badawcza Magellan wysłana z Ziemi w maju 1989 krąży od sierpnia roku 1990 wokół planety Wenus. Orbita rakiety jest silnie wydłużoną elipsą, tak że odległość Magellana od Wenus waha się od 300 do 8500 km. Sonda wyposażona jest w radar umożliwiający „fotografowanie” powierzchni planety poprzez gęste chmury pokrywające Wenus. I rzeczywiście, „zdjęcia” przesłane przez Magellana na Ziemię wyglądają tak, jakby żadnych chmur nie było. W trakcie obecnej misji zostanie przebadane około 80% powierzchni planety, a następne podróże uzupełnią sporządzoną mapę Wenus.

Jacek TUSZYŃSKI, Pasadena, Kalifornia, USA

Kilka lat temu astrofizycy odkryli tzw. pierścienie Einsteina. Istnienie takich pierścieni zostało przewidziane ponad 50 lat temu na podstawie teorii grawitacji Einsteina. Jeśli na drodze światła (lub fal radiowych) znajduje się ciężki obiekt (np. galaktyka lub czarna dziura), wtedy tor światła ulega zakrzywieniu na skutek grawitacyjnego przyciągania tego obiektu i na niebie tworzy się obraz źródła światła w formie pierścienia. To tzw. soczewkowanie grawitacyjne daje obraz powiększony, co pozwala na dokładniejsze zbadanie źródła światła. Ale na podstawie stopnia zakrzywienia toru światła, tzn. wielkości pierścienia Einsteina, można również ocenić masę zasłaniającego obiektu. W ubiegłym roku grupa Glenna Langstona z National Radio Astronomy Observatory odkryła pierścień Einsteina pochodzący od jasnego, niebieskiego kwazara znajdującego się w odległości około 2,8 miliardów lat świetlnych od Ziemi. Mierząc jego rozmiary oszacowano masę zasłaniającej galaktyki na około 300 miliardów mas Słońca. Jest to około 8 - 16 razy więcej niż wynika to z bezpośredniej obserwacji gwiazd tej galaktyki. Odkrywczy pierścienia Einsteina sugerują więc, że zasłaniająca galaktyka musi zawierać tzw. ciemną materię - czyli materię nie emitującą obserwowalnego promieniowania.

Jan KALINOWSKI, Monachium, RFN

# Od kiedy i dlaczego istnieje $\pi$

Marek KORDOS

Łatwo zauważyć, że nie ma nic nadzwyczajnego w fakcie, że stosunek długości okręgu do jego średnicy jest taki sam dla wszystkich okręgów. Przecież dowolne dwa okręgi są jednokładne, a jednokładność zachowuje stosunek długości. Podobnie jest np. dla stosunku obwodu pięciokąta foremnego do promienia okręgu opisanego na nim. Czemu wobec tego pierwszy z tych stosunków – liczba  $\pi$  – jest ważną stałą matematyczną, a ten drugi stosunek nie?

Oto uzasadnienie pochodzące od Archimedesesa (-287;-212), który pierwszy zwrócił uwagę na doniosłość liczby  $\pi$ . Mianowicie liczba  $\pi$  pozwala prosto wyrazić nie tylko stosunek długości okręgu do jego promienia (wyrażany wzorem  $2\pi r$ ), lecz także stosunek pola koła do kwadratu jego promienia (co daje wzór  $\pi r^2$ ), stosunek pola sfery do kwadratu jej promienia (co daje wzór  $4\pi r^2$ ) i stosunek objętości kuli do sześcianu jej promienia (co daje wzór  $\frac{4}{3}\pi r^3$ ).

Zauważmy, że  $\pi$  obsługujące jeden z tych wzorów (obojętnie który) to jakaś tam stała proporcjonalności. Chcąc jednak w pozostałych wzorach napisać  $\pi$  trzeba udowodnić, że jest to to samo  $\pi$ , ta sama liczba. I takie właśnie dowody Archimedeses przeprowadził. Jako „wyjściowe”  $\pi$  wziął stosunek długości okręgu do jego średnicy.

Dla uzasadnienia, że  $\pi$  „okręgowe” jest równe  $\pi$  „kołowemu”, użył dwóch sprytnych twierdzeń o aproksymacji koła wielokątami:

**Twierdzenie 1.** Jeśli pole  $|F|$  figury  $F$  jest mniejsze od pola koła  $K$ , to istnieje taki wielokąt  $W$  wpisany w to koło, że  $|W| > |F|$ .

**Twierdzenie 2.** Jeśli pole figury  $F$  jest większe od pola koła  $K$ , to istnieje taki wielokąt  $W$  opisany na tym kole, że  $|W| < |F|$ .

Aby to udowodnić, należy wykazać, że pole koła  $K$  może być dowolnie przybliżone:

- 1° od dołu przez wielokąty wpisane w  $K$ ,
- 2° od góry przez wielokąty opisane na  $K$ .

Istotnie, jeśli dowolnie dobrze, to może być przybliżone lepiej niż  $|K| - |F|$  (czy też  $|F| - |K|$ ).

Aby to wykazać, Archimedeses użył metody wyczerpywania. Polega ona na tym, że dowolnie dobre przybliżenie pola jakiejś figury  $S$  uzyskujemy wyjmując z niej figurę  $U_1$  (której pole umiemy ustalić) o polu większym niż  $\frac{1}{2}|S|$ , z pozostałości – figurę  $U_2$  (jw.) o polu większym niż połowa tego, co zostało po poprzednim wyjęciu, z pozostałości – figurę  $U_3$  (jw.) itd. Tym przybliżeniem jest suma

$$|U_1| + |U_2| + \dots + |U_n|.$$

Dlaczego jest ono dowolnie dobre? Bo

$$|S| \geq |U_1| + |U_2| + |U_3| + \dots \geq \frac{|S|}{2} + \frac{|S|}{4} + \frac{|S|}{8} + \dots = |S|.$$

Cała sztuka polega tylko na wykazaniu, że w każdym kroku wyjmujemy więcej niż połowę tego, co jeszcze zostało – przecież nie wiemy, jakie jest  $|S|$ .

Oto przybliżenie koła  $2n$ -kątami foremnymi. Zaczynamy od kwadratu. Dowód, że kwadrat wpisany w koło to więcej niż połowa tego koła, widać na rysunku; kwadrat opisany na kole ma pole dokładnie dwa razy takie, jak wpisany, a koło istotnie zawiera się w tym większym kwadracie.

$U_1$  to właśnie kwadrat.  $U_2$  to cztery trójkąty z kolejnego rysunku (nikt przecież nie żądał, by  $U_i$  było w jednym kawałku). Rysując styczną w wierzchołku trójkąta i odcinki prostopadłe do podstawy w pozostałych wierzchołkach otrzymujemy prostokąt o polu dwa razy większym od pola trójkąta, a więc więcej niż dwa razy większym od zawartego w tym prostokącie fragmentu

koła. Zatem  $|U_2| > \frac{1}{2}(|S| - |U_1|)$ . I tę operację powtarzamy, bo uzasadnienie, że  $|U_{i+1}| > \frac{1}{2}(|S| - |U_1| - |U_2| - \dots - |U_i|)$  jest takie samo, jak dla  $i=1$ .

Koło udało się przybliżyć wielokątami wpisanymi w to koło, a więc twierdzenie 1 jest udowodnione.

Archimedeses starał się możliwie dokładnie obliczyć  $\pi$ . Jego wynik był następujący:

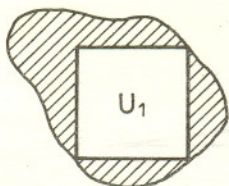
$$3 \frac{1137}{8069} < \pi < 3 \frac{1335}{9347},$$

czyli mniej więcej

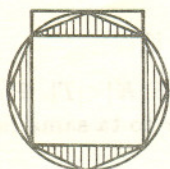
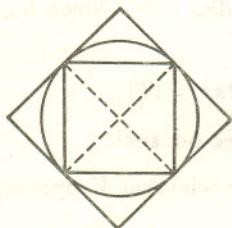
$$3,1409096 < \pi < 3,1428265,$$

a więc dokładność była duża

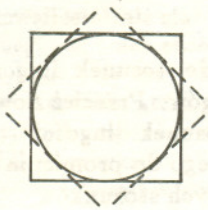
– przedział ma długość niecałe 0,002.



Szerzej o metodzie wyczerpywania pisałem w artykule *Całka Eudoksoosa* (*Delta* 7/1989.)



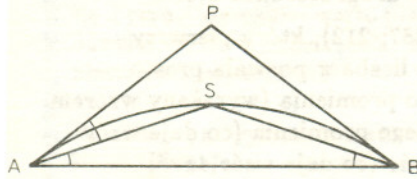




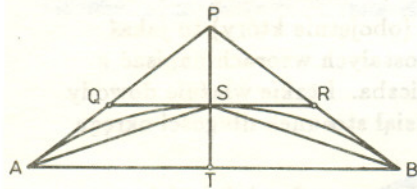
Co jednak wyczerpywać dla udowodnienia twierdzenia 2? Archimedes wyczerpywał różnicę między kwadratem opisanym na kole i kołem. Kolejne  $U_i$  otrzymujemy jako sumę „rogów” obciętych wzdłuż stycznych w środku łuku ograniczającego każdy z trójkątów krzywoliniowych, z jakich składa się każda kolejna pozostałość. Wystarczy zatem wykazać, że obcinając taki trójkąt obcinamy więcej niż połowę rogu.

