

delta

SPIS TREŚCI

NUMERU 6(205)

Inwolucje i symetrie <i>Jerzy Jurkiewicz</i>	str. 1
O pewnym młodym matematyku	str. 1
Brakuje nam liter <i>Tomasz M. Rusin</i>	str. 4
Dlaczego piszemy po chińsku?	str. 6
Dlaczego wzrasta liczba wypadków samochodowych?	str. 7
O całkiem starych gwiazdach nowych <i>Aleksander Schwarzenberg-Czerny</i>	str. 8
Kulą w płot, czyli i Ty zostaniesz Rutherfordem <i>Paweł Krawczyk</i>	str. 11
Zadania	str. 13
Klub 44	str. 14
Epsilon	str. 16
Drobiazgi	str. 17

W następnym numerze:

Magia cykloid

KAŻDY MOŻE BYĆ KOLPORTEREM !!!

Delta tańsza o 25 %

Kupując 150 egzemplarzy *Delt*y płacisz tylko 2.100,- zł za numer.
Przesyłając pod adresem redakcji dowód wpłaty
wielokrotności sumy 315 tysięcy złotych
otrzymasz tyleż paczek po 150 egzemplarzy
najbliższego numeru *Delt*y.

Nasze konto:

PBK VIII OM Warszawa 370028-4170
Uniwersytet Warszawski, redakcja miesięcznika *Delta*

„Delta”
matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Edukacji Narodowej

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichocki
Roman Duda
Jan A. Gaj
Tomasz Hofmokr – wiceprzewodniczący
Tadeusz Jarzębowski
Marcin Kubiak
Andrzej Mąkowski
Andrzej Pelczar
Zbigniew Płochocki
Zdzisław Pogoda
Konrad Rudnicki
Zbigniew Semadeni
Grzegorz Sitarski
Józef I. Smak
Kazimierz Stępień
Mieczysław Subotowicz
Andrzej Szymacha
Aniela Wolska
Andrzej Woszczyk
Wojciech Żakowski – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

Krzysztof Biesaga
Krystyna Kordos – sekr. red.
Marek Kordos – red. naczk.
Paweł Krawczyk – z-ca red. naczk.
Tomasz Kwast
Stanisław Mrówczyński
Anna Rudnik
Joanna Udalska

Adres Redakcji:

Centrum Informatyczne UW
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa
tel. 20-03-81 wewn. 841

Wydawca:

Uniwersytet Warszawski
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa

Nakład 10 000 egz.

Wydrukowano
w Zakładach Graficznych
w Warszawie, ul. Srebrna 16

Skład systemem $\text{T}_{\text{p}}\text{X}$
wykonała redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na IV kwartał 1991 r. wynosi 7 500,- zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
 - oddziały RSW właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora – odbioru zamówionych egzemplarzy dokonuje prenumerator w wyznaczonych punktach sprzedaży lub w inny, uzgodniony sposób,
 - urzędy pocztowe i listonosze – od prenumeratorów z terenów wiejskich lub innych miejscowości, w których nie ma oddziałów RSW, a w miastach tylko od osób niepełnosprawnych – poczta zapewnia dostawę zamówionych egzemplarzy pod wskazany adres pod warunkiem uiszczenia dodatkowej opłaty za każdy doręczany egzemplarz – opłata wynosi 500,- zł od egzemplarza,
 - Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – tylko od prenumeratorów zlecających dostawę za granicę.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
 - na kraj – do 20 XI na I kwartał roku następnego
do 20 II na II kwartał
do 20 V na III kwartał
do 20 VIII na IV kwartał
 - na zagranicę – do 31 X na I kwartał
oraz do 1 dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarsa zł 2 800,-

Przedstawiamy artykuł, w którym Autor pisze o problemach stanowiących ważny kierunek badawczy współczesnej matematyki. Podaje też twierdzenie, w którego dowodzie wykorzystany jest fragment jego niedawnej publikacji (z 1990 roku). Okazuje się, że i o aktualnych badaniach naukowych można pisać zrozumiale.

Redakcja

O pewnym młodym matematyku

Nasz artykuł dotyczy pewnego wydarzenia z życia profesora Marka Kaca.

Marek (Mark) Kac urodził się w Krzemieńcu 16 sierpnia 1914 roku w rodzinie żydowskiej. Jego ojciec uzyskał doktorat z filozofii na Uniwersytecie Lipskim, a później ukończył jeszcze studia na Uniwersytecie Moskiewskim. Marek Kac rozpoczął naukę w domu, potem uczył się w szkole żydowskiej, by w 1925 roku wstąpić do Liceum Krzemienieckiego. Tam właśnie, przed maturą, napisał pracę stanowiącą temat naszego artykułu.

W latach 1931–35 studiował matematykę na Uniwersytecie Lwowskim. Już podczas studiów zaczął współpracować naukowo z Hugonem Steinhausem. Współpraca ta (dotycząca funkcji stochastycznych i ich zastosowań) trwała do 1938 roku (gdy Kac wyjechał na stypendium do USA) i (zdaniem samego Kaca) była decydująca dla jego dalszej kariery naukowej.

W USA młody doktor Kac kontynuował rozpoczęte w Polsce badania współpracując z wieloma wybitnymi matematykami (np. z van Kampenem, Erdősem, Wienerem). W 1939 roku został zatrudniony w Cornell University, gdzie przepracował 22 lata uzyskując liczące się w świecie wyniki na styku matematyki i różnych dyscyplin przyrodniczych (głównie fizyki) oraz technicznych. Później kierował wielu innymi placówkami naukowymi. Zmarł 26 października 1984 roku.

Delta miała szczęście zetknąć się z Markiem Kacem w 1979 roku, gdy bawił w Polsce z okazji przyznania mu przez Polskie Towarzystwo Fizyczne medalu imienia Smoluchowskiego. Wręczyliśmy mu wtedy kilka numerów naszego pisma. Szczęśliwym trafem było to przed jego bezsenną nocą – kiedy następnego dnia poprosiliśmy go o rozmowę, „był na bieżąco”. Delta podobała mu się. W śpiewnej kresowej polszczyźnie oświadczył, że sam też chciałby w Stanach wydawać takie pismo, ale tam nie znajduje się takiego wariata, który dałby na to pieniądze.

Kac w istocie mógłby wydawać takie pismo. Był bardzo interesującym popularyzatorem. Z jego prac na ten temat najbardziej znany jest esej *Czy można usłyszeć kształt bębna?*

Inwolucje i symetrie

O PRZEKSZTAŁCENIACH, KTÓRE SĄ SWOIMI WŁASNYMI ODWROTNOŚCIAMI. PEWIEN NIE ROZWIĄZANY PROBLEM.

Jerzy JURKIEWICZ

Układ dwóch wielomianów dwóch zmiennych

$$(f(x, y), g(x, y))$$

określa przekształcenie płaszczyzny \mathbb{R}^2 w nią samą. Nazwiemy to przekształcenie inwolucją, jeżeli jest swoją własną odwrotnością, inaczej mówiąc

$$f(f(x, y), g(x, y)) = x \quad \text{oraz} \quad g(f(x, y), g(x, y)) = y.$$

Łatwo uogólnić pojęcie inwolucji tak, aby odnosiło się do przestrzeni trójwymiarowej.

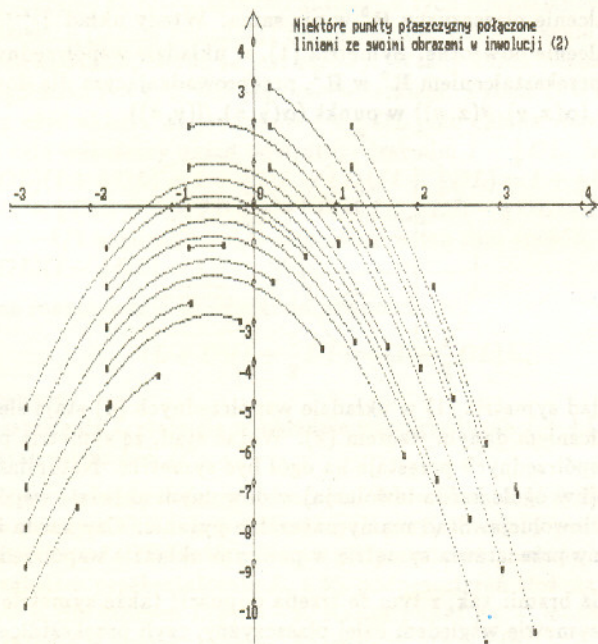
Przykładem inwolucji jest układ

$$(1) \quad f(x, y) = y, \quad g(x, y) = x,$$

czyli symetria względem prostej $x = y$ i w ogóle każda symetria płaszczyzny. Ale nie są to jedyne inwolucje. Można, na przykład, łatwo sprawdzić, że układ wielomianów

$$(2) \quad (y + x^2, x - (y + x^2)^2)$$

też jest inwolucją, chociaż nie jest symetrią.



Ale może jest to symetria przedstawiona w jakimś innym układzie współrzędnych? Wyjaśnimy to pojęcie. Powiemy, że wielomiany

$$(3) \quad \begin{matrix} \alpha(x, y) \\ \beta(x, y) \end{matrix}$$

tworzą (algebraiczny, krzywoliniowy) układ współrzędnych na płaszczyźnie \mathbb{R}^2 , jeżeli istnieją takie wielomiany $\gamma(x, y)$ i $\delta(x, y)$, że

$$\begin{aligned} \alpha(\gamma(x, y), \delta(x, y)) &= x, & \beta(\gamma(x, y), \delta(x, y)) &= y, \\ \gamma(\alpha(x, y), \beta(x, y)) &= x, & \delta(\alpha(x, y), \beta(x, y)) &= y. \end{aligned}$$

We wspomnieniach *Enigmas of chance*

Marek Kac opisuje wydarzenie, które spowodowało, że został matematykiem. Kiedy był uczniem szkoły średniej, program matematyki nie przewidywał rozwiązywania równań stopni wyższych niż dwa. Kac zainteresowany problemem zajrzał do podręcznika i w rozdziale dotyczącym równań stopnia trzeciego natrafił na rozwiązanie nie zawierające jednak ani słowa na temat, w jaki sposób się do niego dochodzi. Potraktował to jako wyzwanie i postanowił sam dotrzeć do wyprowadzenia wzorów.

Na rozwiązanie problemu poświęcił wakacje. Pracował ciężko i z wielkim napięciem, by uzyskać w końcu upragnione formuły. Tak pisze o tym we wspomnieniach:

„W życiu wiele razy silnie angażowałem się emocjonalnie w rozwiązywanie problemów naukowych. Nigdy jednak nie pracowałem tak zapamiętale i gorączkowo, jak latem 1930 roku. Wstawałem wcześniej rano i prawie nie tracąc czasu na posiłki spędzałem całe dnie na zapisywaniu ryz papieru wzorami matematycznymi. Zaniedbałem zupełnie życie towarzyskie – przestałem widywać się z przyjaciółmi, nawet nie umawiałem się na randki. Zresztą i tak jakakolwiek rozmowa ze mną była pozbawiona sensu, bowiem odpowiadałem wyłącznie monosylabami.

Pozbawiony strategii, zapalałem się do przypadkowych pomysłów, które często okazywały się daremnymi wysiłkami, prowadzącymi w ślepe uliczki.”

Na początku roku szkolnego przedstawił nauczycielowi matematyki rękopis zawierający efekty pracy. Nauczyciel, po wnikliwym przeczytaniu, poradził mu wysłać manuskrypt do pisma *Młody Matematyk*. Po kilku miesiącach szkołę Kaca odwiedził wizytator Ministerstwa Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego, Antoni Marian Rusiecki, będący również redaktorem naczelnym *Młodego Matematyka*. Kac dowiedział się wtedy, że redakcja postanowiła opublikować jego artykuł, ponieważ pomimo początkowego przekonania, iż jego metoda jest znana, bezowocne poszukiwania w literaturze doprowadziły do uznania jej za nową. W czasie rozmowy wizytator Rusiecki stwierdził, że Kac powinien studiować matematykę, gdyż niewątpliwie ma talent.

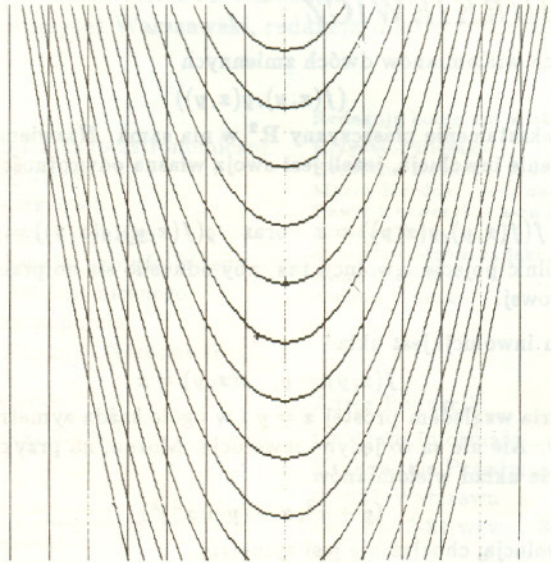
Wielomiany $\gamma(x,y)$ tworzą także układ współrzędnych, jak mówimy, „odwrotny” do układu (3).

Zadanie 1. Sprawdzić, że

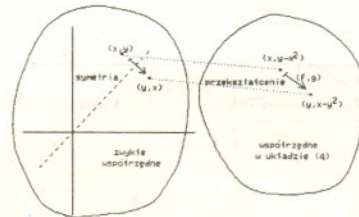
$$(4) \quad \begin{matrix} x \\ y - x^2 \end{matrix}$$

jest układem współrzędnych na płaszczyźnie.

Współzrzednymi punktu $(2, 3) \in \mathbb{R}^2$ w tym układzie są 2 i $3 - 2^2 = -1$. A oto jak wygląda „siatka współrzędnych” w tym układzie, to znaczy zbiory $\{x = n\}$ i $\{y - x^2 = m\}$, gdzie n i m przebiegają liczby całkowite.



Algebraiczny układ współrzędnych $\alpha(x,y)$ można też uważać za przekształcenie płaszczyzny \mathbb{R}^2 w nią samą. Wtedy układ $\gamma(x,y)$ stanowi przekształcenie odwrotne. Symetria (1), w układzie współrzędnych (3), staje się przekształceniem \mathbb{R}^2 w \mathbb{R}^2 , przeprowadzającym dla dowolnych x i y punkt $(\alpha(x,y), \beta(x,y))$ w punkt $(\alpha(y,x), \beta(y,x))$.



