

SPIS TREŚCI

NUMERU 3(202)

Rekordy i otwarte problemy w teorii liczb <i>Andrzej Schinzel</i>	str. 1
Cichy czajnik, czyli marzenie fizyka <i>Jakub Tatarkiewicz</i>	str. 1
Cała matematyka ma zastosowania	str. 4
Drobizagki astronomiczne	str. 5
Liczby pierwsze Gaussa	str. 6
Czy krowę można wpisać w kwadrat?	str. 7
Fizycy	str. 8
Epsilon	str. 9
Liczby pierwsze i kwadraty spiralne	str.10
Metoda portretów fazowych <i>Krzysztof Maślanka</i>	str.11
Kącik prac uczniowskich	str.14
Klub 44	str.15
Korespondencyjny Klub Fizyków	str.16
Zadania	str.16
Patrz w niebo	str.17

W następnym numerze:

Matematyka i gra w szachy

KAŻDY MOŻE BYĆ KOLPORTEREM !!!

Delta tańsza o 25 %

Kupując 150 egzemplarzy *Delty* płacisz tylko 1.500,- zł za numer.
Przesyłając pod adresem redakcji dowód wpłaty
wielokrotności sumy 225 tysięcy złotych
otrzymasz tyleż paczek po 150 egzemplarzy
najbliższego numeru *Delty*.

Nasze konto:

PBK VIII OM Warszawa 370028-4170
Uniwersytet Warszawski, redakcja miesięcznika *Delta*

„Delta”
matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Edukacji Narodowej

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichocki
Roman Duda
Jan A. Gaj
Tomasz Hofmoki – wiceprzewodniczący
Tadeusz Jarzębowski
Marcin Kubiak
Andrzej Makowski
Andrzej Pelczar
Zbigniew Płochocki
Zdzisław Pogoda
Konrad Rudnicki
Zbigniew Semadeni
Grzegorz SitarSKI
Józef I. Smak
Kazimierz Stępień
Mieczysław Subotowicz
Andrzej Szymacha
Aniela Wolska
Andrzej Woszczyk
Wojciech Żakowski – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

Krzysztof Biesaga
Lidia Goettig – z-ca red. nacj.
Krystyna Kordos – sekr. red.
Marek Kordos – red. nacj.
Paweł Krawczyk
Tomasz Kwast
Anna Rudnik
Jerzy Ryll
Katarzyna Słomka
Joanna Udalska

Adres Redakcji:

Centrum Informatyczne UW
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa
tel. 20-03-81 wew. 841

Wydawca:

Uniwersytet Warszawski
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa

Nakład 18 000 egz.
Wydrukowano
w Zakładach Graficznych
w Warszawie, ul. Srebrna 16

Skład systemem TeX
wykonała redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na III kwartał 1991 r. wynosi 7 500,- zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
 - oddziały RSW właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora
 - odbioru zamówionych egzemplarzy dokonuje prenumerator w wyznaczonych punktach sprzedaży lub w inny, uzgodniony sposób,
 - urzędy pocztowe i listonosze – od prenumeratorów z terenów wiejskich lub innych miejscowości, w których nie ma oddziałów RSW, a w miastach tylko od osób niepełnosprawnych – poczta zapewnia dostawę zamówionych egzemplarzy pod wskazany adres pod warunkiem uiszczenia dodatkowej opłaty za każdy doręczany egzemplarz – opłata wynosi 500,- zł od egzemplarza,
 - Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział W-wa 370044-1195-139-11 – tylko od prenumeratorów zlecających dostawę za granicę.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
 - na kraj – do 20 XI na I kwartał roku następnego
do 20 II na II kwartał
do 20 V na III kwartał
do 20 VIII na IV kwartał
 - na zagranicę – do 31 X na I kwartał
oraz do 1 dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarza zł 2 000,-

Rekordy i otwarte problemy w teorii liczb

Andrzej SCHINZEL

W niniejszym artykule chcę przedstawić 15 nie rozwiązanych zagadnień z teorii liczb, których większość wybrana została bardziej ze względu na prostotę sformułowań niż na znaczenie teoretyczne. Znaczenie takie mają jednak zagadnienia 1-3, 10-12.

1. (C. Goldbach 1742). Czy każda liczba parzysta większa niż 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych?

Wiadomo, że odpowiedź jest pozytywna dla wszystkich liczb parzystych mniejszych od $2 \cdot 10^{10}$ (A. Granville, J. van de Lune i H. J. J. te Riele), jak również, że każda dostatecznie duża liczba parzysta jest sumą liczby pierwszej i iloczynu co najwyżej dwóch czynników pierwszych (J. R. Chen). Chen dowiódł ponadto, że dla dostatecznie dużych x liczba liczb parzystych $\leq x$, które nie są sumami dwóch liczb pierwszych, nie przekracza $x^{24/25}$.

2. Co można powiedzieć o wielkości różnicy $p_{n+1} - p_n$ między kolejnymi liczbami pierwszymi w stosunku do wielkości p_n ?

To pytanie sprowadza się do znalezienia funkcji f_1, f_2 rosnących możliwie najwolniej oraz funkcji g_1, g_2 rosnących możliwie najszybciej, takich że

$$p_{n+1} - p_n \leq f_1(p_n) \quad \text{dla wszystkich dostatecznie dużych } n,$$

$$p_{n+1} - p_n \leq f_2(p_n) \quad \text{dla nieskończenie wielu } n,$$

$$p_{n+1} - p_n \geq g_1(p_n) \quad \text{dla wszystkich dostatecznie dużych } n,$$

$$p_{n+1} - p_n \geq g_2(p_n) \quad \text{dla nieskończenie wielu } n.$$

Obecne rekordy są następujące. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ można przyjąć

$$f_1(x) = x^{a+\varepsilon}, \quad a = \frac{1051}{1920} \quad (\text{C. J. Mozzocchi}),$$

$$f_2(x) = (b + \varepsilon) \ln x, \quad b = 0, 248 \dots \quad (\text{H. Maier}),$$

$$g_1(x) = 2,$$

$$g_2(x) = (c - \varepsilon) \frac{(\ln x)(\ln \ln x)(\ln \ln \ln x)}{(\ln \ln \ln x)^2}, \quad c = 2, 33 \dots \quad (\text{H. Maier}$$

i C. Pomerance).

Przyпуска się, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ można przyjąć

$$f_1(x) = (\ln x)^2$$

$$f_2(x) = g_1(x) = 2$$

$$g_2(x) = (1 - \varepsilon)(\ln x)^2$$

3. Czy istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci $n^2 + 1$?

Największą znaną liczbą pierwszą tej postaci jest $(17 \cdot 2^{9251})^2 + 1$ (W. Keller). H. Iwaniec dowiódł istnienia nieskończenie wielu liczb postaci $n^2 + 1$, które są iloczynami co najwyżej dwóch czynników pierwszych. To samo odnosi się do dowolnego wielomianu stopnia drugiego $an^2 + bn + c$, pod warunkiem, że $a > 0$, $b^2 - 4ac$ nie jest kwadratem i największy wspólny dzielnik $a + b$, $a - b$ i c wynosi 1.

4. Czy istnieją dowolnie długie ciągi arytmetyczne utworzone

a) z liczb pierwszych,

b) z kolejnych liczb pierwszych?

Obecne rekordy są następujące. Istnieje ciąg arytmetyczny utworzony z 20 liczb pierwszych $214861583621 + 1943 \cdot 9699690k$, ($0 \leq k \leq 19$) (J. Young i J. Fry) oraz ciąg arytmetyczny utworzony z 6 kolejnych liczb pierwszych $121174811 + 30k$, ($0 \leq k \leq 5$) (L. J. Lander i T. R. Parkin).

Cichy czajnik, czyli marzenie fizyka

Jakub TATARKIEWICZ

Gdy zimowym wieczorem powracamy do domu, witają nas u kominka gościnne miłe dźwięki kociołka, w którym gotuje się woda na herbatę. (...) Powstawanie dźwięków, wydawanych przez kociołek, jest bardzo zajmujące. Dno kociołka jest tem miejscem, którego dotykają płomienie, jest więc najgorętszą częścią kociołka; tutaj właśnie najwcześniej dochodzi woda do temperatury, przy której zaczyna wytwarzać się para. Drobne pęcherzyki tej pary znajdują się z początku pod tak wysokim ciśnieniem, jakim jest ciśnienie całej, znajdującej się powyżej wody. W miarę jak pęcherzyki wznoszą się ku powierzchni, i dochodzą do chłodniejszych warstw wodnych, temperatura ich obniża się a wraz z tem maleje także i opór wewnętrzny. Nadchodzi chwila, gdy pęcherzyki pary nie mogą dłużej wytrzymać ciśnienia ze wszystkich stron: zapadają się wówczas z tak wielką gwałtownością, iż boki uderzają o siebie z głośnym cmokaniem. Zderzenie ich jest tak silne, iż upodobnić je można do tego, jak gdyby stal zderzyła się ze stalą; i oto szum kociołka się wzmaga, jak gdyby padały nań ciosy od niezliczonych drobniutkich młoteczków. Woda przekazuje te uderzenia metalowym ściankom kociołka; mogą one zresztą równie dobrze spadać na nie bezpośrednio. (...) Kociołek przestaje śpiewać, gdy wszystka woda dojdzie do punktu wrzenia, a pęcherzyki wzniosą się do jej swobodnej przestrzeni, nie zapadając się już po drodze.

Sir William Bragg Świat dźwięków,
przekład dr inż. J. Roliński,
wyd. *Mathesis Polska* (1935)

Mam nadzieję, iż wybaczą mi Państwo ten przydługi cytat, jest to jednak jedyna wzmianka w książkach naukowych o odgłosach, wydawanych przez naczynie do gotowania wody, którą udało się znaleźć. Udało się nie tylko mnie, lecz także recenzentem pracy, którą niedawno popeliłem. Praca, być może, ukaże się w jednym z czasopism zagranicznych, myślę jednak, że artykuł o tym, jak doszło do badania szumu czajników i jakie rezultaty osiągnięto, może być także interesujący dla Czytelników *Delty*. Oto opowieść o *cichym marzeniu fizyka*.

Przebywając na stypendium w Instytucie Fizyki Ciała Stałego im. Maxa Plancka w Stuttgarcie miałem w maju 1988 roku (jak wszyscy pracownicy Instytutu raz na pewien czas) przyjemność przygotowywania codziennej kawy, która jest podawana zaraz po obiedzie. Ślepy los zetknął mnie przy tej okazji z młodym fizykiem, który do Niemiec przyjechał z Bahrajnu. Samer Aljishi jest pierwszym doktorem nauk fizycznych tego małego kraju-wyspy, położonego w Zatoce Perskiej. Jednakże myliby się ten, kto przypuszczałby, że dr Aljishi jest typowym przedstawicielem nauki z tzw. trzeciego świata, bowiem doktorat otrzymał na prestiżowym uniwersytecie amerykańskim w Princeton.

Tak więc Polak i Bahrajńczyk gotowali niezliczone czajniki wody, by napoić spragnionych pracowników MPI-FKF. Rozmawialiśmy o tym i owym, lecz ciągle szum podgrzewanej wody strasznie nam przeszkadzał. Wtedy właśnie powzięliśmy pomysł skonstruowania cichego czajnika. Ostatecznie nawet fizycy mogą mieć swoje marzenia. Koledzy nieco się z nas podśmiewali, sugerując, że powinniśmy badaniami zainteresować armię angielską, gdyż przyrząd taki oddawałby nieocenione usługi w czasie działań bojowych w pobliżu wojsk nieprzyjaciela. Nie przejmowaliśmy się jednak tymi docinkami, przystępując do badań na serio.