W tym celu potrzebne jest drobne twierdzenie pomocnicze:

*Jeżeli styczne do okręgu w punktach  $A$  i  $B$  przecinają się w punkcie  $P$ , a punkt  $S$  jest środkiem mniejszego z łuków o końcach w punktach  $A$  i  $B$ , to  $AS$  jest dwusieczną kąta  $PAB$ .*



Łatwo je uzasadnić: kąt  $SAB$  jest równy kątowi  $SBA$  (bo trójkąt  $ASB$  jest równoramienny), ten zaś kątowi  $PAS$  (jako wpisany i dopisany oparte na tym samym łuku  $AS$  – oba są równe połowie kąta środkowego opartego na tym łuku).

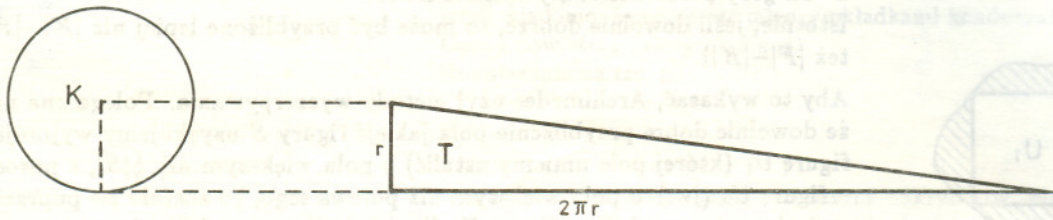


Wróćmy do obcinania rogów. Na rysunku pole trójkąta  $QPR$  jest większe od sumy pól trójkątów  $QAS$  i  $RBS$ . Dlaczego? Bo  $|\triangle QPR| = |\triangle QPS| + |\triangle RPS|$ . Trójkąty  $QPS$  i  $QAS$  mają wspólną podstawę. Wysokość  $QPS$  to  $PS$ , natomiast wysokość  $QAS$  jest równa  $ST$ . Ale  $PS > ST$ , bo dwusieczna (w trójkącie  $APT$ ) dzieli przeciwległy bok na odcinki proporcjonalne do przyległych do nich boków, a  $AP > AT$ . Stąd  $|\triangle QPS| > |\triangle QAS|$ , co ze względu na symetrię rysunku kończy uzasadnienie.

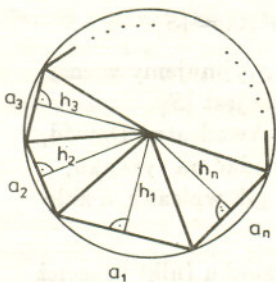
Na koniec wystarczy zauważyć, że wyczerpywany trójkąt krzywoliniowy zawiera się istotnie w sumie trójkątów  $QPR$ ,  $QAS$  i  $RBS$ .

Wyczerpaliśmy zatem różnicę kwadratu opisanego na kole i koła. Zatem również twierdzenie 2 jest prawdziwe.

Możemy już teraz przejść do dowodu zapowiadanej równości  $\pi$  „okręgowego” i „kołowego”.



Weźmy pod uwagę koło  $K$  i trójkąt prostokątny  $T$  o jednej przyprostokątnej równej  $r$  (promieniowi koła), a drugiej równej  $2\pi r$  (długości okręgu). Jeśli  $|K| > |T|$ , to istnieje (tw. 1) wielokąt  $W$  wpisany w koło i spełniający warunek  $|W| > |T|$ . Obliczamy



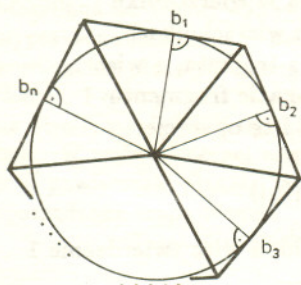
$$|W| = \frac{1}{2} a_1 h_1 + \frac{1}{2} a_2 h_2 + \dots + \frac{1}{2} a_n h_n,$$

gdzie  $a_i$  to boki wielokąta  $W$ , a  $h_i$  – ich odległości od środka koła. Niech  $h_{max}$  oznacza największą z liczb  $h_i$ ; wówczas

$$|W| \leq \frac{1}{2} h_{max} \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_n) < \frac{1}{2} r \cdot 2\pi r = |T|.$$

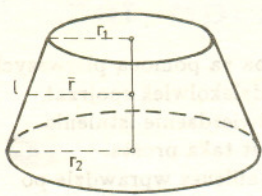
Otrzymaliśmy sprzeczność. Możliwość  $|K| > |T|$  trzeba więc odrzucić.

Przypuśćmy z kolei, że  $|K| < |T|$ . Wówczas (tw. 2) istnieje wielokąt  $V$  opisany na kole i spełniający warunek  $|V| < |T|$ . Tym razem



$$\begin{aligned} |V| &= \frac{1}{2} r \cdot b_1 + \frac{1}{2} r \cdot b_2 + \dots + \frac{1}{2} r \cdot b_m = \\ &= \frac{1}{2} r \cdot (b_1 + b_2 + \dots + b_m) > \frac{1}{2} r \cdot 2\pi r = |T|. \end{aligned}$$

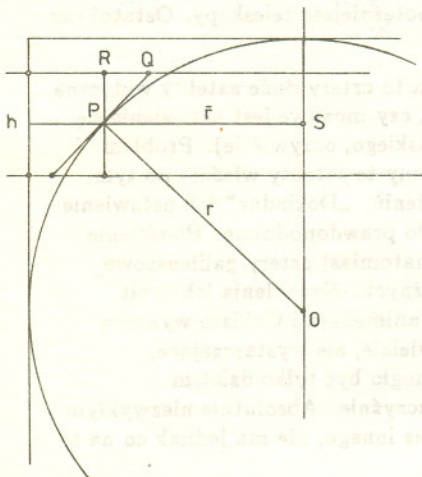
Znowu sprzeczność. Odrzucić trzeba zatem również możliwość  $|K| < |T|$ . Pozostaje tylko  $|K| = |T|$ , a o to nam chodziło. Liczba  $\pi$  we wzorze  $2\pi r$  to ta sama liczba  $\pi$ , co we wzorze  $\pi r^2$ .



Zanim przejdziemy do dalszych uożsamień, zauważmy, że  $\pi$  we wzorach na pole powierzchni bocznej walca ( $2\pi rh$ ) czy stożka ( $\pi rl$ ), jak też we wzorach na objętość walca ( $\pi r^2 h$ ) i stożka ( $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ ) jest to samo, co we wzorach na długość okręgu czy pole koła – wyprowadzenia zna każdy uczeń szkoły średniej (bądź też powinien znać). Do wzorów zawierających „sprawdzone”  $\pi$  dopiszmy jeszcze wzór na pole powierzchni bocznej stożka ściętego:  $\pi l(r_1 + r_2) = 2\pi \bar{r}l$ .

A teraz dowód Archimedesa, że  $\pi$  „okręgowy” jest równe  $\pi$  „sferycznemu”.

Na sferze opiszemy walec. Ma on zatem promień podstawy równy  $r$ , a wysokość równą  $2r$ . Sprawdźmy, że jeśli przetniemy dwiema płaszczyznami równoległymi do podstawy walca obie te powierzchnie, to obręcz wycięta z powierzchni walca będzie miała pole równe połowi powierzchni bocznej stożka ściętego stycznego do sfery w połowie odległości od płaszczyzn i ograniczonego tymi płaszczyznami. Aby to wykazać, posłużymy się przekrojem osiowym walca (i, rzecz jasna, sfery).



Z podobieństwa trójkątów  $OPS$  i  $QPR$  (są prostokątne i mają  $\angle OPS = \angle QPR$ ) wynika, że

$$\frac{OP}{PS} = \frac{QP}{PR}, \text{ czyli } OP \cdot PR = PS \cdot QP,$$

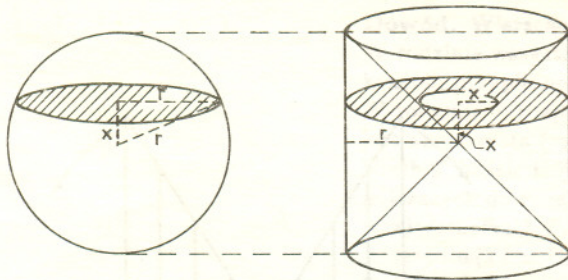
co zapisane w innych oznaczeniach daje

$$r \cdot \frac{h}{2} = \bar{r} \cdot \frac{l}{2}, \text{ czyli } 2\pi rh = 2\pi \bar{r}l,$$

a to właśnie mieliśmy wykazać.

W tym miejscu Archimedes zauważa, że biorąc podział walca i sfery płaszczyznami o bardzo małej odległości uzyskujemy sytuację, w której rodzina opisanych na sferze stożków ściętych dowolnie dokładnie przybliża tę sferę. Ale suma pól ich powierzchni bocznych jest zawsze – niezależnie od tego, jakie odległości płaszczyzn rozpatrujemy – równa połowi powierzchni bocznej całego walca, czyli  $4\pi r^2$ . Stąd, ponieważ niezależnie od dokładności przybliżenia otrzymujemy ten sam wynik, pole sfery jest równe  $4\pi r^2$  i  $\pi$  „sferyczne” jest równe  $\pi$  „okręgowemu”.