Na przykład symetria (1) w układzie współrzędnych (4) staje się przekształceniem danym wzorem (2). Widać stąd, że symetria po zmianie układu współrzędnych przestaje na ogół być symetrią. Natomiast każda symetria (i w ogóle każda inwolucja) w dowolnym układzie współrzędnych pozostaje inwolucją. Stąd mamy naturalne pytanie: Czy każda inwolucja płaszczyzny przedstawia symetrię w pewnym układzie współrzędnych?

Odpowiedź brzmi: tak, z tym że trzeba dopuścić także symetrie względem punktu i symetrię względem całej płaszczyzny, czyli przekształcenie tożsamościowe. Natomiast dotychczas nie wiadomo, czy

każda inwolucja przestrzeni trójwymiarowej przedstawia symetrię (względem punktu, prostej, płaszczyzny lub całej przestrzeni) w pewnym algebraicznym układzie współrzędnych w \mathbb{R}^3 .

W każdej symetrii co najmniej jeden punkt pozostaje stały. Otóż okazuje się, że tę własność mają wszystkie inwolucje, co jest pewnym argumentem na korzyść hipotezy (5).

Zadania

2. Wykaż, że każde ciągle przekształcenie prostej, które jest swoją własną odwrotnością, ma punkt stały na tej prostej.

3. Wykaż, że każda inwolucja prostej (zadana pojedynczym wielomianem jednej zmiennej) jest symetrią (lub tożsamością).

4. Wykaż, że każda inwolucja płaszczyzny wyrażona dwoma wielomianami stopnia pierwszego przedstawia symetrię w pewnym układzie współrzędnych.

Podam teraz dowód hipotezy (5) w przypadku, gdy inwolucja zadana jest wielomianami stopni ≤ 2 . Wymiar przestrzeni, którą oznaczymy przez V , nie jest istotny. Dowód jest w zasadzie elementarny, wymaga jednak pewnej wprawy w posługiwaniu się przekształceniami wielomianowymi.

Skoro wiadomo, że inwolucja ma punkt stały, to możemy przyjąć, że jest nim początek układu współrzędnych. Inwolucję można wtedy zapisać w postaci $L + D$, gdzie w skład L wchodzi wyłącznie jednomiany stopnia 1, a w skład D jednomiany stopnia 2. Oznaczmy jeszcze przez I tożsamość na V . Z określenia inwolucji mamy

$$(L + D) \circ (L + D) = I.$$

(W dalszym ciągu symbol „ \circ ” oznaczający składanie przekształceń będziemy pomijać.) Wynika stąd, że $LL + LD + D(L + D) = I$ (uwaga: $L(L + D) = LL + LD$, ale $D(L + D) \neq DL + DD$; dlaczego?). Przyrównując jednomiany tego samego stopnia po obu stronach mamy

$$LL = I \quad \text{oraz} \quad LD = -D(L + D).$$

Lewa strona ostatniej równości składa się z jednomianów stopnia 2.

Natomiast po prawej stronie, po rozwinięciu wszystkie jednomiany stopnia 2 dadzą w sumie $-DL$. Stąd $LD = -DL$ i $DL = D(L + D)$.

Składając obie strony tej równości prawostronnie z L dostajemy $D = D(I + DL)$. Dopisując do obu stron $(I + DL)$ mamy $D(I + DL) = D(I + DL)(I + DL) = D(I + DL + DL(I + DL)) = D(I + DL - LD(I + DL)) = D(I + DL - LD) = D(I + DL + DL)$ i ostatecznie $D = D(I + 2DL)$. Postępując tak dalej dochodzimy do równości $D = D(I + mDL)$ dla dowolnej liczby naturalnej m . Rozważmy pomocniczo układ wielomianów $D - D(I + tDL)$ zmiennej t . Wszystkie liczby naturalne są pierwiastkami każdego z tych wielomianów!

Ale wielomian (jednej zmiennej) nie może mieć nieskończenie wielu pierwiastków, chyba że jest zerowy. Wtedy każda liczba, w szczególności $t = 1/2$, jest jego pierwiastkiem. Zatem $D = D(I + \frac{1}{2}DL)$.

Chcemy użyć układu wielomianów $I + \frac{1}{2}DL$ jako układu współrzędnych. W tym celu wskażemy układ odwrotny: jest nim $I - \frac{1}{2}DL$. Istotnie, $(I - \frac{1}{2}DL)(I + \frac{1}{2}DL) = I + \frac{1}{2}DL - \frac{1}{2}DL(I + \frac{1}{2}DL) = I + \frac{1}{2}DL + \frac{1}{2}LD(I + \frac{1}{2}DL) = I + \frac{1}{2}DL + \frac{1}{2}LD = I + \frac{1}{2}DL - \frac{1}{2}DL = I$. Wybierając teraz $t = -1/2$ zamiast $t = 1/2$ obliczamy w ten sam sposób, że również $(I + \frac{1}{2}DL)(I - \frac{1}{2}DL) = I$.

Podobne rozumowanie prowadzi do równości

$$(L + D)(I + \frac{1}{2}DL) = (I + \frac{1}{2}DL)L,$$

która oznacza

„Przekształcenie L staje się w układzie współrzędnych $I + \frac{1}{2}DL$ przekształceniem $L + D$ ”.

Należy jeszcze, korzystając z tożsamości $LL = I$, znaleźć symetrię, która w pewnym układzie współrzędnych przyjmowałaby postać przekształcenia L . Niech V_1 oznacza podprzestrzeń punktów stałych w V względem przekształcenia L , a V_2 podprzestrzeń złożoną z takich punktów p , dla których $L(p) = -p$. Każdy punkt $p \in V$ można przedstawić jednoznacznie w postaci $p_1 + p_2$, gdzie $p_1 = \frac{1}{2}(p - L(p)) \in V_1$, a $p_2 = \frac{1}{2}(p + L(p)) \in V_2$ (jak mówimy, V jest sumą prostą V_1 i V_2). Niech k_1, k_2 oznaczają wymiary przestrzeni V_1 i V_2 . Niech $f = (f_1, f_2, \dots, f_{k_1})$ i $g = (g_1, g_2, \dots, g_{k_2})$ będą dowolnymi układami współrzędnych w V_1 i V_2 odpowiednio. Wtedy przekształcenie $h: \mathbb{R}^{k_1+k_2} \rightarrow V$ przeprowadzające punkt $(x_1, \dots, x_{k_1}, y_1, \dots, y_{k_2})$ w $f^{-1}(x_1, \dots, x_{k_1}) + g^{-1}(y_1, \dots, y_{k_2})$ też jest układem współrzędnych, tym właśnie, którego szukamy. Natomiast potrzebna nam symetria w $\mathbb{R}^{k_1+k_2}$ będzie przekształcała każdy punkt $(x, y) = (x_1, \dots, x_{k_1}, y_1, \dots, y_{k_2})$ w $h(x, y) = (-x_1, \dots, -x_{k_1}, y_1, \dots, y_{k_2})$. Istotnie, przekształcenie L przeprowadza punkty $h(x, y)$ w $h(-x, y)$, czyli L przedstawia symetrię w układzie współrzędnych h , co kończy dowód twierdzenia.

W kilka miesięcy później w *Młodym Matematyku* ukazał się następujący artykuł.

Marek Katz (na życzenie autora redakcja *Młodego Matematyka* zastosowała taką wersję pisowni nazwiska)

O nowym sposobie rozwiązywania równań stopnia trzeciego

Chcąc rozwiązać równanie $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, podstawiamy

$$z = x - \frac{1}{3}a$$

i otrzymujemy równanie, pozbawione drugiej potęgi niewiadomej:

$$(1) \quad z^3 + pz + q = 0,$$

gdzie p i q są wyrazami, zależnymi od a, b i c . Pragnę tu podać pewien – jak mi się wydaje – nowy sposób rozwiązywania równań typu (1).

Sposób mój polega na znalezieniu takich liczb A, B, m, n , aby przy każdej wartości x była spełniona równość

$$(2) \quad x^3 + px + q = A(x + m)^3 - B(x + n)^3.$$

Wtedy otrzymamy równanie w postaci

$$(3) \quad A(x + m)^3 - B(x + n)^3 = 0$$

i łatwo je będzie rozwiązać; zauważmy bowiem, że lewa strona równania rozkłada się na czynniki:

$$\begin{aligned} & A(x + m)^3 - B(x + n)^3 = \\ & = [\sqrt[3]{A}(x + m) - \sqrt[3]{B}(x + n)] \times \\ & \times \left[\sqrt[3]{A^2}(x + m)^2 + \sqrt[3]{AB}(x + m)(x + n) + \sqrt[3]{B^2}(x + n)^2 \right]. \end{aligned}$$

Przyrównując ten iloczyn do zera, mamy dwie możliwości:

$$(4) \quad \sqrt[3]{A}(x + m) - \sqrt[3]{B}(x + n) = 0,$$

$$(5) \quad \sqrt[3]{A^2}(x + m)^2 + \sqrt[3]{AB}(x + m)(x + n) + \sqrt[3]{B^2}(x + n)^2 = 0.$$

Jak widzimy, z równania (4) łatwo będzie znaleźć jeden z pierwiastków danego równania (1).

Zajmijmy się przeto znalezieniem liczb A, B, m i n . Rozwijając prawą stronę równości (2), otrzymamy:

$$\begin{aligned} & x^3 + px + q = \\ & = (A - B)x^3 + 3(Am - Bn)x^2 + \\ & + 3(Am^2 - Bn^2)x + (Am^3 - Bn^3). \end{aligned}$$

Jeżeli dwa wielomiany jednej zmiennej przybierają przy każdej wartości tej zmiennej równe wartości, to współczynniki

Tomasz M. RUSIN

przy odpowiednio równych potęgach zmiennej muszą być równe:

$$\begin{aligned} A - B &= 1, \\ Am - Bn &= 0, \\ Am^2 - Bn^2 &= \frac{1}{3}p, \\ Am^3 - Bn^3 &= q. \end{aligned}$$

Mamy rozwiązać układ 4 równań z 4 niewiadomymi. Z pierwszego równania wyznaczamy $A = B + 1$ i podstawiamy do pozostałych równań:

$$\begin{aligned} B(m - n) + m &= 0, \\ B(m^2 - n^2) + m^2 &= \frac{1}{3}p, \\ B(m^3 - n^3) + m^3 &= q. \end{aligned}$$

Wyznaczamy teraz zespół $B(m - n) = -m$ i podstawiamy do dwóch ostatnich równań:

$$\begin{aligned} -m(m + n) + m^2 &= \frac{1}{3}p, \\ -m(m^2 + mn + n^2) + m^3 &= q. \end{aligned}$$

Po uproszczeniach otrzymujemy:

$$\begin{aligned} mn &= -\frac{1}{3}p, \\ m + n &= \frac{3q}{p}, \end{aligned}$$

przyczem zakładamy, że $p \neq 0$.

(Przypadek, gdy $p = 0$, daje równanie $x^3 + q = 0$, którego rozwiązanie nie nasuwa trudności).

Wartości m i n znajdziemy jako pierwiastki równania kwadratowego

$$(6) \quad u^2 - \frac{3q}{p}u - \frac{1}{3}p = 0.$$

Jeżeli się okaże, że równanie to ma wyróżnik dodatni, to posiada ono dwa pierwiastki nierówne. Przyjmując jeden z nich za m , a drugi za n , łatwo będziemy mogli wyznaczyć wartości A i B , mianowicie

$$B = \frac{-m}{m - n}, \quad A = \frac{-n}{m - n}.$$

Podstawiając te wartości do równania (4) i mnożąc to równanie obustronnie przez $\sqrt[3]{m - n}$, otrzymamy równanie

$$-\sqrt[3]{n}(x + m) + \sqrt[3]{m}(x + n) = 0.$$

Stąd mamy po uporządkowaniu równanie w postaci:

$$(\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n})x = m\sqrt[3]{n} - n\sqrt[3]{m}.$$

Przekształcając prawą stronę, będziemy mieli:

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n})x &= \\ &= \sqrt[3]{mn}(\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n})(\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n}), \end{aligned}$$

a więc ostatecznie będziemy mieli

$$(7) \quad x = \sqrt[3]{mn}(\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n}).$$

Podstawiając do tego wzoru wartości m i n , wyznaczone z równania (6), otrzymamy wzór, znany pod nazwą wzoru **Cardana**.

Czy zauważyliście, jak często w problemach fizycznych (choćby tych publikowanych w *Delcie*) znaleźć można sformułowanie w rodzaju „punkt materialny o masie m porusza się z prędkością v ...”? Wydawać by się mogło, że oznaczenie masy jakkolwiek inną literą niż m jest po prostu niemożliwe! Skąd bierze się takie przywiązanie fizyków do pewnych oznaczeń? Cóż, po części jest to kwestia wygody i przyzwyczajenia. Po części jednak problem jest nieco bardziej skomplikowany i ma wszelkie cechy problemu „zbyt krótkiej koldry”.

Gdy powstawała fizyka w jej obecnym kształcie, pojawiły się pojęcia takie, jak prędkość, siła, czas. Ich nazwy kojarzyły się z potocznymi określeniami, których uściślenie stanowiły. Jednocześnie, dla wygody, w rozmaitych równaniach zastępowano same pojęcia ich symbolami. Symbolami tymi były na ogół pierwsze litery odpowiednich nazw; z przyczyn historycznych były to nazwy angielskie (v - *velocity*, prędkość, f - *force*, siła, a - *acceleration*, przyspieszenie itp.). I tak symbole zrosły się z pojęciami stając się niemal ich synonimami. Na przeszkodzie tej idylli stanęła jednak sama przyroda, która nieubłaganie dostarczała wciąż nowych i nowych zjawisk. Do ich opisu zaś niezbędne były nowe pojęcia, coraz częściej nie znajdujące swoich odpowiedników w mowie potocznej. Przed fizykami pojawił się więc nowy kłopot: jak nazwać, ale i jak oznaczyć to, co już odkryli. Oznaczenie takie powinno być krótkie, ale jednoznaczne, dopuszczające przy tym różne warianty tej samej wielkości. Przykładem może tu służyć oznaczenie funkcji falowej w mechanice kwantowej, dla którego zarezerwowano grecką literę ψ . W zależności od kontekstu piszemy $\psi(t)$, $\psi_1(t)$, $\psi_1^2(t)$ itp.

