

nr 53/80/s II-31/4533



KAŻDY MOŻE BYĆ KOLPORTEREM !!!

Delta tańsza o 25 %

Kupując 150 egzemplarzy *Delty* płacisz tylko 2.100,- zł za numer. Przesyłając pod adresem redakcji dowód wpłaty wielokrotności sumy 315 tysięcy złotych otrzymasz tyleż paczek po 150 egzemplarzy najbliższego numeru *Delty*.

Nasze konto:

PBK VIII OM Warszawa 370028-4170

Uniwersytet Warszawski, redakcja miesięcznika *Delta*

SPIS TREŚCI

NUMERU 4(203)

| | |
|---|--------|
| Matematyka i gra w szachy <i>Eugeniusz Szumakowicz</i> | str. 1 |
| Geometryczne sofizmaty <i>Jarosław Górnicki</i> | str. 1 |
| Patrz w niebo | str. 3 |
| Monopole magnetyczne <i>Jacek Ziabicki</i> | str. 4 |
| O pomiarze ciepła właściwego <i>Andrzej Twardowski</i> | str.10 |
| Kącik prac uczniowskich | str.12 |
| Brożek czy Brzozek? | str.13 |
| Klub 44 | str.14 |
| Epsilon | str.15 |
| Sofizmaty – jak jest naprawdę | str.16 |
| Zadania | str.17 |
| Drobiazgi | str.17 |

„Delta”

matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Edukacji Narodowej

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichoński
Roman Duda
Jan A. Gaj
Tomasz Hofmokl – wiceprzewodniczący
Tadeusz Jarzembowski
Marcin Kubiak
Andrzej Makowski
Andrzej Pelczar
Zbigniew Płochocki
Zdzisław Pogoda
Konrad Rudnicki
Zbigniew Semadeni
Grzegorz Sitarski
Józef I. Smak
Kazimierz Stępień
Mieczysław Subotowicz
Andrzej Szymacha
Aniela Wolska
Andrzej Woszczyk
Wojciech Żakowski – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

Krzysztof Biesaga
Krystyna Kordos – sekr. red.
Marek Kordos – red. nacj.
Paweł Krawczyk – z-ca red. nacj.
Tomasz Kwast
Stanisław Mrówczyński
Anna Rudnik
Jerzy Ryll
Joanna Udalska

Adres Redakcji:

Centrum Informatyczne UW
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa
tel. 20-03-81 wew. 841

Wydawca:

Uniwersytet Warszawski
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa

Nakład 18 000 egz.

Wydrukowano
w Zakładach Graficznych
w Warszawie, ul. Srebrna 16

Skład systemem T_PX
wykonała redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na III kwartał 1991 r. wynosi 7 500,- zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
 - oddziały RSW właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora
 - odbioru zamówionych egzemplarzy dokonuje prenumerator w wyznaczonych punktach sprzedaży lub w inny, uzgodniony sposób,
 - urzędy pocztowe i listonosze – od prenumeratorów z terenów wiejskich lub innych miejscowości, w których nie ma oddziałów RSW, a w miastach tylko od osób niepełnosprawnych – poczta zapewnia dostawę zamówionych egzemplarzy pod wskazany adres pod warunkiem uiszczenia dodatkowej opłaty za każdy doręczany egzemplarz – opłata wynosi 500,- zł od egzemplarza,
 - Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział W-wa 370044-1195-139-11 – tylko od prenumeratorów zlecających dostawę za granicę.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
 - na kraj – do 20 XI na I kwartał roku następnego
do 20 II na II kwartał
do 20 V na III kwartał
do 20 VIII na IV kwartał
 - na zagranicę – do 31 X na I kwartał
oraz do 1 dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarza zł 2 800,-

W następnym numerze:

Gwiazdy w pierścieniach

W 1912 roku szwajcarski matematyk E. Zermelo (znany przede wszystkim z aksjomatyki teorii mnogości) udowodnił, że w grze w szachy: albo białe mogą zawsze wygrać, lub co najmniej zremisować, albo mogą zawsze wygrać czarne. „Zawsze”, to znaczy jeśli nie popełnią błędu i stosować będą swoją strategię optymalną. Twierdzenie Zermeli („szachowe”) nie daje żadnej wskazówki, jak taką strategię (funkcję wyboru na węzłach drzewa gry pozycyjnej, jaką są m.in. szachy) można znaleźć; nie rozstrzyga również, która strona – białe czy czarne, ma taką strategię. Jest to przykład udowodnienia istnienia w sposób niekonstruktywny, chociaż (!) niekonstruktywność ta ma charakter pragmatyczny – teoretycznie bowiem, wobec skończonej liczby wariantów królewskiej gry (finityzm) tę strategię można by znaleźć za jakieś ... $10^{10^{10}}$ lat (wariantów tych jest więcej niż elektronów w obserwowanym Wszechświecie!).

Idea dowodu omawianego twierdzenia jest równie prosta co błyskotliwa – zwrócił na to uwagę polski matematyk, Jan Mycielski w latach 60. we Wrocławiu. Przypuśćmy na chwilę, idealizując, że każda partia szachów liczy 40 ruchów (80 półruchów białych i czarnych na przemian). Istnienie nieprzegrywającej strategii dla białych w tych chwilowo „uszytwnionych” szachach można zapisać w języku logiki kwantyfikatorów następująco:

$$(*) \quad \bigvee_{b_1} \bigwedge_{c_1} \bigvee_{b_2} \bigwedge_{c_2} \dots \bigvee_{b_{40}} \bigwedge_{c_{40}} (b_1 c_1, b_2 c_2, \dots, b_{40} c_{40}) \in P,$$

gdzie $b_i c_i$ oznacza i -ty półruch białych wraz z następującym po nim i -tym półruchem czarnych, P zaś oznacza podzbiór zbioru wszystkich ciągów 40-ruchowych, taki mianowicie, że każdy jego element prowadzi do konfiguracji na szachownicy, która to konfiguracja jest co najmniej remisowa dla białych.

W dziedzinach skończonych (jaką są, oczywiście, szachy) obowiązuje ponad wszelką wątpliwość logiczne prawo wyłączonego środka: p lub $\sim p$. Podstawmy pod p hipotezę, że białe mają strategię nieprzegrywającą – zapisaną wzorem kwantyfikatorowym (*), wtedy:

$$\begin{aligned} \sim p &\equiv \sim \left(\bigvee_{b_1} \bigwedge_{c_1} \bigvee_{b_2} \bigwedge_{c_2} \dots \bigvee_{b_{40}} \bigwedge_{c_{40}} (b_1 c_1, b_2 c_2, \dots, b_{40} c_{40}) \in P \right) \equiv \\ &\equiv \bigwedge_{b_1} \bigvee_{c_1} \bigwedge_{b_2} \bigvee_{c_2} \dots \bigwedge_{b_{40}} \bigvee_{c_{40}} (b_1 c_1, b_2 c_2, \dots, b_{40} c_{40}) \notin P \equiv \\ &\equiv \bigwedge_{b_1} \bigvee_{c_1} \bigwedge_{b_2} \bigvee_{c_2} \dots \bigwedge_{b_{40}} \bigvee_{c_{40}} (b_1 c_1, b_2 c_2, \dots, b_{40} c_{40}) \in N \setminus P, \end{aligned}$$

gdzie N oznacza wzmiankowany już zbiór wszystkich ciągów 40-ruchowych. Ostatnia z równoważnych formuł nie mówi nic innego jak to, że czarne mają strategię wygrywającą (jeśli konfiguracja końcowa nie jest nieprzegrywająca dla białych, to jest wygrywająca dla czarnych – jeszcze raz wyłączony środek). C.b.d.o.

Z punktu widzenia absolutnej ścisłości powyższe rozumowanie zawiera luki, ale są one usuwalne, choć kosztem sztucznych i żmudnych konwencji pomocniczych.

Jak już powiedziano, twierdzenie Zermeli nie wskazuje, czy białe, czy czarne są w lepszej sytuacji. Tymczasem wieloletnie doświadczenie i teoretyczne analizy szachistów sugerują, że to białe są w lepszej sytuacji rozpoczynając grę (przewaga tempa). Argumentacja

Geometryczne sofizmaty

Jarosław GÓRNICKI

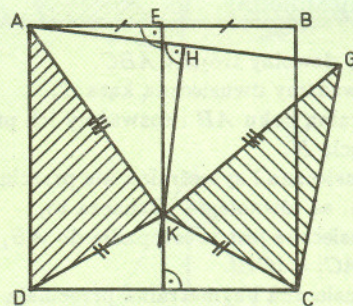
O Euklidesie nie wiemy prawie nic. Znany jest przede wszystkim jako autor *Elementów*. Na uwagę zasługuje również inna jego praca *Falszywe wnioski* (*Pseudaria*). Niestety, zaginęła ona i z ogólnikowych przekazów o jej treści można domniemywać, że zawierała różne fałszywe twierdzenia geometryczne i ich błędne dowody. Do ich zrozumienia wystarczy znajomość elementarnych faktów z geometrii. Oto kilka takich sofizmatów.

Sofizmat – rozumowanie na pozór poprawne, w którym popełniono błąd logiczny, trudny nieraz do wykrycia, nadający pozory prawdziwości fałszywemu twierdzeniu.

I. Kąt prosty jest równy kątowi rozwartemu.

Załóżmy, że figura $ABCD$ jest kwadratem. Z wierzchołka C odkładamy odcinek CG równy CB . Punkty A i G łączymy prostą. Odcinki AB i AG dzielimy na połowy odpowiednio punktami E i H . Ponieważ $AB \nparallel AG$, więc prostopadłe do AB i AG , wystawione w punktach E i H , także nie są równoległe. Przecinają się one w pewnym punkcie K . Rozpatrzmy przypadki:

a) Punkt K leży „ponad” prostą DC (rys. 1) wewnątrz czworokąta $AGCD$.

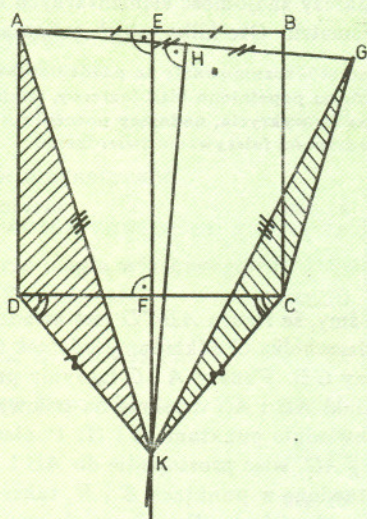


Rys. 1

Łączymy punkt K z wierzchołkami A , G , C , D . Wówczas $|KD| = |KC|$ i $|KA| = |KG|$. Zatem trójkąty KAD , KCG mają odpowiednie boki równe. Stąd $\angle KDA = \angle KCG$. Dodając kąty KDA i KDC oraz $\angle KCG$ i $\angle KCD$ ($\angle KDC = \angle KCD$) otrzymujemy równość $|\angle ADC| = |\angle GCD|$.

b) Punkt K leży na odcinku DC , tzn. dzieli on odcinek CD na połowy. Równość $|\angle ADC| = |\angle GCD|$ otrzymujemy z przystawiania trójkątów KDA i KCG .

c) Punkt K leży „pod” prostą DC (rys. 2). Łączymy punkt K z punktami D, A, G i C . Wówczas trójkąty KAH i KHG są przystające. Zatem $|KA| = |KG|$. Również trójkąty KDF i KCF są przystające. Zatem $|KD| = |KC|$ i $|\angle KDC| = |\angle KCD|$. Ponadto $|DA| = |CB| = |CG|$. W ten sposób odpowiednie boki trójkąta KDA są równe odpowiednim bokom trójkąta KCG . Oznacza to, że $|\angle KDA| = |\angle KCG|$. Odejmując teraz od tych kątów równe kąty KDC i KCD , otrzymujemy: $|\angle ADC| = |\angle GCD|$.



Rys. 2

Wyjaśnienia sofistematów na str.16

II. Każdy trójkąt jest równoramienny.

Weźmy dowolny trójkąt ABC . Poprowadźmy dwusieczną kąta C , symetralną boku AB i rozważmy ich punkt przecięcia N .

a) Dwusieczna i symetralna nie przecinają się, tzn. są równoległe. Oznacza to, że dwusieczna jest prostopadła do AB , czyli $|AC| = |CB|$.

b) Dwusieczna i symetralna przecinają się w punkcie N , będącym wewnętrznym punktem trójkąta ABC (rys. 3).

Opuszczamy z tego punktu prostopadłe NP i NQ odpowiednio do boków CB i CA ($|NP| = |NQ|$). Ponadto $|NA| = |NB|$. Trójkąty prostokątne NPB , NQA są przystające, więc $|\angle NQA| = |\angle NPB|$. Ponieważ $|\angle NAM| = |\angle NBA|$, więc $|\angle CAB| = |\angle CBA|$. Stąd $\triangle ABC$ jest równoramienny.