Jak na nowoczesnych naukowców przystało, rozpoczęliśmy od komputerowego przeszukania literatury. Ku naszemu zdumieniu, po wpisaniu słów kluczowych „woda, gotowanie, szum”, otrzymaliśmy ni mniej ni więcej tylko 104 odpowiedzi! Po wydrukowaniu tytułów prac wybranych przez komputer szybko okazało się, że jednak w ciągu ostatnich dwudziestu lat nikt nie badał szumu czajników. Po prostu istnieje pewne bardzo duże urządzenie, w którym gotuje się wodę, a szum jest dla niego szkodliwy. Urządzeniem tym jest ... reaktor jądrowy. Szumi, oczywiście, strumień neutronów, raz to przechodząc, a raz nie przez bąble pary wodnej i tym samym zmieniając warunki pracy.

Jednakże z naszego punktu widzenia wśród ponad setki prac tylko dwie czy trzy mogły być interesujące, gdyż badano w nich także wpływ szumu akustycznego na wytrzymałość mechaniczną reaktora. O dziwo, wszystkie odszukane prace pochodziły z czasopism radzieckich. Po wielu perypetiach udało się zdobyć odbitki tych prac.

5. (N. L. Gilbraeth 1958). Tworzymy ciąg podwójny d_{mn} ($m = 0, 1, 2, \dots$; $n = 1, 2, \dots$) określony rekurencyjnie wzorami $d_{0,n} = p_n$, $d_{m+1,n} = |d_{m,n+1} - d_{m,n}|$. Czy prawdą jest przypuszczenie, że $d_{m,1} = 1$ dla wszystkich $m \geq 1$?

Obecnie wiadomo, że $d_{m,1} = 1$ dla wszystkich $m \leq 455\,052\,510$ (A. Odlyzko).

6. Czy istnieją liczby doskonale nieparzyste, tj. takie liczby nieparzyste n , że

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d = 2n?$$

($d|n$ oznacza, że d jest dzielnikiem n)

Wiadomo, że jeśli liczby takie istnieją, to mają co najmniej 8 różnych czynników pierwszych (P. Hagis Jr.) i są większe niż 10^{300} (R. P. Brent i G. L. Cohen).

7. (E. Catalan 1888–L. E. Dickson 1913). Czy dla każdej liczby naturalnej n ciąg $n, s(n) = \sigma(n) - n, ss(n), sss(n), \dots$ kończy się liczbą 1 lub jest od pewnego miejsca okresowy?

Odpowiedź jest pozytywna dla wszystkich liczb $n < 276$ (D. H. Lehmer i P. Poulet).

8. (R. D. Carmichael 1922). Niech

$$\varphi(n) = n \prod_{\substack{p|n \\ p \text{ pierwsze}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

będzie funkcją Eulera. Czy istnieją liczby naturalne m , takie, że równanie $\varphi(x) = m$ ma dokładnie jedno rozwiązanie?

Wiadomo, że jeśli liczba m ma żadaną własność, to $m > 10^{10\,000}$ (P. Masai i A. La Valette).

9. (D. H. Lehmer 1932). Czy istnieją liczby złożone n , takie, że $\varphi(n)|n - 1$?

Wiadomo, że jeśli liczba złożona n ma żadaną własność, to n ma co najmniej 14 różnych czynników pierwszych (G. L. Cohen i P. Hagis Jr.).

10. (E. Jacobsthal 1961). Czy prawdą jest przypuszczenie, że dla dowolnej liczby naturalnej n złożonej z r czynników pierwszych każdy ciąg $r^2 + 1$ kolejnych liczb całkowitych zawiera liczby względnie pierwsze z n ?

H. J. Kanold udowodnił powyższe przypuszczenie dla $r \leq 12$. Najlepszy obecnie znany wynik ogólny pochodzi od H. Iwańca: istnieje taka stała C , że po zastąpieniu r^2 przez $C r^2 (\log e)^2$ przypuszczenie Jacobsthal'a staje się prawdziwe.

11. Czy istnieje liczba rzeczywista r , taka, że przy dowolnym n , jeśli liczby $1, 2, \dots, [r^n]$ rozbijemy na n klas, to jedna z tych klas zawiera liczby x, y, z spełniające równanie $x + y = z$ (może być $y = x$).

Wiadomo, że jeśli r istnieje, to $r \geq \sqrt[5]{315}$ (H. L. Abbott, D. Hanson–H. Fredericksen). Z drugiej strony żadaną własność ma zbiór liczb naturalnych $1, 2, \dots, [n! (e - \frac{1}{24})]$ (I. Schur–E. G. Whitehead).

12. (P. Erdős 1974). Czy istnieje ciąg nieskończony liczb naturalnych a_i nie zawierający żadnego ciągu arytmetycznego trójwyrazowego i taki, że $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \infty$?

Nie wiadomo nawet, czy dla każdego r istnieje ciąg o żadanej własności, taki, że $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} > r$. Rekord należy do J. Wróblewskiego, który znalazł taki ciąg a_i bez ciągów arytmetycznych trójwyrazowych, że

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = 3,00849\dots$$

13. (P. Erdős 1955). Czy istnieje stała $c > 0$ o tej własności, że każdy ciąg liczb naturalnych $a_1 < a_2 < \dots < a_r$, dla którego wszystkie sumy $a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_r}$, ($1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq r$) są różne, spełnia nierówność

$$a_r \geq c \cdot 2^r ?$$

Wiadomo, że jeśli stała c ma żadaną własność, to $c \geq \frac{1}{4}$ (J. H. Conway i M. Guy). Z drugiej strony wiadomo, że $a_r \geq \frac{2^r - 1}{\sqrt{r}}$ (P. Erdős i L. Moser).

14. (P. Erdős 1950). Czy dla dowolnego c zbiór liczb naturalnych można przedstawić w postaci sumy mnogościowej skończonej liczby ciągów arytmetycznych, których różnice są wszystkie różne i nie mniejsze od c ?

Wiadomo, że odpowiedź jest pozytywna dla $c = 20$ (S. L. G. Choi).

15. (P. Erdős i E. G. Straus 1950). Czy prawdą jest przypuszczenie, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ równanie

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

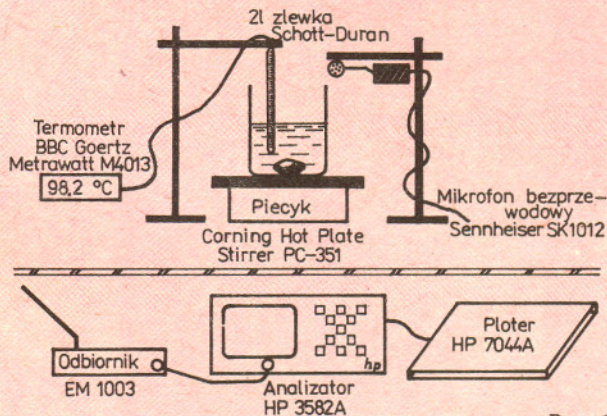
ma rozwiązania naturalne x, y, z .

Przypuszczenie zostało sprawdzone dla wszystkich liczb naturalnych $n \leq 10^8$ (N. Franceschini). Ponadto R. C. Vaughan dowiódł, że liczba ewentualnych wyjątkowych $n \leq N$ nie przekracza przy odpowiednim $c > 0$ i dowolnym N liczby $N_{\text{exp}}(-c(\log N)^{2/3})$.



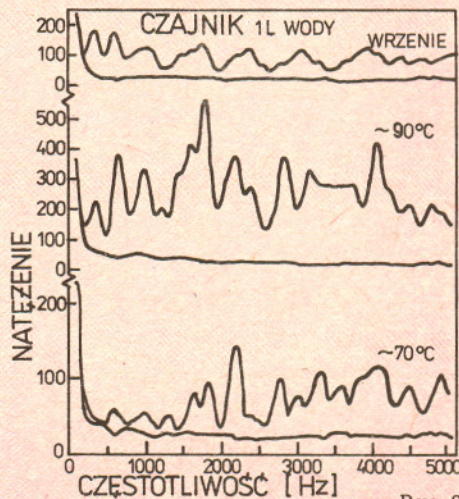
Istniejąca obecnie teoria cząstek elementarnych znana pod skromną nazwą modelu standardowego pozostaje w zgodzie z ogromną ilością danych doświadczalnych. Bodaj jedyna poważniejsza niezgodność spędzająca sen z oczu teoretykom i eksperymentatorom to tzw. problem neutrin słonecznych. Chodzi tu o wynik jednego tylko, ale za to bardzo długotrwałego, bo trwającego kilkadziesiąt lat, eksperymentu, w którym mierzy się strumień neutrin dochodzących do Ziemi ze Słońca. Zmierzona wartość strumienia okazała się trzykrotnie mniejsza niż przewidywania teoretyczne. Być może jest to efekt niedokładności modelu struktury Słońca. Wytłumaczenie takie jest akceptowalne, gdyż w doświadczeniu rejestrowano oddziaływania neutrin z chlorem, w których może uczestniczyć jedynie niewielki ułamek neutrin słonecznych. Bardziej atrakcyjną możliwość stanowi hipoteza oscylacji neutrin – procesu, w którym neutrina elektronowe zmieniałyby się w nieobserwowalne za pomocą reakcji z chlorem neutrina mionowe i taonowe. Istnienie oscylacji neutrin wymagałoby minimalnej modyfikacji modelu standardowego, a przywróciłoby symetrię pomiędzy leptonami a kwarkami. Pomimo wielkich kosztów doświadczeń neutrinowych (ze względu na minimalną reaktywność neutrin potrzebne są ogromne ilości substancji czynnej i ekranowanie od efektów promieniowania kosmicznego; to ostatnie wymaga umieszczenia doświadczeń głęboko pod ziemią), w najbliższym dziesięcioleciu dwa nowe eksperymenty powinny rozstrzygnąć problem neutrin słonecznych. W pierwszym z nich, przeprowadzanym we Włoszech, w tunelu pod Gran Sasso, badane będą oddziaływania neutrin elektronowych z jądrami galu (potrzebna ilość galu wynosi około połowy rocznej światowej produkcji!). Reakcja taka jest czuła na liczniejsze neutrina o innych energiach niż w przypadku oddziaływań z jądrami chloru. W drugim doświadczeniu, niedawno zaaprobowanym przez rząd Kanady, substancją czynną będzie 1000 ton ciężkiej wody umieszczonej w kopalni niklu Sudbury. Użycie ciężkiej wody pozwoli na rejestrowanie wszystkich typów neutrin. Tym samym możliwy będzie bezpośredni test hipotezy oscylacyjnej.

Okazało się, że woda gotowana w trakcie przepływu w rurze wytwarza wyjątkowo skomplikowane widmo drgań akustycznych. A więc jednak jest co badać!