Przykład ten pokazuje zresztą coś nowego: oprócz samego symbolu mamy tu także wskaźniki, które precyzują, co dany symbol oznacza. Wskaźniki mogą występować w czterech polach otaczających symbol:

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} X \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} X \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array}$$

Obecność wskaźników w każdym z tych pól odczytujemy inaczej. Gdy wskaźnik umieścimy w polach 1 lub 2, będziemy mieć do czynienia z liczbą masową lub atomową pierwiastka X (na szczęście, prawie nikt poza fizykami jądrowymi w tych polach niczego nie zapisuje). Znacznie gorzej sytuacja wygląda dla wskaźnika umieszczonego w polu 3. Liczba 2 tam znajdująca się może np. oznaczać zarówno kwadrat liczby x (tzn. $x^2 = x \cdot x$), jak również drugą składową wektora (x^1, x^2, x^3) . Gdybyśmy natomiast ujęli dwójkę w nawiasy, (2), niemal każdy rozpoznałby drugą pochodną funkcji $X \left(X^{(2)} = \frac{d^2}{dx^2} X \right)$. Pole 4 zasługuje wreszcie na nazwę śmietnika - wrzuca się tam wszystkie możliwe indeksy. Zapis B_1 może oznaczać indukcję pola magnetycznego B_1 (np. pochodzącą od pierwszego źródła), ale także i pierwszą składową wektora $B = (B_1, B_2, B_3)$.

Indeksy w symbolach wielkości fizycznych to nie jedyna możliwa komplikacja. Często pojawiają się tam dalsze „ozdobniki”: gwiazdki (X^*), kropki (\dot{X}), kreski (\bar{X}), daszki (\hat{X}), falki (\check{X}), strzałki (\vec{X}) i wszelkie możliwe ich kombinacje. Prowadzić to może do zabawnych nieporozumień. Weźmy np. operację „kropkowania”, czyli różniczkowania względem czasu ($\dot{X} = \frac{dX}{dt}$) i rozważmy natężenie prądu elektrycznego zwykle oznaczane w elektrotechnice literą i . Co oznacza zapis \dot{i} ? Na dodatek i jest także matematycznym symbolem jednostki urojonej. Konia z rządem temu, kto rozszyfruje równanie

$$\dot{\vec{i}} + \vec{i} = i(1 + 2i)^2.$$

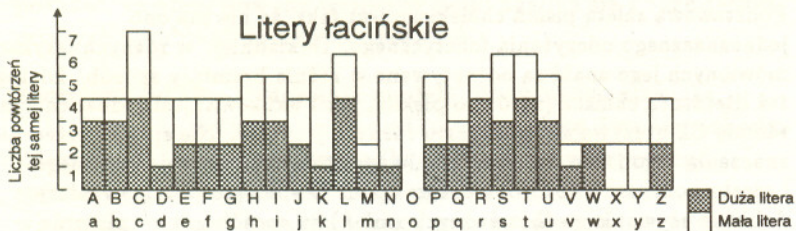
O tym, że nie są to problemy aż tak nieistotne, jak nam się często wydaje, można przekonać się czytając dowolny akademicki podręcznik fizyki.

Czasem aż żał autora, który usiłuje zapisać wzór typu

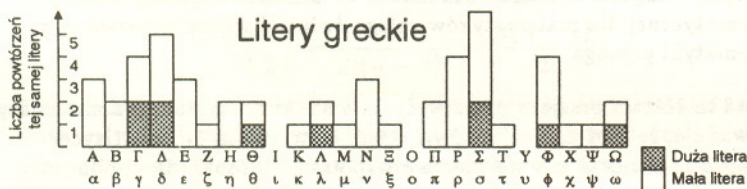
$$\frac{\text{energia pola}}{\text{jednostka objętości}} = \frac{1}{2}(\text{natężenie pola elektrycznego})^2,$$

dobierając różne znaczki przypominające literę *E*! Sęk jednak w tym, że jednoznaczności jednoliterowych oznaczeń nie da się po prostu osiągnąć.

Zamieszczone wykresy pokazują statystykę używalności rozmaitych liter (greckich i łacińskich) jako standardowych symboli wielkości fizycznych w kilku podręcznikach fizyki. Jak wynika z wykresów, najczęściej używa się do oznaczeń liter łacińskich – 105, z czego 65 przypada na duże i 50 – na małe litery. Średnio każda wielka litera „zajmowana jest” przez 2,17 pojęć fizycznych, mała – przez 1,93 pojęć. Najwięcej pojęć przypada na literę *c* – 7, najmniej na *o* – 0 (zapewne, aby uniknąć możliwości pomylenia z zerem). Na tle liter łacińskich użycie liter greckich prezentuje się znacznie skromniej. O ile liczba oznaczeń małymi literami (41) jest porównywalna z analogiczną liczbą dla alfabetu łacińskiego, to już dla dużych liter następuje prawdziwy krach (tylko 10 przypadków zastosowania). Ogólna charakterystyka wykresu przypomina nieco funkcję $f(x) = |\sin x|$ z maksimum dla litery σ (6) i minimum dla ι, o, v (0).



Liczba dużych liter	55	średnio 2,11	oznaczeń na literę
Liczba małych liter	50	średnio 1,92	oznaczeń na literę
Razem	105	średnio 4,04	oznaczeń na literę



Liczba dużych liter	10	średnio 0,40	oznaczeń na literę
Liczba małych liter	41	średnio 1,84	oznaczeń na literę
Razem	51	średnio 2,00	oznaczeń na literę

Literatura:

1. Reśnick, Holiday – *Wstęp do fizyki*, PWN 1974.
2. *Słownik fizyczny*, PWN 1986.
3. *Encyklopedia fizyki współczesnej*, PWN 1984.
4. Landau, Lifszyc – *Krótki kurs fizyki*, PWN 1986.
5. Notatki z zeszytów autora, 1984 – 1988.

Jak zaradzić brakowi odpowiedniej liczby symboli? Narzucającym się sposobem jest użycie oznaczeń wieloliterowych. Ale (niestety) fizycy są leniwi i nie lubią długich symboli. Mamy więc błędne koło. Jednak, być może, istnieje wyjście z tej sytuacji. Nic nikomu nie sugerując zauważmy, że w języku chińskim występuje około 50 000 znaków pisarskich... A tych, którzy pomyślą, że żartuję, odsyłam do książki Bohra i Mottelona *Struktura jądra atomowego*.

PS. Zachęcam Czytelników do uzupełnienia zamieszczonej statystyki. Można też poszukać wzorów funkcji (ciągłych) najlepiej przybliżających wykresy.

Redakcja *Młodego Matematyka*
opatrzyła artykuł Marka Kacza
następującym komentarzem.

Udzielając miejsca sposobowi, przedstawionemu przez p. Marka Kacza, który jest uczniem VIII klasy gimnazjalnej Liceum Krzemienieckiego, Redakcja musi dodać kilka uwag.

Autor artykułu ograniczył się do rozważenia przypadku, kiedy wyróżnik równania (6) jest dodatni, czyli przypadku, kiedy wyrażenie

$$(8) \quad \left(\frac{1}{2}q\right)^2 + \left(\frac{1}{3}p\right)^3$$

ma wartość dodatnią. Z teorii równania trzeciego stopnia wiadomo, że w tym przypadku równanie (1) posiada jeden pierwiastek rzeczywisty. Metoda, opisana w artykule, odnosi się do znalezienia tego pierwiastka.

W przypadku, kiedy wyrażenie (8) jest zerem, wyróżnik równania (6) jest zerem, a więc równanie to posiada pierwiastek podwójny:

$$m = n = \frac{3q}{2p}.$$

Ale w tym przypadku wzór (7) przybiera postać $x = \frac{3q}{p}$, i nietrudno sprawdzić przez bezpośrednie podstawienie, że wzór ten daje pierwiastek równania (1).

W przypadku, kiedy wyrażenie (8) ma wartość ujemną, m i n nie są liczbami rzeczywistymi. Zachodzi tu przypadek, znany pod nazwą *casus irreducibilis*, – tem osobliwy, że w tym przypadku równanie trzeciego stopnia posiada trzy pierwiastki rzeczywiste, ale nie można ich wyznaczyć drogą algebraiczną. Rzecz jasna, że i metoda, opisana przez p. M. Kacza, zawodzi w tym przypadku. W samej rzeczy, równanie

$$(x - 1)(x - 2)(x + 3) = 0$$

posiada trzy pierwiastki: +1, +2, -3. Rozwijając lewą stronę, otrzymujemy równanie

$$x^3 - 7x + 6 = 0,$$

mamy więc wartości: $p = -7, q = 6$. Równanie (6) przybiera postać

$$u^2 + \frac{6}{7}u + \frac{7}{3} = 0.$$

Łatwo sprawdzić, że równanie to nie posiada pierwiastków rzeczywistych, a więc nie można wyznaczyć rzeczywistych wartości m i n , skąd jednak nie wynika, by dane równanie trzeciego stopnia nie posiadało pierwiastków.

Poproszony o skomentowanie tegoż tekstu profesor Andrzej Schinzel napisał:

„Podana metoda prowadzi łatwo do wyznaczenia wszystkich pierwiastków równania (1). W tym celu należy zauważyć, że jeśli ρ jest pierwiastkiem pierwotnym trzeciego stopnia z 1, to równanie (5) jest równoważne alternatywnie

$$\sqrt[3]{A(x+m)} - \rho^i \sqrt[3]{B(x+n)} = 0 \quad (i = \pm 1),$$

przy czym wartości $\sqrt[3]{A}$ i $\sqrt[3]{B}$ traktujemy jako ustalone. Podstawiając, jak to zrobił autor notatki,

$$B = \frac{-m}{m-n}, \quad A = \frac{-n}{m-n},$$

gdzie m, n są pierwiastkami równania (6), i mnożąc przez $\sqrt[3]{m-n}$ otrzymamy

$$-\sqrt[3]{n}(x+m) + \rho^i \sqrt[3]{m}(x+n) = 0.$$

Stąd

$$\begin{aligned} (\rho^i \sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n})x &= m\sqrt[3]{n} - n\rho^i \sqrt[3]{m} = \\ &= \sqrt[3]{mn}[\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n}\rho^{2i}][\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n}\rho^{2i}] \end{aligned}$$

i ostatecznie

$$x = \sqrt[3]{mn}(\rho^{-i} \sqrt[3]{m} + \rho^i \sqrt[3]{n}), \quad (i = \pm 1).$$

Przypadek $i = 0$ odpowiada równaniu (4) rozpatrzonemu przez M. Kaca. Biorąc $i = = 0, \pm 1$ otrzymujemy wszystkie pierwiastki równania (1) również i wtedy, gdy wyróżnik równania (6) jest niedodatni.”

Wbrew pozorom komentarz Młodego Matematyka i przytoczony, współczesny komentarz profesora Schinzla nie są sprzeczne.

Już od momentu opublikowania wzorów Cardana było wiadomo, że pozwalają one na znalezienie pierwiastków również dla *casus irreducibilis*, ale przy przejściu podczas obliczeń przez rachunki na liczbach zespolonych. A to uważano za metodę „podejrzaną”.

Około 1600 roku został znaleziony (przez François Viète) sposób na rozwiązanie *casus irreducibilis* w obrębie liczb rzeczywistych – przez odpowiednie podstawienie trygonometryczne. I uwagi redakcji *Młodego Matematyka* dotyczą spostrzeżenia, że rachunki Marka Kaca takiej możliwości nie stwarzają.

Profesor Andrzej Schinzel natomiast zwraca uwagę na fakt, że dopuszczając rachunki na liczbach zespolonych można dojść do rozwiązania *casus irreducibilis* również drogą zaproponowaną przez kilkunastoletniego Marka Kaca.

Około roku 220 p.n.e. zagrożone pierwszymi najazdami Mongołów państwa Chin zjednoczyły się. Zjednoczenia dokonał Ts'in Szy-huang-ti i on został cesarzem kolejnego (co najmniej czwartego w dziejach Chin) imperium.

Był to człowiek bardzo energiczny, miał niezmiernie ambitne plany, nie brakowało mu też zdecydowania w realizacji swoich zamierzeń. To on zbudował Wielki Mur (jedyną budowlę widoczną „gołym okiem” ze stacji orbitalnych) – miała ona chronić Chiny przed najazdem (i przez ponad 1400 lat spełniała skutecznie swoje zadanie). Wprowadził jednolite miary i wagi oraz, używane po dziś dzień, pismo ideograficzne. O tym właśnie piśmie chciałem napisać kilka uwag. Pożegnajmy się jednak z jego promotorem: brutalne rządy Ts'in Szy-huang-ti skończyły się zamordowaniem cesarza w 206 r.p.n.e, ale cesarstwo nie rozpadło się – jego następcy, znani jako dynastia Han, doprowadzili imperium chińskie do największego, w dziejach Chin, rozkwitu (dość powiedzieć, że na początku naszej ery graniczyło ono na zachodzie bezpośrednio z Cesarstwem Rzymskim).

Podstawową zaletą pisma chińskiego jest fakt, że nie ma ono jednoznacznego odczytania fonetycznego. Dokładniej: w różnych językach mówionych jego znaki są odczytywane w różnie brzmiący sposób. Dlatego też literatura chińska (zarówno piękna, jak i naukowa) jest jedna, choć na terenie Chin używa się kilkunastu różnych języków. Nie sposób przecenić znaczenia tego faktu dla utrzymania spójności kulturowej ogromnego i często politycznie rozdrobnionego kraju. O sile tego pisma świadczy dobitnie używanie go (bez żadnych zmian) za sposób notowania prac naukowych przez (zawsze dość nacjonalistycznie nastawioną) Japonię.

Dlaczego warto o tym wspominać przy okazji matematyki? Otóż dlatego, że matematycy również posługują się pismem ideograficznym. Z tych samych powodów i z tym samym pozytywnym skutkiem co Chińczycy. Napis „1247” czy „ $x^2 - 4x + \sqrt{12} = 0$ ” odczytuje się fonetycznie zupełnie inaczej po polsku, niż po angielsku, rosyjsku czy węgiersku. Znaczą jednak te napisy wszędzie to samo. Umożliwia to istnienie wspólnej kultury matematycznej dla matematyków całego świata i wielce w rozwijaniu matematyki pomaga.

Zaleta ta została przejęta przez wszystkie nauki korzystające z matematyki i powoduje, że możemy dziś mówić o jednej na całym świecie fizyce, chemii itd. Podczas gdy mówienie o wspólnym dorobku dyscyplin humanistycznych całego świata byłoby w chwili obecnej niesensowne (czy co najmniej przedwczesne). Tak więc zasadnicza różnica w światowym funkcjonowaniu tego, co anglosasi nazywają *science* i *art*, ma powody (paradoksalnie) językowe.

Tych kilka uwag nasunęło mi się przy czytaniu artykułu Tomasza Rusina o symbolice fizycznej. Jest to bowiem dyskusja o tym, jak z liter pisma alfabetycznego produkować ideogramy funkcjonujące właśnie na zasadzie hieroglifów chińskich.