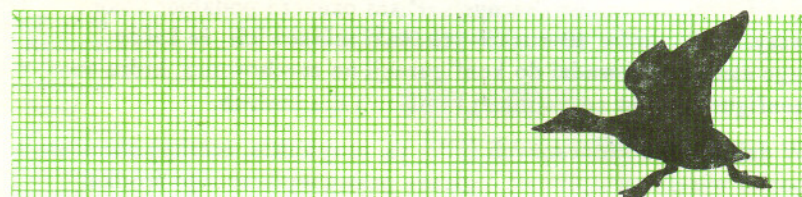
szachistów, w odróżnieniu od np. dowodu twierdzenia Zermeli, nie jest ścisła, nie daje pewności, lecz tylko psychologicznie ten fakt uprawdopodobnia. Jednakowoż w nauce i różnych dziedzinach działalności ludzkiej zdarzają się niespodzianki, paradoksy.

Intuicyjnie czujemy, że czasem korzystnie jest oddać chwilowo inicjatywę przeciwnikowi (może nie tylko w grach hazardowych!).

Uważam, że można by znaleźć racjonalny argument na rzecz czarnych w szachach rozwiązując pozytywnie następujące problemy:

1. Skomponować zadanie szachowe niekonwencjonalnego typu: układ figur i pionów białych i czarnych jest symetryczny względem linii poziomo połowiącej szachownicę; temat: białe zaczynają – czarne wygrywają!
2. Wynaleźć grę pozycyjną dwuosobową, o symetrycznej konfiguracji początkowej, w której rozpoczynający przegrywa przy optymalnej grze, tj. stosowaniu optymalnych strategii z obu stron. A może taką grę już znamy?

W książce J. Nievergelt, J. Craig Farrar, E. M. Reinhold, *Informatyczne rozwiązywanie zadań matematycznych*, WNT, Warszawa 1978, na str. 109 – 111 jest opisana gra o nazwie Hex, pozycyjna, dwuosobowa i symetryczna. Autorzy dowodzą, że białe (rozpoczynające grę) mają strategię wygrywającą (remisy w tej grze nie są możliwe). Ideą przewodnią ich dowodu jest założenie nie wprost, że czarne wygrywają, a następnie imitowanie strategii czarnych przez białe przy pierwszym ruchu „jałowym”. Mogłoby się na pierwszy rzut oka wydawać, że przypadek ten przemawia przeciwko czarnym w szachach. Jednak nietrudno zauważyć, że sposób powyższy nie przenosi się z Hexa na szachy, warcaby itp. (dlaczego?). Toteż problemy – wyzwanie (punkty 1 i 2) pozostają otwarte.



Rozwiązanie zadania F 305.

Ponieważ interesuje nas jedynie oszacowanie, więc możemy zamiast ołówka rozpatrywać wahadło matematyczne (o masie i długości równym masie m i długości l ołówka) ustawione w najwyższym położeniu. Jeśli oznaczymy kąt odchylenia wahadła (ołówka) od pionu przez θ , to równanie ruchu naszego układu przyjmie postać

$$ml\ddot{\theta} = mg \sin \theta.$$

Ograniczając się do małych odchyleń od pionu możemy przyjąć $\sin \theta \sim \theta$. Rozwiązanie równania ruchu jest więc funkcją wykładniczą $e^{\pm \omega t}$, gdzie $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Pionowe położenie ołówka jest położeniem równowagi nietrwałej i wystarczy dowolnie mały impuls, by rozpoczął się ruch, podczas którego θ narasta jak $e^{\omega t}$. W identyczny sposób zmieniać się będzie prędkość, a więc

dla energii kinetycznej otrzymamy

$$T = Ae^{2\omega t}.$$

W opisanych w zadaniu warunkach źródłem początkowego impulsu jest nieustanne bombardowanie ołówka przez cząsteczki powietrza. Ponieważ każda z nich ma energię kinetyczną rzędu kT , gdzie k oznacza stałą Boltzmann, a T – temperaturę, więc podobną energię uzyska praktycznie natychmiast i oówek. Stąd wynika, że możemy przyjąć

$$A = kT.$$

W chwili upadku energia kinetyczna wynosi mgl . A zatem czas, po jakim nastąpi upadek, dany jest przez

$$t \approx \frac{1}{2\omega} \ln \frac{mgl}{kT}.$$

W temperaturze pokojowej dla typowego ołówka ($ml \approx 100$ g-cm) dostaniemy $t \approx 2,1$ s. Porównanie tego przewidywania z wynikiem prostego doświadczenia pokazuje, że warunki zadania są praktycznie bardzo trudne do spełnienia.



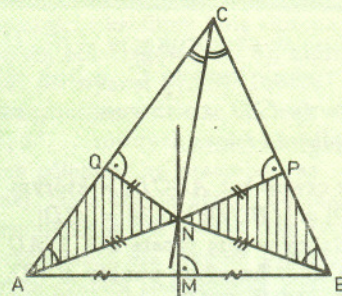
Patrz w niebo

Biały karzeł to ostatnia faza życia gwiazdy o masie zbliżonej do masy Słońca. Jest to silnie zgęszczone jądro gwiazdy, która będąc uprzednio czerwonym olbrzymem rozproszyła swoje warstwy zewnętrzne przekształcając się w taki właśnie gorący, mały, zwarty obiekt. Biały karzeł świeci już tylko dlatego, że stygnie. Jest to proces bardzo powolny. Dlatego bezpośrednio się go nie obserwuje, znane są natomiast białe karły o różnym wieku, a zatem znajdujące się na rozmaitych etapach stygnięcia.

Gwiazda neutronowa to też ostatnia faza życia, ale gwiazdy masywniejszej, rzędu kilku mas Słońca. Jest ona zapadniętym jądrem wcześniejszego czerwonego nadolbrzyma, przy czym zapadnięcie to i rozproszenie reszty gwiazdy odbywa się wybuchowo – jako eksplozja supernowej. Zapadnięte jądro ma możliwość zachowania dawnego pola magnetycznego i – oczywiście – dawnego momentu pędu gwiazdy, wobec tego gwiazda neutronowa z reguły będzie szybko wirować i obdarzona będzie bardzo silnym polem magnetycznym. Jej pole magnetyczne omiatając otaczający rozproszony gaz powoduje w nim błyski i przez to taka gwiazda neutronowa widoczna jest jako pulsar. Zrozumiałe, że tracąc w ten sposób energię pulsar musi zwalniać obroty (i to się bezpośrednio obserwuje) oraz można spodziewać się, że jego pole magnetyczne będzie zanikać, jak wynikało z pierwszych ocen teoretycznych, w czasie rzędu dziesiątek milionów lat.

Ale przyroda bywa bardziej skomplikowana. Otóż gwiazdy bardzo często występują parami, w szczególności znamy już układy podwójne składające się z pulsara i białego karła – takim jest np. obiekt o symbolu katalogowym PSR 0655 + 64 (położony w Żyrafie). Jego biały karzeł jest osobliwie chłodny, jego temperatura powierzchniowa nie przekracza 10 000 K. Do takiej temperatury powinien on stygnąć przez jakieś 2 miliardy lat, a w tym czasie pole magnetyczne towarzyszącego mu pulsara powinno dawno zaniknąć – jasne, że przyjmujemy tu najsensowniejsze założenie, iż składniki układu podwójnego są w tym samym wieku.

Zaszła więc konieczność stworzenia innego modelu pulsara, takiego, który mógłby długo zachowywać swoje pole magnetyczne – i chyba to się udało kilka lat temu. W nowym modelu inny jest czas zaniku pola skorupy pulsara, a inny – właśnie bardzo duży – jego jądra. Pozostaje wobec tego wytłumaczyć, dlaczego tak stary pulsar wiruje jeszcze tak szybko (jego pulsy powtarzają się co 195,6 ms). Odpowiedź tkwi w samym fakcie, że jest on składnikiem układu podwójnego. Mianowicie gwiazdy masywniejsze ewoluują szybciej, zatem pulsar powstał wcześniej niż biały karzeł. Pulsarowi musiał więc kiedyś towarzyszyć czerwony olbrzym. A wtedy mógł zachodzić przepływ materii z czerwonego olbrzyma do pulsara i przekaz w tym samym kierunku momentu pędu. Czerwony olbrzym mógł więc przez jakiś czas „napędzać” pulsara i w ten sposób uchronić go przed wcześniejszą śmiercią. Tzw. bratnia pomoc działa nawet w świecie gwiazd.



Rys. 3

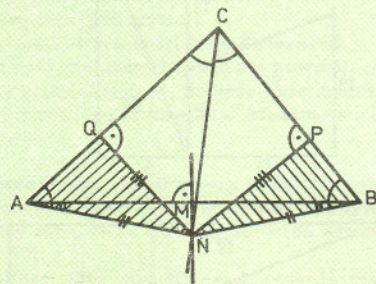
c) Dwusieczna i symetralna przecinają się w punkcie N leżącym na boku AB . Oznacza to, że dwusieczna i środkowa poprowadzone z wierzchołka C pokrywają się, czyli trójkąt ABC jest równoramienny.

Mamy bowiem

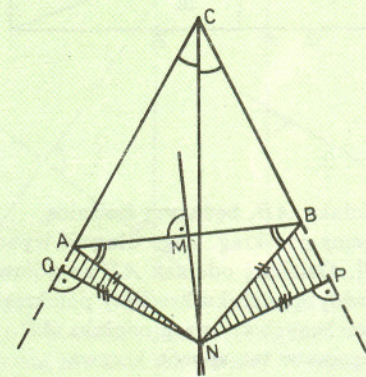
Twierdzenie. Jeżeli w trójkącie środkowa i dwusieczna poprowadzone z jednego wierzchołka pokrywają się, to trójkąt jest równoramienny.

Dowód. Niech w trójkącie ABC odcinek CM będzie jednocześnie środkową i dwusieczną kąta ACB . Opuszczamy z punktu M prostopadłe MP i MQ na boki AC i BC odpowiednio (punkty P i Q będą należały do odcinków AC i BC , a nie do ich przedłużeń – dlaczego?). Otrzymane trójkąty prostokątne AMP i MBQ są przystające, zatem $|\angle MAC| = |\angle MBC|$ i trójkąt ABC jest równoramienny.

d) Dwusieczna i symetralna przecinają się w punkcie N leżącym na zewnątrz trójkąta ABC (rys. 4, 5). W obu przypadkach $|\angle NAB| = |\angle ABN|$ i trójkąty NAQ , NBP są przystające, zatem $|\angle CAB| = |\angle CBA|$.



Rys. 4



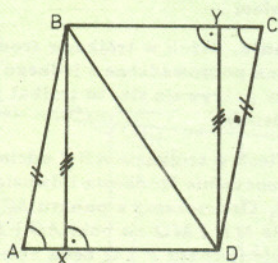
Rys. 5

Monopole magnetyczne

Jacek ZIABICKI

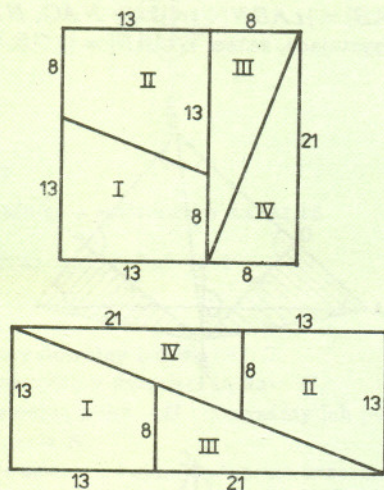
III. Jeżeli w czworokącie $ABCD$ kąt A jest równy kątowi C , a bok AB jest równy CD , to czworokąt jest równoległobokiem.

Weźmy czworokąt $ABCD$, w którym $|\angle BAD| = |\angle BCD|$ i $|AB| = |CD|$. Prowadzimy w nim proste $BX \perp AD$ i $DY \perp BC$. Łączymy punkty B i D . Trójkąty ABX , CYD są przystające, więc $|BX| = |DY|$ i $|AX| = |CY|$. Stąd trójkąty BXD , DYB są przystające, ich odpowiednie boki są równe, zatem $|XD| = |YB|$. W ten sposób $|AD| = |BC|$ i $|AB| = |CD|$, więc czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.



Rys. 6

IV. Kwadrat o boku 21 ma takie samo pole jak prostokąt o bokach 34 i 13.



Rys. 7

V. $\pi = 2$.

Na odcinku AB , będącym średnicą, opisujemy półokrąg. Jego długość wynosi $\frac{\pi}{2}|AB|$. Dzielimy odcinek AB na połowy i na każdym odcinku kreślimy półokręgi po przeciwnych stronach odcinka AB . Otrzymał w ten sposób krzywa przypominająca sinusoidę i ma długość $\frac{\pi}{2}|AB|$. Teraz dzielimy odcinek AB na cztery

Między elektrycznością i magnetyzmem jest wiele analogii. Wiadomo, że bieguny (tak elektryczne, jak i magnetyczne) różnoimienne przyciągają się, a jednoimienne – odpychają. Linie pola magnesu sztabkowego i pary ładunków elektrycznych (dipola elektrycznego) wyglądają bardzo podobnie. Jest jednak zasadnicza różnica: dipol elektryczny można rozdzielić na dwa ładunki, podczas gdy po przelamaniu magnesu otrzymamy dwa małe magnesy (dipole magnetyczne), a nie pojedyncze bieguny (monopole).