Rys. 1

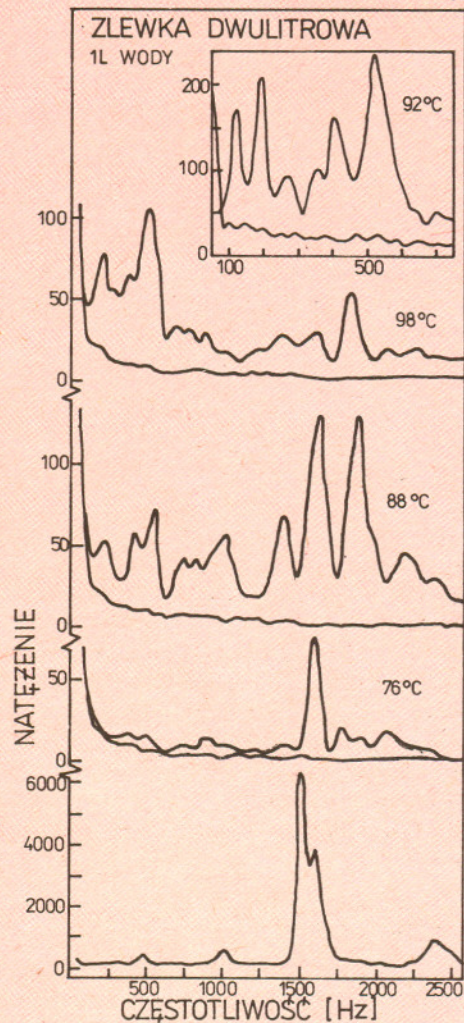
Korzystając z pomocy zaprzyjaźnionych techników zestawiliśmy układ pomiarowy (jak na rysunku 1). Największym problemem było pożyczenie analizatora widm, gdyż jest to urządzenie bardzo drogie. Pomocną dłoń wyciągnął do nas prof. Klaus von Klitzing (tak, ten od kwantowego efektu Halla), nieco tylko podśmiewając się z naszego „problemu”. Chcąc wykonywać eksperyment w jak najlepszych warunkach umieściliśmy układ do grzania wody w jednym pokoju, a w pokoju przyległym, oddzielnym podwójną szybą, ustawiliśmy analizator. Skorzystaliśmy przy tym z mikrofonu bezprzewodowego, wykorzystywanego na sali wykładowej. Mogliśmy więc obserwować gotowanie wody i jednocześnie wymieniać uwagi bez uciążliwego milczenia. A mieliśmy o czym rozmawiać!



Rys. 2

Już pierwsze pomiary wykazały (patrz rysunek 2), że typowy czajnik szumi w sposób niezwykle skomplikowany.

Teraz stało się jasne, dlaczego dotąd nie badano szumu czajników metodami naukowymi – przecież analiza fourierowska drgań akustycznych stała się w praktyce możliwa dopiero w momencie wynalezienia komputerów oraz odpowiednich algorytmów (tzw. szybka transformata fourierowska). Poza tym te wymyślne widma... Postanowiliśmy więc wykonywać dalsze doświadczenia na cylindrycznej zlewce szklanej o pojemności 2 litrów (taką akurat mieliśmy pod ręką).



Rys. 3

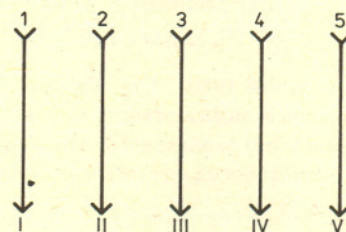
Uderzając linijką stwierdziliśmy, że po nalaniu jednego litra wody rezonans własny zlewki występuje przy około 1600 Hz (rysunek 3). Jednakże w podwyższonych temperaturach zaczynały pojawiać się dodatkowe maksima rezonansowe. Chcąc upewnić się, iż rzeczywiście pochodzą one od szumu wody, zrobiliśmy serię eksperymentów z różnymi ilościami wody w zlewce. Okazało się, że maksima rezonansowe przesuwają się w zależności od napełnienia zlewki. Należało więc pomyśleć nieco o teorii, która pozwoliłaby wyjaśnić zaobserwowane efekty.

Pewien Japończyk zaprosił gości na party i, jako człowiek niezwykle gościnny, przygotował dla wszystkich małe upominki. Chciał jednak, aby zostały one przez gości wylosowane w sprawiedliwym losowaniu. Zaproponował więc następującą procedurę:

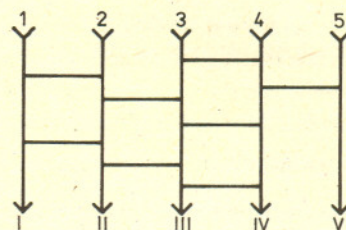
- numerujemy gości:

1, 2, 3, 4, 5, ... i prezenty:

I, II, III, IV, V, ... oraz rysujemy tabelkę,

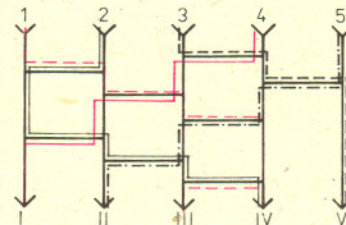


- następnie każdy z gości rysuje ile chce kresk poziomych łączących po dwie sąsiednie kreski pionowe,



- teraz wychodząc od numeru gościa wędrujemy po kreskach w dół, z tym że napotykając skrzyżowanie trzeba **koniecznie** skrócić – w dół lub w bok !

W ten sposób dochodzimy do numeru prezentu, który przypada danemu gościowi. Tu mamy 1 → III, 2 → IV, 3 → V, 4 → I, 5 → II.



Japończyk molestowany przez gości powiedział tylko, że wypróbował ten sposób w wielu przypadkach i że zawsze działa, ale nie wiadomo dlaczego. Jeden z gości – matematyk – bardzo się ucieszył. Zobaczył bowiem po raz pierwszy w życiu jakies zastosowanie twierdzenia o rozkładzie permutacji na transpozycje!

wg opowieści Włodzimierza Zadroznego zapisała
Agnieszka WOJCIECHOWSKA

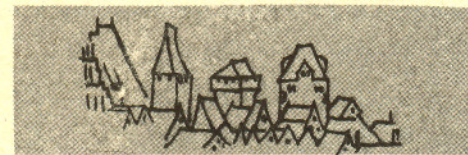
Dla objaśnienia przypominamy, że permutacja to dowolna zmiana kolejności wyrazów ciągu skończonego, a transpozycja to taka permutacja, w której zmieniona została kolejność jedynie pewnych dwóch sąsiednich wyrazów.



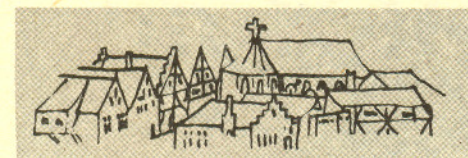
W prasie naukowej, w czasopiśmie *Physical Review Letters B* (vol. 233 no 3/4, str. 530) ukazała się ostatnio praca z dziedziny fizyki wysokich energii pod pewnym względem tak wszechstronna, że stanowi godzien odnotowania fakt historyczny. Po raz pierwszy w dziejach fizyki opublikowana została praca, w której lista autorów zawiera przynajmniej jedno nazwisko na każdą literę alfabetu, od A do Z. W sumie wymienionych jest 449 autorów, ale to nie stanowi bynajmniej rekordu. Największą liczbę autorów, 562, miała dotychczas praca opublikowana również w *Physical Review Letters B* (vol. 231, no 4, str. 539).

W czerwcu 1670 r. pewien bystrooki mnich z Dijon (Francja) zauważył nową gwiazdę około 3 wielkości w pobliżu Albireo w Łabędziu. Gwiazda ta była później obserwowana m.in. przez Heweliusza. Jej jasność spadała do zimy owego roku, po czym wzrosła znowu wiosną następnego roku. Obecnie znana jest jako CK Vulpeculae (Lisa) w katalogu gwiazd zmiennych.

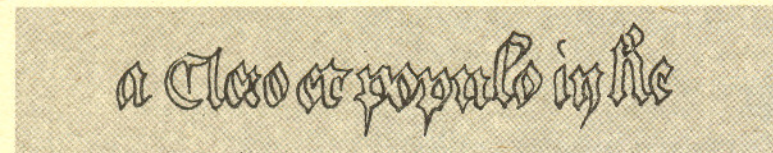
Kilka lat temu gwiazda ta została skrupulatnie przebadana przez astronomów amerykańskich, w wyniku czego okazało się, że jest to najmniej aktywna nowa ze wszystkich znanych obiektów tego typu. Po określeniu jej odległości i jasności widomej jej jasność absolutną oszacowano na około 0,01 słonecznej. Tymczasem typowe gwiazdy nowe w okresie między wybuchami mają jasność absolutną porównywalną ze słoneczną. Istnienie tak słabego obiektu sugeruje, że nasze oceny częstości występowania nowych mogą być znacznie zaniżone.



W gwiazdozbiore Lwa leży gwiazda 15 wielkości o symbolu katalogowym PG 1031 + 234. Jest to biały karzeł, którego promieniowanie wykazuje silną polaryzację i rozszczepienie linii widmowych, a wszystko to zmienia się w okresie $3^h 24^m$. Wnioskuje się z tego, że jest to wirujący z takim właśnie okresem biały karzeł obdarzony ponadto rekordowym polem magnetycznym, sięgającym 700 mln Gs ($7 \cdot 10^4$ T). Dla porównania – ziemskie pole magnetyczne ma natężenie rzędu 1 Gs.



Mark Sykes z grupą astronomów z University of Arizona kilka lat temu, na podstawie obserwacji nieba wykonanych przez pracującego w podczerwieni satelitę IRAS, wykrył obecność kilkunastu pyłowych śladów po kometach. Okazało się, że najsilniej w podczerwieni świeci ślad po komecie Tempel 2. Zaobserwowano też pasma pyłu po kometach Enckego, Gunna, Kopffa i innych, jak również ślady nie należące do żadnej ze znanych komet okresowych.



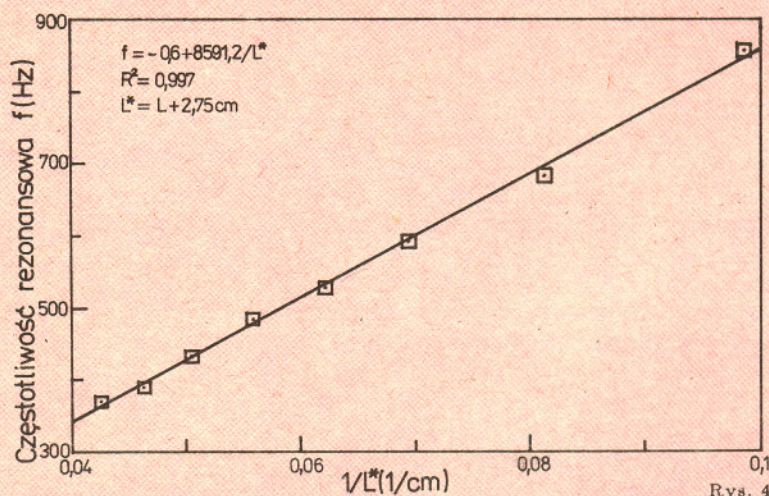
Trudno byłoby dociec, ilu ludzi w roku 1975 wierzyło np. w istnienie życia na Marsie – chyba niewielu. Niemniej jednak trzeba było wcześniej czy później to sprawdzić. Misja Vikingów, które po wylądowaniu na Marsie badały obecność śladów życia w jego gruncie, jest chyba najlepszym przykładem przedsięwzięcia, w którym niesłychanym nakładem kosztów i pracy uzyskano wynik negatywny, w dodatku oczekiwany z góry.

Z punktu widzenia akustyki zlewka jest analogiem klarnetu, tj. rury akustycznej o jednym zatkanym końcu. Jak łatwo można sprawdzić w każdym podręczniku akustyki, częstości f drgań rezonansowych takiej rury są opisane prostym równaniem:

$$f = \frac{nv}{4l},$$

gdzie n jest jedną z nieparzystych liczb (1, 3, 5...), v jest prędkością dźwięku, l zaś jest długością słupa powietrza w rurze.

Już w XIX wieku Lord Rayleigh stwierdził, że ze względu na skończony przekrój rury należy wprowadzić poprawkę do l – zwykle przyjmuje się poprawkę addytywną, równą ok. 0,6 promienia rury.