Na koniec (w tej samej pracy, w której znajduje się przytoczone wyżej rozważanie dotyczące sfery, a mianowicie *O kuli i walca*) Archimedes dowodzi, że  $\pi$  „kołowe” i  $\pi$  „kuliste” są równe.



Tym razem narysujmy rozpatrywany wyżej walec obok kuli – obie bryły postawmy na jednej płaszczyźnie.

W walcu wytnijmy jednak dwa stożki mające za podstawy – podstawy walca, a za wspólny wierzchołek – jego środek.

Przecinając obie bryły płaszczyzną równoległą do podstaw walca otrzymamy, odpowiednio, koło o polu  $\pi x^2$  i pierścień kołowy o polu równym  $\pi r^2 - \pi x^2$ . Zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa oba pola są równe.

Dalej Archimedes argumentuje tak: nalewając do obu brył wody (czyli bryły traktujemy jak puste wewnątrz naczynia) w każdym momencie, na każdym poziomie dolewamy jej tyle samo. Stąd objętość (= ilość wody, jaką pomieszczą) jest równa. Ale dla walca z wyciętymi stożkami obliczenie objętości jest łatwe:

$$\pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot r = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

I tyle wynosi objętość kuli, co pokazuje, że „kuliste”  $\pi$  jest takie samo, jak trzy pozostałe.

Później, ponad półtora tysiąca lat później, znaleziono liczbę  $\pi$  jeszcze w innych miejscach, a to dzięki stworzonej przez Newtona i Leibniza analizie matematycznej. Zapewne jednak wcale by jej nie szukano, gdyby nie miała ona ugruntowanej pozycji ważnej stałej matematycznej, którą zapewnił jej Archimedes.

## Patrz w niebo

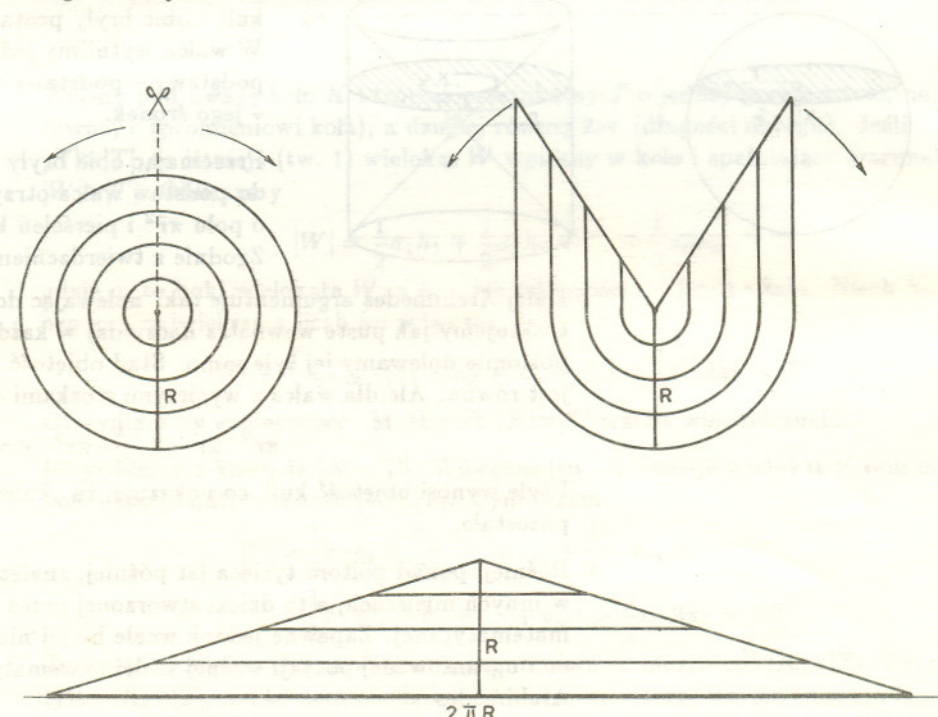
Około 1610 r. Galileusz rozpoczął teleskopowe obserwacje nieba za pomocą pierwszych zbudowanych przez siebie lunet. Nic dziwnego, że właściwie gdziekolwiek spojrzeł, to dokonywał odkrycia. Wśród jego licznych odkryć jest też stwierdzenie istnienia pierścieni Saturna, aczkolwiek w tym przypadku sprawa nie jest taka prosta. Mianowicie przez swój bardzo niedoskonały teleskop widział Galileusz wprowadzić po obu stronach tarczy Saturna jakies „dodatki”, ale nie rozpoznał ich jako pierścieni (dokonał tego Huygens ponad 40 lat później). Posunął się nawet dalej w fałszywym kierunku i twierdził, że widział dwa satelity Saturna, a cały układ tych ciał nazywał „planetą potrójną”. Pech chciał, że po kilku latach owe domniemane satelity przestały być widoczne i Galileusz w ogóle zwątpił w swoje odkrycie. Teraz wiemy, że było to skutkiem znalezienia się Ziemi akurat dokładnie w płaszczyźnie pierścieni; powtarza się to w przybliżeniu co 15 lat. Pierścienie są bowiem tworem niezwykle ciekim, ich grubość nie przekracza 1 km i oglądane z krawędzi z odległości 9,5 j.a. po prostu przestają być na jakiś czas widoczne nawet przez najpotężniejsze teleskopy. Ostatni raz było tak w marcu 1980 r.

Jowisz wprowadzić nie ma tak gęstych pierścieni, ma za to cztery duże satelity widoczne nawet w niewielkiej lunecie. Można by się zastanowić, czy możliwe jest ustawienie się tych satelitów na jednej prostej (dla obserwatora ziemskiego, oczywiście). Problem może wyglądać na niepoważny, bo przecież rozpoznajemy te satelity właśnie po tym, że ustawione są na jednej prostej – tylko że w przybliżeniu. „Dokładne” ich ustawienie na jednej linii jest w zasadzie możliwe, aczkolwiek mało prawdopodobne. Pierścienie Saturna są tworem płaskim z ogromną dokładnością, natomiast cztery galileuszowe satelity obiegają Jowisza w płaszczyznach wyraźnie różnych. Nachylenia ich orbit do płaszczyzny jowiszowego równika dla Io, Europy, Ganimedesa i Callisto wynoszą odpowiednio 0°04, 0°47, 0°21 i 0°51. Różnice nie są wielkie, ale wystarczające, by ewentualne prostoliniowe ustawienie się satelitów mogło być tylko dziełem przypadku. Nie ma tu przecież mowy o wspólnej płaszczyźnie. Absolutnie niezwykłym wydarzeniem byłoby np. zakrycie jednego satelity przez innego, nie ma jednak co na to liczyć – w kosmosie jest na to zbyt „przestronnie”.

Tomasz KWAST

## Wzór na pole koła

Liczbę  $\pi$  określamy jako iloraz długości obwodu koła i jego średnicy. Wtedy obwód koła o promieniu  $R$  wynosi  $2\pi R$ . Oto dowód „bez słów”, który pokazuje, że pole takiego koła wynosi  $S = \pi \cdot R^2$ :



Jarosław GÓRNICKI

**Rozwiązanie zadania F 317.** Jeżeli olej podniesie się na wysokość  $h$ , energia pola elektrycznego wzrośnie o wartość

$$\Delta E = \frac{1}{2} \Delta C U^2 = \frac{1}{2} \frac{2\pi h \epsilon_0 (\epsilon_r - 1)}{\ln \frac{r_1}{r_2}} U^2$$

Sila, z jaką podnoszony jest słup oleju jest równa

$$F = \frac{\Delta E}{h} = \frac{\pi \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) U^2}{\ln \frac{r_1}{r_2}}$$

Sila ta jest równoważona przez siłę ciężkości słupa oleju,

$$Q = \rho g \pi (r_1^2 - r_2^2) h$$

Porównując obie siły otrzymujemy

$$h = \frac{\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) U^2}{\rho g (r_1^2 - r_2^2) \ln \frac{r_1}{r_2}}$$

**Rozwiązanie zadania F 318.** Przy zetknięciu z okładką paproszek zyskuje ładunek  $Q$  i zaczyna poruszać się z przyspieszeniem  $a$  w stronę przeciwnej okładki. Natężenie pola elektrycznego wynosi  $E = \frac{U}{d}$  oraz  $EQ = am$ . Stąd otrzymujemy  $a = \frac{UQ}{md}$ , gdzie  $m$  jest masą paproszka. Czas ruchu do przeciwnej okładki wyznaczamy z równania  $d = \frac{at^2}{2}$ , stąd

$$t = \sqrt{\frac{2d^2 m}{QU}}$$

kondensator jest równy

$$I = \frac{Q}{t} = \sqrt{\frac{Q^3 U}{2d^2 m}}$$

Niech potencjał jednej okładki wynosi  $U/2$ , drugiej  $-U/2$ . Niech  $r$ ,  $\rho$  oznaczają odpowiednio promień oraz gęstość paproszka. Z równości potencjałów paproszka i jednej z okładek można wyznaczyć jego ładunek

$$\frac{kQ}{r} = \frac{1}{2} U, \quad \left( k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)$$

stąd

$$Q = \frac{Ur}{2k}$$

Otrzymujemy

$$I = \sqrt{\frac{U^4 r^3}{16k^3 d^2 m}}$$

Podstawiając

$$m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

dostajemy

$$I = \frac{U^2}{8d} \sqrt{\frac{3}{\pi \rho k^3}}$$

i ostatecznie

$$\rho = \frac{3}{64\pi k^3} \frac{U^4}{I^2 d} = 3\pi^2 \epsilon_0^3 \frac{U^4}{I^2 d}$$



Rozwiązanie zadania M 609. Niech  $CD$  będzie dowolną średnicą okręgu. Mamy

$$\begin{aligned} 2 &= CD \leq CA_1 + A_1D, \\ 2 &= CD \leq CA_2 + A_2D, \\ &\dots \\ 2 &= CD \leq CA_n + A_nD. \end{aligned}$$

Dodając te nierówności stronami dostajemy

$$2n \leq (CA_1 + \dots + CA_n) + (A_1D + \dots + A_nD).$$

Dlatego jeden z końców średnicy spełnia warunek zadania.