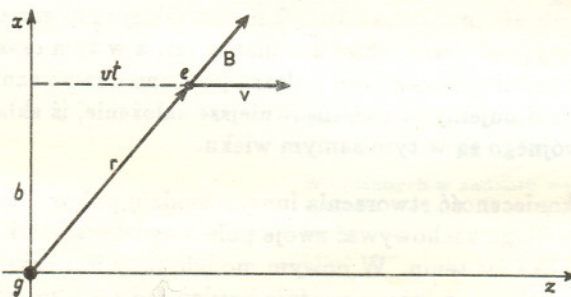
W miarę jak dzielimy magnes na coraz drobniejsze kawałki, sytuacja nie ulega zmianie. W rzeczywistości wszystkie znane fundamentalne składniki materii – atomy, jądra, cząstki elementarne – albo wytwarzają pole dipola (takie jak magnes), albo nie wytwarzają pola magnetycznego w ogóle. Pytanie, czy istnieją (mogą istnieć) w przyrodzie nie znane w tej chwili cząstki, obdarzone ładunkiem magnetycznym, pozostaje otwarte. Są pewne przesłanki teoretyczne wskazujące, że monopole powinny istnieć. Pierwszą z nich, najbardziej oczywistą, jest wspomniana symetria elektryczności i magnetyzmu – brak ładunków magnetycznych tę symetrię zaburza.

Naukowe badania nad monopolami rozpoczął w 1931 r. Paul Adrian Maurice Dirac, profesor matematyki na uniwersytecie w Cambridge, jeden z twórców mechaniki kwantowej. Dirac rozważał monopol jako podobną do elektronu cząstkę elementarną, obdarzoną zamiast elektrycznego – ładunkiem magnetycznym. Pole magnetyczne wokół takiej cząstki dane byłoby wzorem analogicznym jak dla elektrycznego ładunku punkowego

$$(1) \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 g \mathbf{r}}{4\pi r^3},$$

gdzie μ_0 – przenikalność magnetyczna próżni, a wielkość g nazywamy ładunkiem magnetycznym monopola. Wyobraźmy sobie teraz naładowaną cząstkę (np. elektron), która przelatuje w dużej odległości b od monopola tak, że możemy zaniedbać odchylenie spowodowane siłą Lorentza (rysunek)

$$(2) \quad \mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$



Elektron przelatujący w dużej odległości b od monopola.

Siła ta, zgodnie z równaniem ruchu Newtona $dp/dt = F$, spowoduje zmianę pędu cząstki. Jeśli pominiemy zmianę kierunku prędkości, to siła (i zmiana pędu) będzie miała tylko składową y (prostopadłą do rysunku). Obliczmy zmianę pędu w ciągu całego czasu ruchu cząstki

$$\begin{aligned} \Delta p_y &= \int_{-\infty}^{\infty} F_y dt = \int_{-\infty}^{\infty} evB_x dt = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} egvb \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(b^2 + (vt)^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2eg}{b} \end{aligned}$$

i związaną z tym zmianę składowej z momentu pędu

$$\Delta L_z = b\Delta p_y = \frac{\mu_0}{4\pi} 2eg.$$

Jeżeli przyjmiemy kwantową hipotezę, że składowa z momentu pędu może się zmienić tylko o wielokrotność \hbar , ($\hbar = h/(2\pi)$, h - stała Plancka), to otrzymamy związek

$$(3) \quad \mu_{0eg} = n\hbar, \quad n - \text{liczba całkowita};$$

musi on być spełniony dla każdej cząstki o ładunku e , która mogłaby się znaleźć w pobliżu monopola. Ponieważ zmiana momentu pędu ΔL_z jest niezależna od minimalnej odległości b cząstki od monopola, możemy wybrać b dowolnie duże - usprawiedliwia to nasze przybliżenie, a zarazem rozszerza zakres stosowalności (3) na wszystkie cząstki znajdujące się dowolnie daleko.

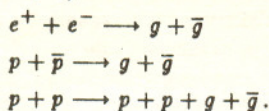
Wzór (3) nazywany jest warunkiem kwantyzacji Diraca, ponieważ wynika z niego skwantowanie ładunku elektrycznego i magnetycznego. Widać z niego, że jeżeli najmniejszy, występujący w przyrodzie, ładunek elektryczny oznaczymy przez e_0 , to najmniejszym ładunkiem magnetycznym jest $g_0 = \hbar/(\mu_0 e_0)$ (odpowiada to $n = 1$). Wszystkie możliwe ładunki magnetyczne są wielokrotnościami g_0 (dla wyższych wartości n). Z kolei wszystkie ładunki elektryczne są wielokrotnościami $\hbar/(\mu_0 g_0)$, czyli wielokrotnościami e_0 .

Teoria Diraca monopoli magnetycznych jest niekompletna. Monopol pojawia się w tej teorii dość sztucznie: istnienie monopoli spełniających (3) nie jest sprzeczne z resztą elektrodynamiki, ale poza estetycznym argumentem symetrii elektryczności i magnetyzmu i bardzo atrakcyjnym wytłumaczeniem dyskretnej natury ładunku elektrycznego, nie ma żadnych powodów dla istnienia monopoli. Elektrodynamika ich nie potrzebuje. W roku 1974 't Hooft i Polyakov na gruncie teorii Yanga-Millsa podali sposób konstrukcji monopola magnetycznego, który z daleka wygląda jak monopol Diraca. O ile ten ostatni traktowany był jak „czarna skrzynka” - badano tylko pole na zewnątrz nie interesując się tym, co jest w środku - budowa wewnętrzna monopoli 't Hoofta-Polyakowa jest znana i wynika z konstrukcji. Takie monopole muszą powstawać na gruncie całego szeregu teorii cząstek elementarnych (są to tzw. teorie Wielkiej Unifikacji), które, jak się uważa, mogą opisywać fizyczną rzeczywistość.

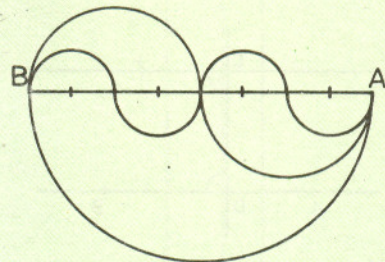
Teorie Yanga-Millsa to zbudowane na wzór elektrodynamiki teorie pola. Główne różnice: foton (nośnik oddziaływań elektromagnetycznych) jest jeden i nie niesie ładunku, podczas gdy w teoriach Yanga-Millsa jest kilka naładowanych nośników oddziaływania. Przykładami teorii Yanga-Millsa mogą być: teoria Weinberga-Salama oddziaływań elektroslabych oraz chromodynamika kwantowa (QCD), czyli teoria oddziaływań silnych. Po sukcesie teorii Weinberga-Salama, która unifikuje (tzn. opisuje w ramach jednej teorii Yanga-Millsa) oddziaływania elektromagnetyczne i słabe, zaczęły powstawać teorie Wielkiej Unifikacji, unifikujące oddziaływania: elektromagnetyczne, słabe i silne.

Jak to pogodzić z faktem, że nikt jeszcze nie zaobserwował monopola? Oddziaływanie monopoli magnetycznych z materią (przede wszystkim z momentami magnetycznymi elektronów, protonów i jąder) jest dobrze zbadane. Wiadomo, że prowadziłyby ono do deformacji i rozszczepienia jąder, wzbudzenia i jonizacji atomów, powstawałyby „atomy” i „cząsteczki” monopolowe. Oddziaływanie to jest na tyle silne, że możliwe było skonstruowanie detektorów wykrywających pojedyncze monopole. Nie ma więc obawy, że nieświadomie żyjemy w morzu monopoli magnetycznych.

Początkowo próbowano wytworzyć monopole w akceleratorach - w podobny sposób odkryto większość znanych obecnie cząstek elementarnych. Próbowano np. przeprowadzić reakcje (g oznacza monopol magnetyczny, \bar{g} - antymonopol):



równe części i kreślimy linię złożoną z czterech półokręgów (rys. 8), której długość też wynosi $\frac{\pi}{2}|AB|$. Proces ten kontynuujemy dzieląc odcinek AB na $2^3, 2^4, \dots$ równych części i kreśląc na nich półokręgi na przemian raz z jednej, raz z drugiej strony odcinka AB . Otrzymujemy w ten sposób ciąg krzywych, z których każda ma długość $\frac{\pi}{2}|AB|$, i których granicą jest odcinek AB . Zatem $\frac{\pi}{2}|AB| = |AB|$ (długość półokręgu \widehat{AB} równa jest jego średnicy), skąd $\pi = 2$.

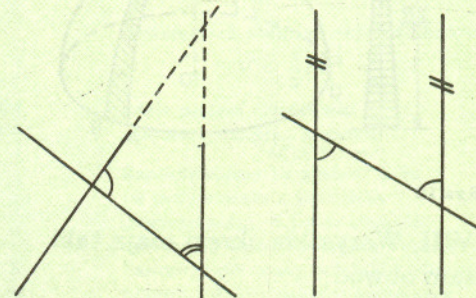


Rys.8

VI. Piąty aksjomat Euklidesa o równoległych można udowodnić za pomocą pozostałych aksjomatów.

Piąty aksjomat Euklidesa: jeżeli prosta, przecinająca dwie proste, tworzy kąt wewnętrzny jednostronny o sumie mniejszej od dwóch [kątów] prostych, to te dwie proste, przedłużone nieograniczenie, spotkają się z tej strony, gdzie suma jest mniejsza od dwóch [kątów] prostych (rys. 9). 28 początkowych twierdzeń *Elementów* (Księga I) ma uzasadnienia nie powołujące się na piąty aksjomat, dopiero twierdzenie 29 wymaga jego stosowania. Możemy więc wykorzystać

Twierdzenie. Jeżeli prosta padająca na dwie proste czyni kąty naprzemianległe równymi między sobą, to te dwie proste będą równoległe (rys. 10). (Euklides, *Elementy*, Księga I, twierdzenie 27)

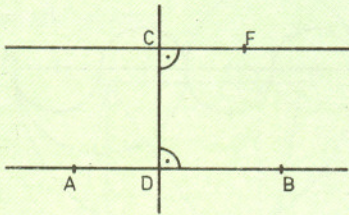


Rys.9

Rys.10

Niech AB będzie daną prostą, a C punktem nie leżącym na niej. Wykażemy, że przez punkt C możemy poprowadzić jedną prostą równoległą do prostej AB .

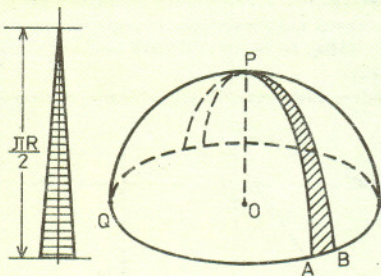
W tym celu opuszczamy z punktu C prostą prostopadłą na prostą AB , następnie prowadzimy prostą CF prostopadłą do CD . Prosta ta jest równoległa do prostej AB na podstawie „Twierdzenia o równoległości prostych przy równości odpowiednich kątów”. Wiedząc, że z punktu na prostej można opisać dokładnie jedną prostą prostopadłą, oraz że z punktu leżącego na prostej można wyprowadzić dokładnie jedną prostą prostopadłą do tej prostej, widzimy, że prosta CE jest wyznaczona jednoznacznie.



Rys.11

VII. Powierzchnia sfery o promieniu R jest równa $\pi^2 \cdot R^2$.

Rozpatrzmy półsferę o środku O i promieniu $|OP| = R$. Okrąg Q (rys. 12) dzielimy na dużą liczbę (!) n równych części i punkty podziału łączymy łukami kół wielkich z punktem P . Półsfera rozpada się na n trójkątów sferycznych o powierzchni $\frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{n} \cdot \frac{\pi \cdot R}{2} = \frac{1}{2n} \cdot \pi^2 \cdot R^2$. Zatem pole n trójkątów wynosi $\frac{1}{2} \cdot \pi^2 \cdot R^2$, a pole sfery $\pi^2 R^2$.



Rys.12

VIII. Wszystkie okręgi mają taki sam obwód.

Rozpatrzmy dwa współśrodkowe okręgi o różnych promieniach r i R , gdzie $r < R$. Do okręgów tych w punktach N i M (N, M leżą na jednej półprostej) prowadzimy styczne NN_1 i MM_1 .

Żeby takie reakcje mogły zajść, musimy dysponować energią dwukrotnie większą niż energia spoczynkowa ($E = mc^2$) powstającego monopola. Z teorii Diraca nie wynika, jaką masą taki obiekt ma być obdarzony. Dirac założył, że klasyczny promień monopola ma być równy klasycznemu promieniowi elektronu i stąd otrzymał oszacowanie $m_g \approx 2,4$ GeV (dla porównania, masa protonu $m_p = 0,938$ GeV). Największe działające obecnie akceleratory mogą przyspieszać cząstki do energii rzędu 1000 GeV, a więc wytworzenie monopola w akceleratorze byłoby realne. Niczego takiego nie zarejestrowano, mimo że dotąd prowadzone są próby na kolejnych, coraz większych akceleratorach. Wiadomo już, że nie ma monopoli o masie mniejszej niż 150 GeV.