Rys. 4

Nam udało się wyznaczyć tę poprawkę eksperymentalnie. Jak pokazuje rysunek 4, liniowe dopasowanie częstości rezonansowej w zlewce, w której podgrzewa się wodę, do odwrotności wysokości słupa powietrza nad lustrem wody daje poprawkę 2,75 cm. Nasza zlewka miała średnicę około 11 cm, a więc poprawka wyznaczona eksperymentalnie zgadza się dość dobrze ze wzorem Rayleigha. Proszę zwrócić uwagę, że gotowana woda wzbudza w powietrzu zawartym w zlewce drgania akustyczne innego typu niż drgania wytwarzane przez uderzenie – jest to jednak zrozumiałe, gdyż uderzenie ze względu na swą siłę powoduje przede wszystkim drgania wyższych harmonicznych ($n = 3$), natomiast woda...

No właśnie, właściwie dlaczego woda wzbudza drgania powietrza?! Tu z pomocą przysłała nam obserwacja zachowania się wody w trakcie podgrzewania.

Zauważyliśmy, że wraz ze wzrostem temperatury, gdzieś powyżej temperatury 70 stopni Celsjusza, w wodzie pojawia się coraz więcej bąbelków pary wodnej. Jest oczywiście, że (tak plastycznie opisane przez Sir Williama) rozprężanie, a potem zapadanie się bąbelków pary wodnej w intensywnie grzanej warstwie dennej naczynia jest właśnie powodem powstawania hałasu. Udało się nam dotrzeć do prac, w których próbowano oszacować częstości akustyczne, wytwarzane przy zapadaniu się bąbelków gazu. Prace te dotyczyły wprawdzie ... cichego poruszania się łodzi podwodnych (zapadanie się bąbelków wytwarzanych przez śruby napędowe), ale otrzymywane częstości rzędu 100 Hz dobrze pasują do tych obserwowanych w naszym eksperymencie.

Pora więc odpowiedzieć na tytułowe pytanie: Jak zrobić cichy czajnik??? Uważni Czytelnicy zauważyli już pewnie (rysunek 1), że do podgrzewania wody stosowaliśmy piecyk wyposażony w mieszacz magnetyczny. Ostatni eksperyment, jaki przeprowadziliśmy, to gotowanie wody połączone z intensywnym mieszaniem. Aż do temperatury ponad 95 stopni Celsjusza szum wydostający się ze zlewki był minimalny. Podobnie gotowanie wody dejonizowanej w nowiutkiej zlewce (nie polecamy takiego eksperymentowania, gdyż grozi ono eksplozywnym wrzeniem wody – brak centrów nukleacji) nie powodowało prawie żadnego szumu. Wszystko stało się jasne: źródłem szumu są bąbelki pary wodnej, wytwarzane na dnie czajnika. Tak więc cichy czajnik powinien mieć bardzo gładką powierzchnię wewnętrzną (produkowano kiedyś u nas czajniki teflonowane, co wydawało mi się wtedy zbyt technologicznym) oraz powinno się w nim mieszać wodę. Oczywiście, kształt czajnika powinien być nieregularny, by wykluczyć jak największą akustycznych modów rezonansowych. W konstrukcji takiego czajnika można by także wykorzystać do mieszania wody mały motorek, napędzany siłą termoelektryczną, wynikającą z różnicy temperatur między dnem a rączką. Ale tym już niech się martwią producenci – fizykom wystarczy stwierdzenie *dlaczego* czajnik szumi.

Na koniec, życząc Czytelnikom *Delt* przyjemnych wieczorów przy (jeszcze) szumiących czajnikach, nie mogę powstrzymać się od ogólniejszej uwagi. Otóż wydaje mi się, że pomimo olbrzymich postępów fizyki ciągle łatwo możemy znaleźć wokół siebie zadania, których rozwiązywanie także dostarczy prawdziwej frajdy. Czasami nawet większej niż „prawdziwe” problemy wielkiej fizyki.

Liczby pierwsze Gaussa

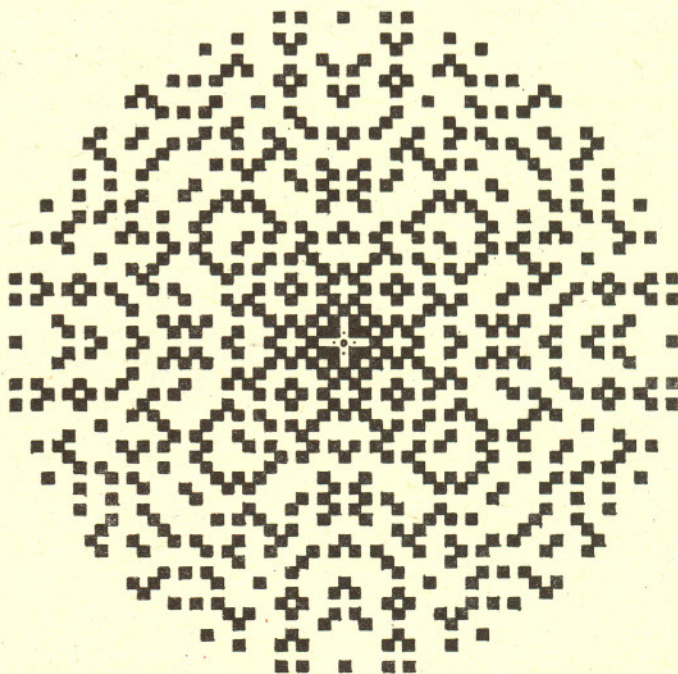
Liczbami całkowitymi na płaszczyźnie zespolonej nazwiemy liczby postaci $a + bi$, gdzie a i b są całkowite. Wśród nich liczbami pierwszymi Gaussa nazywamy te, których nie można przedstawić w postaci iloczynu liczb całkowitych różnych od $\pm i$, ± 1 .

Porównując tradycyjne liczby pierwsze z liczbami pierwszymi Gaussa dostrzegamy, że nie każda liczba pierwsza (ta tradycyjna) jest liczbą pierwszą Gaussa, np.

$$\begin{aligned} 2 &= (1+i)(1-i), & 5 &= (2+i)(2-i), \\ 13 &= (2+3i)(2-3i), & 17 &= (4+i)(4-i), \\ 29 &= (5+2i)(5-2i), \text{ itd.} \end{aligned}$$

Z drugiej strony, liczby pierwsze postaci $4k-1$, czyli liczby 3, 7, 11, 19, 23, ... są liczbami pierwszymi Gaussa (dlaczego?). Obok nich pojawiają się „nowe” liczby pierwsze Gaussa: $\pm 1 \pm i$, $\pm 2 \pm i$, $3i$, $\pm 2 \pm 3i$, $\pm 4 \pm i$, $\pm 5 \pm 2i$, itd.

Poniżej prezentujemy rozmieszczenie liczb pierwszych Gaussa, których moduł jest mniejszy od 1000.



Oczywiście symetria rysunku wynika z faktu, że jeśli $a + bi$ jest liczbą pierwszą Gaussa, to również $\pm a \pm bi$ oraz $\pm b \pm ai$ są liczbami pierwszymi Gaussa.

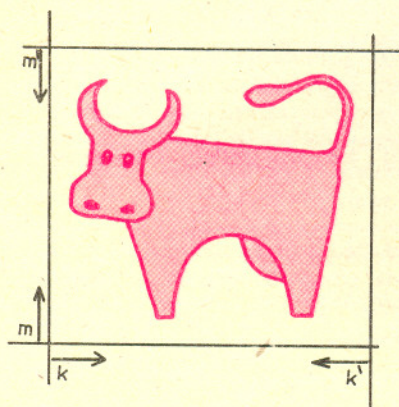
Jarosław GÓRNICKI



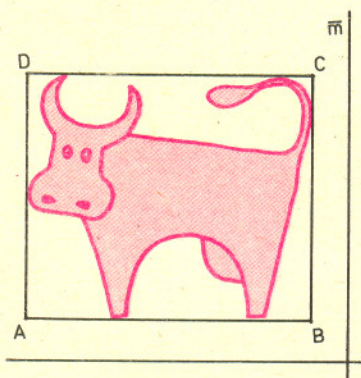
Rozwiązanie zadania M 598. Zauważmy, że wykonanie pojedynczego kroku polega na pomnożeniu liczb stojących w wierzchołkach jakiegoś ustalonego wielokąta foremnego przez -1 . Stąd prosty wniosek, że układ końcowy nie zależy od kolejności wykonywania kroków, oraz że wielokrotne wykonanie tego samego kroku (tzn. zmiana znaków dla

tego samego wielokąta) jest równoważne wykonaniu tego kroku raz lub wcale. Dlatego liczba układów możliwych do otrzymania z ustalonego układu początkowego jest równa liczbie wszystkich podzbiorów zbioru wielokątów foremnych o wierzchołkach w wierzchołkach piętnastokąta foremnego, co, jak łatwo sprawdzić, równa się 2^8 (są trzy pięciokąty i pięć trójkątów). Z drugiej strony liczba wszystkich układów jest równa 2^{15} , więc wszystkich osiągnąć się nie da.

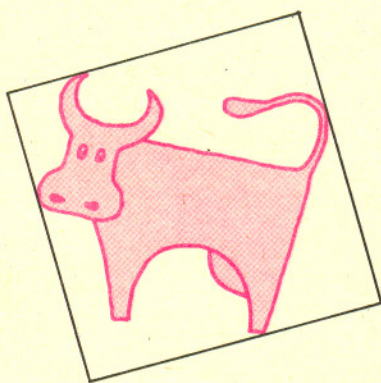
Czy krowę można wpisać w kwadrat?



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Jednym z najważniejszych pojęć matematycznych jest ciągłość. Założenie jej prowadzi do bardzo interesujących, a czasem nawet zaskakujących wniosków. Klasyczną własnością (zwaną własnością Darboux choć to nie Gaston Darboux jest jej autorem!) jest przyjmowanie wszystkich wartości pośrednich przez funkcję ciągłą na przedziale, oraz uogólnienia tego faktu. Konsekwencje tego mogą nas niejednokrotnie zaskoczyć. Oto przykład: jakąkolwiek postać (np. krowę lub kota) narysuje dziecko na kartce, zawsze można ją wpisać w kwadrat. Bardziej matematycznie: jeśli K jest krzywą zamkniętą na płaszczyźnie, to na K zawsze można opisać kwadrat.

Co to znaczy: wpisać krzywą w kwadrat lub – ogólniej – w prostokąt? Wybierzmy dowolną linię prostą m rozłączną z daną krzywą (rys. 1) i przesuwać ją prostopadłe do jej kierunku, aż do momentu zetknięcia się z krzywą. Następnie wybieramy taką prostą m' , równoległą do m , że krzywa leży między obiema prostymi i znów przesuwać ją tak, by zetknęła się z krzywą. Dalej wybieramy dwie proste k i k' , prostopadłe do m , takie, by krzywa była zawarta między nimi, a następnie powtarzamy operację jak w przypadku m i m' . Otrzymane proste wyznaczają pewien prostokąt, w który krzywa będzie wpisana.

Krótko mówiąc, krzywa jest wpisana w prostokąt, gdy się w nim zawiera i z każdym z boków ma przynajmniej jeden punkt wspólny. Mając dany dowolny kierunek możemy skonstruować prostokąt, w który krzywa jest wpisana, i którego jeden z boków wyznacza tenże kierunek. Pokażemy, że zawsze można wybrać kierunek tak, by prostokąt ów był kwadratem.

Oznaczmy wierzchołki prostokąta przez A, B, C, D , tak, by bok AB był równoległy do kierunku m . Przez $f(m)$ oznaczmy długość boku AB , przez $g(m)$ długość boku AD . Niech $H(m) = f(m) - g(m)$. Prostokąt będzie kwadratem, gdy $f(m) = g(m)$, czyli $H(m) = 0$ (rys. 2).