I jeszcze jedna uwaga. Od czasu do czasu Europejczycy wpadają na pomysł, by oświecić Chińczyków, ułatwić im życie (a w szczególności czytanie i pisanie) przez wprowadzenie u nich pisma alfabetycznego. Trudno o bardziej absurdalny pomysł. Żeby ten absurd zrozumieć w pełni, warto spróbować zebrać argumenty za tym, by matematycy zrezygnowali ze swoich formalizmów i w swoich pracach używali zwyczajnego, alfabetycznego, zgodnego z fonetyką pisma. Do tego matematycy skłonici się nie dadzą. Mają zresztą ważny powód. Przez dwa i pół tysiąca lat tak notowano matematykę i ostatecznie zdecydowano się na dzisiejszy, ideograficzny sposób pisania niewiele ponad 300 lat temu. A jakie to dało wyniki, każdy może stwierdzić wiedząc, jak wielki skok odnotowała matematyka w XVII wieku.

Marek KORDOS

W ostatnich miesiącach prasa, radio i telewizja wielokrotnie donosiły o dramatycznym wzroście liczby wypadków samochodowych. Zaznaczano jednocześnie, że wzrost ten jest nieproporcjonalny do wzrostu liczby samochodów. A mianowicie, przy powiększeniu się liczby samochodów o 30 % liczba wypadków wzrosła o 70 % w tym samym okresie. Różnica wspomnianych liczb dała powód do wielu dyskusji, w których podkreślano coraz bardziej niebezpieczny sposób jazdy wielu kierowców, pogarszający się stan dróg itp. Ta różnica również ma być istotną przyczyną złej sytuacji finansowej Państwowego Zakładu Ubezpieczeń (PZU), jako że wpływy tej instytucji są proporcjonalne do liczby samochodów, wydatki zaś do liczby wypadków.

Czy doprawdy ów dramatyczny wzrost liczby wypadków jest nieoczekiwany, czy nie można go było przewidzieć? Poniżej spróbuję pokazać, że obserwowany wzrost w pełni zgadza się z rezultatami prostych kombinatorycznych rozważań.

Zacznijmy od skonstruowania modelu omawianego zjawiska. Zakładamy, że w typowym wypadku uczestniczą dwa samochody. Zdarzają się, oczywiście, wypadki z udziałem tylko jednego samochodu, np. najechanie na przydrożne drzewo bądź wielosamochodowe karambole, lecz przyjmujemy, że wypadki takie zdarzają się rzadko w porównaniu ze zderzeniami dwóch samochodów. Dalej przyjmujemy, że dany samochód ma jednakową szansę zderzenia się z każdym innym samochodem poruszającym się w określonym terenie, np. w mieście. Wobec tego liczba wypadków w danym mieście będzie proporcjonalna do liczby wszystkich możliwych par samochodów. Jak pamiętamy, liczba takich par wyraża się za pomocą symbolu Newtona, tj.

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2},$$

gdzie n jest liczbą samochodów. Gdy liczba ta jest dostatecznie duża, $n(n-1)$ można przybliżyć przez n^2 . Tak więc, jeśli liczba samochodów wzrasta k razy w pewnym okresie i warunki ruchu drogowego nie ulegają zmianie w tym czasie, liczba wypadków, zgodnie z naszym modelem, wzrasta k^2 razy.

Przedstawiony model świetnie zgadza się z liczbami wspomnianymi na wstępie. Wzrost liczby samochodów o 30% oznacza, że $k = 1,3$, zaś $k^2 = 1,69$, co prowadzi, w przybliżeniu, do 70 % wzrostu liczby wypadków. A więc wzrost ten jest prostą konsekwencją wzrostu liczby samochodów bądź inaczej – ich gęstości na drogach. Jeśli warunki, w jakich odbywa się ruch drogowy, nie będą ulegały istotnej poprawie, będziemy obserwować kwadratowy, a więc bardzo szybki, wzrost liczby wypadków.

Nasz model można zastosować do innych warunków. Wyobraźmy sobie np. kraj, w którym liczba samochodów jest tak niewielka, że bardzo rzadko dochodzi do zderzenia dwóch pojazdów i typowym wypadkiem jest najechanie przeszkody przez jeden samochód. Albo całkiem inny kraj, w którym tłok na drogach jest tak wielki, że najczęściej dochodzi do karambolu czterosamochodowego. Jak szybki będzie wzrost liczby wypadków w tych krajach przy zwiększaniu się liczby samochodów?

Stanisław MRÓWCZYŃSKI

Na koniec warto dodać, że Marek Kac po latach przekonał się, że odkryta przez niego w 1930 roku metoda jest zastosowaniem twierdzenia Sylwestera do rozwiązywania równań trzeciego stopnia. Twierdzenie to brzmi:

Każda dostatecznie ogólna forma dwójkowa nad ciałem K , stopnia $2n-1$ jest sumą n form liniowych, których współczynniki dają się wyznaczyć przez rozwiązanie równania stopnia n nad ciałem K .

(J. J. Sylvester, *The collected mathematical papers*, vol. I, Cambridge 1904, str. 203–216 oraz 265–283, oraz A. Cayley, *The collected mathematical papers*, vol. IV, str. 43–53.)



Rozwiązanie zadania F 308.

Niech r oznacza promień włókna, l jego długość, P – moc żarówki, U – napięcie, T – temperaturę włókna podczas pracy, R – opór żarówki podczas pracy. Praktycznie cała pobrana moc zostaje wypromieniowana przez włókno. Stosując prawo Stefana – Boltzmanna dostaniemy

$$P = 0,4 \cdot \sigma T^4 \cdot 2\pi r l,$$

gdzie $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}^4)$ – stała Boltzmanna, a $2\pi r l$ jest powierzchnią włókna. Moc prądu elektrycznego dana jest wzorem

$$P = U \cdot I = \frac{U^2}{R},$$

gdzie

$$R = \rho [1 + \alpha(T - 273\text{K})] \frac{l}{\pi r^2}.$$

Eliminując r rozwiązujemy powyższe równanie względem l

$$l = \sqrt{\frac{PU^2}{\rho(1 + \alpha(T - 273))4\pi(0,4\sigma T^4)^2}} = 0,67 \text{ m}.$$

Włókno jest zwinięte w spiralę, aby zmieściło się w żarówce.



Rozwiązanie zadania F 309.

Niech P oznacza moc silnika pojazdu, u – prędkość wiatru. Dla dużych prędkości siła oporu powietrza jest dominującą siłą oporów ruchu i jest ona proporcjonalna do kwadratu prędkości pojazdu względem powietrza. Moc jest równa sile oporów pomnożonej przez prędkość pojazdu. Stąd $p \sim v_m^3$ oraz $p \sim (v + u)^2 \cdot v$; otrzymujemy

$$(v + u)^2 \cdot v = v_m^3 \Rightarrow$$

$$u = \sqrt{\frac{v_m^3}{v}} - v \approx 15 \text{ km/h}.$$

O całkiem starych gwiazdach nowych

Aleksander SCHWARZENBERG-CZERNY

Nie wszystko nowe, co nowym się widzi

Nowymi nazwali dawni astronomowie te gwiazdy, które czasami pojawiały się w miejscach, gdzie przedtem nic nie było widać. Niestety, okazało się, że ich blask szybko gaśnie i już po kilku latach, a nawet miesiącach, przestawały być widoczne. Dopiero fotografie wykazały, że gwiazdy nowe to w istocie słabe błękitne gwiazdki, które rozbłyskują powiększając blask od 10^4 do 10^6 razy. Okazało się, że po każdym rozbłysku odrzucają szybko powiększający się obłoczek gazu. Poza wybuchami badania tych błękitnych gwiazdek były utrudnione z powodu ich słabego blasku i dopiero w latach pięćdziesiątych ustalono, że są to układy podwójne gwiazd krążących tak blisko siebie, że jest możliwy przepływ gazu z większej, zwanej czerwonym olbrzymem, do mniejszej, zwanej białym karłem. Pierwsza z nich jest bardzo podobna do Słońca, jedynie nieco chłodniejsza – stąd jej nazwa. Druga gwiazda, o podobnej lub nieco większej masie, rozmiarem nie przekracza Ziemi. O ile średnia gęstość czerwonego olbrzyma jest podobna do gęstości wody, to gęstość białego karla jest milion razy większa. Materia o takiej gęstości ma własności całkiem niezwykle i nazywamy ją materią zdegenerowaną. Zwykle gwiazdy świecą, bo ich wnętrza są gigantycznymi reaktorami termojądrowymi. Białe karły to tacy gwiazdni emeryci – w ich wnętrzach już cały wodór uległ przemianie na hel ${}^4\text{He}$ lub nawet w węgiel ${}^{12}\text{C}$ i dalsze reakcje termojądrowe ustały. Świecą one kosztem nagromadzonej energii i powoli stygną. Sytuacja białych karłów w gwiazdach nowych jest o tyle niezwykła, że na ich powierzchnię spada przepływający z czerwonego olbrzyma wodór – potencjalne paliwo termojądrowe. Zrozumienie gwiazd nowych wymaga zastanowienia się, czy i jak mogą przebiegać reakcje termojądrowe w utworzonej na powierzchni ich białych karłów warstwie wodoru.

O stabilności termicznej Słońca

Z naszego powszedniego doświadczenia płynie wniosek, że reakcje termojądrowe na Słońcu przebiegają spokojnie. Nie jest wcale oczywiste, że tak być musi. Energie termiczne cząstek we wnętrzach gwiazd osiągają co najwyżej kilka keV. Reakcje termojądrowe polegają na łączeniu się jąder poprzez barierę odpychania elektrostatycznego rzędu MeV, zatem mogą zachodzić jedynie dzięki tunelowaniu. Tunelowanie jest efektem kwantowym polegającym na przejściu przez barierę potencjału cząstki, której energia jest do tego niewystarczająca. Jest to związane z nieoznaczonością energii i czasu trwania stanu cząstki w mechanice kwantowej. Czasem cząstka może otrzymać dodatkową energię, niejako na kredyt, który jest po pewnym czasie zwracany. Przy tym, tak jak w życiu, im więcej i na dłużej chcemy żyć na kredyt, tym jest to mniej prawdopodobne. Prawdopodobieństwo tunelowania maleje wykładniczo ze wzrostem stosunku energii bariery i cząstki. Zatem przekrój czynny reakcji łączenia jąder silnie zależy od temperatury, tym silniej, im większe są ładunki reagujących jąder. Tam, gdzie zwiększeniu wydzielania energii w reakcjach towarzyszy wzrost temperatury, musi dojść do dalszego wzrostu ilości reakcji i w końcu do wybuchu termojądrowego.

Równowaga hydrostatyczna gwiazd podobnych do Słońca polega na równoważeniu się ciśnienia hydrostatycznego wywołanego ciężeniem i ruchami termicznymi,

$$\frac{GM^2}{R^2} \frac{1}{R^2} \sim \frac{M kT}{\mu R^3},$$

gdzie μ oznacza masę cząsteczkową gazu (reszta oznaczeń standardowa). Wskutek równowagi energia grawitacyjna i termiczna gwiazdy E_G i E_T są powiązane w myśl twierdzenia o wirale. Mnożąc powyższy wzór przez objętość gwiazdy R^3 otrzymamy w przybliżeniu $E_G \sim E_T$. Wówczas i energia całkowita $E = E_G + E_T$ jest także proporcjonalna do energii termicznej, z przeciwnym znakiem (E jest ujemne). W równowadze produkcja energii w reakcjach jest równoważona przez straty na wypromieniowanie. W przeciwieństwie do produkcji energii straty łagodnie zależą od temperatury i w pierwszym przybliżeniu ich zmianę pominiemy. Wówczas

Degeneracja – stan gazu, w którym jego ciśnienie nie zależy od temperatury. Osiągany w niskiej temperaturze lub przy wysokiej gęstości. Zjawisko kwantowe związane z faktem, że dwa elektrony nie mogą znajdować się w tym samym stanie. Gdy zajęte są stany o niskiej energii, część cząstek – bez względu na temperaturę – musi mieć wysokie energie i one właśnie najwięcej wnoszą do ciśnienia gazu zdegenerowanego.

Twierdzenie o wirale: dla stacjonarnego układu punktów materialnych podwojona energia kinetyczna jest równa minus energii potencjalnej (grawitacyjnej). W przypadku gwiazdy energia kinetyczna cząstek jest energia termiczną materii gwiazdy. Autor prowadząc przybliżone oszacowania pomija tu czynnik 2.



Rozwiązanie zadania M 601.
 Równanie $(5 + 3\sqrt{2})^m - (3 + 5\sqrt{2})^n = 0$ dla całkowitych m i n , to w istocie dwa równania o współczynnikach całkowitych: jedno mówiące o tym, że suma wyrazów nie zawierających $\sqrt{2}$ jest równa 0 i drugie – że suma współczynników wyrazów zawierających $\sqrt{2}$ jest równa 0. Dlatego para (m, n) będąca rozwiązaniem danego równania jest również rozwiązaniem równania $(5 - 3\sqrt{2})^m = (3 - 5\sqrt{2})^n = 0$ – prowadzi ono do tych samych równań dla liczb całkowitych. Równanie $(5 - 3\sqrt{2})^m = (3 - 5\sqrt{2})^n$ ma jednak tylko jedno rozwiązanie $(0, 0)$, bo $0 < 5 - 3\sqrt{2} < 1 < 5\sqrt{2} - 3$. Zatem $m = n = 0$.



Rozwiązanie zadania M 602.
 Ponieważ $f(0) = f(1) = 1$, więc wyraz wolny wielomianu $f_n(x)$ \rightarrow $= f(f(\dots(f(x))\dots))$ jest równy 1.

Stąd $f_n(m)$ daje przy dzieleniu przez m resztę 1. Dla danych k i n istnieje więc taka para liczb całkowitych p i p' , że

$$f_{n+k}(m) = f_k(f_n(m)) = p \cdot f_n(m) + 1,$$

dowolny wspólny dzielnik $f_{n+k}(m)$ i $f_n(m)$ jest zatem dzielnikiem jedności, czyli

$$\text{NWD}(f_{n+k}(m), f_n(m)) = 1.$$



Rozwiązanie zadania M 603.
 Załóżmy, że

$$\sqrt{a + \sqrt{a + \dots + \sqrt{a}}} = b.$$

1991

Podnosząc wielokrotnie do kwadratu obie strony równania oraz przenosząc na prawą stronę wyrazy bez pierwiastka, otrzymamy dla pewnych nieujemnych liczb całkowitych c, d

$$\sqrt{a + \sqrt{a}} = c \quad \text{i} \quad \sqrt{a} = d.$$

Stąd $d^2 + d = c^2$, wtedy dla $d > 0$ jest $c > d$, a więc $c \geq d + 1$, skąd $c^2 > d(d + 1) = d^2 + d$. Zatem $d = 0$ i jedynymi rozwiązaniami równania są $x = y = 0$.

perturbacja gwiazdy, polegająca na wzroście temperatury, prowadzi jedynie do wzrostu tempa reakcji i wzrostu energii całkowitej, czyli malenia jej wartości bezwzględnej (wzrost promienia gwiazdy). Na mocy równowagi hydrostatycznej oznacza to malenie temperatury, czyli zanik perturbacji. Zatem ujemne efektywne ciepło właściwe Słońca zapewnia spokojny przebieg reakcji termojądrowych w jego wnętrzu. Więcej informacji na temat Słońca i zwykłych gwiazd Czytelnik znajdzie w moim artykule w *Delcie* 6/1989.