Korzystając z równoważności masy i energii, $E = mc^2$, masę można mierzyć w jednostkach energetycznych, np. w dżulach, elektronowoltach lub gigaelektronowoltach. Poprawnie należałoby napisać $m_g c^2 \approx 2,4$ GeV, ale fizycy cząstek elementarnych dość powszechnie używają układu jednostek, w którym $c = 1$.

Monopol powstały zgodnie z najprostszą teorią Wielkiej Unifikacji miałby masę rzędu 10^{16} GeV = 0,02 μg , inne teorie dają inne wartości, w granicach $10^{10} - 10^{19}$ GeV. Jest to olbrzymia energia, porównywalna z energią kinetyczną sportowego samolotu. Takiej energii na cząstkę nie ma i nie będzie miał żaden akcelerator. Tak masywne cząstki mogły powstać jedynie we wczesnym Wszechświecie, zaraz po Wielkim Wybuchu.

Eksperymenty laboratoryjne zaprojektowane do szukania monopoli (tak lekkich, jak i ciężkich) w promieniowaniu kosmicznym, atmosferze, materiałach ferromagnetycznych, skałach księżycowych i meteorytach, prowadzone przez wiele grup badawczych przez wiele lat, z zastosowaniem różnych detektorów działających na różnych zasadach, jako jedyną odpowiedź przyniosły górne ograniczenia na strumień \mathcal{F} monopoli przechodzących przez laboratorium: od 10^{-7} do 10^{-16} $\text{s}^{-1}\text{sr}^{-1}\text{m}^{-2}$. Sensacją wzbudził odnotowany 14 lutego 1982 r. na Uniwersytecie Stanforda w USA pojedynczy impuls odpowiadający przejściu pojedynczego ładunku Diraca. Wyniku tego nie udało się nikomu powtórzyć (nawet tej samej grupie, na tym samym i na nowych, czulszych detektorach) i dlatego nikt nie uwierzył, że był to prawdziwy monopol. Równocześnie nikt nie potrafił obalić tego eksperymentu, tzn. powiedzieć, co spowodowało uruchomienie detektora, mimo że uwzględniono wiele efektów, które mogłyby generować fałszywe impulsy. (Znacznie łatwiej o taki fałszywy impuls w detektorze jonizacyjnym, ale tu detektorem była nadprzewodząca pętla z drutu. Ograniczony nią strumień magnetyczny zmienia się przy przejściu przez pętlę monopola o $\mu_0 g$, indukując prąd elektryczny. Całość zamknięto w nadprzewodzącej osłonie, aby odizolować detektor od pól zewnętrznych.)

Silniejsze ograniczenia na strumień monopoli stawia astrofizyka. Wiadomo z teorii, że ładunek magnetyczny w polu magnetycznym jest przyspieszany (tak jak elektryczny – w elektrycznym) siłą $\mathbf{F} = g\mathbf{B}$. Na przykład na monopol o minimalnym ładunku w polu $B = 1$ T działałaby siła $3,29 \times 10^{-9}$ N. Może się wydawać, że to niewiele, ale dla porównania: na elektron w polu elektrycznym $E = 3 \times 10^8$ V/m (o takiej samej gęstości energii jak dla $B = 1$ T) działa siła $4,8 \times 10^{-11}$ N. Można to podsumować, że o ile elementarny ładunek elektryczny jest mały, o tyle magnetyczny – duży (68,54 raza większy). Obserwacje (m.in. polaryzacji światła gwiazd) wskazują na obecność w Galaktyce słabego ($B = 3 \times 10^{-10}$ T) pola magnetycznego. Pole to przyspieszając monopole przekazywałoby im swoją energię. O ile nie istniałby mechanizm wytwarzający pole i dostarczający mu energii, pole to wkrótce zostałoby stłumione. (Z tego właśnie powodu nie ma w Kosmosie pola elektrycznego: zgasiłyby je swobodne elektrony i jony.) Astrofizycy potrafią oszacować, ile energii galaktycznemu polu może dostarczyć ruch gazu międzygwiazdowego. Stąd niezależnie od doświadczeń laboratoryjnych ograniczenie: $\mathcal{F} < 10^{-12}$ $\text{s}^{-1}\text{sr}^{-1}\text{m}^{-2}$.

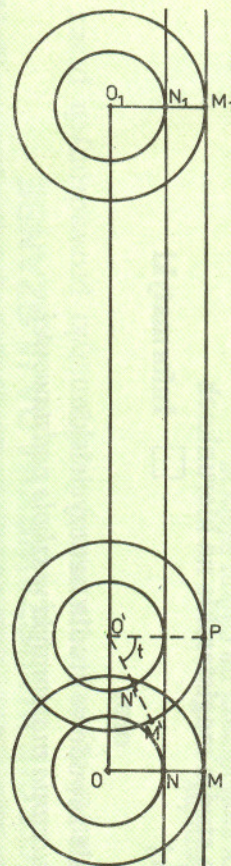
Teorie Wielkiej Unifikacji przewidują rozpad protonu. Średni czas życia byłby na tyle długi ($t > 10^{32}$ lat; dla porównania: wiek Wszechświata = 10^{10} lat, średnie czasy życia większości cząstek elementarnych leżą w przedziale $10^{-24} - 10^{-8}$ s), że rozpad ten mógł być do tej pory nie zaobserwowany. Reakcja taka byłaby silnie egzotermiczna (80% masy protonu byłoby wypromieniowane w postaci kwantu γ). W 1982 r. Callan i Rubakov obliczyli, że monopole z Wielkiej Unifikacji bardzo silnie katalizują ten rozpad: zderzenie protonu z monopolem prawie zawsze kończyłoby się rozpadem. Stąd najostrzejsze w tej chwili ograniczenie na strumień monopoli magnetycznych: monopole uwięzione (grawitacyjnie) w gwiazdach (zwłaszcza gęstych i starych, jak gwiazdy neutronowe i białe karły) byłyby źródłem dodatkowego promieniowania. Obserwowane promieniowanie ogranicza strumień do $\mathcal{F} < 10^{-28} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1} \text{ m}^{-2}$.

Teorie Wielkiej Unifikacji przewidują powstawanie monopoli. Kłopot w tym, że przewidują ich zbyt dużo: od 10^{-1} do $10^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1} \text{ m}^{-2}$. Gdyby tak było, prawie cała masa Wszechświata byłaby skupiona w monopolach magnetycznych, Wszechświat byłby zamknięty i już po 30 tysiącach lat wróciłby do pierwotnej osobliwości (ze względu na zachowanie ładunku magnetycznego minimalnie naładowane monopole są cząstkami stabilnymi – nie mogły więc się rozpaść). Obserwowane tempo ekspansji Wszechświata i tzw. parametr hamowania dopuszczają maksymalnie $\mathcal{F} = 10^{-11} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1} \text{ m}^{-2}$. Alan Guth zasugerował, że Wszechświat na wczesnym etapie swej ewolucji, ale już po utworzeniu monopoli, mógł przejść fazę gwałtownej ekspansji, zwaną inflacją (od ang. inflation – rozdmuchiwanie). W tym czasie Wszechświat rozszerzyłby się co najmniej o czynnik 10^{26} i dzięki temu monopole zostałyby „rozcieńczone”: można by się spodziewać nie więcej niż jednego monopola na cały obserwowany Wszechświat. Jest to w jak najlepszej zgodności z negatywnymi wynikami doświadczeń (złośliwi twierdzą, że grupa stanfordzka zaobserwowała właśnie ten jeden monopol). Ponieważ model inflacyjny Gutha rozwiązuje równocześnie parę innych problemów kosmologii, jest on traktowany przez fizyków i astrofizyków jak najbardziej poważnie. Obaliliby go, oczywiście, zaobserwowanie w sposób nie budzący wątpliwości choćby jednego monopola.

To, oczywiście, niemożliwe. Odosobniony, nie potwierdzony przypadek zawsze budzi wątpliwości.

Czy monopole zostaną kiedykolwiek zaobserwowane – tego, oczywiście, nikt nie wie. Nie chodzi tu jednak tylko o możliwość przełamania magnesu. Istnienie lub nieistnienie monopoli magnetycznych jest ściśle związane z najbardziej podstawowymi teoriami fizycznymi i jakkolwiek rozstrzygający wynik eksperymentalny może zadecydować o ich przyjęciu lub odrzuceniu.

Toczmy bez poślizgu okrąg o promieniu R po stycznej MM_1 . Gdy punkt M przejdzie w położenie M' , to N przejdzie w N' , gdyż oba okręgi obróca się o ten sam kąt t . Po wykonaniu pełnego obrotu punkt M przejdzie w M_1 , zaś punkt N w N_1 (rys. 13).



Rys. 13

Wynika stąd, że $|MM_1| = |NN_1|$, tj. okręgi mają jednakowe obwody. (Powyższy sofizm przypisywany jest grekiemu filozofowi Arystotelesowi.)



Rozwiązanie zadania F 304. Wbrew pozorom zadanie nie jest formą żartu: hel w cysternie jako silnie sprężony zajmuje znacznie mniejszą objętość niż w balonie. Tym samym może się zdarzyć, że choć wypełniona cysterna nie unosi się, to jednak balon napełniony pochodzącym z niej helem będzie w stanie unieść pustą już cysternę. A teraz przystąpmy do rozwiązywania.

Niech M oznacza maksymalną masę, jaką może unieść balon. Rozważmy cysternę o takiej właśnie masie.

Oczywiste jest, że cysterna powinna mieć taki kształt, by pomieścić możliwie największą objętość helu. Jeśli założymy, że ściany cysterny mają stałą grubość d , to warunek ten spełnia powłoka sferyczna. Oznaczając jej promień przez R otrzymamy

$$M = 4\pi R^2 d \cdot \rho_s,$$

gdzie ρ_s jest gęstością stali. Niech ciśnienie helu w cysternie wynosi p . Rozpatrując jej równikowy przekrój łatwo znajdziemy napięcie ścian:

$$S = \frac{1/2(4\pi R^2 \cdot p)}{2\pi R d} = \frac{Rp}{d}.$$

Zakładając, że temperatura helu przed i po napełnieniu jest taka sama (i równa temperaturze otoczenia),

możemy też obliczyć objętość balonu

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{p}{p_0},$$

gdzie p_0 jest ciśnieniem atmosferycznym. A zatem $M \approx V \cdot \rho$. Zaniedbaliśmy tu gęstość helu (w porównaniu z gęstością powietrza ρ_p), a także objętość cysterny (w porównaniu z objętością balonu) oraz masę powłoki i olinowania balonu. W ten sposób dostajemy ostatecznie

$$S = \frac{3}{2} p_0 \cdot \frac{\rho_s}{\rho_p} \approx 1,5 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$$

Stal nie jest w stanie wytrzymać takich napięć. Odpowiedź na pytanie postawione w zadaniu brzmi: nie.

Uniwersytet Warszawski Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki ZAPRASZA

na pięcioletnie studia magisterskie na kierunkach

Matematyki czystej i stosowanej

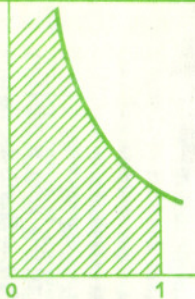
Informatyki

oraz

Trzyletnie zawodowe studia nauczycielskie
uprawniające do nauczania matematyki w szkole podstawowej.

MATEMATYKA JEST UŻYTECZNA, UNIWERSALNA I ... CIEKAWA

$\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ opisuje pole nieskończonej figury zawartej między dodatnimi półosiąmi układu współrzędnych i wykresem odwrotnej proporcjonalności. Jest ono nieskończone.



Dlaczego wobec tego objętość bryły powstałej przez obrót tej figury wokół osi y jest skończona?

Umów się z kolegą, że będziecie rzucali monetą dotąd, aż po kolei wypadnie OOR – wtedy on wygrywa, lub aż wypadnie ROO – wtedy wygrywasz ty. Możesz zaproponować, że będziesz mu płacił dwa razy większą kwotę, gdy wygra, niż on tobie w razie twojej wygranej. I tak będziesz miał zysk. Dlaczego?

Działania nieskończone mogą prowadzić do wyników:

- zaskakujących:

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} \dots = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \dots,$$

- użytecznych:

$$\pi = \frac{6}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^3} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^5} + \dots \right)$$

- nonsensownych: można wyliczyć, że $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \ln 2 = 0,693147180\dots$

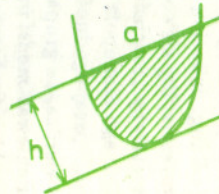
Ale przecież

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots &= \\ = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots) - 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots) &= \\ = (1 + \frac{1}{2} + \dots) - (1 + \frac{1}{2} + \dots) &= 0. \end{aligned}$$

Co wolno, a czego nie

- uczy analiza matematyczna.

Pole wycinka paraboli oblicza się za pomocą wzoru podobnego do wzoru na pole trójkąta: $\frac{2}{3}$ iloczynu podstawy przez wysokość. Jak uzyskać taki wzór?



Rysunek przedstawia figurę samopodobną, czyli fraktal.

Obrazki tego rodzaju pojawiają się zawsze, gdy badamy proces, który podlega ewolucji. Proces taki opisuje się zwykle równaniem różniczkowym. Jego rozwiązaniem jest funkcja $f(t)$, która opisuje wędrówkę (np. po płaszczyźnie) ustalonego punktu z upływem czasu t . Fraktal związany z takim równaniem opisuje „częstość odwiedzin” różnych obszarów płaszczyzny podczas tej wędrówki.