Zauważmy, że gdy \bar{m} będzie prostą prostopadłą do m i dla niej przeprowadzimy odpowiednią konstrukcję prostokąta, to $g(\bar{m}) = f(m)$ i $f(\bar{m}) = g(m)$, czyli

$$f(\bar{m}) - g(\bar{m}) = -(f(m) - g(m)).$$

Jeśli prostą m będziemy obracać (dookoła ustalonego na niej z góry punktu), to nasz prostokąt będzie się zmieniać. Własności $H(m)$ zależą w sposób ciągły od położenia prostej m . Z przedstawionych wyżej własności wynika, że H przyjmuje wartości różnych znaków, musi więc przyjąć wartość zero. Stąd wnioskujemy, że istnieje taki kierunek m , dla którego prostokąt opisany na krzywej K jest kwadratem.

Można więc, na przykład, opisać kwadrat na rysunku krowy.

Przedstawione rozumowanie nie jest precyzyjnym dowodem, lecz jedynie jego szkicem. Dokładnego określenia wymaga dziedziną funkcji H (korzystamy z własności Darboux, więc wypada mieć przedział – gdzie on jest?). Należy formalnie uzasadnić, że funkcja H jest ciągła ...

A co z pytaniem tytułowym? Mówiliśmy o rysunku krowy. Oryginalna krowa jest jednak tworem trójwymiarowym i należałoby się raczej pytać o możliwość jej wpisania w sześcián. Jeśli już stawiamy pytania, można się zastanowić, czy w krzywą zamkniętą da się wpisać kwadrat (a w przypadku trójwymiarowym – sześcián). W ten sposób można kontynuować badanie rozmaitych, niekiedy dosyć osobliwych, własności, u podstaw których leży pojęcie ciągłości.



Urodziłam się w 1953 roku. Moją cechą (wadą? zaletą?) od dzieciństwa było pragnienie, by osiągać cele szybko, nie szcędząc pracy czy wysiłku. Toteż do szkoły podstawowej zaczęłam chodzić mając sześć lat, co było w owych czasach nie lada osiągnięciem, jako że ławki zajmował wyż demograficzny. W szkole lubiłam po trochu wszystkie przedmioty, a więc byłam typowym materiałem na osobę, która może studiować na dowolnym kierunku, ale bez ogromnej pasji.

Wielka miłość do fizyki przyszła późno, bo dopiero w IV klasie IX Liceum Ogólnokształcącego im. K. Hoffmanowej w Warszawie, gdy na horyzoncie pojawił się wyjątkowy nauczyciel, Profesor Witold Łuczniak. Myślę, że wszyscy w klasie odkryliśmy wtedy nagle piękno fizyki, bo zaczęliśmy interesować się tym i rozumieć to, co dzieje się wokół nas. Zakochaliśmy się w fizyce, a żeńska część klasy i w naszym Panu Profesorze.

Potem, w roku 1971 przyszedł czas studiów, świadomie wybranych, choć jeszcze rok wcześniej marzyła mi się geologia, medycyna, biologia lub elektronika. Zrozumiałam nagle, że fizyka – i tylko ona – pozwoli mi poznać prawdę o otaczającym świecie i prawa nim rządzące, a co więcej, w późniejszej pracy pozwoli mi uczestniczyć w tym procesie poznania. Skoro więc się zdecydowałam, to znowu chciałam chłonąć wszystko maksymalnie szybko i studia na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego skończyłam w 1975 roku, rok wcześniej niż większość moich kolegów.

Po ukończeniu studiów zaczęłam pracę w Zakładzie Fizyki Ciała Stałego Instytutu Fizyki Doświadczalnej Uniwersytetu Warszawskiego. Wybór jako specjalizacji fizyki ciała stałego wiązał się z pragnieniem odczuwania potrzeby moich badań nie tylko dla lepszego poznania praw rządzących otaczającym nas światem, ale i dla ułatwiania naszego codziennego życia. Chciałam po prostu, by wyniki moich badań znajdowały konkretne zastosowania. Fizyka ciała stałego niemal automatycznie spełnia to życzenie – materiały badane znajdują szerokie zastosowanie zarówno w przedmiotach używanych na co dzień, jak i w bardziej wyrafinowanych przyrządach, choćby tych, które latają daleko od nas w przestrzeni kosmicznej. I tak zostałam fizykiem ciała stałego, którym jestem do dziś. W roku 1979 obroniłam pracę doktorską, a w 1987 – pracę habilitacyjną. W zeszłym roku mianowano mnie na stanowisko docenta.

W międzyczasie odbyłam dwa zagraniczne staże naukowe. W latach 1980–1982 pracowałam w Massachusetts Institute of Technology w Bostonie, a w latach 1987–90 na Uniwersytecie Kalifornijskim w Berkeley koło San Francisco. Obie uczelnie należą do najlepszych w Stanach Zjednoczonych. Z przyjemnością muszę stwierdzić, że obserwacje poczynione w trakcie w sumie pięcioletniego pobytu w USA wyleczyły mnie z wszelkich typowych polskich kompleksów. Dziś z pełnym przekonaniem mogę stwierdzić, że polska szkoła fizyki jest szkołą bardzo dobrą, otwiera nam szeroko drzwi w świat i pozwala z wyśmienitej pozycji współpracować z renomowanymi ośrodkami światowymi. Polscy fizycy cenieni są bardzo wysoko na całym świecie. Tu, w tej dziedzinie marzenie o wspólnej Europie, ba, o wspólnym świecie, nie jest utopią.

W swojej pracy naukowej prowadzę badania defektów w kryształach półprzewodnikowych. Niedosięgniętym przez naturę i człowieka ideałem są kryształy o niezaburzonej strukturze, złożone z atomów ustawionych w równych odległościach. Rzeczywiste kryształy mają defekty, jak choćby przymieszki obcych atomów, luki (puste miejsca węzłowe, w które nie wbudował się żaden atom) czy też atomy wbudowane w miejscach nieprawidłowych. Defekty w sposób bardzo istotny wpływają na własności elektryczne i optyczne półprzewodników, a więc te własności, które wykorzystuje się w zastosowaniach tych materiałów. Nasze badania prowadzone są w kierunku zrozumienia znaczenia poszczególnych defektów dla własności półprzewodników i przede wszystkim określenia struktury mikroskopowej tych defektów. Jest to niesłychanie fascynujące, gdy pośrednio z badań elektrycznych i optycznych można wnioskować, jak wygląda w kryształach mały obiekt, wielkości kilku Å, którego nie da się zobaczyć bezpośrednio nawet za pomocą najlepszego mikroskopu elektronowego. Uważam, że największym osiągnięciem naszej grupy było pokazanie, iż głównym defektem kryształu półprzewodnikowego arsenku galu jest tzw. antystrukturalny arsen, czyli atom arsenu, który zamiast w swoje miejsce, wbudowuje się w miejsce właściwe dla galu. Okazuje się, że przeciętnie jeden na milion atomów arsenu wbudowuje się w miejsca galowe w arsenku galu.

Maria KAMIŃSKA



Rozwiązanie zadania M 592. Niech

$S_i(t)$ oznacza odległość od środka stołu do końca minutowej wskazówki i -tego zegarka w chwili t , zaś O_i – odległość od środka stołu do środka i -tego zegarka. Ponieważ podwojona długość środkowej w trójkącie jest nie większa od sumy długości sąsiadujących z nią boków, więc

$$S_i(t) + S_i(t + 30 \text{ min}) \geq 2O_i.$$

Dodając te nierówności

stronami dostajemy:

$$\sum S_i(t) + \sum S_i(t + 30 \text{ min}) \geq 2 \sum O_i,$$

więc albo $\sum S_i(t)$, albo

$$\sum S_i(t + 30 \text{ min}) \text{ jest nie mniejsza od } \sum O_i.$$

Redakcja *Epsilon* ogłasza nieustający konkurs na temat: „Matematyka z przymrużeniem oka”. Prosimy o nadsyłanie nam dowcipów matematycznych, żartów, rysunków, anegdot, wypowiedzi o matematykach itp. Szczególnie mile widziane są autentyczne cytaty z wykładów, referatów czy lekcji matematyki, zwłaszcza ilustrowane. Najciekawsze będziemy publikować. P widujemy nagrody.

O problemie izometrii

Wśród problemów matematycznych wyróżniają się takie, które mają elementarne sformułowania, ale na rozwiązania wcale nie jest łatwo wpaść. Jednym z najładniejszych przykładów jest problem izometrii, bez trudu zrozumiały przez licealistę.

Rozważmy przekształcenie płaszczyzny o następującej własności:

(*) Jeśli odległość dwóch punktów jest równa jeden, to odległość ich obrazów też wynosi jeden.

Czy takie przekształcenie musi być izometrią?

Problem kusi prostotą swej postaci, rozwiązanie jednak wcale się od razu nie nasuwa... Redakcji *Epsilon* znanych jest wielu matematyków, którzy bezskutecznie próbowali zadanie pokonać. W literaturze istnieje kilka (niezależnych) opublikowanych dowodów; najstarszy spośród nam znanych pochodzi z 1953 roku (praca Beckmana i Quarlesa w *Proceedings of the American Mathematical Society*).

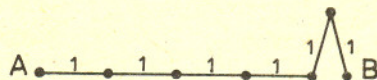
Poniżej przedstawiamy ideę najprostszego chyba rozumowania. Problem, postawiony w Kole Matematyków Studentów UJ przez Edwarda Kanię, rozwiązał w 1980 r. Sławomir Kołodziej (wówczas student I roku). Oto schemat jego dowodu. Odległość (euklidesową) punktów A i B oznaczamy przez $|AB|$, badaną funkcję o własności (*) przez f , okrąg o środku P i promieniu r przez $o(P, r)$.

- (1) Wierzchołki trójkąta równobocznego o boku 1 przechodzą w wierzchołki trójkąta równobocznego o boku 1.
- (2) Jeśli $|AB| = \sqrt{3}$, to $|f(A)f(B)|$ wynosi 0 lub $\sqrt{3}$ (wystarczy skonstruować odpowiedni romb i skorzystać z (1)).
- (3) Jeśli $|AB| = \sqrt{3}$, to $|f(A)f(B)| = \sqrt{3}$ (weźmy okrąg $o(A, \sqrt{3})$, oraz punkty B i C leżące na tym okręgu, odległe o 1. Z (2) oraz (*) wynika, że $f(B)$ i $f(C)$ muszą leżeć na okręgu $o(f(A), \sqrt{3})$).

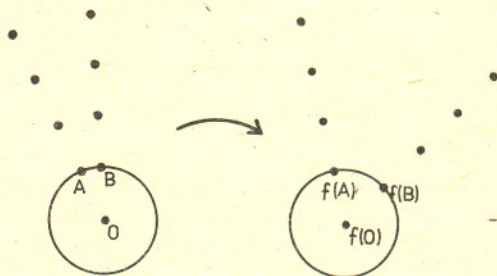
W numerze 2 *Epsilon* opowiemy o izometriach trochę więcej.

(4) Wierzchołki „nieskończonej siatki” utworzonej przez trójkąty równoboczne o boku 1 przechodzą na wierzchołki takiej samej siatki (co wynika bezpośrednio z (2)). W szczególności – na dowolnej prostej, punkty odległe o liczbę całkowitą po przekształceniu leżą też na jednej prostej, w tej samej odległości.

(5) Jeśli $|AB| \leq n$, to $|f(A)f(B)| \leq n + 1$ (wystarczy skonstruować $n + 2$ odpowiednich punktów odległych o jeden).



(6) Każdy okrąg o promieniu 1 jest przekształcany izometrycznie na okrąg o promieniu 1. (jeśli nie, to znajdziemy na okręgu $o(P, 1)$ dwa punkty A i B , których odległość się zwiększy; ich obrazy leżą na okręgu jednostkowym o środku $f(P)$. Zwiększać się będzie także odległość obrazów punktów na prostych PA i PB odległych od P o tę samą liczbę całkowitą (korzystamy z (4)), co, dla punktów odpowiednio dalekich od P , przeczy własności (5)).