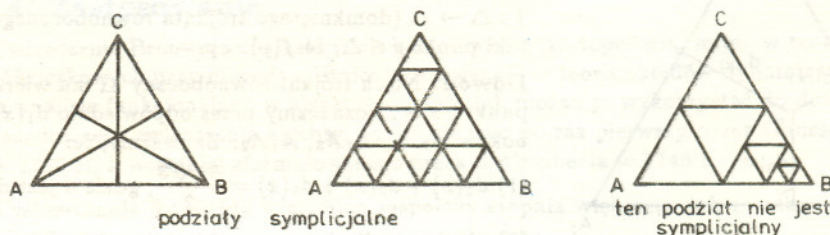
## 1. Wstęp

Jednym z ważniejszych kierunków rozwojowych XIX-wiecznej matematyki była powstająca wówczas *analysis situs* zwana inaczej topologią. Zajmuje się ona własnościami figur geometrycznych, które zachowują się nawet wtedy, gdy deformujemy je tak znacznie, iż tracą one wszelkie swoje własności metryczne i rzutowe.

Wiele faktów topologii jest tak ważnych, że matematykowi (i nie tylko) nie wypada ich nie znać. Typowym przykładem jest tu twierdzenie Brouwera z 1911 roku o punkcie stałym, które prezentujemy poniżej. Jest ono intuicyjnie znacznie mniej oczywiste niż większość faktów topologicznych, ma różne dowody i znalazło szereg zastosowań.

## 2. Lematy Spernera

Podział trójkąta na skończoną liczbę mniejszych trójkątów w taki sposób, aby przekrój każdego dwóch trójkątów podziału był ich wspólnym bokiem, wspólnym wierzchołkiem lub zbiorem pustym, będziemy nazywać podziałem symplecjajalnym – triangulacją.



**Lemat 1** (Emanuel Sperner, 1928). Podzielmy symplecjajalnie trójkąt  $A_1A_2A_3$ . Wierzchołki trójkątów podziału tak ponumerujemy liczbami 1, 2, 3, że

(\*)  $A_i$  ma numer  $i$ , wierzchołek leżący na boku  $A_iA_j$  ma numer  $i$  lub  $j$ , pozostałe zaś wierzchołki mają dowolne numery.

Wtedy wśród trójkątów podziału istnieje taki, którego wierzchołki mają numerację 1, 2, 3.

Numerację spełniającą warunek (\*) nazywamy spernerowską.

**Dowód.** Wierzchołki trójkątów podziału numerujemy zgodnie z warunkiem (\*). W rodzinie wszystkich boków trójkątów tego podziału wyróżniamy te, których końcom przypisano dwie liczby: 1 i 2. Oznaczmy rodzinę tych boków przez  $\mathcal{R}$ . W rodzinie  $\mathcal{R}$  rozpatrzmy boki leżące na odcinku  $A_1A_2$ . Liczba  $u$  tych boków jest nieparzysta (rysunek obok), co jako oczywiste pozostawiamy bez dowodu. Niech  $T$  będzie trójkątem podziału, wtedy przez  $v(T)$  oznaczamy liczbę boków  $T$  należących do rodziny  $\mathcal{R}$ . Jeżeli przez  $w(T)$  oznaczmy zbiór wartości przyjmowanych w wierzchołkach  $T$ , to łatwo stwierdzimy zależności:

1. jeżeli  $w(T) = \{1, 2, 3\}$ , to  $v(T) = 1$ ;
2. jeżeli  $\{1, 2\} \subset w(T) \neq \{1, 2, 3\}$ , to  $v(T) = 2$ ;
3. jeżeli  $\{1, 2\} \not\subset w(T)$ , to  $v(T) = 0$ .

Zatem, jeśli  $r$  jest liczbą trójkątów podziału, które w wierzchołkach mają numerację 1, 2, 3, to

$$r \equiv \sum v(T) \pmod{2}$$

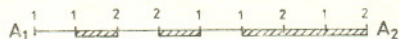
(liczby  $r$  i  $\sum v(T)$  są obie parzyste bądź obie nieparzyste). W  $\sum v(T)$  każdy z boków rodziny  $\mathcal{R}$  liczony jest jeden raz, gdy zawiera się w odcinku  $A_1A_2$  i dwukrotnie w pozostałych przypadkach. Mamy więc

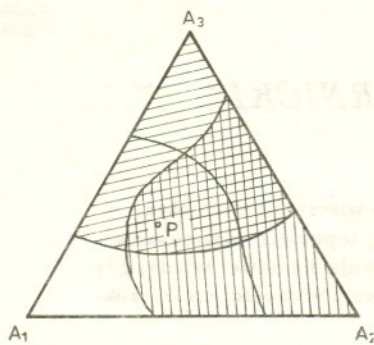
$$\sum v(T) \equiv u \pmod{2},$$

skąd

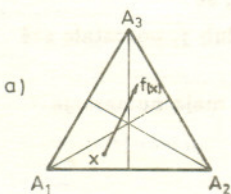
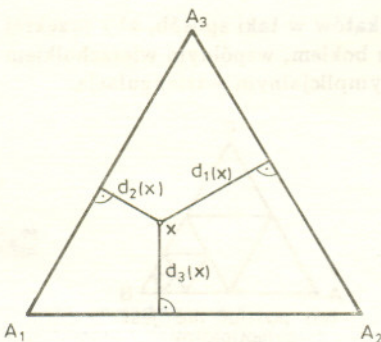
$$r \equiv u \pmod{2}.$$

Z nieparzystości liczby  $u$  wynika nieparzystość liczby  $r$ . W ten sposób pokazaliśmy fakt mocniejszy: liczba  $r$  trójkątów z podziału symplecjajalnego, których wierzchołki mają numerację 1, 2, 3, jest nieparzysta.

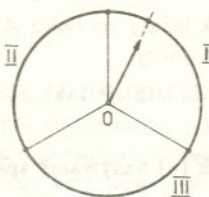




Możliwość wyboru gwarantuje twierdzenie Bolzano–Weierstrassa: w każdym ograniczonym ciągu punktów na płaszczyźnie istnieje podciąg zbieżny.



b)



Sposób określenia przynależności punktu  $x$ : w trójkącie równobocznym wysokości wyznaczają pewne kierunki. Zaznaczamy je w kole, przynosząc równoległe, jak na rysunku (b). Dzieli one brzeg koła na trzy równe łuki, które odpowiednio numerujemy. W każdym punkcie  $x \in \Delta$  zaczepiamy wektor o końcu w punkcie  $f(x)$  (rys. (a)). Następnie przesuwając ten wektor równoległe zaczepiamy go w punkcie  $O$ . Koniec tak otrzymanego wektora rzutujemy radialnie (wzdłuż promienia) na brzeg koła. Numer łuku, do którego należy tak otrzymany punkt, jest numerem zbioru  $R_i$ , do którego należy punkt  $x$ .

O figurze, która ma tę własność, że każde ciągłe przekształcenie w siebie ma punkt stały mówimy, iż ma własność punktu stałego.

Mówimy, że dwa zbiory  $A$  i  $B$  są homeomorficzne, jeśli istnieje ciągłe różnowartościowe odwzorowanie  $h: A \rightarrow h(A) = B$  mające ciągłe odwzorowanie odwrotne  $h^{-1}: B \rightarrow A$ .

Wykorzystując ten rezultat przedstawimy kolejny wynik Spenera zwany „lematem o zamocowaniu”.

**Lemat 2** (E. Spener, 1928). Jeżeli trójkąt  $A_1A_2A_3$  będzie pokryty takimi zbiorami domkniętymi  $R_1, R_2, R_3$ , że

(\*\*)  $R_i$  jest rozłączny z bokiem przeciwległym wierzchołkowi  $A_i$ ,

to istnieje taki punkt  $p \in \Delta A_1A_2A_3$ , że  $p \in R_1 \cap R_2 \cap R_3$ .