Burzliwy rozwój grafiki komputerowej umożliwia dziś opis ewolucji skomplikowanych układów poprzez badanie ich fraktali.

Oto problem Collatza:

Wybierz dowolną liczbę naturalną i

- jeśli jest parzysta, to podziel ją przez 2,
 - jeśli jest nieparzysta, to pomnóż ją przez 3 i dodaj jeden,
- a z otrzymaną nową liczbą zrób to samo.

Postępując w ten sposób zapewne dojdiesz



Narysowane wyżej: sfera, torus i precel są przykładami różnorodności dwuwymiarowych: w okolicy każdego punktu wyglądają jak kawałek płaszczyzny. Mogą one zatem służyć za modele Wszechświata dla stworków 2-wymiarowych. Przestrzenie takie są w pełni poklasyfikowane.

My, stworki 3-wymiarowe, żyjemy na pewnej różnorodności trójwymiarowej. Klasyfikacja możliwych modeli naszego Wszechświata ciągle czeka na swego odkrywcę.

Cennych informacji o obiektach matematycznych dostarcza badanie ich symetrii. Obiektami tymi są nie tylko figury geometryczne, lecz także równania, zbiory liczb itp.

Np. zrozumienie symetrii ukrytych w równaniach prowadzi do błyskawicznego rozwiązania klasycznych problemów starożytnych Greków: nie jest możliwa kwadratura koła, trysekcja każdego kąta oraz podwojenie objętości sześcianu przy użyciu tylko linijki i cyrka. Na tej samej podstawie każdy student II roku wie, że próżne są poszukiwania wzoru na pierwiastek równania $x^5 - 4x + 2 = 0$. Takich wzorów nie ma (choć pierwiastki umiemy znaleźć z dowolną dokładnością)!

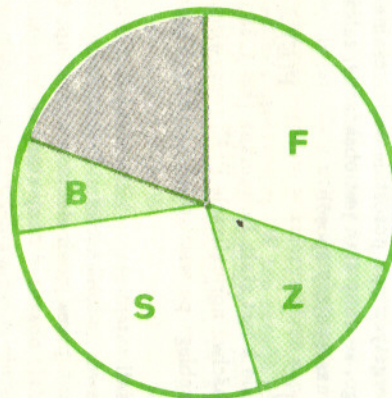
a z otrzymaną nową liczbą zrób to samo. Postępując w ten sposób zapewne dojdiesz do liczby 1. Tak jest, choć nie wiadomo dlaczego.

Stosowanie matematyki to

- budowanie modeli rzeczywistości od cząstki białka przez wzrost kryształu, falę uderzeniową do podejmowania decyzji ekonomicznych
- Aby wykonywać to skutecznie, niezbędne jest
- tworzenie nowych metod matematycznych,
- prowadzenie obliczeń superkomputerowych i wieloprocesorowych,
- poszukiwanie wspólnego języka z innymi naukami.

Wykształcenie matematyczne daje szansę atrakcyjnej pracy:

- w bankach, firmach ubezpieczeniowych itp. (F),
- w zarządzaniu (organizacja i optymalizacja) (Z),
- w szkołach wszystkich szczebli i rodzajów (S),
- prowadzenia badań naukowych (B).



ZOBACZ SAM.

Rysunek pokazuje, gdzie trafili absolwenci z 1986 roku Wydziału Matematyki Uniwersytetu w Manchesterze (Wlk. Brytania).

A Polska za kilka lat będzie bliżej Europy, więc i u nas można się spodziewać podobnego popytu na matematyków na rynku pracy.

STUDIA NA UNIWERSYTECIE WARSZAWSKIM DAJĄ SZANSĘ

- uczęszczania na zajęcia z różnych dziedzin matematyki czystej, stosowanej i informatyki prowadzonych przez wykładowców o międzynarodowej renomie,
- kontaktu z nowoczesną techniką komputerową,
- udziału w międzynarodowych programach wymiany studentów,
- otrzymania wykształcenia otwierającego drogę do kariery zawodowej na całym świecie.

Bliższych informacji o rekrutacji na Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW udziela korespondencyjnie, osobiście lub telefonicznie Dziekanat Wydziału, ul. Banacha 2 (wejście od ul. Pasteura) pok. 128, 00-913 WARSZAWA 59, tel. 308-5471 lub 47-31-81.

O pomiarze ciepła właściwego

Andrzej TWARDOWSKI

Zapewne większość z Was miała kiedyś okazję wykonywać pomiar ciepła topnienia lodu lub ciepła właściwego jakiegoś ciała. Jest to klasyczny, prosty eksperyment szkolny, który – trzeba przyznać – nie wygląda zbyt atrakcyjnie i na ogół nie nasuwa skojarzeń z nowoczesną fizyką. Jednak wbrew pozorom eksperymenty tego typu wykonywane są we współczesnych laboratoriach (tych, które mają po temu możliwości!) dość często, ponieważ dostarczają one istotnych informacji o strukturze materii.

Czym jest w istocie pomiar ciepła właściwego (czyli inaczej pojemności cieplnej)? Jest to eksperyment polegający na wyznaczeniu ilości energii (ciepła) potrzebnej do podniesienia temperatury danego ciała od T_1 do T_2 : $\Delta E = c_p(T_2 - T_1)$ (w tym wzorze c_p jest ciepłem właściwym substancji przy ustalonym ciśnieniu). Jeżeli wzrost temperatury jest niewielki, to możemy przyjąć, że c_p jest pochodną energii wewnętrznej względem temperatury. Przyjrzyjmy się bliżej zależności energii wewnętrznej materii od temperatury. Aby to uczynić w obrazie mikroskopowym, tzn. rozważając elektrony i jądra atomowe tworzące badany obiekt, musimy posłużyć się aparatem mechaniki kwantowej, odpowiednim do opisu mikroświata. Elektrony, protony i neutrony mogą mieć ściśle określone energie, przy czym na ogół jedynie niektóre wartości energii są dopuszczalne (jak np. w atomie wodoru), mówimy, że cząstka jest w stanie o określonej energii, lub że obsadza określony stan energetyczny, a pozostałe dopuszczalne stany są nieobsadzone. Prawdopodobieństwo tego, że dany stan jest obsadzony, zależy od energii tego stanu oraz temperatury w następujący sposób

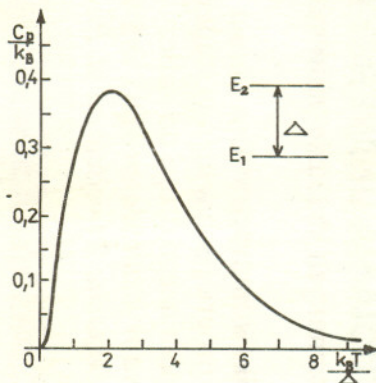
$$(1) \quad P(E) = A \cdot \exp(-E/kT),$$

gdzie k jest stałą Boltzmana ($k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K), a A jest stałą zapewniającą właściwą normalizację $P(E)$ (oczywiście, $A = 1 / \sum_i \exp(-E_i/kT)$, gdzie sumowanie przebiega po wszystkich możliwych stanach).

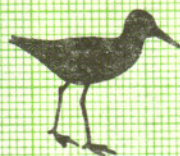
Jeżeli zatem mamy kilka różnych możliwych stanów, to będą one obsadzone z różnymi prawdopodobieństwami (rozumie się, że jeśli prawdopodobieństwo obsadzenia danego stanu przez jeden elektron wynosi np. 0,05, to w zespole 10^{23} elektronów $5 \cdot 10^{21}$ będzie obsadzać dany stan) zmieniającymi się w zależności od zmian temperatury. Średnia energia całego układu będzie sumą wszystkich dopuszczalnych energii ważonych prawdopodobieństwami obsadzenia poziomów

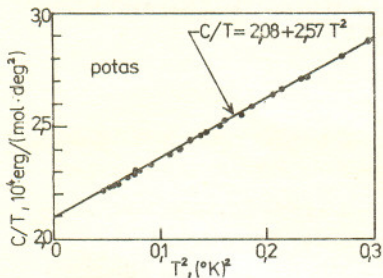
$$(2) \quad \langle E \rangle = E_1 P(E_1) + E_2 P(E_2) + E_3 P(E_3) + \dots = \frac{\sum_i E_i \exp(-E_i/kT)}{\sum_i \exp(-E_i/kT)}$$

Pochodna średniej energii $\langle E \rangle$ względem temperatury jest ciepłem właściwym. Łatwo zauważyć, że ciepło właściwe wynosi zero, jeśli mamy do czynienia z ciałem z pojedynczym poziomem energetycznym. Wynika to z faktu, że nie ma poziomów, które można by obsadzić podnosząc temperaturę układu. Z kolei dla układu dwupoziomowego otrzymujemy charakterystyczną zależność ciepła właściwego od temperatury przedstawioną na rysunku 1. Warto zauważyć, że w tym przypadku – jak wynika z (2) – w niskich temperaturach c_p rośnie wykładniczo z temperaturą. Zaobserwowanie tego typu zależności c_p od temperatury w eksperymencie świadczy o istnieniu przerwy energetycznej pomiędzy stanami kwantowymi układu. Z zupełnie inną sytuacją mamy do czynienia w przypadku systemów o ciągłym widmie energetycznym (wszystkie energie z pewnego przedziału są dozwolone). Przykładami takich systemów są: zespół elektronów przewodnictwa w metalach oraz zespół jąder atomowych w sieci kryształu ciała stałego. Atomy w sieci krystalicznej mogą drgać w taki sposób, że w pewnych zakresach energii są dopuszczalne drgania kolektywne sieci krystalicznej (czyli tzw. fonony) o dowolnych energiach. Szczegółowe rachunki pokazują, że wtedy $c_p \sim T^3$. Z kolei w przypadku elektronów przewodnictwa dostajemy liniową zależność ciepła właściwego od temperatury: $c_p \sim T$. Ta różnica między elektronowym i fononowym ciepłem właściwym wynika z różnicy widm energetycznych elektronów przewodnictwa i fononów (drgań sieci) oraz z różnych praw

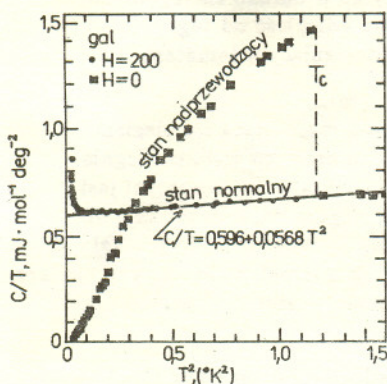


Rys. 1

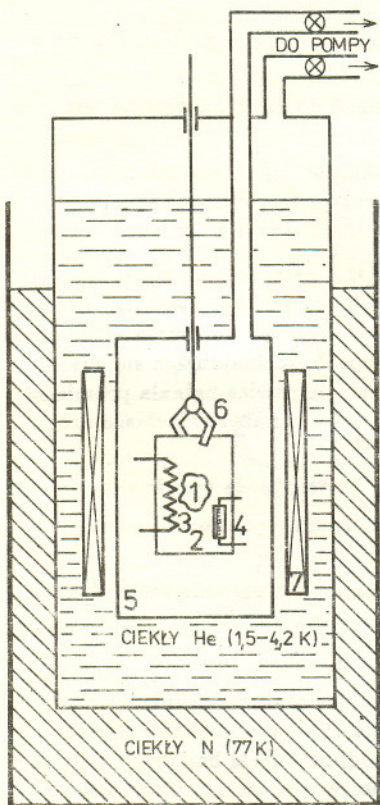




Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

statystycznych, którym podlegają elektrony i fonony. Na rysunku 2 pokazane są wyniki pomiaru ciepła właściwego dla kryształu metalicznego potasu. W tym przypadku wkład do ciepła właściwego może pochodzić zarówno od sieci krystalicznej, jak i elektronów przewodnictwa, czyli można oczekiwać, że będzie $c_p = a \cdot T + b \cdot T^3$, gdzie a i b są pewnymi stałymi. Jak widać na rysunku 2, istotnie tego typu zależność jest obserwowana.

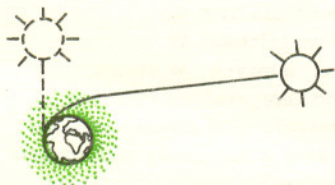
Interesujące są wyniki pomiarów ciepła właściwego dla nadprzewodników. Na rysunku 3 pokazane są rezultaty dla galu. W stanie normalnym c_p pochodzi od drgań sieci oraz wzbudzeń elektronów przewodnictwa. W bardzo niskich temperaturach istotny staje się wkład od jąder atomowych. W stanie nadprzewodzącym c_p wykazuje wykładniczą zależność od temperatury (rysunek 3), co – jak wspomniano – świadczy o istnieniu przerwy energetycznej między stanami elektronowymi. Pojawienie się takiej przerwy energetycznej wskazuje na zachodzenie drastycznych zmian w strukturze energetycznej substancji przy przejściu do stanu nadprzewodzącego i jest charakterystyczne dla zjawiska nadprzewodnictwa.