Z punktu (6) łatwo już wynika, że f jest izometrią.

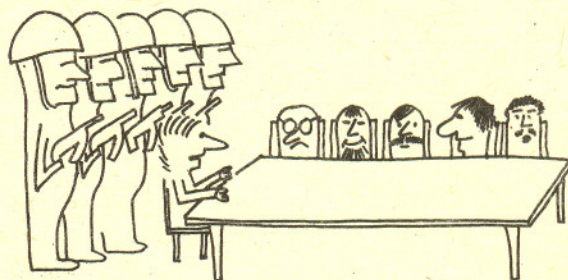
Na zakończenie zauważmy, że z powyższego twierdzenia błyskawicznie można otrzymać rozwiązanie zadania 9 bieżącej Olimpiady Matematycznej.

Kącik olimpijczyka

Tym, którzy mają kłopoty z rozwiązywaniem zadań olimpijskich, a także innym, którym nie zawsze udaje się przeprowadzić dowody twierdzeń, polecamy kilka niestandardowych metod dowodzenia (większość z nich pochodzi z archiwum Instytutu Matematyki Najwspółczesniejszej, o którym przy innej okazji)

- dowód przez kalendarz (to było w zeszłym roku),
 - dowód cybernetyczny (to automatycznie wynika z ...),
 - dowód przez ogląd (jak łatwo widać),
 - dowód przez autorytet (jak napisano w Delcie),
 - dowód iluzjonistyczny (zrobimy teraz małą sztuczkę),
 - dowód przez sztuciec (a nuż wyjdzie)
- i najbardziej efektywny
- dowód przez założenie tezy.

Galeria Jednego Cytatu



„Rząd nie może podskoczyć”

(z wykładu o różniczkowości dla studentów matematyki)

Krzysztof MAŚLANKA

Teoria równań różniczkowych dawno już awansowała do rangi samodzielnej i solidnej dyscypliny matematycznej, a zajmujący się nią z pewnością nigdy nie narazi się na zarzut, że jego przedmiot jest niemodny. Z praktycznego punktu widzenia ważna jest tu nietrywialna odpowiedniość, jaka niewątpliwie zachodzi między (niektórymi) równaniami różniczkowymi a prawami fizyki lub, bardziej wzniosle, prawami natury. Jest w tym jakieś odbicie pełnej głębokiej treści uwagi amerykańskiego fizyka węgierskiego pochodzenia, Eugene'a Wignera, który mówił o *niepojętej skuteczności matematyki w opisie rzeczywistości*.

Wspomniana odpowiedniość: *równanie różniczkowe – prawo fizyki* nie jest bynajmniej jakimś eleganckim, wzajemnie jednoznacznym przyporządkowaniem. Nie każde równanie musi koniecznie opisywać jakąś rzeczywistość. Z kolei pewne równania zawsze miały wielkie powodzenie: po prostej zmianie nazw swych współczynników mogą przydać się do opisu zupełnie nowych zjawisk.

Z czysto praktycznego punktu widzenia, na kimś, kto otrzymał jakieś równanie różniczkowe wraz z bezdusznym rozkazem „do rozwiązania”, robi ono zwykle wrażenie mniej lub bardziej perfidnie zaprojektowanej szkatułki bez klucza, w której wnętrzu ukryto całą rodzinę rozwiązań.

Wyobraźmy sobie zatem dość typowy scenariusz. Oto wyrachowany Praktyk (Fizyk lub Inżynier), otrzymawszy w wyniku swych badań pewne równanie różniczkowe próbuje jakoś wydłubać choćby jedno rozwiązanie *ściśle* i na tej podstawie powiedzieć coś o upragnionej interpretacji fizycznej. Na początek sięga do jakiejś autorytatywnej monografii, np. *Teorii równań różniczkowych* Arnolda, przez co wyraźnie pogłębia swe rozeznanie w temacie, ale nie posuwa naprzód sprawy rozwiązania. Eleganckie i wyrafinowane paragrafy *Analizy* Maurina pogłębiają tylko stan przygnębienia.

Mrucząc pod nosem jakieś niewybredne uwagi na temat poziomu wykształcenia, jakie mu zaaplikowano w przeszłości, nasz Praktyk postanawia zwrócić się do znajomych Matematyków: są w końcu specjalistami, niech ruszą głową. Pierwszy lepszy ze spotkanych uprzejmie wymawia się (*ja jestem Probabilistą*), drugi obiecuje popytać znajomych, którzy udowodnią, że rozwiązania istnieją, kolejny wreszcie roztacza wizję starej i eleganckiej teorii grup Liego, pozwalającej, w oparciu o pojęcie symetrii, skutecznie i radykalnie upraszczać równania, redukując ich stopień oraz liczbę, a nawet ... rozwiązać *ściśle*. Nasz Praktyk, nie wierząc własnym uszom, drżącym głosem zapytuje o szczegóły

tak niezwyklej metody, wychwalając w duchu geniusz wielkiego Liego. Okazuje się, że równanie musi być symetryczne, czyli „niezmiennicze względem jakiejś grupy ciągłej”. Jednak usilne przyglądanie się badanemu równaniu dowodzi, że nie raczy ono wykazywać śladów jakiegokolwiek symetrii.

Doznawszy takiego zawodu Praktyk niekiedy wstydliwie grzebie jeszcze po zbiorze Kamkego, gdzie zgromadzono, na wszelki wypadek, kilkaset szczególnych równań i ich rozwiązań. Niestety! Tego jednego akurat nie ma. Wtedy, w samą porę, przychodzi życzliwa wiadomość od znajomego Informatyka: komputery, za pomocą specjalnych języków symbolicznych, rozwiązują ogólnie równania różniczkowe! Ożywiony na nowo nadzieją Praktyk zabiera się do nauki odpowiedniego muMATHa czy innego REDUCE'a. Na to wszystko (oraz mnóstwo innych mądrości co do systemu komputera) schodzi mu pół miesiąca i po tym czasie już wie, że komputer znajdzie mu rozwiązanie równania dla oscylatora harmonicznego, ale po zadaniu jego własnego przypadku każe czekać: godzinę, dobę, tydzień ...; słowem udaje, że „się zawiesił”. Co w tym czasie robi – tego nie wie nikt. Gdy więc i to nie pomaga, pełen zrezygnowania i desperacji Praktyk zasiada sam do pisania programu komputerowego, który, by sobie poprawić humor, nazywa „kodem numerycznym”. Ten ostatni, oczywiście, najpierw „nie chodzi”, potem daje jakieś, nie budzące zaufania, tabelki liczb, bardzo ładnie skaczące po ekranie komputera, z których jednak niewiele wynika. Niestawny finał całego zmagania (przeprowadzany już w ścisłej tajemnicy) polega na skorzystaniu z gotowego podprogramu napisanego przez fachowców. Na pocieszenie można tym razem stosownie liczby wykreślić w efektownej ramce, którą pięknie wyrysuje najnowszy program graficzny niedawno potajemnie skopiowany na Zachodzie i zainstalowany przez zadowolonego z siebie Informatyka.

Czy w tej sytuacji nie można było od razu tak postąpić? Oczywiście, że tak i wielu czyni to bez szczególnego zażenowania. U pozostałej, niezbyt licznej, części pozostaje jednak odrobina żalu. Znalezienie ścisłego rozwiązania jakichś szczególnie sławnych, zwykle wyglądających dosyć niewinnie, a w istocie beznadziejnie skomplikowanych i złośliwych równań, to sprawa warta wysiłku. Można wtedy zasiąść do pisania krótkiego preprintu pt. *Nowe ściśle rozwiązanie ...*, mając przy tym, głęboko skrywaną, nadzieję, że ta szczególna kombinacja jakichś sinusów czy logarytmów – ozdobiona szlachetnym nazwiskiem szczęśliwego szperacza – trafi do monumentalnego *Katalogu ścisłych rozwiązań*.

Niekiedy jednak jest jeszcze i jedno, nawet jeśli nie eleganckie, to z pewnością nadzwyczaj honorowe, wyjście z tej przykłej sytuacji. Od kilkunastu dobrych już lat stosują je m.in. kosmologowie. Kosmolog to dość pokraczne stworzenie będące (są chlubne wyjątki, ale autor nie należy do nich) skrzyżowaniem niedouczzonego fizyka, matematyka-amatora, a na dodatek jeszcze i takiego astronoma, który niespecjalnie wie, z której strony patrzeć do lunety.

Kosmologowie na co dzień stykają się z najpotworniejszym przypadkiem układu nieliniowych równań różniczkowych, jaki zna fizyka, równań Einsteina (kilkanaście tysięcy różnych członów w ogólnym przypadku) i nic dziwnego, że szczególnie upodobałi sobie pewną dość dowcipną metodę. Jak ją najkrócej określić? Powróćmy do porównania równania różniczkowego do szkatułki bez klucza. O normalnym otwarciu nie ma mowy (oznaczałoby to znalezienie kompletu wszystkich rozwiązań), a na wyciąganie pojedynczych, przypadkowych rozwiązań rozmaitymi dorywczymi sztuczkami można stracić większość życia; dlaczego więc nie zajrzeć przez dziurkę od klucza i obejrzeć – niejako nie dotykając – wszystkie rozwiązania?

Po tym przegadanym wstępie pora na przykład, który powinien dopełnić reklamy metody. Rozważmy równanie (jedno z równań pola Einsteina):

$$H \frac{d^2 H}{dt^2} = AH^4 - BH^2 + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{dH}{dt} \right)^2 - 6 \frac{dH}{dt} H^2 \right) + C,$$

gdzie A, B, C są stałymi, a H jest szukaną funkcją czasu t , która opisuje szybkość rozszerzania się Wszechświata; pustego, ale zdominowanego przez wszechobecny szum kwantowy, pochodzący od różnych

pól fizycznych. (Konkretne wartości współczynników A, B, C zależą od ilości i rodzajów tych pól, samo C zależy ponadto od dość tajemniczej wielkości, stałej kosmologicznej, która reprezentuje energię próżni.) Każda funkcja $H(t)$, spełniająca powyższe równanie, to jakiś (kwantowy) model Wszechświata.

Nie ma tu, niestety, miejsca, by w sposób odpowiedzialny i uczciwy przedstawić wszystkie argumenty fizyczne prowadzące do konstrukcji tego równania; zajmują one cały długi rozdział w monografii P. C. W. Daviesa *Pola kwantowe w czasoprzestrzeniach zakrzywionych* i, prawdę mówiąc, nie wszystkie one są równie przekonujące i jasne. Ważne jest tu nie samo równanie, ale przykry fakt, że nie jest ono szczególnie estetyczne, czyli, z punktu widzenia teorii grup – symetryczne. I nic w tym dziwnego: szczególna symetria równania oznacza zawsze znaczną nadmiarowość, a stąd – możliwość uproszczeń.