O niestabilności reakcji we wnętrzu białego karła

Inaczej rzecz się ma we wnętrzu białego karła. Ciśnienie w jego wnętrzu (czyli przekaz pędu na jednostkę czasu i powierzchni) jest wskutek degeneracji zdominowane przez elektrony. Określający ciśnienie rozkład ich pędów wynika z zasady nieoznaczoności:

$$\Delta p^3 \sim \frac{h^3}{\Delta x^3} \sim h^3 \frac{\rho}{\mu},$$

gdzie p oznacza pęd. Związek nieoznaczoności położenia z gęstością $\Delta x^3 \sim \mu/\rho$ wynika z zakazu Pauliego dla elektronów, w myśl którego tylko jeden elektron może się znaleźć w danym stanie, określonym przedziałami pędu i położenia: Δp^3 i Δx^3 . Zatem rozkład pędów oraz ciśnienie zależą jedynie od gęstości. Dzieje się tak przynajmniej tam we wnętrzu białego karła, gdzie ρ jest na tyle duże, że pędy ruchów termicznych są zanedbywalne wobec Δp , czyli gdzie zachodzi degeneracja. W przypadku rozpoczęcia się reakcji termojądrowych zaczyna rosnać temperatura, ale nie powoduje to z początku wzrostu ciśnienia. Stan taki trwa, dopóki wysoka temperatura nie spowoduje oddegenerowania gazu. Dopiero wtedy jego ciśnienie zaczyna reagować na temperaturę – z konieczności gwałtownie. W myśl powyższego reakcje jądrowe we wnętrzu białego karła, o ile tylko znajdzie się tam paliwo, muszą prowadzić do wybuchu.

Reakcje termojądrowe w gwiazdach nowych

Wodór spadający na powierzchnię białego karła jest początkowo rozgrzany upadkiem i pod niewielkim ciśnieniem nie ulega degeneracji. Dopiero gdy nabiera się jego dostatecznie gruba warstwa, u jej podstawy ciśnienie może osiągnąć wartość wystarczającą do degeneracji. W międzyczasie temperatura musi tam rosnać, by zapewnić odprowadzanie na zewnątrz ciepła z wnętrza, jak i z rozgrzanej upadkiem otoczki. Gdy temperatura osiągnie wartość wystarczającą do rozpoczęcia reakcji termojądrowych zanim w otoczce wystąpi degeneracja, spalanie wodoru przebiega spokojnie, jak na Słońcu. Otoczka rozszerzy się o tyle, by zapewnić tempo palenia wodoru równe tempu jego napływania od drugiej gwiazdy. Jednak jeśli reakcje rozpoczną się dopiero po nastąpieniu degeneracji w podstawie otoczki, prowadzą do gwałtownego wzrostu temperatury i tempa reakcji, czyli do wybuchu termojądrowego.

Przebieg wybuchu

Początkowo wzrost temperatury w warstwie zdegenerowanej nie wpływa na ciśnienie (I faza wybuchu). Energia produkowana w tej fazie jest odpowiedzialna za gwałtowność późniejszego wybuchu. Lawinowe narastanie reakcji zostanie wstrzymane dopiero po dotarciu wydzielonego ciepła do warstw niezdegenerowanych. Z chwilą dotarcia ciepła do powierzchni gwiazdy następuje maksimum jasności (mocy) całkowitej. Z uwagi na małą powierzchnię jasność powierzchniowa jest duża. Na mocy prawa Stefana-Boltzmana wynosi ona σT^4 , co oznacza wysoką temperaturę. Na mocy prawa Wiena częstość maksimum promieniowania, proporcjonalna do temperatury, wypada wówczas w dalekim nadfiolecie. Przyrost ciśnienia gazu w niezdegenerowanej otoczce powoduje jej ekspansję (II faza wybuchu). Ekspansja widocznej powierzchni (fotosfery) postępuje tak długo, dopóki jej gęstość nie spadnie tak, że staje się ona przezroczysta. Osiągane jest wówczas maksimum blasku (III faza), bowiem w przybliżeniu Rayleigha-Jeansa moc świecenia w paśmie widzialnym zależy słabo od temperatury, a głównie od powierzchni. W tej fazie wewnętrzna część otoczki zaczyna opadać, podsycając dopalanie reszty wodoru. Dzieje się to już przy braku degeneracji, zatem spokojnie i zapewnia mniej więcej stałą moc całkowitą w tej fazie. Równocześnie rzędzenie otoczki powoduje cofanie się widocznej jej powierzchni i co za tym idzie – spadek jasności widzialnej. W ostatniej (IV) fazie następuje zakończenie wybuchu. Wówczas odtwarza się przepływ masy od towarzysza, być może dodatkowo stymulowany ogrzaniem go przez wybuch.

Skąd się biorą gwałtowne wybuchy?

Teoretycy mają trudności ze zrozumieniem, skąd się biorą najgwałtowniejsze wybuchy nowych. Wyliczymy najważniejsze, wiążące się z tym problemy i proponowane ich rozwiązania.

1. Podobnie jak w bombach termojądrowych tak i tu trudno jest zapobiec przedczesnemu rozleczeniu się otoczki i rozproszeniu paliwa. Uważamy, że to przedczesne rozproszenie nie zachodzi dzięki zmagazynowaniu części energii otoczki w β^+ niestabilnych jądrach atomowych ^{13}N , ^{14}O , ^{15}O , ^{17}F . Jądra te rozpadają się po czasie rzędu 100 s (który jest dłuższy od charakterystycznego czasu zachodzenia zmian w otoczce, równego stosunkowi grubości otoczki do prędkości dźwięku), a więc przez ten czas zgromadzona w nich energia nie wpływa na stan gazu. Ponieważ w panujących wtedy temperaturach nie zachodzi synteza ^{12}C , zatem całkowita liczba jąder C, N, O nie ulega zmianie, jedynie są one dzięki przyłączaniu protonów zamieniane na izotopy β^+ niestabilne. Zatem skuteczność tego mechanizmu wymaga obecności od początku dużej ilości trwałych izotopów C, N, O.
2. Skoro energia, która może być zużyta na odrzucenie otoczki, jest ograniczona, to powinna zostać racjonalnie wykorzystana. By tak się stało, niezbyt masywna i gęsta otoczka powinna być u podstawy zdegenerowana, a tak będzie, gdy biały karzeł będzie masywny (o masie zbliżonej do masy Chandrasekhara) i co za tym idzie, mały. Wtedy bowiem u podstawy otoczki panuje silna grawitacja i może wystąpić gęstość wystarczająca do degeneracji.
3. Dodatkowo okazuje się, że tempo gromadzenia wodoru na powierzchni białego karła nie może być zbyt wielkie. Wtedy bowiem wraz z wodorem otoczka zyskiwałaby coraz więcej energii termicznej nie mogąc się jej pozbyć, gdyż tempo jej utraty niewiele zmienia się w trakcie akrecji. Zatem utrzymanie otoczki w temperaturze dostatecznie niskiej, by zapobiec przedczesnemu zapaleniu, przed nastąpieniem degeneracji, wymaga tempa akrecji przed wybuchem lub po nim niższego co najmniej o rząd wielkości niż obserwowane w znanych nowych. Dlatego postuluje się tzw. hibernację nowych w stanie powolnej akrecji, po którym następuje wzrost tego tempa na kilkaset lat przed wybuchem i powtórna hibernacja aż do następnego wybuchu.

Masa Chandrasekhara – maksymalna masa białego karła równa około $1,44 M_{\odot}$. Im większa jest masa białego karła, tym mniejsze są jego rozmiary – przy masie Chandrasekhara teoretycznie dążą do zera.

Rola obserwacji

Jak widać, na wszystkie problemy znaleziono rozwiązania. Sęk jednak w tym, że w dotychczasowych obserwacjach brak potwierdzenia tych rozwiązań. Ostateczne wyjaśnienie natury gwałtownych wybuchów nowych czeka na dalszy postęp, zarówno teorii, jak i obserwacji. Np. dodatkowe ilości C, N, O, postulowane w (1), mogłyby pochodzić z wnętrza białego karła, o ile cała otoczka wodorowa jest każdorazowo odrzucana. Dotychczasowe obserwacje jednak pozwalały ocenić masę otoczek jedynie pośrednio, na podstawie masy odrzuconej mgławicy. Nie wiadomo zatem, czy w miarę kolejnych wybuchów przybywa czy ubywa masy białego karła. Nie jest też jasne dla obserwatorów, czy i jaki wpływ na siłę wybuchu ma ewentualne pole magnetyczne białego karła.

Dzisiaj zainteresowanie gwiazdami nowymi dodatkowo stymuluje fakt, że są łatwo obserwowalne nawet w znacznych odległościach i mogą posłużyć do pomiaru odległości pobliskich galaktyk. Z doświadczenia okazuje się, że moc światła nowej w maksimum można znaleźć z małym błędem na podstawie czasu trwania wybuchu: im krótszy wybuch, tym większa moc. A skoro już wiemy, jaka jest moc i obserwujemy, jaki strumień energii dociera do nas na jednostkę powierzchni, to potrafimy obliczyć, jaka jest odległość nowej.

Kulą w płot, czyli i Ty zostaniesz Rutherfordem

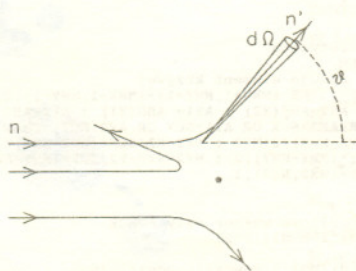
Paweł KRAWCZYK

Czy strzelając z pistoletu w płot możemy dowiedzieć się czegoś o konstrukcji płotu? Na pozór pytanie wydaje się pozbawione sensu, a odpowiedź na nie – negatywna. Istotnie, pocisk wybije w płocie dziurę uszkadzając go w mniejszym lub większym stopniu i poleci dalej nieomal tak, jakby płotu w ogóle nie było. Co zdarzy się jednak, jeśli płot uzbrojony zostanie stalowymi sztchetami? Strzelając wielokrotnie, nawet zupełnie na ślepo, trafimy kiedyś w taką sztchetę i wówczas pocisk, np. odbiwszy się od niej, poleci dalej w kierunku zupełnie różnym od początkowego. Wniosek stąd taki, że przy licznych strzałach możemy – badając odchylenia pocisków od kierunku początkowego – stwierdzić istnienie w płocie części składowych o rozmiarach znacznie mniejszych od rozmiarów samego płotu.

Na szczęście, badając płoty możemy posłużyć się innymi, „nieinwazyjnymi” (tak określają to lekarze) metodami. Inaczej jest jednak z obiektami mikroświata. Tu brutalne bombardowanie bywa jedynym dostępnym środkiem. Oczywiście, rolę pocisków pełnią cząstki elementarne, a i płot zostaje przez nie zastąpiony. Zasada pozwalająca na poznawanie struktury bombardowanych obiektów pozostaje jednak ta sama. Co więcej, jej zastosowanie, to, no, może nie gwarancja, ale dobra podstawa do zdobycia Nagrody Nobla. To właśnie w ten sposób sir Ernest Rutherford odkrył w 1911 r. jądro atomowe. Również laureaci Nagrody Nobla z 1990 r., Jerome Friedman, Henry Kendall i Richard Taylor wykryli punktowe składniki protonu (dziś znane jako kwarki) w przeprowadzonym w końcu lat 60. doświadczeniu, w którym protony były bombardowane wysokoenergetycznymi elektronami.

Chciałbym zaproponować Czytelnikom powtórzenie doświadczenia Rutherforda ... Co prawda, nie będziemy zbyt drobiazgowymi naśladowcami wielkiego uczonego i zamiast strzelać cząstkami α do atomów złota, cały proces przeprowadzimy za pomocą komputera. Ale żeby to zrobić, musimy przypomnieć sobie, co właściwie mierzył Rutherford w swoim doświadczeniu. Jak bowiem na fizyka przystało, nie zadowolił się on stwierdzeniem, że cząstki α przechodzące przez złotą folię zmieniają kierunek lotu, lecz ujął swoją obserwację w formę liczbowej zależności.

Wielkością mierzoną przez Rutherforda był tzw. różniczkowy przekrój czynny. Co to takiego? Wyobraźmy sobie, że na pewien obiekt (zwany centrum rozpraszania) kierujemy wiązkę cząstek (patrz rysunek).



Jeżeli masa centrum jest znacznie większa od masy każdej z cząstek, a tak właśnie było w doświadczeniu Rutherforda, to ruch centrum możemy zaniedbać. Wie o tym każdy, kto kiedykolwiek odbijał piłkę od ściany. Prześledźmy teraz przebieg badanego zjawiska. Gdy cząstki znajdują się daleko od centrum, „nie czują” jego obecności i poruszają się po liniach prostych o kierunku \vec{n} . Im bliżej centrum, tym oddziaływanie staje się silniejsze i w efekcie tory cząstek ulegają odchyleniu. Zwykle padających cząstek jest bardzo dużo i nie ma możliwości kontrolowania wzajemnego położenia cząstek i centrum (determinującego odchylenie). Po prostu przyjmujemy, że to położenie jest całkowicie przypadkowe. Ale nawet w tej sytuacji możemy stwierdzić, ile cząstek uległo odchyleniu tak, że ich tory znalazły się po rozproszeniu w elemencie kąta bryłowego $d\Omega$ wokół końcowego kierunku \vec{n}' . Liczba ta określa właśnie różniczkowy przekrój czynny $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ zgodnie ze wzorem

$$\left[\frac{d\sigma(\vec{n}, \vec{n}')}{d\Omega} \right] d\Omega = \frac{\text{liczba cząstek rozproszonych w } d\Omega}{\text{liczba cząstek padających na jednostkę powierzchni prostopadłej do wiązki}}$$

Zauważmy jeszcze, że jeśli oddziaływanie między centrum a cząstkami zależy tylko od ich odległości (a jest to sytuacja często spotykana w przyrodzie), to różniczkowy przekrój czynny, jako wielkość skalarna, może zależeć od zmiennych przestrzennych tylko i wyłącznie poprzez iloczyn $\vec{n} \cdot \vec{n}'$, a więc po prostu kąt θ między kierunkiem padania a kierunkiem rozproszenia. W tym przypadku zamiast mówić o kącie bryłowym $d\Omega$ wokół kierunku \vec{n}' możemy rozważać kąt bryłowy zawarty między dwoma współwierzchołkowymi stożkami o kątach rozwarcia θ i $\theta + d\theta$ (oczywiście, osie stożków muszą mieć kierunek \vec{n}). Taki kąt bryłowy daje się obliczyć i wynosi $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$.