Jak widać z powyższych przykładów, pomiar ciepła właściwego może dostarczyć fizykowi niezwykle ważnych informacji o stanach energetycznych i pozwala często rozszyfrować nieznanne widmo energetyczne badanego obiektu.

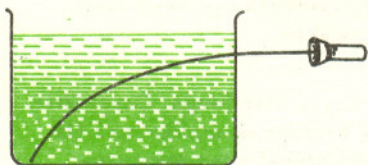
Do tej pory nie mówiliśmy nic o szczegółach pomiaru ciepła właściwego. Oczywiście, aparatura stosowana do tego celu w laboratoriach jest bardziej skomplikowana niż szkolny kalorymetr, ale idea pomiaru jest taka sama: do próbki o temperaturze T_1 dostarcza się pewną ilość energii ΔE i mierzy się końcową temperaturę T_2 , do jakiej nagrzała się próbka. Schemat „prawdziwego” kalorymetru przedstawiony jest na rysunku 4. Próbka [1] wraz z termometrem [4] i grzejnikiem [3] umieszczona jest na uchwycie [2]. Cały uchwyt umieszczony jest w kalorymetrze [5], z którego usunięto powietrze. Próżnia w kalorymetrze zapewnia minimalny kontakt cieplny uchwytu i próbki z otoczeniem. W ten sposób grzejnik [3] ogrzewa wyłącznie próbkę i uchwyt. Ponieważ najczęściej pomiary wykonywane są w niskich temperaturach, kalorymetr umieszczony jest w naczyniu (tzw. kriostacie) z ciekłym helum ^4He o temperaturze 4,2 K. Obniżając ciśnienie par nad ciekłym helum można uzyskać temperatury do około 1,2 K. W celu uzyskania jeszcze niższych temperatur (do około 0,3 K) można zastosować dodatkowo zbiornik z izotopem helu ^3He (wstępnie schładzanym przez ^4He). Jeszcze niższe temperatury (do około 0,005 K) uzyskuje się mieszając obydwa izotopy helu ^4He - ^3He (jest to tzw. chłodziarka rozcieńczalnikowa). W tym ostatnim przypadku (tzn. pomiarów w milikelwinach) trudności eksperymentalne wzrastają jednak znacznie, np. drgania podłogi laboratorium spowodowane przez chodzącego po pokoju eksperymentatora – a przenoszone na kalorymetr – mają często wystarczającą energię, aby podnieść temperaturę próbki do tego stopnia, że pomiar staje się niemożliwy.

Sam pomiar przebiega następująco: próbkę wraz z uchwytem schładza się wstępnie do najniższej możliwej temperatury za pomocą wyłącznika mechaniczno-ciepłego [6] będącego w kontakcie cieplnym z zbiornikiem helowym. Po schłodzeniu próbki wyłącznik [6] otwiera się i rozpoczyna pomiar. Termometrem [4] mierzy się początkową temperaturę próbki T_1 , po czym podgrzewa grzejnikiem [3] próbkę o około 50–100 mK do temperatury T_2 . Komputer sprzężony z eksperymentem wyznacza ciepło właściwe na podstawie zmierzonej różnicy temperatur oraz energii ΔE dostarczonej przez grzejnik. Automatycznie uwzględnione zostają rozmaite poprawki (np. pojemność cieplna samego uchwytu, pojemność cieplna kleju, którym przyklejona jest próbka, i in.). Jeżeli wprowadzimy do pamięci komputera masę próbki i jej formułę chemiczną, to możemy uzyskać ostatecznie ciepło właściwe w przeliczeniu na jeden mol substancji. Uzyskane wyniki można od razu wyświetlić na ekranie komputera uzyskując wykres c_p jako funkcję temperatury.

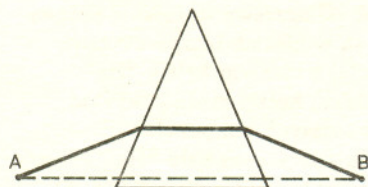
W typowych układach eksperymentalnych w kriostacie zazwyczaj umieszczona jest jeszcze cewka nadprzewodząca [7], pozwalająca na prowadzenie pomiarów w polu magnetycznym. Warto podkreślić, że pomiary takie, jak opisane powyżej, są standardowymi pomiarami, zwłaszcza w fizyce magnetyzmu. Jest to chyba jeden z nielicznych przykładów eksperymentu, który przeprowadzany jest zarówno w pracowni przeciętnej szkoły, jak i w poważnych laboratoriach naukowych.



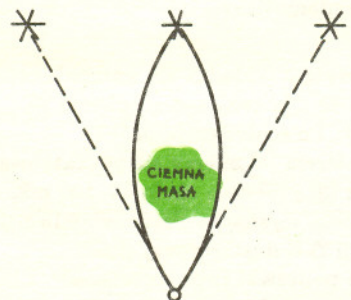
Wskutek istnienia atmosfery Słońce widzimy nawet po jego faktycznym zachodzie



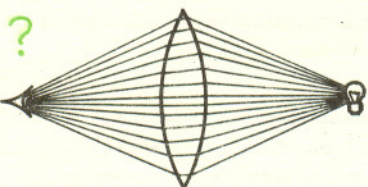
Umieszczając delikatnie na dnie akwarium sól (oczywiście, akwarium nie jest zamieszkałe) możemy otrzymać różną gęstość płynu zakrzywiająca światło latarki.



Światło biegnie z *A* do *B* po lamanej, gdyż w pryzmacie porusza się wolniej i po prostej biegłoby dłużej (więcej o zjawiskach optycznych związanych z pryzmatem pisaliśmy w *Delcie* 2/1985).



Zjawisko soczewki grawitacyjnej było opisane w *Delcie* 5/1982.



Czy można tak ustawić soczewkę i co wtedy można zobaczyć?

Przestrzeń optyczna

Najnowocześniejszym sposobem mierzenia odległości jest użycie miernika laserowego. Pomijając szczegóły techniczne możemy stwierdzić, że mierzy on odległość długością drogi promienia światła. Podobnie, drogą światła mierzą od lat odległości astronomowie.

Od lat też wiadomo, że (z matematycznego punktu widzenia) mierzenie odległości długością drogi promienia świetlnego jest sensowne tylko w bardzo szczególnych warunkach. Badanie tego, czym różni się tak mierzona odległość od tego, co w matematyce nazywamy odległością, może być interesującym tematem samodzielnej pracy.

Podstawowym prawem rządzącym optyką geometryczną (zajmującą się biegiem promieni świetlnych) jest zasada Fermata. Głosi ona, że promień światła biegnie po drodze, której przebycie zabiera mu najmniej czasu. W absolutnej próżni jest to, oczywiście, prosta. Jeśli jednak obszar, w którym biegnie światło, próżnią nie jest, to tor promienia może mieć zupełnie inny kształt. Spostrzeżenie to pozwala na budowanie klasycznych urządzeń optycznych, takich jak mikroskop, luneta czy okulary. Są to świadomie przez nas wprowadzone niejednorodności przestrzeni powodujące, że światło biegnie tak, jak to nam jest potrzebne.

Powstaje pytanie, jakie z „przyzwoitych” własności odległości możemy w ten sposób popsuć:

- czy można za pomocą przezroczystych przedmiotów (pryzmatów, soczewek itp.) spowodować, by dwa punkty „nie mogły się widzieć”, czyli by z jednego z nich nie można było oświetlić drugiego?
- czy można spowodować (bez użycia lusterek i innych odbijających światło przedmiotów), by światło biegło po linii zamkniętej?
- czy istnieje taki układ optyczny, w którym światło może iść z *A* do *B*, a z *B* do *A* nie może?
- czy możliwa jest sytuacja, by promień światła biegł z *A* do *B* drogą dłuższą, niż suma dróg z *A* do *C* i z *C* do *B*?

Podobnych pytań można stawiać wiele i byłoby interesujące, jak dalece zdumiewające własności można uzyskać budując (może to być konstrukcja teoretyczna) specjalny układ optyczny.

Kolejny kierunek badań można zaczerpnąć z natury. Otóż astronomom udało się na jednej kliszy fotograficznej uzyskać dwa oddzielne obrazy jednego kwazara. I to wcale nie przez dwukrotne jej naświetlenie ani nie przez jakąś inną sztuczkę – tak po prostu było widać. Efekt ten zinterpretowano w ten sposób, że znajdująca się gdzieś między nami a kwazarem ciemna, niewidoczna, ale ciężka mgławica uginała promienie światłne w ten sposób, że powstały dwie (zgodne z zasadą Fermata) najkrótsze drogi od kwazara do nas. I znów można postawić pytania:

- czy liczba obrazów jednego przedmiotu (bez pomocy lusterek) może być dowolnie duża?
- czy światło docierające do nas z jednego źródła, ale różnymi drogami, biegnie tyle samo czasu?
- co widzi oko umieszczone w punkcie, w którym zbiegają się promienie wychodzące z punktowego źródła światła?

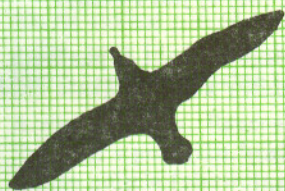
I znów podobnych pytań można postawić wiele.

Wbrew pozorom praca o przestrzeni optycznej będzie pracą matematyczną – badamy w niej bowiem nie realne zjawiska fizyczne, lecz ich matematyczny model. Przyjmujemy więc cały szereg założeń, których realne odpowiedniki badanych zjawisk spełniać nie muszą. I nie bierzemy pod uwagę całego szeregu własności, które ma realne światło (np. efekty kwantowe).

*Ioannes Broscius erat Patavinus
4 libris die xij Decembris
1622*

*4 libras valent $\frac{1}{3}$ aurei Vngarici
Annalibus. et temporibus aureis Vngaricis
libris duodecim.*

Brożek czy Brzozek?



W *Delcie* 6/1990 na str. 12 prof. Zbigniew Semadeni opublikował słuszne uwagi o polonizacji i latynizacji nazwisk. Warto może do tego artykułu dodać dalszy ciąg: trudność repolonizacji zlatynizowanej formy nazwiska powoduje, że właściwie nie wiemy, jak naprawdę nazywał się, najwybitniejszy przed Wacławem Sierpińskim, polski matematyk!

W nocy z 31 X na 1 XI roku pańskiego 1585 (datę, gregoriańska, znamy z zachowanych horoskopów) urodził się w Kurzelowie chłopak, którego ochrzczono „Jan”. Chłopak ten (ojciec jego miał na imię Jakub) dorósłszy był studentem Uniwersytetu Jagiellońskiego, potem jego profesorem (w międzyczasie został księdzem), a wreszcie jego rektorem. Opublikował on pod nazwiskiem „Broscius” różne ciekawe wyniki matematyczne.

Podpisywał się, zresztą, sam również „Broscius”. Tak samo, po jego śmierci w 1652 roku, pisano o nim też „Broscius” (czasem „Broscius” lub „Brosius”) nie próbując repolonizować tego, oczywiście, zlatynizowanego nazwiska.

Dopiero po 170 latach, w 1821 roku S. Bandtke zaczął pisać „Brożek”, inni zaś – niemal równocześnie – zaproponowali repolonizację „Brzozek”. J. N. Franke znalazłszy w metryce Uniwersytetu Jagiellońskiego zapis „Brozek”, a potem dowiedziawszy się listownie od proboszcza w Kurzelowie, że jest tam „Brożkowy Kąt” zaczął walczyć o formę „Brożek”. I dziś, za jego monografią *Jan Brożek* (Kraków 1884) to właściwe nazwisko stosowane jest powszechnie w literaturze. Tymczasem występująca parokrotnie w *Pamiętniku* J. Wielewickiego (zmarłego w 1639 roku przyjaciela i kolegi Brożka) forma „Brzoscus” sugerowałaby raczej nazwisko „Brzozek” lub – może – „Brzowski”.

Ponieważ J. N. Franke nie sprawdził metryk parafii w Kurzelowie (za jego czasów istniały jeszcze księgi obejmujące okres od 1641 roku), więc zachęciłem swego czasu (dziś, niestety, już nieżyjącego) dr Stanisława Dobrzyckiego do ich zbadania. Do dziś zachowane księgi (przechowywane w Archiwum Archidiecezjalnym w Gnieźnie) mają zapisy dopiero od 1715 roku. Nie ma w nich żadnych Brożków (ani Brockich), a także żadnych Brzozków (ani Brzozkich). Ponieważ zaś nazwa „Brożkowy Kąt” może pochodzić nie od rodziny Brożków, lecz bezpośrednio od słowa „bróg” (oznacza ono daszek nad stertą), więc chyba nigdy już nie będziemy wiedzieli na pewno, jakie naprawdę nosił nazwisko rektor Uniwersytetu Jagiellońskiego Joannes Jacobeus Broscius...

Warto może jeszcze dodać, że Broscius nie jest jedynym matematykiem polskim, którego prawdziwego nazwiska nie znamy. Nie znamy, na przykład, właściwego nazwiska Jana Musceniusa (może Mucha?), też zresztą urodzonego w Kurzelowie, a zmarłego w Krakowie w 1602 roku. Z tym że Muscenius wprawdzie był również profesorem Uniwersytetu Jagiellońskiego (i to znanym), też zajmował się matematyką, ale nie był – w przeciwieństwie do Brożka (Brzozka?) – matematykiem twórczym.