Dokonując podstawienia

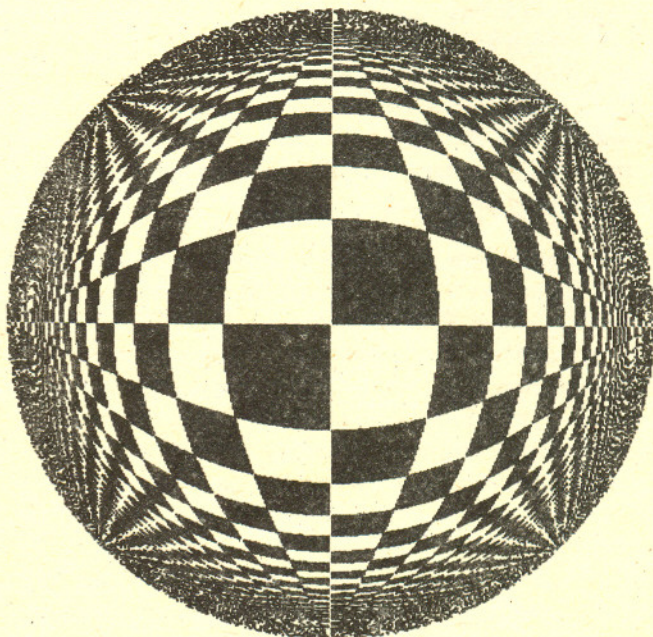
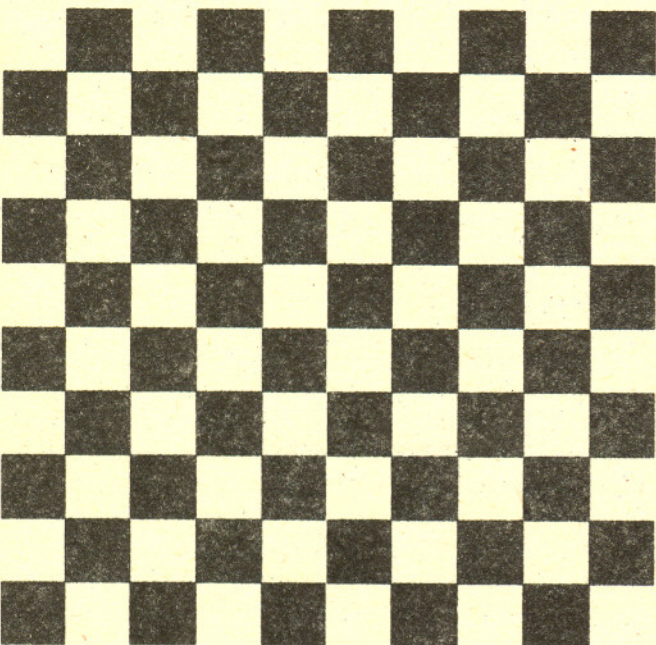
$$x = H, \quad y = \frac{dH}{dt}, \quad d\tau = x^{-1} dt,$$

dostajemy układ równań

$$(*) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= xy, \\ \frac{dy}{d\tau} &= Ax^4 - Bx^2 + \frac{1}{2}(y^2 - 6x^2y) + C, \end{aligned}$$

w którym x oraz y są funkcjami τ , (nowego) parametru typu czasu. Obecnie, w naturalny sposób, za model kosmologiczny uważamy parę funkcji $x(\tau), y(\tau)$, spełniającą układ (*). Para taka ma prostą interpretację geometryczną: jest to krzywa na płaszczyźnie xy , której punkty numerowane są

Deformacja nieskończonej szachownicy do koła Poincarégo przypomina odwzorowanie obiektywem „rybie oko” o kącie widzenia 180° . Graniczny okrąg jednostkowy to obraz „widnokregu” wyjściowej płaszczyzny.



parametrem τ . Układ wszystkich takich krzywych leżących na całej płaszczyźnie – to obraz wszystkich rozwiązań wyjściowego równania.

Rzecz teraz w tym, by spojrzeć na całą tę płaszczyznę w sposób globalny. W tym celu wygodnie jest dokonać transformacji zwanej *kompaktyfikacją płaszczyzny* (uzwarceniem). Transformacja ta (zaproponowana przez Poincarégo) przeprowadza całą płaszczyznę w koło zgodnie z regułą:

$$\text{punkt płaszczyzny } (x, y) \rightarrow \text{punkt koła } (\xi, \eta).$$

Konkretnie

$$\xi = \frac{x}{a+R}, \quad \eta = \frac{y}{a+R}, \quad (R \equiv |\mathbf{R}|),$$

gdzie a jest dowolną dodatnią stałą, natomiast $\mathbf{R} \equiv (x, y)$ jest wektorem na wyjściowej płaszczyźnie, $\mathbf{r} \equiv (\xi, \eta)$ opisuje punkty koła. Widać, że gdy $R \rightarrow \infty$, wtedy \mathbf{r} dąży do brzegu koła. Cały zabieg przypomina wynik działania szerokokątnego obiektywu zwanego wśród fotoamatorów „rybim okiem”. Patrząc z góry przez taki obiektyw (o kącie widzenia 180°) na nieskończoną szachownicę dostajemy następujący obraz całej płaszczyzny „ściągniętej” do koła jednostkowego: leżący w nieskończonej odległości „widnokrąg” przechodzi w okrąg jednostkowy.

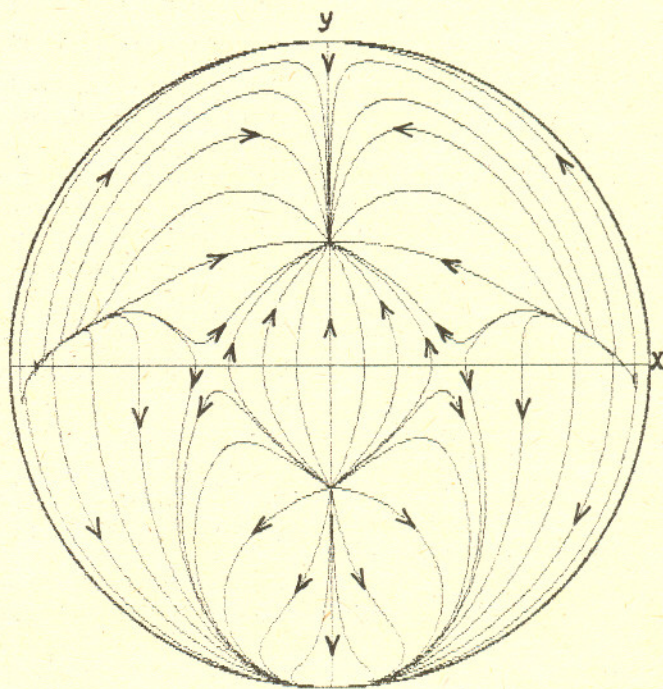
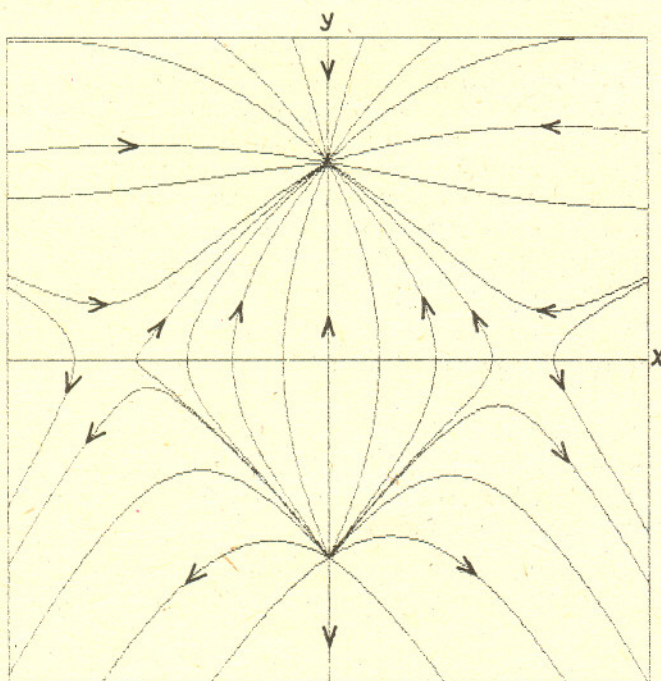
Rozwiązania układu równań (*) na fragmencie płaszczyzny oraz ich komplet na kole Poincarégo (dla pewnych konkretnych wartości stałych A, B, C). Praktyczna konstrukcja jest następująca. Wybierzmy dowolny punkt o współrzędnych (x_0, y_0) . Podstawiając te wartości do prawych stron (*) dostajemy pochodne $dx/d\tau, dy/d\tau$ w tym punkcie. Pochodne te pozwolą nam, za pomocą rozwinięcia Taylora, znaleźć nieskończenie bliski punkt (x_1, y_1) na krzywej – rozwiązaniu jako

$$x_1 \approx x_0 + \frac{dx}{d\tau} \Delta\tau,$$

$$y_1 \approx y_0 + \frac{dy}{d\tau} \Delta\tau,$$

gdzie $\Delta\tau$ jest małym przyrostem parametru τ . W ten sposób możemy, z dowolną dokładnością, przesledzić całą krzywą, zgodnie z parametrem τ oraz przeciwnie do jego wzrostu – aż do jakiegoś punktu, w którym pochodne będą się zerować. Sam ten punkt to również rozwiązanie (*), choć nieco szczególne: statyczne. Strzałki na każdej krzywej oznaczają kierunek wzrostu parametru τ .

W ten sposób powstanie graficzny *portret* badanego równania, bowiem wraz z punktami płaszczyzny także i wszystkie krzywe całkowe, tj. rozwiązania (*) ułożą się wewnątrz koła. Każda z nich ulegnie deformacji, ale *jakościowo* nic się nie zmieni; w każdym razie nic, co istotne, np. topologia układu krzywych. W szczególności nie zmieni się charakter tzw. punktów krytycznych, w których krzywe mogą się schodzić. Okazuje się, że właśnie te punkty – ich rodzaj, ilość i rozmieszczenie – jednoznacznie określają topologię całej sieci rozwiązań. Patrząc na tę sieć wszystkich krzywych na kole Poincarégo (używa się też nazwy *płaszczyzna fazowa*) możemy bez trudu (i bez żadnych całkowań!) wskazać różne typy kwantowych modeli Wszechświata, nieomal „policzyć” je, podzielić na klasy jakościowo różnych zachowań, odpowiedzieć na pytanie, które z nich są typowe, a które wyjątkowe. Wybierając dowolny (nie krytyczny) punkt, a następnie poruszając się wzdłuż jakiejś szczególnej krzywej możemy w sposób jakościowy odtworzyć zachowanie się wybranego rozwiązania, w szczególności skąd (z jakiego punktu krytycznego) przybywa i dokąd zmierza. Inaczej mówiąc, taki zwarty i oszczędny obrazek zawiera całą istotną informację o, skądinąd beznadziejnym, równaniu oraz o, ukrytej w tym równaniu, istocie fizycznego modelu.



Kącik Prac Uczniowskich ukazuje się w *Delcie* od numeru 3/1988 (z przerwami: *Delta* 6, 12/1988, 1, 6, 7, 8/1989, 6/1990 i 1/1991). Zawiera on propozycje ewentualnych tematów na Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki. Oczywiście, chętnie widzimy także prace na inne tematy.

Prawie siedem lat temu pisaliśmy w *Delcie* (8/1984) o współrzędnych barycentrycznych. Jest to wykorzystanie w matematyce pomysłu z dźwigniami, przy założeniu, że znajdujemy się w jednorodnym, stałym polu grawitacyjnym.

Jeśli w punkcie A umieściliśmy masę m_A , a w punkcie B masę m_B , to środek ciężkości tego układu wypadnie w takim punkcie P odcinka AB , że

$$(1) \quad \frac{AP}{BP} = \frac{m_B}{m_A},$$

wiadomo: siła razy ramię. Fizycy twierdzą też, że siły działające na układ można zastąpić jedną siłą (sumaryczną) działającą na środek ciężkości. Wierząc im na słowo możemy wobec tego dołączyć jeszcze punkt C (nie leżący na prostej AB) z masą m_C i bez trudności stwierdzić, że środek ciężkości całego układu będzie w takim punkcie Q odcinka PC , że

$$(2) \quad \frac{PQ}{CQ} = \frac{m_C}{m_A + m_B}.$$

Może trochę zdziwić, że szukając środka ciężkości najpierw dla odcinka np. BC , a potem dołączając A otrzymamy ten sam punkt Q , ale sprawdzenie (proszę je wykonać) wykaże, że rzeczywiście tak będzie.