Przekrój czynny jako funkcja kąta θ zależy, oczywiście, od tego, jaka jest postać oddziaływania między centrum a cząstkami i jest w zasadzie obliczalny. Dziś wiemy, że w przypadku doświadczenia Rutherforda oddziaływanie dane jest (z dobrym przybliżeniem) siłą coulombowskiego odpychania między cząstką α a jądrem złota

$$\vec{F} = \frac{k}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

(tutaj $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_\alpha q_{\text{Au}}$, a \vec{r} jest promieniem wodzącym poprowadzonym od jądra atomu złota). Można wykazać (pierwszy zrobił to sam Rutherford), że w tym przypadku

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{k}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}},$$

gdzie przez E oznaczyliśmy energię cząstek. A jaki jest wynik doświadczenia? Żeby go uzyskać, będziemy w naszym komputerowym eksperymencie śledzić ruch poszczególnych cząstek imitując przypadkowość ich rozkładu w wiązce przez losowanie początkowej odległości cząstki od prostej o kierunku \vec{n} i przechodzącej przez centrum (nawiasem mówiąc wielkość ta nosi fachową nazwę parametru zderzenia). Aby wyznaczyć ruch z drugiej zasady dynamiki ($m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$), posłużymy się prostym algorytmem wynikającym z takiej oto obserwacji:

Rozwińmy w szereg Taylora funkcję $\bar{r}(t \pm \Delta t)$. Dostaniemy

$$\bar{r}(t \pm \Delta t) = \bar{r}(t) \pm \Delta t \cdot \left. \frac{d\bar{r}}{dt} \right|_t + \frac{1}{2!} (\Delta t)^2 \left. \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \right|_t \pm \frac{1}{3!} (\Delta t)^3 \left. \frac{d^3\bar{r}}{dt^3} \right|_t + \dots,$$

skąd po dodaniu obu przypadków otrzymamy

$$(*) \quad \bar{r}(t + \Delta t) \approx 2\bar{r}(t) - \bar{r}(t - \Delta t) + \frac{1}{m} (\Delta t)^2 \cdot \ddot{\bar{r}}(t).$$

To już niemal wszystko, co potrzeba do symulacji doświadczenia Rutherforda. Dyskusję kilku dalszych zagadnień pomocnych w zrozumieniu działania zamieszczonego programu zainteresowany Czytelnik znajdzie w *Dodatku*. Wyjaśnienia wymaga jedynie sposób wizualizacji wyników. W programie prezentowane są one na ekranie w dwóch okienkach. W pierwszym kreślone są tory kolejnych cząstek, a w drugim pokazywany jest wykres ..., no właśnie, czego? Chciałoby się widzieć tu wykres przekroju czynnego w zależności od kąta rozpraszania θ . Z tym jednak jest pewien kłopot. Przecież prawdopodobieństwo rozproszenia cząstki pod kątem **dokładnie równym** θ jest zerowe! Trzeba więc raczej brać pod uwagę cząstki rozproszone w kierunkach znajdujących się w pewnym **skończonym** przedziale kątów. Dlatego program pyta się o liczbę takich przedziałów (i równo dzieli zakres kątów ($0^\circ, 180^\circ$)), a wykres przekroju czynnego ma postać słupków, których wysokość jest proporcjonalna do liczby cząstek rozproszonych w danym przedziale kątów. Wykres tego typu nosi nazwę histogramu.

Mam nadzieję, że możliwość wcielenia się w Ernesta Rutherforda dostarczy Czytelnikom przyjemnych wrażeń. Tym bardziej że program pozwala na przeprowadzenie „doświadczenia” także z modelem atomu, popularnym na przełomie wieków, w którym ładunek jądra rozłożony jest nie punktowo, lecz w całej objętości atomu. Takich możliwości sir Ernest nie miał! A jestem pewien, że Czytelnicy z łatwością zmodyfikują program tak, by uwzględnił on jeszcze inne modele atomu i inne oddziaływania z jądrem.

Dodatek

Wzór (*) można przepisać w nieco innej postaci, w której występują jedynie wielkości bezwymiarowe. W tym celu zauważymy, że jeśli E jest energią cząstki, to wielkość $l = \frac{h}{p}$ ma wymiar długości, a wielkość $\tilde{t} = \sqrt{\frac{ml^3}{k}}$ - wymiar czasu. Dzielać równanie (*) przez l i wprowadzając następujące oznaczenia:

$$\tau = t/\tilde{t}, \quad \bar{\rho} = \frac{1}{l} \bar{r},$$

$$\tau_n = n \cdot \Delta\tau, \quad \bar{\rho}_n = \bar{\rho}(\tau_n) \quad (n = 0, 1, 2 \dots),$$

możemy ostatecznie stwierdzić, że

$$(**) \quad \bar{\rho}_{n+1} = 2\bar{\rho}_n - \bar{\rho}_{n-1} + (\Delta\tau)^2 \cdot \frac{\bar{\rho}_n}{\bar{\rho}_n^3}.$$

Związek ten nadaje się już bezpośrednio do zastosowania w programie komputerowym. Jednak, by program ten działał poprawnie, musimy spełnić pewne dodatkowe warunki.

Program został napisany w wersji języka BASIC dla komputera IBM PC wyposażonego w kartę graficzną CGA.

```

10 REM
20 REM I TY ZOSTANIESZ RUTHERFORDEM...
30 REM (C) Pawel Krawczyk, 1991
40 REM
50 DEFINT I-M : KEY OFF : RANDOMIZE TIMER : LBRK=0 : NCL=0
60 CLS : SCREEN 0 : WIDTH 80
70 INPUT "Wybierz atom Rutherforda (1) lub Thomsona (0)"; ICHA
80 PRINT "Podaj liczbę podziałów dla kąta rozpraszania";
90 PRINT " (np. 18 lub 36)";
100 INPUT " "; NHIST
110 INPUT "Podaj minimalny kat rozproszenia (w stopniach)"; AO
120 IMI=INT(AO*NHIST/180)
130 DT=.5 : RO=20 : ASPC=4!/3! : BSCL=8 : PI=ATN(1)*4
140 DIM RON(2),RON1(2),RONX(2),FORCE(2),RPC(NHIST)
150 NXW1=3 : NYW1=80 : MXW1=80 : MYW1=170 : NYW1=199
160 NXW2=172 : NYW2=2 : MXW2=319 : MYW2=130
170 NXC1=(MXW1-NXW1)/2+NXW1 : NYC1=(MYW1-NYW1)/2+NYW1
180 SCY1=RO/ASPC*(MYW1-NYW1)/(MXW1-NXW1) : ROO=RO*RO
190 CLS : SCREEN 1 : COLOR 0,0
200 GOSUB 800
210 LOCATE 3,3 : PRINT "I TY ZOSTANIESZ"
220 LOCATE 4,3 : PRINT "RUTHERFORDEM..."
230 LOCATE 6,3
240 IF (ICHA=1) THEN PRINT "Atom Rutherforda" : GOTO 260
250 PRINT "Atom Thomsona"
260 LINE (NXW2,NYW2)-(MXW2,MYW2),3,B
270 LOCATE 16,23 : PRINT "0" : LOCATE 16,37 : PRINT "180"
280 NSTART=NXW2+5 : KWD=INT((MXW2-NXW2-7)/NHIST)
290 NEND=NSTART+KWD*NHIST : NBAR=MYW2-16
300 LINE (NSTART,NBAR)-(NEND,NBAR),2
310 LINE (NSTART,NBAR)-(NSTART,NBAR+4),2
320 LINE (NEND,NBAR)-(NEND,NBAR+4),2
330 NP=NSTART+(NEND-NSTART)/2 : LINE (NP,NBAR)-(NP,NBAR+4),2
340 LOCATE 16,30 : PRINT "90"
350 FOR I=1 TO NHIST-1
360 LINE (NSTART+I*KWD,NBAR)-(NSTART+I*KWD,NBAR+2),2
370 NEXT
380 NP=0 : DT2=DT*DT : IN=1 : NCL1=0 : IDIV=0 : LRTH=0
390 ON KEY(1) GOSUB 850 : KEY(1) ON
400 ON KEY(2) GOSUB 880 : KEY(2) ON
410 ON KEY(3) GOSUB 1050 : KEY(3) ON
420 LOCATE 20,24 : PRINT "F1 - konczy"
430 LOCATE 21,24 : PRINT "F2 - czysci okno"
440 LOCATE 22,24 : PRINT "F3 - krzywa"
450 LOCATE 23,29 : PRINT "teoretyczna"
460 WHILE 1
470 IF (NCL1=1) THEN NCL1=1 : NCL1=0
480 NP=NP+1 : IN=IN : X=RND : Y=RND : B=SQR(X*X+Y*Y)*BSCL*IN
490 LOCATE 9,3 : PRINT USING "Czastka nr ####";NP
500 RON(0)=-RO : RON(1)=B
510 RON1(0)=-RO+SQR(2)*DT : RON1(1)=B
520 RONX(0)=RON1(0) : RONX(1)=B
530 WHILE (RON1(0)^2+RON1(1)^2<=B*B+ROO+1)
540 NWX=NXW1 : NYW=NYW1 : MWX=MXW1
550 MWY=MYW1 : SCX=RO : SCY=SCY1
560 NXC=NXC1 : NYC=NYC1
570 X1=RON(0) : Y1=RON(1) : X2=RON1(0) : Y2=RON1(1)
580 GOSUB 1070 : GOSUB 1160
590 RON1(0)=2*RON1(0)-RON(0)+DT2*FORCE(0)
600 RON1(1)=2*RON1(1)-RON(1)+DT2*FORCE(1)
610 RON(0)=RONX(0) : RON(1)=RONX(1)
620 RONX(0)=RON1(0) : RONX(1)=RON1(1)
630 WEND
640 GOSUB 800
650 DIFY=RON1(0)-RON(0) : DIFX=(RON1(1)-RON(1))*IN
660 IF (DIFY=0) THEN TETA=PI/2*SBN(DIFY) ELSE TETA=ATN(DIFY/DIFX)
670 IF (TETA=0) THEN TETA=TETA+PI
680 NTET=INT(TETA*NHIST/PI) : RPC(NTET)=RPC(NTET)+1/2*IDIV
690 IF (LRTH=6) THEN GOSUB 910
700 IF (LRTH>1) THEN LRTH=LRTH-1
710 IF (NTET<IMI) THEN GOTO 750
720 IF (LRTH=1) THEN GOSUB 1310 : LRTH=0 : GOTO 750
730 IF (RPC(NTET)<NBAR-NYW2-4) THEN GOSUB 1250 : GOTO 750
740 IDIV=IDIV+1 : GOSUB 1310
750 IF (LBRK=1) THEN GOTO 770
760 WEND
770 SCREEN 0 : WIDTH 80 : KEY ON
780 END
790 REM
800 REM procedura zaznacza centrum rozpraszania
810 LINE (NXW1,NYW1)-(MXW1,MYW1),3,B
820 CIRCLE (NXC1,NYC1),1,2,1 : PSET (NXC1,NYC1),2
830 RETURN
840 REM
850 REM przerwanie programu
860 LBRK=1 : RETURN
870 REM
880 REM czyszczenie okienka 1
890 NCL1=1 : RETURN
900 REM
910 REM procedura dopasowuje do histogramu krzywa teoretyczna
920 PCT=RPC(NHIST/9)*SIN(5*PI/72)^3/COS(5*PI/72)
930 DEL=(1-1.5/NHIST)*PI/50
940 X1=1.5*PI/NHIST : MX1=INT(NSTART+X1/PI*(NEND-NSTART))
950 MY1=FCT/SIN(X1/2)^3*COS(X1/2)
960 FOR J=1 TO 49
970 X2=1.5*PI/NHIST+J*DEL : MY2=COS(X2/2)/SIN(X2/2)^3*FCT
980 MX2=INT(NSTART+X2/PI*(NEND-NSTART))
990 IF (MY1>NBAR-NYW2-4) THEN GOTO 1010
1000 LINE (MX1,NBAR-MY1)-(MX2,NBAR-MY2),2
1010 X1=X2 : MX1=MX2 : MY1=MY2
1020 NEXT
1030 RETURN
1040 REM
1050 REM krzywa teoretyczna
1060 LRTH=6 : RETURN
1070 REM procedura rysuje element krzywej
1080 IF (NCL=1) THEN LINE (NWX+1,NYW+1)-(MWX-1,MWY-1),0,BF : NCL=0
1090 AX1=ABS(X1) : AX2=ABS(X2) : AY1=ABS(Y1) : AY2=ABS(Y2)
1100 IF (AX1>SCX OR AX2>SCX OR AY1>SCY OR AY2>SCY) THEN RETURN
1110 NX1=X1/SCX*(MWX-NWX)/2+NXO : NX2=X2/SCX*(MWX-NWX)/2+NXO
1120 NY1=NYO-Y1/SCY*(MWY-NWY)/2 : NY2=NYO-Y2/SCY*(MWY-NWY)/2
1130 LINE (NX1,NY1)-(NX2,NY2),1
1140 RETURN
1150 REM
1160 REM procedura oblicza wektor sily FORCE
1170 ROO=SQR(ROO+2*RON1(1)^2)
1180 RO3=ROO^3
1190 FORCE(0)=RON1(0)/RO3 : FORCE(1)=RON1(1)/RO3
1200 IF (ICHA=1) THEN GOTO 1230

```

Po pierwsze, chcemy, by w chwili początkowej ($n = 0$) oddziaływanie z centrum było zaniedbywalnie małe.