**Dowód.** Niech  $(\varepsilon_n)$  będzie ciągiem dodatnich liczb rzeczywistych, zbieżnym do zera. Dla każdego  $n$  tworzymy podziały symplecjalne trójkąta  $A_1A_2A_3$  na trójkąty  $\Delta_j^{(n)}$  tak, że  $\Delta_j^{(n)}$  jest zawarty w kole o promieniu  $\varepsilon_n$  dla każdego  $j$ . Wierzchołek trójkąta  $\Delta_j^{(n)}$  otrzymuje dowolny numer zbiorów  $R_k$ , do których należy. Tego rodzaju numeracja jest spenerowska. Z lematu 1 wynika, że dla każdego  $n$  w podziale symplecjalnym trójkąta  $A_1A_2A_3$  istnieje trójkąt  $B_nC_nD_n$ , którego wierzchołki mają numerację 1, 2, 3. Możemy wybrać podciąg  $(n_i)$  tak, aby ciągi punktów  $(B_{n_i}) \subset R_1$ ,  $(C_{n_i}) \subset R_2$ ,  $(D_{n_i}) \subset R_3$  były zbieżne do tego samego punktu  $p$ , który ze względu na domkniętość zbiorów pokrycia należy do  $R_1 \cap R_2 \cap R_3$ .

### 3. Twierdzenie Brouwera

Rozważmy teraz trójkąt równoboczny. Udowodnimy

**Twierdzenie 1** (Leitzen E. J. Brouwer, 1911). Dla każdego ciągłego odwzorowania  $f: \Delta \rightarrow \Delta$  (domkniętego trójkąta równobocznego w siebie) istnieje punkt stały, tzn. taki punkt  $p \in \Delta$ , że  $f(p) = p$ .

**Dowód.** Niech trójkąt równoboczny  $\Delta$  ma wierzchołki  $A_1, A_2, A_3$ . Dla dowolnego punktu  $x \in \Delta$  oznaczmy przez odpowiednio  $d_1(x), d_2(x), d_3(x)$  odległości punktu  $x$  od boków  $A_2A_3, A_1A_3, A_1A_2$ . Zauważmy, że:

(1)  $d_1(x) + d_2(x) + d_3(x) = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$ , gdzie  $a$  jest długością boku trójkąta,

(2) nieujemne liczby  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , takie, że  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ , wyznaczają taki punkt  $x \in \Delta$ , że  $d_i(x) = \alpha_i$  dla  $i = 1, 2, 3$ .

Niech  $f: \Delta \rightarrow \Delta$  będzie odwzorowaniem ciągłym. Załóżmy ponadto, że  $f(x) \neq x$  dla każdego  $x \in \Delta$ . Możemy wówczas trójkąt pokryć zbiorami  $R_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) utworzonymi następująco: punkt  $x \in \Delta$  należy do zbioru pokrycia o takim numerze  $j$ , dla którego

$$(***) \quad d_j(f(x)) \leq d_j(x)$$

i różnica

$$d_j(x) - d_j(f(x))$$

jest możliwie największa.

W przypadku, gdy dla dwóch liczb  $j, k$  ( $j \neq k$ ) spełniony jest warunek (\*\*\*) oraz

$$d_j(x) - d_j(f(x)) = d_k(x) - d_k(f(x)),$$

punkt  $x$  zaliczamy tak do zbioru  $R_j$ , jak i do zbioru  $R_k$ .

Wówczas:

- każdy punkt trójkąta należy do co najmniej jednego zbioru z pokrycia,
  - zbiory  $R_i$  są domknięte,
  - zbiory  $R_i$  są rozłączne z bokiem przeciwległym wierzchołkowi  $A_i$ ,
- a co najważniejsze  $R_1 \cap R_2 \cap R_3 = \emptyset$  (dlaczego?). Otrzymana sprzeczność z lematem 2 gwarantuje prawdziwość twierdzenia.

Wykazana własność punktu stałego jest niezmiennikiem topologicznym, jeśli bowiem ma ją trójkąt domknięty, to ma także każdy zbiór z nim homeomorficzny.

Istotnie, niech ciągłe odwzorowania  $h: \Delta \rightarrow K, h^{-1}: K \rightarrow \Delta$  ustalają homeomorfizm zbioru  $K$  z trójkątem. Rozpatrzmy ciągłe odwzorowanie  $F: K \rightarrow K$ . Wykażemy, że  $F$  ma punkt stały. Otóż złożenie

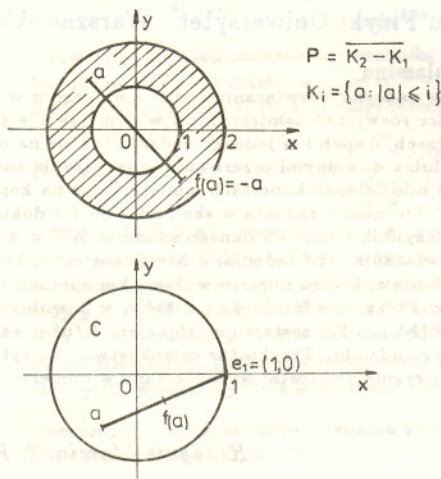
$$h^{-1} \circ F \circ h: \Delta \rightarrow \Delta$$

ma punkt stały (na mocy twierdzenia Brouwera):  $x = (h^{-1} \circ F \circ h)(x)$ . Zatem

$$h(x) = (h \circ h^{-1} \circ F \circ h)(x) = F(h(x)),$$

co kończy uzasadnienie.

Nie wszystkie podzbiory płaszczyzny mają taką miłą własność. Oto dwa przykłady:



**Przykład 1.** Pierścień  $P$  jest zbiorem domkniętym, ograniczonym o niepustym wnętrzu. Ciągłe odwzorowanie antypodyczne  $f : P \rightarrow P$  dane wzorem  $f(a) = -a$  nie ma punktu stałego.

**Przykład 2.** Dla koła otwartego  $C = \{a : |a| < 1\}$  odwzorowanie  $f : C \rightarrow C$  dane wzorem  $f(a) = \frac{1}{2}(a + e_1)$ , jest ciągłe i nie ma punktów stałych.

Symbolem  $|a|$  oznaczamy odległość (euklidesową) punktu  $a$  od punktu  $0 = (0, 0)$ .

Musimy jednak zaznaczyć, że istnieją zbiory płaskie, które nie są homeomorficzne z trójkątem (np. okrąg warszawski), a mają własność punktu stałego (*Delta* 9/1980).

#### 4. Zastosowania

Twierdzenie Brouwera znalazło wiele zastosowań poza topologią, m.in. w teorii równań różniczkowych przy dowodzie istnienia rozwiązań, w teorii układów dynamicznych, w analizie funkcjonalnej, w algebrze ... Oto jak można je wykorzystać do dowodu zasadniczego twierdzenia algebry, dowiedzionego po raz pierwszy przez Gaussa w 1799 r., a wcześniej sformułowanego przez d'Alemberta w 1746 r.

**Twierdzenie 2.** Każdy wielomian zespolony stopnia większego lub równego 1 ma pierwiastek zespolony.

**Dowód.** Rozważmy wielomian zespolony

$$f(z) = z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + a_1 \cdot z + a_0, \quad n \geq 1, \quad a_i - \text{zespolone.}$$

Niech  $R = 2 + |a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}| \geq 2$ . Funkcja  $g$  dana wzorem

$$g(z) = \begin{cases} z - \frac{f(z)}{R^{n-1} \cdot e^{i(n-1)\theta r}} & \text{dla } z = r \cdot e^{i\theta}, 0 \leq r \leq 1, \\ z - \frac{f(z)}{R^{n-1} \cdot z^{n-1}} & \text{dla } 1 < |z| \leq R \end{cases}$$

jest ciągła (!). Przekształca ona koło domknięte  $K_R = \{z : |z| \leq R\}$  w siebie. Istotnie, gdy  $0 \leq |z| \leq 1$ , to

$$\begin{aligned} |g(z)| &= \left| z - \frac{f(z)}{R^{n-1} \cdot e^{i(n-1)\theta r}} \right| \leq 1 + \frac{|f(z)|}{R^{n-1}} \leq \\ &\leq 1 + \frac{|z|^n + |a_{n-1}| \cdot |z|^{n-1} + \dots + |a_1| \cdot |z| + |a_0|}{R^{n-1}} \leq 1 + \frac{R-1}{R^{n-1}} \leq R. \end{aligned}$$

Gdy  $1 < |z| \leq R$ , to

$$\begin{aligned} |g(z)| &= \left| z - \frac{f(z)}{R^{n-1} \cdot z^{n-1}} \right| = \frac{|(R^{n-1} - 1) \cdot z^n - a_{n-1} \cdot z^{n-1} - \dots - a_0|}{R^{n-1} \cdot |z|^{n-1}} \leq \\ &\leq \frac{(R^{n-1} - 1) \cdot R + |a_{n-1}| + |a_{n-2}| \cdot \frac{1}{|z|} + \dots + |a_0| \cdot \left(\frac{1}{|z|}\right)^{n-1}}{R^{n-1}} \leq \\ &\leq R - \frac{R}{R^{n-1}} + \frac{R-2}{R^{n-1}} = R - \frac{2}{R^{n-1}} \leq R. \end{aligned}$$

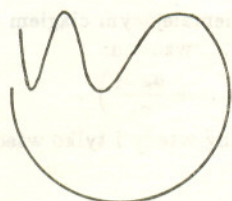
Zbiór  $K_R$  jest homeomorficzny z trójkątem, funkcja  $g$  jest ciągła, więc na mocy twierdzenia Brouwera istnieje taki punkt  $z \in K_R$ , że  $g(z) = z$ . Warunek ten w oczywisty sposób równoważny jest stwierdzeniu: istnieje takie  $z \in K_R$ , że  $f(z) = 0$ .