Krzysztof TATARKIEWICZ

STVDIOSÆ Iuuentuti in Academia Cracouiensi.

IOANNES BROSCIVS
Doct̄or Medicinæ, Ordinarius
Astrologus. S. P.

*Un euoluo exemplar Diophanti, quod
Clarissimo Raynerio Fuscarenno Patrio
Veneto, postulante mihi concessit iuris
consultissimus Professor in studio Patavino
Dominus Alexander Syngliticus, chartulam sepa-
ratam reperio, in qua hac questio descripta fuit
absq̄, vlla solutione. De authore questio non
constat; exemplar ipsum Diophanti presert in-
scriptionem Maximi Planudii graci monachi.
A non malo Analysi propositam esse, certum est.
Solutur multi modis. Iam enim plurimae inue-
niuntur solutiones, ut vel hinc perspicitur Tacitica
antiquorū vbertas. Genus est soluendi non illud
vaguū, assumpto intra certos limites quouū
Numeri valore, sed longe diuersum via demonstran-
di apodictica, hoc est certa & incōcussa procedens.*
Fobis

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadawać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgrupowaniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 7/1990.

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 1991

Zadania z matematyki nr 219, 220

Redaguje Marcin E. KUCZMA

219. Niech $x_n = \sum_{k=2}^n \left(\frac{k-1}{k}\right)^n$ dla $n = 2, 3, 4, \dots$. Czy ciąg (x_n/n) jest zbieżny?

220. W trójkąt ABC wpisano okrąg styczny do boków tego trójkąta w punktach P, Q, R . Miary kątów trójkąta ABC są równe α, β, γ ; miary kątów trójkąta PQR wynoszą α', β', γ' . Dowieść, że

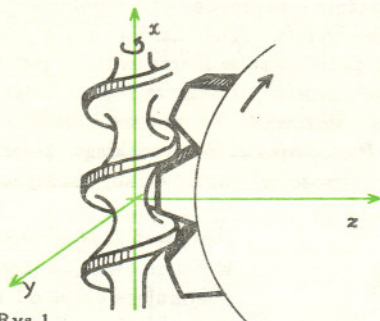
$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq \sin \alpha' \sin \beta' \sin \gamma'$$

Zadanie 220 zaproponował pan Adam Czornik z Bytomia.

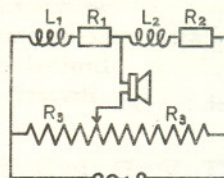
Zadania z fizyki nr 117, 118

Redaguje Jerzy BROJAN

117. Przekładnia ślimakowa składa się z dwóch zazębionych kół obracających się wzdłuż osi wzajemnie prostopadłych (rys.1). Jaka jest maksymalna możliwa wartość sprawności energetycznej przekładni, jeśli współczynnik tarcia zębów jest równy f ?

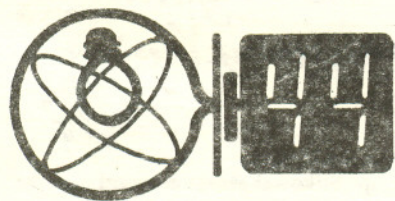


Rys.1



Rys.2

118. W obwodzie przedstawionym na rysunku 2 występuje źródło napięcia o częstotliwości akustycznej, głośnik zaś odgrywa rolę miernika. Suwak przesuwano wzdłuż opornika $R_3 - R_4$ do uzyskania minimum dźwięku. Wykazać, że na ogół dźwięk nie zanika całkowicie przy żadnym położeniu suwaka. Jaki warunek musi być spełniony, aby dźwięk zanikł?



Czołówka ligi zadaniowej Klub 44 M

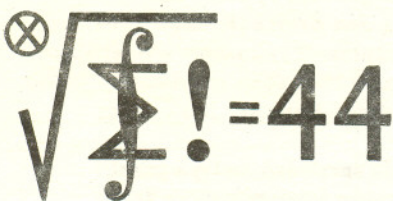
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 205 (WT=2,85) i 206 (WT=2,66)
z numeru 7/1990

| | | | |
|-----------------|---|----------|-------|
| Konrad Pióro | - | Warszawa | 38,76 |
| Mariusz Sajac | - | Pruszków | 38,56 |
| Paweł Kubit | - | Krosno | 38,45 |
| Tomasz Grzesiak | - | Kraków | 36,41 |

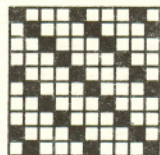
Czołówka ligi zadaniowej Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 107 (WT=2,50) i 108 (WT=2,20)
z numeru 9/1990

| | | | |
|----------------------|---|----------|-------|
| Leszek Motyka | - | Kraków | 41,45 |
| Paweł Perkowski | - | Szczecin | 35,82 |
| Dzierżysław Lipiński | - | Lublin | 35,46 |



Rozwiązanie zadania M 595.
Zaznaczmy pewne pola tak, jak na rysunku.



Zauważmy, że dowolny prostokąt 4×1 zakrywa dokładnie jedno zaznaczone pole. Ponieważ 25 prostokątów pokrywa szachownicę, więc zakrywa tylko 25 z 26 zaznaczonych pól, czyli szachownicy pokryć się nie da.



Rozwiązanie zadania M 596. Obrót względem środka okręgu opisanego na 1991-kącie o wielokrotność kąta $360^\circ/1991$ przeprowadza środek boku (przekątnej o danej długości) na środek boku (przekątnej o takiej samej długości). Zarazem przekątnych o różnej długości jest w tym wielokąt 994. Zatem punkty zbioru S leżą na 995 okręgach po 1991 na każdym. Ponieważ dowolny okrąg nie będący jednym z tych 995 przecina każdy z nich w co najwyżej dwóch punktach, więc należy do niego co najwyżej $2 \cdot 995 = 1990$ punktów zbioru S . Stąd na jednym okręgu może leżeć co najwyżej 1991 punktów zbioru S .



Rozwiązanie zadania M 597. Zauważmy, że idąc naszą figurą po drodze zamkniętej musimy wykonać tyle samo ruchów zwiększających rzędną, co zmniejszających ją. Analogicznie jest z odciętą, stąd otrzymujemy, że w drodze zamkniętej liczba ruchów w prawo jest równa liczbie ruchów w dół i równa liczbie ruchów po przekątnej w lewo w górę. Stąd całkowita liczba ruchów jest podzielna przez 3. No, ale szachownica 10×10 ma 100 pól, więc na obejście jej zgodnie z warunkami zadania potrzeba 100 posunięć. Ponieważ 100 nie jest podzielne przez 3, więc szachownicy obejść się nie da.

Sło - Sło

Beniowski - student matematyki
(początek poematu)

„Za panowania króla Stanisława...”
Tak to przed laty zaczynał Słowacki.
Gdzież się podziła dziś dawna oktawa?
Zginał poezji duch w narodzie laskim.
Wskrzesać go będzie to niełatwa sprawa.
Ale się znalazł pośród braci żackiej
Jeden, co w twardej tej oktawy rzy
Ujmie podstawy trudne analizy.

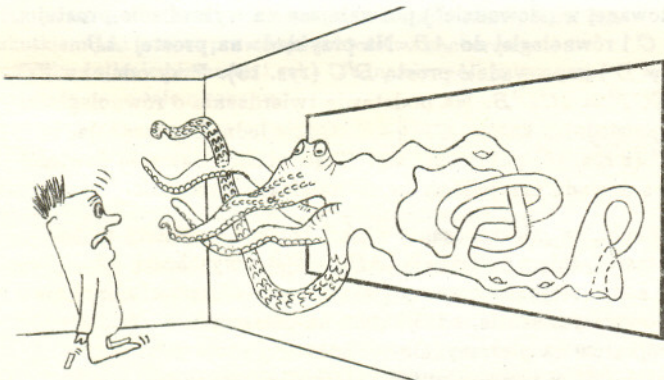
A więc do dzieła. Rzucone już kości.
Tak więc z początku wprowadzimy śmiało
Ważne pojęcie (pierwotne) mnogości,
Które, jak stwierdzić by tu należało,
Jest równoważne pojęciu własności.
A gdyby było nam tego za mało,
To w jeszcze inne ująwszy to słowa
Mnogość, rzec można, to forma zdaniowa.

Zbiór - to istotne. Nie ma jednak racji
(W tym chyba każdy dziś zgodzi się ze mną)
Kto lekceważy pojęcie relacji.
Relacja może być na przykład pełna,
Lub (co nastąpi w dalszym ciągu akcji)
Ze zbioru tworzyć strukturę zupełną.
Odpowiem, owym nim się zajmę tworem
Czym jest relacja? Par pewnych jest zbiorem.

Nota bibliograficzna

Wtajemniczeni twierdzą, że pod pseudonimem Sło - Sło ukryła się spółka: Juliusz Słowacki - Wojciech Słowczyński. Podobno jeden z autorów był swego udziału nieświadomy. Utwór *Beniowski - student matematyki* (o ile wiadomo, nie dokończony) powstał w roku 1979.

Galeria Jednego Cytatu



„Ogólnie rzecz biorąc, podrozmaitości w sensie immersji mogą być obrzydliwe”

(z wykładu dla studentów matematyki)

Jeśli odwzorowanie płaszczyzny w płaszczyznę przekształca punkty odległe o jeden w punkty odległe o jeden, to musi być ono izometrią (por. *EPSILON* nr 1). Przychodzi na myśl pytanie: co się dzieje, gdy funkcja o tej własności prowadzi z płaszczyzny nie w płaszczyznę, lecz w przestrzeń trójwymiarową?

Okazuje się, że znacznie łatwiej jest odpowiedzieć na analogiczne pytanie, gdy przekształcenie prowadzi z płaszczyzny w przestrzeń o wymiarze nieco większym niż trzy. Co to znaczy? Wiemy, że prostą można utożsamiać ze zbiorem liczb rzeczywistych (\mathbb{R}), płaszczyznę ze zbiorem par liczbowych (\mathbb{R}^2), przestrzeń ze zbiorem trójek (\mathbb{R}^3). Naturalne jest, że dla dowolnego naturalnego n możemy rozważać przestrzeń \mathbb{R}^n . Np. każdy element \mathbb{R}^8 jest „ósemką” liczb rzeczywistych (z_1, \dots, z_8) . Symbole \mathbb{R}^8 czy \mathbb{R}^{1001} wyglądają mogą dla niektórych odstraszać, nie należy się jednak przerażać. Tu ważna będzie jedynie pewna własność.

Na prostej znajdziemy bez trudu dwa punkty odległe o 1 (końce odcinka), na płaszczyźnie trzy punkty, takie, że każde dwa z nich są odległe o jeden (wierzchołki odpowiedniego trójkąta równobocznego), w przestrzeni zaś - cztery punkty (wierzchołki czworoscianu foremnego) o tej własności. Nie jest więc zaskoczeniem informacja, że w \mathbb{R}^n istnieje $n + 1$ punktów, z których każde dwa są odległe o jeden. Takie punkty uczenie nazywa się wierzchołkami n - wymiarowego sympleksu jednostkowego.

Pokażemy, że istnieje przekształcenie płaszczyzny w \mathbb{R}^8 nie będące izometrią, odwzorowujące punkty odległe o jeden na punkty również odległe o jeden. Podzielmy płaszczyznę na kwadraty o boku $\frac{\sqrt{2}}{2}$ i ponumerujemy je tak, jak na rysunku.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 7 | 1 | 4 |
| 2 | 5 | 8 | 2 | 5 |
| 3 | 6 | 9 | 3 | 6 |
| 1 | 4 | 7 | 1 | 4 |

Do każdego kwadratu dołączmy lewy dolny wierzchołek i dwa boki stykające się w tym wierzchołku (bez drugich końców). Łatwo sprawdzić, że jeżeli dwa punkty są odległe o jeden, to leżą w kwadratach oznaczonych różnymi numerami.

Ponumerujemy dziewięć wierzchołków sympleksu jednostkowego w \mathbb{R}^8 liczbami od 1 do 9. Funkcja naszą każdemu punktowi płaszczyzny przyporządkowuje wierzchołek sympleksu, który jest oznaczony tym samym numerem, co kwadrat, do którego badany punkt należy. Oznacza to, że jeżeli punkty leżą w kwadratach o różnych numerach, to ich obrazy są odległe o jeden. W szczególności zatem funkcja przeprowadza w różne wierzchołki punkty odległe o jeden (jako elementy kwadratów z różnymi numerami), czyli odległości takich punktów nie zmienia. Nie jest ona jednak izometrią (wystarczy rozważyć dwa różne punkty z tego samego kwadratu).