Oznacza to, że energia potencjalna ($E_p = \frac{k}{r}$) musi być znacznie mniejsza niż energia kinetyczna, która tym samym powinna pokrywać się z energią całkowitą. Łatwo stąd wyliczyć, że

$$(\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_0)^2 = 2(\Delta\tau)^2, \quad \rho_0 \gg 1.$$

Dalsze ograniczenie wynika z żądania, by równanie (**) dobrze przybliżało rozwiązanie otrzymywane z ciągłej formy drugiej zasady dynamiki. W tym celu musimy zażądać, by wyraz proporcjonalny do $(\Delta\tau)^2$ w równaniu (**) był mały w porównaniu z dwoma innymi wyrazami. Ponieważ $\rho_n \leq 1$, sprowadza się to do warunku

$$\Delta\tau \ll 1.$$

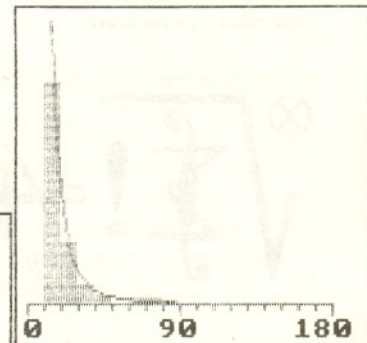
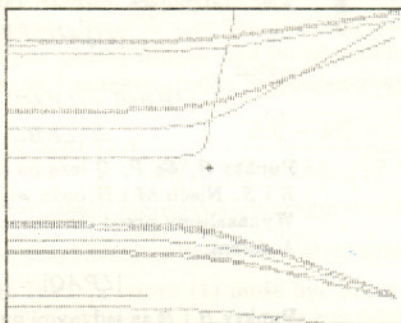
Na zakończenie jeszcze uwaga dotycząca sposobu losowania parametru zderzenia. Nie można bowiem zakładać, że wszystkie wartości parametru zderzenia są równie prawdopodobne. Istotnie, z założenia gęstość strumienia cząstek padających jest stała. Oznacza to, że jeśli wprowadzimy w płaszczyźnie prostopadłej układ współrzędnych kartezjańskich, to współrzędne te będą podlegały jednorodnemu rozkładowi prawdopodobieństwa. Dla parametru zderzenia dostaniemy $b = \sqrt{x^2 + y^2}$, gdzie liczby x i y mogą już być losowane za pomocą standardowego generatora (RND). Przy takiej procedurze nigdy nie uzyskamy jednak b większego od pewnego b_{max} . Ponieważ duże parametry zderzenia odpowiadają małym kątom rozproszenia, więc w zakresie małych kątów wyniki działania programu nie są wiarygodne. Należy się ich pozbyć rozważając jedynie kąty rozproszenia większe od pewnej wartości minimalnej θ_{min} . Przy wartościach wolnych parametrów przyjętych w programie wybór $\theta_{min} = 10^\circ \div 15^\circ$ daje poprawne rezultaty.

```

1210 IF (ROO>10) THEN GOTO 1230
1220 FORCE(0)=RON1(0)/1000 : FORCE(1)=RON1(1)/1000
1230 RETURN
1240 REM
1250 REM procedura aktualizuje histogram
1260 IF (NTET=0) THEN RETURN
1270 KHG=INT(NBAR-RPC(NTET))
1280 LINE (NSTART+NTET*KWD,KHG)-(NSTART+(NTET+1)*KWD-1,KHG),1
1290 RETURN
1300 REM
1310 REM procedura przerysowuje histogram
1320 IF (LRTH>0) THEN GOTO 1360
1330 FOR II=0 TO NHIST-1
1340   RPC(II)=RPC(II)/2
1350 NEXT
1360 LINE (NSTART,NYW2+3)-(NEND,NBAR-1),0,BF
1370 FOR II=IMI TO NHIST-1
1380   IF (INT(RPC(II))=0) THEN GOTO 1410
1390   KCHW=NSTART+II*KWD
1400   LINE (KCHW,INT(NBAR-RPC(II)))-(KCHW+KWD-1,NBAR-1),1,BF
1410 NEXT
1420 RETURN

```

I TY ZOSTANIESZ
RUTHERFORDEM...
Atom Rutherforda
Czastka nr 289



F1 - konczy
F2 - czysci okno
F3 - krzywa teoretyczna

Wynik działania programu - kopia ekranu.



Zadania Redaguje Michał WOJCIECHOWSKI

M 601. Znaleźć liczby całkowite nieujemne spełniające równanie

$$(5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n.$$

Rozwiązanie na str. 9

M 602. Przyjmijmy $f(x) = x^2 - x + 1$. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej $m > 1$ liczby $m, f(m), f(f(m)), \dots$ są parami względnie pierwsze.

Rozwiązanie na str. 9

M 603. Znaleźć liczby całkowite spełniające równanie

$$\underbrace{\sqrt{x + \sqrt{x + \dots + \sqrt{x}}}}_{1991 \text{ razy}} = y.$$

Rozwiązanie na str. 9

Redaguje Jarosław KULPA

F 308. Oszacować długość włókna żarówki 100 W (220 V). Temperatura włókna podczas pracy wynosi około 2800 K. Dane dotyczące wolframu: opór właściwy w temperaturze 0°C: $\rho = 4,9 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$, współczynnik temperaturowy rezystancji: $\alpha = 0,0048 \text{ K}^{-1}$, emisyjność wolframu stanowi 40% emisyjności ciała doskonale czarnego.

Rozwiązanie na str. 7

F 309. Maksymalna prędkość pojazdu przy bezwietrznej pogodzie wynosi $v_m = 100 \text{ km/h}$. Jadąc pod wiatr kierowca nie mógł rozwinąć większej prędkości niż $v = 90 \text{ km/h}$. Oszacować prędkość wiatru. Opory toczenia należy pominąć.

Rozwiązanie na str. 7

Szczegółowy regulamin Klubu 44 zamieściliśmy w *Delcie* 7/1990, a jego skrót – we wszystkich numerach, w których są zadania ligowe (tj., tradycyjnie, z wyjątkiem numerów 6 i 7).

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/1991

Przypominamy treść zadań:

215. Wyznaczyć wszystkie takie punkty P leżące wewnątrz kwadratu $ABCD$, że $|\angle PAB| + |\angle PBC| + |\angle PCD| + |\angle PDA| = 180^\circ$.

216. Udowodnić, że reszta z dzielenia liczby naturalnej n przez liczbę naturalną $k > 1$ równa się

$$\frac{k-1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\sin \frac{j}{k}(2n+1)\pi}{\sin \frac{j}{k}\pi}.$$

215. Przypuśćmy, że punkt P , nie należący do symetralnej żadnego boku kwadratu, spełnia podany warunek oraz że A jest wierzchołkiem kwadratu leżącym najbliżej punktu P . Niech Q będzie obrazem punktu P w symetrii osiowej względem symetralnej boków BC i DA . Mamy więc następujące równości kątów:

$$|\angle QAD| = |\angle PDA|, \quad |\angle QBC| = |\angle PCB| = 90^\circ - |\angle PCD|,$$

a stąd

$$\begin{aligned} |\angle PBQ| - |\angle PAQ| &= (|\angle PBC| - |\angle QBC|) - (90^\circ - |\angle PAB| - |\angle QAD|) = \\ &= |\angle PBC| - 90^\circ + |\angle PCD| - 90^\circ + |\angle PAB| + |\angle PDA| = 0^\circ. \end{aligned}$$

Punkty B, C, P, Q leżą na okręgu przecinającym boki AB i CD odpowiednio w punktach R i S . Niech M i N będą wierzchołkami prostokąta $PMNQ$ wpisanego w ten okrąg.

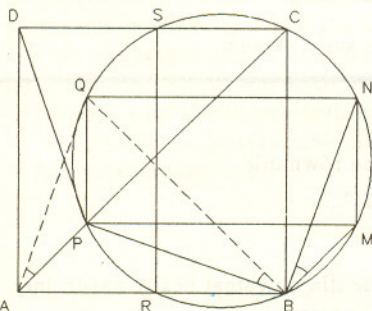
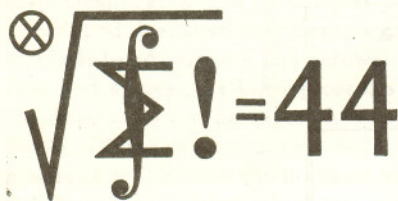
Wykazaliśmy przed chwilą, że kąty PAQ i PBQ są równe. Oznaczmy ich miarę przez φ .

A zatem

$$|\angle PAQ| = |\angle PBQ| = |\angle PRQ| = |\angle MBN| = |\angle MRN| = \varphi.$$

Punkty B i R są jedynymi punktami półprostej BA^{\leftarrow} , z których odcinek MN jest widoczny pod kątem φ . Stąd (i z faktu, że $PMNQ$ jest prostokątem o boku PM równoległym do AB) wynika, że trójkąty MBN i MRN są odpowiednio przystające do PAQ i PBQ , przy czym trójkąt MBN jest obrazem trójkąta PAQ w translacji o wektor \vec{AB} . Tak więc $|PM| = |AB|$. Innymi słowy, prostokąt $PMNQ$ powstaje przez obrót o 90° prostokąta $SRBC$. Wobec tego $|\angle PCB| = |\angle PNB| = 45^\circ$, skąd wniosek, że P leży na przekątnej AC . Odrzucając założenie, że P leży najbliżej wierzchołka A , dochodzimy do konkluzji, iż P jest punktem jednej z przekątnych.

Na odwrót, każdy punkt leżący na dowolnej przekątnej kwadratu $ABCD$, bądź też na symetralnej dowolnego boku (sytuacja odrzucona na wstępie rozważań), spełnia podany warunek. Zatem szukanym miejscem geometrycznym jest suma zawartych w kwadracie odcinków czterech osi symetrii kwadratu.



216. Przyjmijmy oznaczenie

$$f(k, i, j) = \frac{\sin \frac{j}{k}(2i+1)\pi}{\sin \frac{j}{k}\pi}$$

(k, i, j całkowite, j niepodzielne przez k).

Niech r będzie resztą z dzielenia n przez k . Zadanie sprowadza się do wykazania, że

$$(1) \quad \sum_{j=1}^{k-1} f(k, n, j) = k - 1 - 2r.$$

Zachodzą łatwe do sprawdzenia równości

$$f(k, n, j) = f(k, r, j),$$

$$f(k, 0, j) = 1, \quad f(k, k-1, j) = -1.$$

Ponadto, jeśli żadna z liczb j, i nie dzieli się przez k , to

$$(2) \quad f(k, i, j) - f(k, i-1, j) = f(k, j, i) - f(k, j-1, i)$$

(zarówno lewa, jak i prawa strona (2) równa się $2 \cos(2ij\pi/k)$).

Korzystając z powyższych związków, przekształcamy lewą stronę dowodzonej równości (1) jak następuje:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k-1} f(k, n, j) &= \sum_{j=1}^{k-1} f(k, r, j) = \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} (1 + \sum_{i=1}^r (f(k, i, j) - f(k, i-1, j))) = \\ &= k - 1 + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{k-1} (f(k, j, i) - f(k, j-1, i)) = \\ &= k - 1 + \sum_{i=1}^r (f(k, k-1, i) - f(k, 0, i)) = \\ &= k - 1 - 2r. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy prawą stronę (1). Dowód jest zakończony.

Przypominamy treść zadań:

113. Akceleratory cząstek elementarnych są – jak wiadomo – urządzeniami wielkimi i kosztownymi. Opisany niżej (nieopatentowany!) wynalazek pozwala nadawać elektronom wielką energię znacznie taniej i prościej. Uderzamy w kulę bilardową kierując ją w stronę spoczywającej kuli o dwa razy mniejszej masie, tak, aby zderzenie było centralne (kule po zderzeniu biegną wzdłuż tej samej prostej). Kulą uderzoną trafia z kolei w następną kulę jeszcze dwa razy lżejszą, itd., itd., ..., a na końcu znajduje się elektron. Ostatni stosunek mas będzie liczbą zawartą pomiędzy 1 a 2. Zakładając, że wszystkie zderzenia są centralne i doskonale sprężyste, oraz przyjmując masę kuli bilardowej 0,2 kg i jej prędkość początkową 1 m/s, oblicz numerycznie energię kinetyczną uzyskaną przez elektron (oczywiście, w ramach mechaniki relatywistycznej). Masa elektronu wynosi $9,11 \cdot 10^{-31}$ kg, prędkość światła $c = 2,9979 \cdot 10^8$ m/s.

114. W jednorodnym polu magnetycznym o indukcji wynoszącej początkowo 5 T i malejącej liniowo do zera w ciągu 0,4 s znajduje się prostopadła do pola pętla (obwód kołowy) o promieniu 10 cm, wykonana z przewodnika o oporze 0,1 Ω i wytrzymałości na rozerwanie 2 N. Czy pętla ulegnie rozerwaniu?

113. Stosując do pojedynczego zderzenia zasady zachowania pędu i energii kinetycznej otrzymujemy następujące równania:

$$p_1 = p'_1 + p_2,$$

$$\sqrt{p_1^2 + M_1^2} + M_2 = \sqrt{p_1'^2 + M_1^2} + \sqrt{p_2^2 + M_2^2},$$

gdzie dużą literą M oznaczyliśmy iloczyn mc , a p_1 i p'_1 są pędami pierwszej kuli przed i po zderzeniu, p_2 zaś jest pędem drugiej kuli po zderzeniu (przed zderzeniem kula ta spoczywa). Eliminując p'_1 i przekształcając znajdujemy wyrażenie na p_2

$$(1) \quad p_2 = p_1 \left[1 + \frac{M_2^2 - M_1^2}{M_2^2 + M_1^2 + 2M_2 \sqrt{p_1^2 + M_1^2}} \right].$$

W szczególności w przybliżeniu nierelatywistycznym dostaniemy stąd

$$p_2 = p_1 \frac{2M_2}{M_2 + M_1}, \text{ a w przybliżeniu ultrarelatywistycznym } p_2 = p_1 + \frac{M_2^2 - M_1^2}{2M_2}.$$

W ogólnym przypadku iteracja wzoru (1) może być przeprowadzona prawdopodobnie tylko numerycznie. Podstawiając $M_{pocz} = 0,2 \text{ kg} \cdot c = 5,9958 \cdot 10^7 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$, $M_{el} = m_{el} \cdot c = 2,73 \cdot 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ otrzymujemy tą metodą po 98 zderzeniach (z 97 kulami pośrednimi) końcową wartość pędu równą $8,180 \cdot 10^{-14} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$. Ponieważ elektron o takim pędzie jest ultrarelatywistyczny, więc energia kinetyczna wynosi $pc = 2,452 \cdot 10^{-5} \text{ J} = 1,531 \cdot 10^{14} \text{ eV}$, co znacznie przekracza wartość energii nawet w największych PROJEKTOWANYCH akceleratorach.

Uwaga: Ciąg kul o masach tworzących postęp geometryczny optymalizuje przekazywanie energii w przypadku, gdy zderzenia kul można uważać za nierelatywistyczne. Ogólnie nie jest to jednak prawda i znalezienie optymalnego ciągu mas stanowi nietrywialny problem.