Na zakończenie uwaga. Z dowodu tego twierdzenia wynika, że w kole  $K_R$  istnieje pierwiastek wielomianu  $f(z)$ . Rodzi to pytania:

1. Jaki jest najmniejszy promień koła o środku w punkcie zero zawierającego wszystkie pierwiastki wielomianu  $f(z)$ ?
2. Jakie jest w ogóle najmniejsze koło zawierające wszystkie pierwiastki wielomianu  $f(z)$ ?

Kilka wyników z tego zakresu (choć nie ostatecznych, jak się wydaje) omawia

A. Turowicz w *Geometrii zer wielomianów*.



„Okrąg warszawski” (serpenty ny utworzone są przez odpowiedni fragment wykresu funkcji  $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$ ). Każde ciągłe odwzorowanie  $f : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$  ma punkt stały.



#### Rozwiązanie zadania M 608.

Przypuśćmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich  $l < n$ . Udowodnimy, że jest prawdziwe dla  $n$ , i w ten sposób przeprowadzimy dowód indukcyjny (przypadek  $n = 1$  nie jest trudny).

**Przypadek 1.** Istnieje grupa  $k < n$  chłopców, którzy mają dokładnie  $k$  dziewczyn. Na mocy założenia indukcyjnego można każdego z nich ożenić z dziewczyną. Zauważmy teraz, że pozostała grupa chłopców również spełnia założenie indukcyjne: gdyby bowiem tak nie było, to pewna grupa  $s$  chłopców miałaby wtedy nie więcej niż  $s - 1$  dziewczyn i istniałaby grupa  $s + k$  chłopców, mająca  $s + k - 1$  dziewczyn.

**Przypadek 2.** Każda grupa  $k$  chłopców ma co najmniej  $k + 1$  dziewczyn; wtedy żenimy jednego z chłopców z jego dziewczyną. Pozostali znów spełniają założenie indukcyjne, co kończy dowód.

Termin nadsyłania rozwiązań:  
31 XII 1991

### Skrót regulaminu

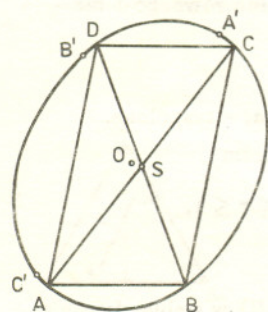
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 3$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 7/1990.

### Zadania z matematyki nr 225, 226

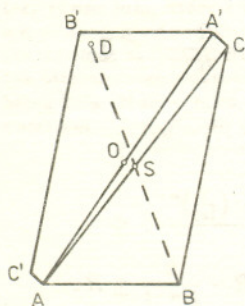
**225.** Wyznaczyć wszystkie funkcje  $f$  określone na zbiorze liczb całkowitych nieujemnych, o wartościach w tym samym zbiorze, spełniające równanie

$$f(f(n)) + f(n) = 2n + 6 \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Zadanie **226** zaproponował pan Łukasz Wiechecki z Legnicy.



Rys. 1



Rys. 2

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**226.** Niech  $a_0, a_1, a_2, \dots$  będzie niemalejącym ciągiem liczb dodatnich. Określamy ciąg  $b_1, b_2, \dots$  wzorem:

$$b_n = n - \left( \frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} \right).$$

Udowodnić, że ciąg  $(b_n)$  jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg  $(a_n)$  jest zbieżny.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/1991

Przypominamy treść zadań:

**221.** (a) W ściśle wypukły środkowo-symetryczny zbiór na płaszczyźnie wpisano wielokąt środkowo-symetryczny. Dowiedź, że środki symetrii obu figur pokrywają się. (b) Dać przykład ściśle wypukłego środkowo-symetrycznego zbioru w przestrzeni oraz wpisanego weń środkowo-symetrycznego wielościanu (nie zdegenerowanego do wielokąta) tak, by środki symetrii obu figur nie pokrywały się.

**222.** Wyznaczyć wszystkie co najwyżej dwucyfrowe liczby  $n$  o następującej własności: dla dowolnej liczby naturalnej  $m$ , której ostatnią cyfrą jest jedynka, dwucyfrowa końcówka liczby  $n^m$  jest identyczna z  $n$ . (Uwaga:  $3 = 03$  itp.)

**221.** (a) Oznaczmy odpowiednio przez  $S$  i  $O$  środki symetrii danych figur: ściśle wypukłego zbioru  $Z$  oraz wpisanego weń wielokąta  $W$ . Wybierzmy dowolną parę przeciwnych boków  $AB$  i  $CD$  wielokąta  $W$ . Równoległobok  $ABCD$  jest wpisany w figurę  $Z$ , a  $S$  jest jego środkiem symetrii. Przypuśćmy, że  $O \neq S$ . Wówczas jedna z przekątnych równoległoboku  $ABCD$  nie przechodzi przez  $O$ ; bez straty ogólności można przyjąć, że punkty  $O$  i  $B$  leżą po różnych stronach prostej  $AC$  (rys. 1). Oznaczając przez  $A', B', C'$  obrazy punktów  $A, B, C$  w symetrii środkowej względem  $O$  otrzymujemy środkowo-symetryczny sześciokąt  $ABCA'B'C'$  wpisany w  $Z$  i nie zdegenerowany do czworokąta (co wynika ze ściśle wypukłości zbioru  $Z$ ). Punkt  $D$ , jako symetryczny do  $B$  względem środka odcinka  $AC$ , powinien leżeć wewnątrz tego sześciokąta (rys. 2) - nie może więc leżeć na brzegu figury  $Z$ ; sprzeczność. Zatem  $O = S$ .

(b) Niech  $q$  będzie liczbą dodatnią różną od  $1/2$ . Weźmy pod uwagę punkty

$$\begin{aligned} A &= (-1, q, q), & B &= (q, -1, q), & C &= (q, q, -1), \\ A' &= (1, -q, -q), & B' &= (-q, 1, -q), & C' &= (-q, -q, 1), \\ O &= (0, 0, 0), & S &= (1, 1, 1). \end{aligned}$$

Najmniejszy zbiór wypukły zawierający punkty  $A, B, C, A', B', C'$  jest wielościanem; oznaczmy go przez  $W$ . Punkt  $O$  jest jego środkiem symetrii. Płaszczyzna  $ABC$  (o równaniu  $x + y + z = 2q - 1$  nie przechodzi przez  $O$ , a więc  $W$  nie degeneruje się do wielokąta.

W trójwymiarowej przestrzeni kartezjańskiej wzór

$$d((x, y, z), (u, v, w)) = \sqrt[3]{|x - u|^3 + |y - v|^3 + |z - w|^3}$$

określa metrykę, a każda kula (w sensie tej metryki) jest zbiorem ściśle wypukłym oraz środkowo-symetrycznym. Zauważmy teraz, że

$$d(A, S) = d(B, S) = d(C, S) = \sqrt[3]{10 - 6q + 6q^2 - 2q^3} =: r,$$

$$d(A', S) = d(B', S) = d(C', S) = \sqrt[3]{2 + 6q + 6q^2 + 2q^3} =: r'.$$

Jeśli za  $q$  przyjmiemy pierwiastek równania  $q^3 + 3q = 2$ , uzyskamy równość  $r = r'$ . Wielościan  $W$  jest wówczas wpisany w pewną  $d$ -kulę o środku  $S$ , nie pokrywającym się z  $O$ .

222. Szukamy liczb naturalnych  $n < 100$  spełniających dla każdej liczby naturalnej  $k$  równanie  $n^{10k+1} \equiv n \pmod{100}$ , czyli

$$n(n^{10k} - 1) \equiv 0 \pmod{100}.$$

Zauważmy, że jeżeli związek ten zachodzi dla  $k=1$ , to zachodzi dla wszystkich  $k$  naturalnych (bo liczba  $n^{10k} - 1$  dzieli się przez  $n^{10} - 1$ ). Zadanie sprowadza się do znalezienia wszystkich liczb  $n=10x+y$  ( $x, y \in \{0, 1, \dots, 9\}$ ) takich, że

$$(1) 0 \equiv n(n^{10} - 1) = (10x + y) \left( \sum_{j=0}^{10} \binom{10}{j} (10x)^j y^{10-j} - 1 \right) \equiv (10x + y)(y^{10} - 1) \pmod{100}.$$

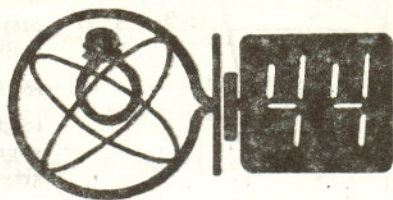
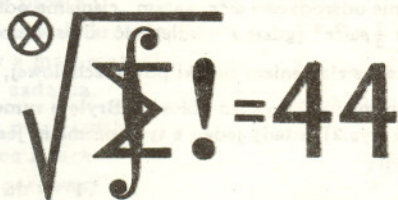
Gdy  $y \in \{2, 3, 7, 8\}$ , wówczas  $y^{10} \equiv 4 \pmod{5}$ , więc prawa strona (1) nie dzieli się przez 5; brak rozwiązań. Gdy  $y \in \{4, 6\}$ , wówczas  $y^{10} - 1 \equiv 75 \pmod{100}$  i dla spełnienia związku (1) potrzeba i wystarcza, by  $n=10x+y$  było liczbą podzielną przez 4.

Gdy  $y \in \{1, 9\}$ , wówczas  $y^{10} - 1 \equiv 0 \pmod{100}$  więc każde  $x$  jest dobre.