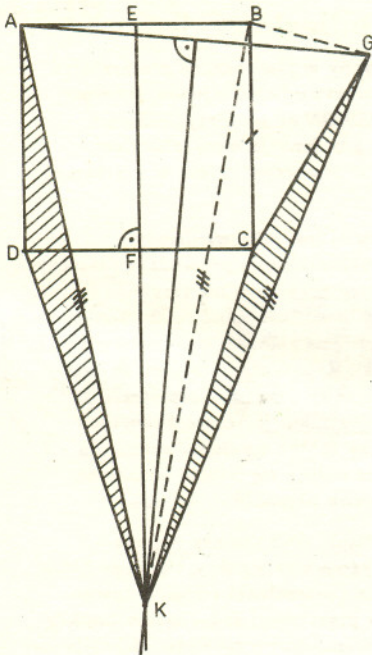
Podobnie można skonstruować funkcję z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R}^6 o tej samej własności (zamiast kwadratów należy płaszczyznę podzielić na sześciokąty foremne). Takie przekształcenie jest, oczywiście, także przykładem rozstrzygającym problem dla wszystkich \mathbb{R}^n przy $n > 6$, bo dla $k < n$ można \mathbb{R}^k traktować jako podzbiór \mathbb{R}^n (po dopisaniu zer na końcowych współrzędnych).

Wróćmy jednak do wyjściowego pytania. Co się dzieje, gdy funkcja prowadzi z \mathbb{R}^2 nie w \mathbb{R}^8 , nie w \mathbb{R}^6 , ale w znakomicie znaną przestrzeń \mathbb{R}^3 ? Pozostały ponadto przypadki \mathbb{R}^4 i \mathbb{R}^5 .

Brzmi to może zaskakująco, ale odpowiedź na te pytania do tej pory nie jest znana.

Krzysztof CIESIELSKI

Sofizmaty – jak jest naprawdę



Rys. 14

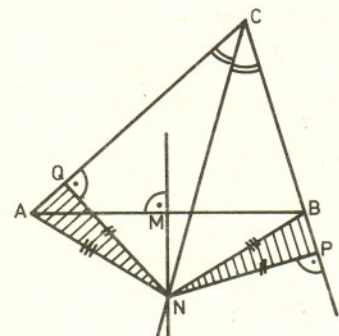
I. Tajemnicą sofizmatu jest tu położenie punktu K , który w rzeczywistości leży poniżej prostej CD , ale tak, że odcinek GK nie ma punktów wspólnych z kwadratem $ABCD$ (rys. 14). Dokładniej, $|BC| = |CG|$, $|AK| = |BK|$, $|AK| = |GK|$, a zatem $|BK| = |KG|$. Oznacza to, że punkty C i K leżą na symetralnej odcinka BG , co gwarantuje rozłączność prostej KG z kwadratem $ABCD$.

II. Wszystkie przedstawione przypadki są niemożliwe, a jedyny możliwy nie został rozpatrzony. Punkt N będzie leżał zawsze na zewnątrz trójkąta ABC i to tak, że jedna z prostopadłych NP , NQ (opuszczonych na proste BC , AC odpowiednio) przecięnie bok trójkąta (np. AC , rys. 15), druga zaś przedłużenie drugiego boku. Rzeczywiście, niech $|AC| > |CB|$. Opisujemy na trójkącie ABC okrąg O . Z własności kątów wpisanych, dwusieczna kąta C przechodząc przez punkt N dzieli łuk AB na połowy. Podobnie symetralna odcinka AB . Zatem punkt $N \in O$ i jako taki leży na zewnątrz trójkąta ABC . Ponieważ $|AC| > |CB|$, więc $|\widehat{AC}| > |\widehat{CB}|$. Łącząc to z faktem, że $|\widehat{AN}| = |\widehat{NB}|$, otrzymujemy $|\widehat{CAN}| > |\widehat{CBN}|$, skąd wynika, że kąt CAN jest ostry, a kąt CBN rozwarty. Uzasadnia to poprawność rysunku 15. (Można dodatkowo wykazać, że punkty P , Q , M leżą na jednej prostej.)

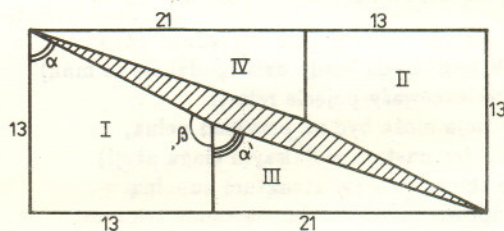
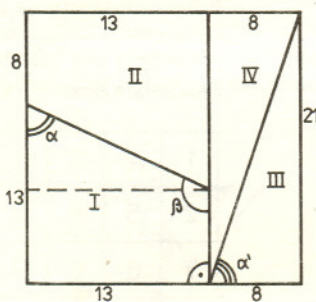
III. Dowód twierdzenia jest poprawny, jeśli oba punkty X i Y leżą na bokach czworokąta lub jeśli oba leżą na przedłużeniach tych boków. W przypadku, gdy jeden z tych punktów leży na boku czworokąta, a drugi na przedłużeniu jego boku, dowód jest fałszywy. Kontrprzykład przedstawia rysunek 16.

IV. Przy oznaczeniach takich jak na rysunku 17: $\operatorname{tg} \alpha' = \frac{13}{8}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{21}{8}$. Ponieważ $\frac{21}{8} > \frac{13}{8}$, więc $\alpha' > \alpha$. Nierówność ta, w połączeniu z faktem $\beta = \pi - \alpha$, daje

$$\beta + \alpha' = \pi + \alpha' - \alpha > \pi.$$

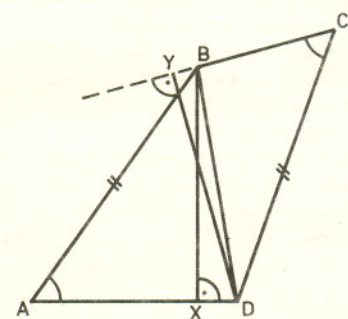


Rys. 15



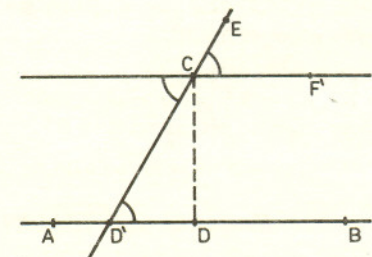
Rys. 17

V. Błąd polega tu na utożsamieniu dwóch różnych faktów: geometrycznego postrzegania ciągu krzywych i jego granicy (w naszym przypadku w sensie odległości) oraz ciągu liczbowego – długości poszczególnych krzywych.



Rys. 16

VI. Popelniony błąd należy do błędów logicznych „ignoratio elenchi” (niezrozumienia dowodzonej tezy). Dowód byłby poprawny, gdybyśmy pokazali, że przez punkt C można poprowadzić tylko jedną prostą równoległą do danej prostej AB . Istnieją inne metody (od zaprezentowanej w „dowodzie”) pozwalające na wykreślenie prostej przechodzącej przez punkt C i równoległej do AB . Na przykład: na prostej AB możemy wybrać punkt $D' \neq D$ i poprowadzić prostą $D'C$ (rys. 18). Przy odcinku EC , w punkcie C , zbudować $\angle ECF' = \angle CD'B$. Na podstawie twierdzenia o równoległości prostych, przy równości odpowiednich kątów, $CF' \parallel AB$. Gdzie jednak gwarancja, że proste CF (z rys. 11) i CF' (z rys. 18) pokrywają się? Tego właśnie należało dowieść! W naszym rozumowaniu bez dowodu przyjęliśmy to, co należało udowodnić.



Rys. 18

VII. Błąd polega na przekonaniu, że „nieskończenie wąski” trójkąt z półsfery można utożsamiać z trójkątem na płaszczyźnie o podstawie $|AB| = \frac{2\pi R}{n}$ i wysokości $\frac{\pi R}{2}$ (rys. 12). W rzeczywistości żaden trójkąt sferyczny (leżący na powierzchni sfery) nie może być utożsamiany, w powyższym sensie, z trójkątem na płaszczyźnie. Widać to chociażby stąd, że dla trójkątów na płaszczyźnie euklidesowej suma miar kątów wewnętrznych wynosi π , natomiast w przypadku trójkątów sferycznych jest ona większa od π (rys. 12 – dla sferycznego trójkąta PAB jest $|\angle PAB| = |\angle PBA| = \frac{\pi}{2}$).

VIII. Sofizmat ten jest kinematyczny. O ile okrąg o promieniu R toczy się bez poślizgu po prostej MM_1 , to w tym samym czasie okrąg o promieniu $r < R$ toczy się z poślizgiem po prostej NN_1 . Jeżeli w pewnym położeniu $|MP| = |M'P|$, to dla mniejszego okręgu $|NP_1| > |N'P_1|$, gdyż $|NP_1| = \frac{R}{r} |N'P_1|$.



Zadania

Redaguje Michał WOJCIECHOWSKI

M 595. Czy szachownicę o rozmiarach 10×10 można pokryć prostokątami 4×1 o rozłącznych wewnątrzach?

Rozwiązanie na str. 14

M 596. Niech S oznacza zbiór składający się ze środków boków 1991-kąta foremego oraz środków wszystkich jego przekątnych. Jaka jest największa liczba punktów zbioru S leżących na jednym okręgu?

Rozwiązanie na str. 14

M 597. Na szachownicy 10×10 dysponujemy figurą, która w jednym ruchu może przesunąć się o jedno pole w prawo, o jedno pole w dół lub o jedno pole po przekątnej w lewo w górę. Czy można tą figurą obejść szachownicę będąc na każdym polu raz i wrócić do punktu wyjścia?

Rozwiązanie na str. 14

Redaguje Paweł KRAWCZYK

F 304. Czy balon napełniony helem może unieść stalową cysternę, w której hel został dostarczony?

Rozwiązanie na str. 7

F 305. Ostro zatemperowany ołówek postawiony został na czubku w pozycji dokładnie pionowej. Oszacować czas, jaki upłynie do chwili upadku ołówka, jeśli otaczające go powietrze jest całkowicie spokojne.

Rozwiązanie na str. 2

Drobiazgi

Prowadzone przez ostatnie dwa lata przez amerykańską Agencję Ochrony Środowiska badania dowodzą szkodliwego wpływu „fal elektromagnetycznych o niezwykle małych częstościach” na organizmy ludzkie i zwierzęce. Powszechnie spotykanym źródłem takich fal są domowe i przemysłowe instalacje elektryczne. Ich skutkiem jest wzrost prawdopodobieństwa zachorowania na niektóre rodzaje białaczek i raka. Jednakże mechanizm tego zjawiska pozostaje nieznanym.

Równania Einsteina opisujące zachowanie się pola grawitacyjnego w ogólnej teorii względności są na tyle skomplikowane, że nieczęsto się zdarza, iż znajduje się ich nowe rozwiązania. Sztuka ta udała się w 1990 r. J. M. M. Senovilli z Uniwersytetu w Salamance. Co więcej – rozwiązanie Senovilli wzbudziło sporo kontrowersji wśród kosmologów i relatywistów. Wbrew powszechnemu mniemaniu pokazuje ono, że możliwy jest w historii Wszechświata najpierw wzrost, a potem spadek gęstości materii bez osiągnięcia stanu, w którym gęstość stałaby się nieskończona. Ta ostatnia sytuacja charakterystyczna jest przy konwencjonalnym opisie dla momentu Wielkiego Wybuchu, w którym miał narodzić się nasz Wszechświat. Być może jednak wszystko odbyło się znacznie spokojniej.

Klimat po południowej stronie granicy amerykańsko-meksykańskiej jest w znaczący sposób cieplejszy niż po jej stronie północnej. Maksymalna dzienna temperatura w kilkudziesięciokilometrowym pasie w pobliżu granicy różni się średnio o około 4°C – gorzej jest w Meksyku. Przyczyną tego zaskakującego faktu jest ilość bydła wypasanego w obydwu krajach. W Stanach Zjednoczonych istnieją ścisłe ograniczenia na koncentrację bydła (na km^2), w Meksyku takich ograniczeń nie ma. W efekcie flora po meksykańskiej stronie ulega znacznemu zniszczeniu i bez tonującego wpływu roślinności klimat przypomina bardziej klimat pustynny niż ma to miejsce w USA.

Jednym z uświęconych wyników fizyki kwantowej jest twierdzenie Pauliego o związku spinu ze statystyką. Głosi ono, że zachowanie się funkcji falowej opisującej stan dwóch identycznych obiektów zależy od wewnętrznego momentu pędu (tj. spinu) tych obiektów. Jeżeli spin jest liczbą całkowitą (w jednostkach $\hbar = h/2\pi$), to operacja zamiany miejscami obiektów nie zmienia funkcji falowej. W przypadku spinu półokwadowego funkcję falową należy pomnożyć przez -1 . Obiekty pierwszego rodzaju nazywamy bozonami, drugiego – fermionami. Inne zachowanie się funkcji falowej dwóch cząstek przy ich przestawieniu jest niemożliwe. Okazuje się jednak, że wniosek ten zależy od liczby wymiarów przestrzeni – gdyby nasza przestrzeń była dwuwymiarowa, możliwe byłoby mnożenie funkcji falowej przez dowolną liczbę zespoloną o module 1. Obiekty o tej własności nazwano anyonami (z ang. any – dowolny). Być może, że w taki właśnie dziwny sposób zachowują się elektrony w niektórych kryształach o wyraźnej warstwowej strukturze, która praktycznie wyklucza przemieszczanie się elektronów w kierunku prostopadłym do warstwy. Choć jest to tylko niesprawdzona hipoteza, niektórzy badacze spekulują, że to właśnie anyony odpowiedzialne są za wysokotemperaturowe nadprzewodnictwo.