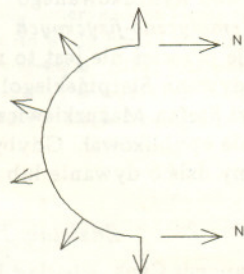
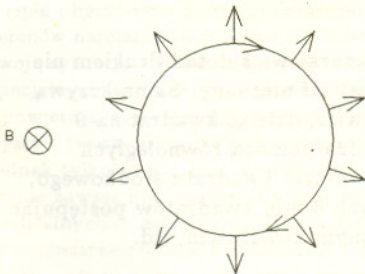
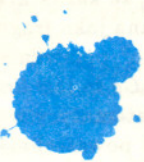
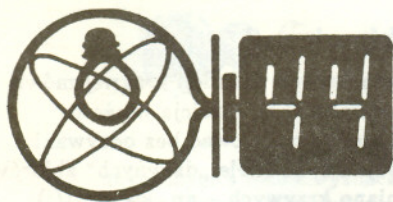
114. Początkowy strumień pola przez pętlę wynosi $\Phi = B\pi r^2 = 0,157 \text{ Wb}$, zatem siła elektromotoryczna indukcji jest równa $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = 0,393 \text{ V}$, a natężenie prądu $I = \frac{\mathcal{E}}{R} = 3,93 \text{ A}$. Zauważmy, że pole magnetyczne wytworzone przez ten prąd w środku pętli – przy założeniu, że przenikalność magnetyczna ośrodka jest bliska 1 – wynosi $B' = \frac{\mu_0 I}{2r} = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$. Zatem jest znacznie mniejsze od pola zewnętrznego i efekty z nim związane (tzn. samoindukcję pętli) można zaniedbać.

Zwrot prądu I – zgodnie z regułą Lenza – będzie taki, aby podtrzymać malejące pole, a więc dla pola skierowanego za płaszczyznę rysunku – będzie prawoskrętny.

Siły magnetyczne $\Delta \vec{F} = I \Delta \vec{l} \times \vec{B}$ działające na elementy pętli o długości Δl będą skierowane na zewnątrz i największe w chwili początkowej. Aby obliczyć naprężenie N pętli, rozpatrzmy siły działające na jedną jej połówkę. Sumując siły magnetyczne należy je zrzutować na oś poziomą i nietrudno wyliczyć, że $\Delta F_{pox} = I \Delta l_{pion} \cdot B$, czyli całkowita siła magnetyczna wynosi $F = I \cdot 2r \cdot B$. Siła ta jest równoważona przez dwie siły naprężenia N pętli (rysunek). Zatem

$$N = I \cdot r \cdot B = 1,96 \text{ N}.$$

Jest to wielkość nieznacznie mniejsza od podanej wytrzymałości 2 N, zatem pętla nie powinna ulec rozerwaniu. Ponieważ zaniedbane efekty samoindukcji powodują pewne zmniejszenie natężenia prądu płynącego przez pętlę, więc ich uwzględnienie nie może zmienić końcowej konkluzji.



Ogłoszenia

Zbiory dużej mocy oferuję.

Kantor, Kraków, ul. Aleksandra Lubomirskiego 53
(dawniej Andrzeja Frycza Modrzewskiego).

Nabywcom zbiorów największych gratis dobrze porządkujemy.

Przyspieszony kurs liczenia grup homotopii.
W lipcu 15% bonifikaty. Kawlory 3.

Jedyny w Polsce kowal stosujący podkowy Smale'a.
Kujemy również kosy.

Zakład im. K. Małolka, 28-133 Pacanów.

DO EPSILONA DELTĘ DOBIERAM.
FAX 48-12-33355557.

Tanio sprzedam sferę rogatą z rodowodem.
Oferty EPSILON 0001/0.

Atrakcyjne ideały w pierścieniach znajdujemy.

Specjalność zakładu: pierścienie nieprzemienne, ideały maksymalne.
Przekwalifikowana firma złotnicza Kummer i Syn,
Kraków, ul. Andrzeja Frycza Lubomirskiego 53.

DZIESIĘĆ MILIONÓW! Złoty nagrody
za wykrycie miejsca pobytu

sześcioro wzajemnie niepodobnych wypukłych wielościanów foremnych.
Zakopane, ul. Pilota Pirxa 21.

Adlunkle, nie daj się wyrotować!

Publikację prac w renomowanych czasopismach zagranicznych
załatwiam.

Druk w ciągu tygodnia. Oferty EPSILON 0002/0.

Zwarty, spójny, wypukły pozna miłą funkcję ciągłą.

Funkcjom rzeszywistym gwarantuję osiągnięcie kresów
i przysięcie wartości pośrednich.

Wyłącznie poważne oferty EPSILON 0003/0.

Poszukuję następujących numerów Deltę:

1976:5, 1979:2-4,7,9-12, 1980:8, 1981:4. Oferty: EPSILON

SKUP BUTELEK KLEINA. Tel. (0-12)336377w.593.

SNOPY, WIĄZKI I PODWIĄZKI!
SPRZEDAŻ HURTOWA I DETALICZNA.

DLA GEOMETRÓW Z RABATEM.

SERWIS GWARANCYJNY I POGWARANCYJNY.

OFERTY EPSILON 0004/0.

Ogłaszaj się w EPSILONIE! U nas najtaniej!

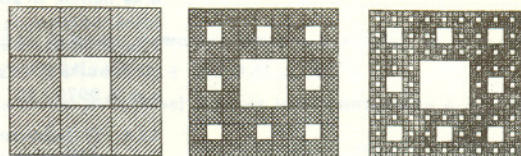
Do 1 X zniżka 50%!

Za ogłoszenie taką czcionką lub DUŻYMI LITERAMI
płacisz jedynie 150% ceny podstawowej.

Ogłoszenie w ramce tylko dwukrotnie drożej.

Za treść ogłoszeń redakcja nie ponosi odpowiedzialności.

Jedną z najczęściej przytaczanych definicji krzywej mówi, że jest to ciągły obraz odcinka $[0,1]$; intuicja wiąże to określenie z linią, którą można narysować bez odrywania ołówka od kartki. Okazuje się, że wiele „dziwnych” zbiorów zyskuje w ten sposób miano krzywych – np. kwadrat(!). Bardzo ważnym i ciekawym przykładem jest dywan Sierpińskiego.



Pojęcie to pojawia się w podręcznikach topologii, teorii wymiaru, teorii miary, a także w popularnych książkach i artykułach. O dywanie Sierpińskiego wspomina się sporo w związku z modnymi ostatnio fraktalami.

Pierwszy opis konstrukcji można znaleźć w jednej z prac Wacława Sierpińskiego opublikowanej we Francji w 1916 roku. Autor dowodzi szeregu bardzo istotnych i ciekawych własności opisywanego obiektu. Pokazuje np., że jest to krzywa, która w każdym punkcie rozgałęzia się i to nieskończenie wiele razy, a także, że każda krzywa może być w pewnym sensie realizowana jako fragment dywanu. Nazwa „dywan Sierpińskiego” pojawiła się nieco później. W książce A. Parchomienki *Co to jest linia?* możemy przeczytać, iż to rosyjscy matematycy wprowadzili tę nazwę, która obecnie używana jest powszechnie na całym świecie.

Przeglądając jednak dokładniej prace Sierpińskiego natknijemy się w jednej z nich na taki oto fragment:

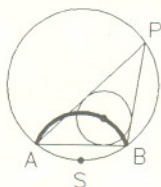
„Zauważmy, że już przed rokiem p. Stefan Mazurkiewicz znalazł przykład krzywej (cantorowskiej i jordanowskiej jednocześnie), której każdy punkt jest punktem rozgałęzienia rzędu nieskończonego (tj. w każdym punkcie p krzywej schodzi się nieskończenie wiele kontynuów, będących podmnożeniami tej krzywej, z których każde dwa posiadają tylko punkt p jako wspólny).

Przykładu swego p. Mazurkiewicz dotąd drukiem nie ogłosił, a dowód jego jest mi nieznan. Samą krzywą otrzymuje p. Mazurkiewicz, dzieląc kwadrat na 9 mniejszych kwadratów (za pomocą równoległych do boków) i usuwając wewnątrz kwadratu środkowego, a z każdym z pozostałych 8-miu kwadratów postępując tak samo jak z pierwotnym kwadratem, itd. in infinitum.”

Cytat ten pochodzi z artykułu *O krzywej, której każdy punkt jest punktem rozgałęzienia* wydrukowanego w 1916 roku w *Pracach matematyczno-fizycznych* (tom XXVII, str. 78-86). Ale przecież nie jest to nic innego jak opis konstrukcji dywanu Sierpińskiego! Zatem pomysłodawcą przykładu był Stefan Mazurkiewicz, który, niestety, rezultatów nie opublikował. Gdyby to zrobił, być może mówilibyśmy dziś o dywanie lub krzywej Mazurkiewiczza...

Zdzisław POGODA

Jeśli ze środka jednego z łuków wyznaczonych na danym okręgu przez cięciwę AB poprowadzimy łuk okręgu przechodzący przez końce tej cięciwy, to na nim będą się znajdowały wszystkie środki okręgów wpisanych w trójkąty APB , gdy P leży na drugim z łuków danego okręgu wyznaczonych przez cięciwę AB .



Ostatnie badania klimatologiczne pokazują istnienie korelacji między letnimi opadami deszczu w zachodniej Afryce i huraganami na Karaibach: liczba i siła huraganów zwiększa się wraz ze wzrostem opadów. Obserwacja ta może mieć niebagatelne znaczenie praktyczne. Niektóre pomiary sugerują, że klimat Afryki podlega cyklicznym zmianom między stanami o różnym poziomie opadów. Ponieważ susza w krajach Sahelu – tak dotkliwa w ubiegłym dziesięcioleciu – wydaje się być w odwrocie, więc klimat Afryki znajduje się prawdopodobnie we wstępującej fazie cyklu opadów. Można więc spodziewać się wzrostu liczby huraganów w Ameryce Północnej i Środkowej, a co za tym idzie, także i większych zniszczeń przez nie powodowanych.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \dots$$

Jak sprawdzić, czy to prawda? A jeśli nawet, to ile to jest?

Ciepłe i beznieźne zimy sprawiają wiele kłopotów właścicielom terenów narciarskich w Alpach. Często próbują oni poprawić swoją sytuację wytwarzając sztucznie śnieg za pomocą specjalnych armatek. W armatkach tych mieszanina wody i powietrza wytryskuje pod znacznym ciśnieniem z wąskiej dyszy i tworzy śnieg po zetknięciu z gruntem. Następuje to jednak tylko wtedy, gdy temperatura nie przewyższa -4°C , co nie zawsze ma miejsce. Tworzenie się śniegu w warunkach naturalnych może zachodzić już w pobliżu 0°C dzięki istnieniu w atmosferze centrów krystalizacji – mikroskopijnych drobin kurzu. Ale użycie jakichkolwiek cząstek stałych w armatkach śnieżnych dla przyspieszenia tworzenia śniegu nie wchodzi w rachubę ze względu na obciążenie dla środowiska naturalnego. W tej sytuacji amerykańska firma Snowmax proponuje domieszanie do wody białka wytwarzanego przez bakterie *Pseudomonas syringae*. Efekt jest ponoć zachęcający – śniegu tworzy się więcej i w wyższych temperaturach. Białko zaś w ciągu miesiąca ulega biodegradacji.

Każda liczba parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych – nikomu dotąd nie udało się dać przykładu, że jest inaczej. Udowodnić, że tak jest, też się nikomu nie udało.

Wszyscy wiedzą, że promieniowanie jest dla życia szkodliwe lub wręcz zabójcze. Jednakże mogło ono, a ściślej mówiąc – promieniowanie kosmiczne, odegrać zdecydowanie pozytywną rolę w procesie tworzenia się życia na najwcześniejszym etapie ewolucji chemicznej. Wskazują na to ostatnie wyniki badań japońskich naukowców z Narodowego Uniwersytetu w Yokohamie. Napromieniowywali oni wysokoenergetycznymi protonami mieszaninę tlenku węgla, azotu i wody. Po kilkugodzinnym napromieniowaniu w mieszaninie pojawiły się znaczne ilości rozmaitych aminokwasów, a także rzadszych od nich i trudniejszych do uzyskania w konwencjonalny sposób zasad purynowych (stanowiących podstawowe cegiełki, z których zbudowany jest DNA).

Czy umiesz podzielić kwadrat na same trójkąty ostrokątne? Najmniejsza liczba takich trójkątów składających się na kwadrat wynosi 8.

A czy umiesz podzielić kwadrat na nieparzystą liczbę trójkątów o równych polach? Jeśli nie umiesz, to dobrze – bo nie da się.

Około 15 mld lat temu w Wielkim Wybuchu zrodził się nasz Wszechświat. Początkowo był on niezmiernie gorącą „zupą” złożoną z materii i promieniowania, by powoli stygnąc wyewoluować do postaci, jaką obserwujemy dzisiaj. W ciągu tego długiego procesu temperatura żadnego punktu Wszechświata nie mogła spaść poniżej temperatury wszechobecnego kosmicznego promieniowania tła, która dziś wynosi 3 K. Dopiero fizycy niskich temperatur nauczyli się osiągać w swoich laboratoriach temperatury rzędu 10^{-9} K, a nawet 10^{-12} K. Zjawiska występujące tak blisko zera bezwzględnego są czymś nowym nie tylko dla fizyków – zachodzą one po raz pierwszy w całej historii Wszechświata!

Gra dla uczestników Okrągłego Stołu (ale tylko, gdy jest ich dwóch): kładą na nim na przemian monety. Przegrywa ten, który nie będzie miał gdzie położyć monety.

Oczywiście, zaczynając ma strategię wygrywającą: kładzie pierwszą monetę dokładnie na środku stołu, a następnie, po każdym położeniu monety przez przeciwnika, kładzie taką samą monetę symetrycznie względem środka do właśnie położonej monety przeciwnika. Jest to, co prawda, naśladownictwo, ale gwarantuje sukces.

14 grudnia 1990 r. Polska została przyjęta w poczet krajów członkowskich CERN (Europejskiego Ośrodka Badań Jądrowych). Siedzibą CERN jest Genewa, gdzie mieści się też wielkie laboratorium fizyki cząstek elementarnych. Laboratorium to jest wiodącym ośrodkiem światowym. W chwili obecnej najważniejszym narzędziem badawczym CERN jest akcelerator elektronów i pozytonów LEP (patrz *Delta 10/1989*), ale trwają już prace nad dalszym rozwojem laboratorium. Choć fizycy polscy uczestniczyli w pracach CERN już od lat sześćdziesiątych, a Polska miała status państwa-observatora, to pełne członkostwo jest faktem o doniosłym znaczeniu praktycznym, a także politycznym – Polska jest pierwszym krajem Europy Środkowo-Wschodniej przyjętym do CERN.

Jeśli weźmiesz $\frac{1}{2}n \cdot (n + 3)$ punktów na płaszczyźnie, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej, to zawsze będzie można poprowadzić przez nie krzywą opisaną równaniem stopnia n . Jednak tylko dla $n = 1$ i $n = 2$ będzie jedna taka krzywa. Dla większych n będzie ich wiele. Jednak, biorąc o jeden punkt więcej, na ogół w ogóle żadnej krzywej o równaniu stopnia n nie będziesz mógł przez te punkty poprowadzić. Dlaczego nie ma takiej liczby punktów, by było „akurat”?