Gdy  $y=5$ , wówczas  $y^{10} - 1 \equiv 24 \pmod{100}$  i dla spełnienia (1) potrzeba i wystarcza, by  $n=10x+5$  było liczbą podzielną przez 25.

Gdy  $y=0$ , wówczas  $y^{10} - 1 \equiv 99 \pmod{100}$  i (1) zachodzi tylko dla  $x=0$ .

Reasumując: rozwiązaniem równania są wszystkie liczby  $n < 100$  mające postać  $10j \pm 1$  lub  $20j \pm 4$  oraz liczby 00, 25, 75.



### Zadania z fizyki nr 123, 124

123. Pudełko, z którego wychodzą dwa przewody, zawiera kondensator, opornik i cewkę o pomijalnie małym oporze, połączone w nieznaną sposób. Po przyłożeniu napięcia stałego stwierdzono, że opór pudełka wynosi  $100 \Omega$ , i taki sam opór wykazuje ono w obwodzie prądu przemiennego bardzo wielkiej częstotliwości. Po przyłożeniu napięcia sinusoidalnego moduł impedancji (zawada) okazał się równy  $50 \Omega$  przy częstotliwości  $100 \text{ Hz}$  i  $80 \Omega$  przy częstotliwości  $200 \text{ Hz}$ . Narysować schemat obwodu i wyznaczyć wartości  $L$  i  $C$ .

Redaguje Jerzy B. BROJAN

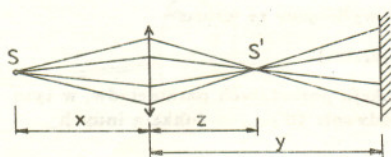
124. Ciecz lepka wypełnia przestrzeń pomiędzy dwoma długimi cylindrami obracającymi się wokół wspólnej osi, przy czym wewnętrzny cylinder ma promień  $r_1$  i prędkość kątową  $\omega_1$ , a zewnętrzny - promień  $r_2$  i prędkość kątową  $\omega_2$ . Jakim wzorem wyraża się zależność prędkości cieczy od odległości  $r$  od osi ( $r_1 < r < r_2$ )? Przyjąć, że przepływ jest stacjonarny (niezależny od czasu) i laminarny (tzn. „warstwowy”, bez zawirowań).

### Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/1991

Przypominamy treść zadań:

119. Źródło punktowe  $S$  o światłości  $I$  znajduje się w odległości  $x$  od soczewki skupiającej o ogniskowej  $f$ , za którą w odległości  $y$  leży ekran prostopadły do osi optycznej. Znaleźć natężenie oświetlenia powierzchni ekranu (jej oświetlonej części).

120. Dane są gęstość cieczy  $\rho$ , jej napięcie powierzchniowe  $\sigma$  i masa kropli  $m$ . Oznaczmy przez  $\omega_m$  maksymalną prędkość kątową, jaką można nadać tej kropli w stanie nieważkości, aby nie rozleciała się. Wykazać, że  $\omega_m$  jest proporcjonalna do  $\sqrt{\frac{\sigma}{m}}$  i obliczyć lub ocenić orientacyjnie stałą proporcjonalności.



Rys. 1

119. Poniższe rozwiązanie odnosi się do przypadku, gdy obraz rzeczywisty  $S'$  znajduje się przed ekranem (rys.1). Oznaczmy powierzchnię soczewki przez  $A$ . Kąt bryłowy, jaki tworzy wiązka wychodząca ze źródła  $S$  i wchodząca do soczewki wynosi  $\frac{A}{x^2}$ , zatem strumień światła tej wiązki jest równy  $\frac{IA}{x^2}$ . Po przejściu przez soczewkę wiązka skupia się w punkcie  $S'$ , którego odległość  $z$  od soczewki jest dana wzorem

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{f}, \quad \text{czyli} \quad z = \frac{fx}{x-f}$$

Kąt bryłowy, wewnątrz którego biegnie światło po przejściu przez soczewkę, wynosi  $\frac{A}{z^2}$ . Dlatego „z punktu widzenia ekranu” możemy potraktować  $S'$  jako źródło punktowe o światłości  $I'$  związanej z  $I$  wzorem

$$\frac{IA}{x^2} = \frac{I'A}{z^2}$$



Stąd otrzymujemy  $I' = If^2/(x-f)^2$  i natężenie oświetlenia ekranu

$$E = \frac{I'}{(y-z)^2} = \frac{If^2}{(yx-f(x+y))^2}$$

W przypadku obrazu rzeczywistego za ekranem lub pozornego rozumowanie różni się tylko kilkoma szczegółami, a wynik końcowy jest identyczny. Obowiązuje on także dla soczewki rozpraszającej – należy jedynie podstawić ujemną wartość  $f$ .

120. Pierwszy punkt jest banalnym przykładem zastosowania analizy wymiarowej, gdyż w zależności

$$\omega_m = f(m, \sigma, \rho)$$

jedyną funkcją  $f$  spełniającą zgodność wymiarów

$$\frac{1}{s} = f\left(\text{kg}, \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}, \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)$$

jest funkcja  $f = \text{const} \cdot \sqrt{\sigma/m}$  (brak zależności od  $\rho$ ). Wyznaczenie wartości stałej jest znacznie trudniejsze. Poniżej podajemy krótki opis pewnej numerycznej metody znalezienia kształtu obracającej się kropli i obliczenia szukanej stałej.

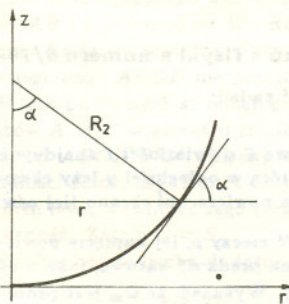
Rozpatrujemy stan równowagi kropli w układzie obracającym się, w którym występuje przyspieszenie odśrodkowe  $\omega^2 r$ , zatem „ciśnienie odśrodkowe” jest równe  $\rho\omega^2 r dr$ , a po scałkowaniu  $\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2$  (gdzie  $r$  – odległość od osi obrotu). Ciśnienie cieczy przy jej powierzchni równoważy się z ciśnieniem błonki powierzchniowej, równym  $\sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ , gdzie  $R_1$  i  $R_2$  są to główne promienie krzywizny błonki. Błąd o symetrii obrotowej wokół osi z przedstawimy w przekroju (rys.2), wtedy jeden z tych promieni jest promieniem krzywizny otrzymanej krzywej, czyli

$$\frac{1}{R_1} = \frac{d\alpha}{ds}$$

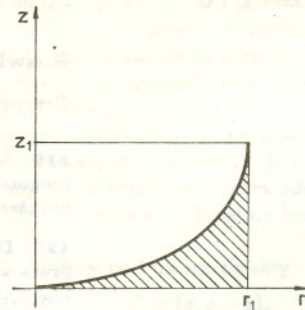
gdzie  $d\alpha$  jest zmianą kierunku stycznej przy przesunięciu  $ds$  wzdłuż krzywej. Drugi z promieni jest związany z krzywizną przekroju w płaszczyźnie prostopadłej do rysunku i wynosi  $R_2 = r/\sin\alpha$  (por. też w poradnikach matematycznych wzory opisujące krzywiznę powierzchni). Równanie opisujące kształt kropli ma zatem postać

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 = \sigma\left(\frac{d\alpha}{ds} + \frac{\sin\alpha}{r}\right),$$

gdzie  $p_0$  – ciśnienie na osi. Wybrawszy wartości parametrów  $p_0, \rho, \omega$  i  $\sigma$  oraz krok  $ds$  możemy scałkować numerycznie powyższe równanie od punktu  $r = \alpha = 0$  do „równika” kropli, tzn. punktu  $\alpha = \pi/2$ . (Nb. zależność  $\alpha(r)$  można scałkować analitycznie, ale i tak pozostanie do scałkowania numerycznego  $z(r)$ ). Całkując obliczamy jednocześnie wielkość  $4\pi \sum z_i r_i \Delta r_i$  – jest to podjogona objętość części zakresowanej na rysunku 3, czyli objętość „brakująca” do walca.



Rys. 2



Rys. 3

Jeśli na „równiku” mamy  $r = r_1$  i  $z = z_1$ , to masę kropli wyliczymy ze wzoru

$$m = \rho(2\pi r_1^2 z_1 - 4\pi \sum r_i z_i \Delta r_i).$$

Tak więc w naszej procedurze numerycznej masa jest funkcją pozostałych parametrów, w tym ciśnienia  $p_0$ , choć z fizycznego punktu widzenia jest na odwrót: to  $p_0$  jest funkcją innych parametrów, w tym masy.

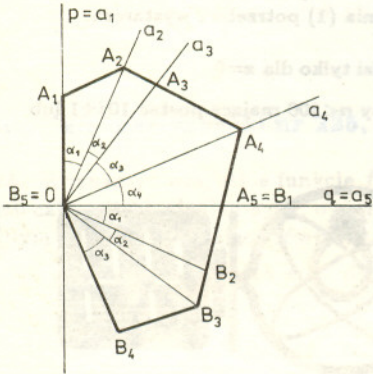
Jak wynika z analizy wymiarowej, kształt kropli i wszystkie jej cechy są opisane przez jeden bezwymiarowy parametr – innymi słowy, wystarczy zmieniać np. parametr  $p_0$ , nadając wartości jednostkowe parametrom  $\omega, \sigma$  i  $\rho$ . Oznacza to, że jednostką ciśnienia jest  $\rho^{1/3} \sigma^{2/3} \omega^2/3$ , długości  $\rho^{-1/3} \sigma^{1/3} \omega^{-2/3}$ , a masy  $\sigma \omega^{-2}$ . Jeśli więc otrzymana masa ma wartość  $c$ , to

$$m = c \sigma \omega^{-2}, \quad \text{czyli} \quad \omega = \sqrt{\frac{c \sigma}{m}}.$$

Rachunki numeryczne prowadzą do wniosku, że maksymalną wartością  $c$  jest 19,05,  $\sqrt{c} = 4,365$ . Wartość tę osiąga się przy  $p_0 = -0,55$ , wtedy  $r_1 = 2,35$ ,  $z_1 = 0,49$ .

### Rozwiązanie zadania M 607.

Założmy, co nie zmniejsza ogólności, że wielokąt jest wypukły. Niech  $p$  będzie prostą zawierającą jeden z boków,  $q$  – prostopadła do niej. Można teraz podzielić wielokąt na trójkąty półprostymi  $a_1, a_2, \dots, a_n = b_1, \dots, b_n$  w taki sposób, by każda z półprostych leżących w górnej półpłaszczyźnie miała swój prostopadły odpowiednik w dolnej i na odwrót.



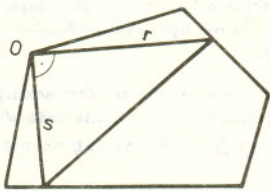
Niech  $r_i$  oznacza długość odcinka  $OA_i$ ,  $s_i$  – długość  $OB_i$ ,  $\alpha_i$  – kąt między  $a_i$  i  $a_{i+1}$ . Pole wielokąta wynosi

$$P = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^{n-1} r_i r_{i+1} \sin \alpha_i + \sum_{i=1}^{n-1} s_i s_{i+1} \sin \alpha_i \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \sin \alpha_i (r_i r_{i+1} + s_i s_{i+1}),$$

ale na mocy nierówności Schwartza

$$r_i r_{i+1} + s_i s_{i+1} \leq \sqrt{r_i^2 + s_i^2} \sqrt{r_{i+1}^2 + s_{i+1}^2}.$$

Ponieważ średnica wielokąta nie przekracza 1, prawa strona jest nie większa niż 1.



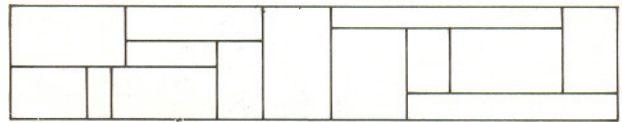
Wtedy

$$P \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \sin \alpha_i.$$

Ponadto  $\sin \alpha_i \leq \alpha_i$ ,  $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \leq \pi/2$ , skąd

$$P \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Uwaga. Oczywiście, wynik pozostaje w mocy dla dowolnej figury o średnicy  $\leq 1$ . Trzeba wtedy obliczać całki, ale dowód jest znacznie prostszy. Jaki?



(1) Jeżeli  $P$  jest prostokątem oraz  $P = P_1 \cup \dots \cup P_m$  jest podziałem tego prostokąta na skończoną liczbę mniejszych prostokątów, a  $f : P \rightarrow \mathbb{C}$  jest funkcją ciągłą o wartościach zespolonych, to

$$\iint_P f \, dx \, dy = \sum_{k=1}^m \iint_{P_k} f \, dx \, dy.$$

(2) Jeżeli  $P$  jest prostokątem o wierzchołkach w punktach  $(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2)$ , to

$$\begin{aligned} & \iint_P [\cos 2\pi(x+y) + i \sin 2\pi(x+y)] \, dx \, dy = \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} [\cos 2\pi x_2 - \cos 2\pi x_1 + i(\sin 2\pi x_2 - \sin 2\pi x_1)] \cdot \\ & \quad \cdot [\cos 2\pi y_2 - \cos 2\pi y_1 + i(\sin 2\pi y_2 - \sin 2\pi y_1)]. \end{aligned}$$

Z własności (2) wynika, że prostokąt  $P$  ma bok o długości będącej liczbą całkowitą wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\iint_P (\cos 2\pi(x+y) + i \sin 2\pi(x+y)) \, dx \, dy = 0.$$

Teraz już twierdzenie zawarte w zadaniu jest prostą konsekwencją własności (1).

Być może zadanie to ma rozwiązanie elementarne, a tylko mnie nie udało się do tej pory takiego rozwiązania znaleźć. Dokładniej mówiąc, nie tylko mnie, ale również wielu innym; zadanie interesowało wiele osób, a nie wiem o nikim, kto potrafiłby je zrobić bardziej elementarnie. W czasie pewnej międzynarodowej konferencji matematycznej było tematem wielu dyskusji kularowych.

Bardzo często młodzi i pomysłowi ludzie, nieobciążeni skomplikowaną wiedzą matematyczną, wykazują się wielką pomysłowością przy rozwiązywaniu problemów matematycznych (jako przykład niech posłuży zadanie o izometrii – porównaj *EPSILON* nr 1 – którego nie potrafiło rozwiązać wielu zawodowych matematyków, a które rozwiązał student I roku). Może komuś z Czytelników uda się znaleźć elementarne rozwiązanie tego zadania. Jeśli tak, redakcja *EPSILONA* będzie wdzięczna za przysłanie.

Sławomir CYNK

## Łatwe czy trudne?

Przywykliśmy do tego, że *zazwyczaj* zadania matematyczne o prostym sformułowaniu mają proste rozwiązania. Również i na odwrót: zadania, które mają skomplikowane sformułowania, w których występują skomplikowane pojęcia, *zazwyczaj* mają skomplikowane rozwiązania. Tak jest *zazwyczaj*, ale czy zawsze?

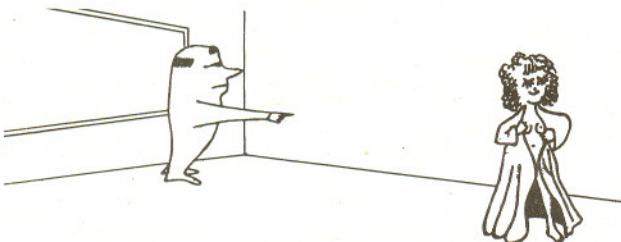
Dzisiaj pragnę przedstawić zadanie, mające proste sformułowanie, i jego rozwiązanie. Rozwiązanie krótkie, ale wykorzystujące nieelementarne fakty z matematyki wyższej. Po kolei jednak. Zaczniemy od zadania.

*Prostokąt  $P$  dzielimy na skończoną liczbę mniejszych prostokątów (w ten sposób, że dowolne dwa z nich mogą zahaczać o siebie jedynie bokami – porównaj z rysunkiem). Załóżmy, że każdy z mniejszych prostokątów ma przynajmniej jeden bok o długości będącej liczbą całkowitą. Udowodnić, że prostokąt  $P$  ma bok o długości będącej liczbą całkowitą.*

Jedyne rozwiązanie, jakie znam, opiera się na pojęciu całki podwójnej i to z funkcji o wartościach zespolonych. Nie wnikając w szczegóły (które jednym Czytelnikom mogą się wydać zbyt trudne, a innym zbyt nudne) ograniczę się do dwóch informacji, które posłużą mi do przedstawienia rozwiązania zadania. Komplet wiadomości na ten temat można znaleźć w podręcznikach akademickich analizy matematycznej (np. F. Leja *Rachunek różniczkowy i całkowy*).

Całka podwójna jest uogólnieniem „zwykłej” całki na funkcje dwóch zmiennych. Jeżeli uznamy, że obliczenie „zwykłej” całki polega na wyznaczaniu pól pewnych figur płaskich, to obliczeniu całki podwójnej odpowiadać będzie wyznaczanie objętości pewnych obszarów przestrzennych. A oto zapowiadane informacje (pierwsza z nich wydaje się intuicyjnie uzasadniona, natomiast druga wygląda groźniej).

## Galeria Jednego Cytatu



– Oto przykład przestrzeni, która z jednej strony wygląda przyzwoicie, a z drugiej...

(z wykładu analizy funkcjonalnej)

O wybitnym, nieżyjącym już fizyku krakowskim znana jest autentyczna podobno historia.

W latach pięćdziesiątych, gdy o zezwolenie na wyjazd za granicę było nieco trudniej niż dziś, profesorowi wraz z asystentem udało się wyjechać na zagraniczną konferencję. Do Moskwy. Zakwaterowano ich w hotelu.

Gdy tylko weszli do hotelowego pokoju, profesor stwierdził:

– Tu gdzieś musi być podsłuch!

Zaczęli intensywnie szukać podsłuchu, na ścianach, w meblach, łóżkach, jednakże bezskutecznie.

– Zwijamy dywan! – zdecydował profesor.

Po zwinięciu dywanu ujrzeli na środku pokoju metalową płytę, przymocowaną do podłogi pięcioma potężnymi śrubami. Profesor miał w kieszeni marynarki rozmaite pióra, ołówki itp.; znalazł się tam i śrubokręt. Zaczęli zatem odkręcać płytę.

Odkręcili pierwszą śrubę, drugą, trzecią... Gdy odkręcili piątą, rozległ się ogromny huk.

W pokoju piętro niżej spadł żyrandol.