Dla tych, którzy sprawdzić nie umieją – metoda nieinteligentna, ale algorytmiczna. Jeśli punkty A, B i C mamy w układzie współrzędnych, to współrzędne punktu Q są dane przez równość

$$(3) \quad Q = \frac{A \cdot m_A + B \cdot m_B + C \cdot m_C}{m_A + m_B + m_C},$$

proszę to sprawdzić. A to wyrażenie nie wyróżnia już żadnego z punktów A, B, C .

Jakie punkty mogą być środkami ciężkości układu A, B, C przy zmieniających się masach? Dla mas dodatnich otrzymamy wszystkie punkty wnętrza trójkąta (skąd to wiadomo?), a dopuszczając masy zerowe – również jego brzegi. No, a masy ujemne? Można przecież wyobrazić sobie masy jako odważniki, albo baloniki wypełnione helem. I co wtedy? Okazuje się, że wtedy środkiem ciężkości układu A, B, C będzie mógł być każdy punkt płaszczyzny (też koniecznie należy to sprawdzić). Ale jak to zrobić? – przecież wszystkie dotychczas przytoczone wzory dotyczyły liczb dodatnich.

Jeśli jednak poważniej potraktujemy wstępne uwagi o dźwigniach, to wzór (1) przyjmie postać

$$\vec{AP} \cdot m_A = \vec{PB} \cdot m_B,$$

który ma sens i dla mas ujemnych (różne znaki mas odpowiadają dźwigni jednostronnej, a jednakowe – dwustronnej). Analogicznie zmieni się wzór (2). Ale (co można sprawdzić) wzór (3) nie zmieni się wcale – każdy punkt X ma takie same współrzędne jak wektor \vec{OX} .

Skoro tak, to można ustalić raz na zawsze punkty A, B, C i uznać masy m_A, m_B i m_C za współrzędne ich środka ciężkości. Każdy od razu zauważy, że punkt o współrzędnych (m_A, m_B, m_C) to ten sam punkt co punkt o współrzędnych (tm_A, tm_B, tm_C) dla dowolnego $t \neq 0$. Tak określone współrzędne (nazywa się je *barycentrycznymi*) są jednorodne – proporcjonalne układy liczb odpowiadają temu samemu punktowi. Po dłuższym namyśle można wyciągnąć stąd wniosek, że równania dowolnych tworów algebraicznych zapisane dla takich współrzędnych będą równaniami jednorodnymi, to znaczy, że każdy wielomian opisujący jakąś figurę będzie miał wszystkie wyrazy tego samego stopnia.

Dla tych, których temat zainteresował, proponuję na początek sprawdzenie, że równanie

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$$

opisuje (dla choćby jednego współczynnika różnego od zera) zbiór punktów o współrzędnych barycentrycznych (x_1, x_2, x_3) będący prostą. A także, że każda prosta ma we współrzędnych barycentrycznych takie równanie.

A dla ambitnych tematy do samodzielnej pracy: co opisują równania kwadratowe (oczywiście jednorodne), jak znaleźć równanie okręgu o danym środku i promieniu? Itd.

Marek KORDOS

Rozwiązanie zadania F 302.
Aby zniszczyć planetę rozbijając ją na „proszek” (jak to właśnie zrobił Darth Vader), trzeba dostarczyć jej energię równą co najmniej energii potencjalnej sił grawitacyjnych wiążących materię planety. Założmy, że Alderaan miał masę i promień równe ziemskiemu, tj.
 $R \approx 6,4 \times 10^6$ m, $M \approx 6,0 \times 10^{24}$ kg
Z analizy wymiarowej wynika, że energia grawitacyjna musi być co do rzędu wielkości dana przez

$$E_G \sim -G \frac{M^2}{R}$$

(ambitni mogą sprawdzić, że o ile gęstość planety jest stała, to ścisły związek ma postać $E_G = -\frac{3}{2} G \frac{M^2}{R}$). A zatem energia zastosowana do zniszczenia Alderaanu wynosiła

$$E \sim |E_G| \sim G \frac{M^2}{R} \approx 352 \times 10^{30} \text{ J}$$

Energia taką można uzyskać detonując około 84×10^{15} megaton TNT. Jak widać, Darth Vader użył ładunku miliardy razy przekraczającego możliwości arsenałów Ziemi. Z dużą dozą prawdopodobieństwa możemy przyjąć, że potencjał całego Imperium był większy o kilka następnych rzędów wielkości.

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki,
Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 7/1990.

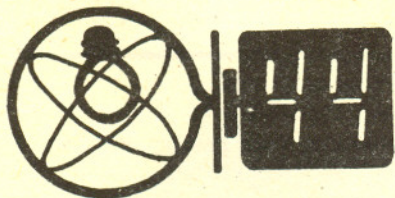
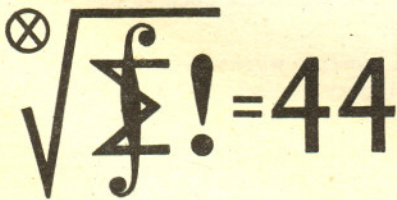
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 1991

Czołówka ligi zadaniowej Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 203 ($WT=2,00$) i 204 ($WT=2,40$)
z numeru 6/1990

Adrian Langer – Nisko 46,78
Paweł Kubit – Krosno 36,74
Tomasz Grzesiak – Kraków 36,41

Pan Langer: numer 63
w „matematycznym” Klubie 44.



Czołówka ligi zadaniowej Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 105 ($WT=3,76$) i 106 ($WT=2,74$)
z numeru 8/1990

Leszek Motyka – Kraków 39,13
Paweł Pékowski – Szczecin 25,82
Dzierżysław Lipniacki – Lublin 25,46
Andrzej Kondracki – Białystok 16,37

Zadania z matematyki nr 217, 218

Redaguje Marcin E. KUCZMA

217. Wyznaczyć maksymalną wartość wyrażenia

$$\left(\frac{w}{w^2+1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2 + \left(\frac{y}{y^2+1}\right)^2 + \left(\frac{z}{z^2+1}\right)^2,$$

gdą (w, x, y, z) przebiega zbiór wszystkich czwórek liczb dodatnich, takich, że $w + x + y + z = 2$.

218. Niech $p > 2$ będzie liczbą pierwszą. Dowieść, że jeśli n jest liczbą naturalną, a $x = \sqrt{n}$ nie jest liczbą naturalną, to różnica $[(x + [x])^p] - 2[x]^p$ dzieli się przez $2p$. (Jak zwykle, $[t]$ oznacza największą liczbę całkowitą $\leq t$.)

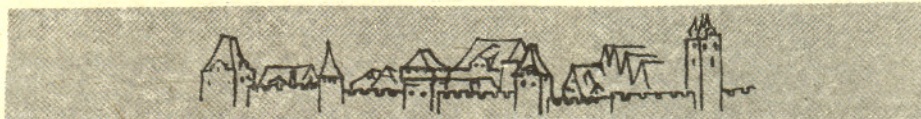
Zadanie 218 zaproponował pan Paweł Kubit z Krosna.

Zadania z fizyki nr 115, 116

Redaguje Jerzy BROJAN

115. Opisać metodę pomiaru prędkości pocisku karabinowego z wykorzystaniem woltomierza, kondensatora, baterijki, opornika, pasków folii aluminiowej i taśmy mierniczej lub długiej linijki. Należy przedstawić schemat obwodu i podać wzór, z którego można obliczyć prędkość pocisku. Jeśli woltomierz ma opór 100 k Ω , to jak należy wybrać wartości oporu opornika i pojemności kondensatora, aby pomiar był najłatwiejszy i najdokładniejszy?

116. Spośród różnych stanów polaryzacji fali elektromagnetycznej wyróżniamy polaryzację liniową (gdą pole elektryczne drga wzdłuż określonej osi prostopadłej do kierunku fali) i polaryzację kołową (gdą pole elektryczne obraca się w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku fali, nie zmieniając wartości). Wykazać, że można wytworzyć falę spolaryzowaną kołowo przepuszczając falę spolaryzowaną liniowo przez obracający się polaroid i rozkładając otrzymaną falę na składowe harmoniczne. Oblicz amplitudy i częstotliwości tych składowych, jeśli dana jest amplituda A i częstotliwość ω fali padającej oraz prędkość katowa polaroidu Ω .



28 V 1737 r. nastąpiło jedyne – jak dotychczas – w dziejach astronomii teleskopowej zjawisko, mianowicie zakrycie Merkurego przez Wenus. Zakrycie zaobserwował jedyny świadek, astronom amator John Bevis z obserwatorium w Greenwich. Nie powinno to dziwić, bowiem pomijając już zwykłe trudności z obserwowaniem Merkurego (nisko nad horyzontem i w łunie słonecznej) Wenus zakryła go samym południowym skrajem tarczy i z innych obserwatoriów europejskich, jako leżących bardziej na południe niż Greenwich, zjawiska w ogóle nie dałoby się zobaczyć. Swoje obserwacje John Bevis opublikował w *Philosophical Transactions*, January – February 1741. Można tam przeczytać, że zakrycie nastąpiło 17 V 1737 r., ponieważ Anglia wtedy, jako bardzo antypapieska, używała jeszcze kalendarza juliańskiego.

Korespondencyjny Klub Fizyków

Dzisiaj proponuję Ci, Czytelniku, zadanie szczególne.
Będzie to

Pomiar temperatury bez termometru.

Co więcej, będziemy mierzyli temperaturę obiektu nie dotykając go, a to z dwóch powodów: po pierwsze – aby go nie zniszczyć, po drugie – ponieważ jego temperatura jest wysoka. Obiektem tym będzie WŁÓKNO ŻARÓWKI.

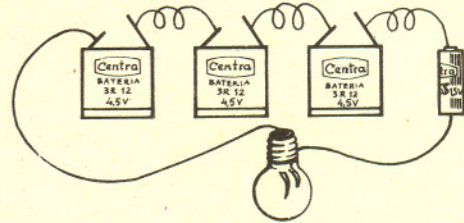
Tak, bierzemy zwykłą żarówkę sieciową (na 220 V). Jej włókno w czasie normalnej pracy świeci bardzo jasno, podejrzewamy więc, że ma bardzo wysoką temperaturę. Ale jaką? Żeby ją określić, wystarczy (zrobiwszy pewne upraszczające założenia) zmierzyć napięcie, przy którym włókno zaczyna się żarzyć. Będzie to napięcie (oznaczymy je U_0) znacznie niższe, niż nominalne napięcie pracy U_n , wynoszące 220 V. Do pomiarów możemy użyć baterijek – minimalny komplet to 4 baterie płaskie i 3 okrągłe (R20 lub R14). Po doświadczeniach można ich używać zgodnie z przeznaczeniem. Najlepiej mieć miernik elektryczny, ale nawet bez niego poradzimy sobie, łącząc odpowiednią liczbę baterii. Posługując się nimi jak odważnikami na wadze, określimy szukane napięcie z dokładnością do 1,5 V (tyle wynosi napięcie R20 lub R14; bateria płaska ma 4,5 V). Na przykład jeśli stwierdzimy, że przy trzech bateriach płaskich włókno jeszcze się nie żarzy, a dodając do tego jedną okrągłą wywołujemy już rozżarzenie się włókna, to wiemy, że szukane minimalne napięcie żarzenia U_0 zawiera się między 13,5 V a 15 V. Możemy to też zapisać w formie $U_0 = 14,25 \pm 0,75$ V.

Droży Czytelnicy!

Jak co miesiąc, przyznamy nagrodę książkową dla autora najciekawszej odpowiedzi.

Listy prosimy przysyłać pod adresem:

Korespondencyjny Klub Fizyków, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego, ul. Hoża 69, 00-681 Warszawa.



Jak to wszystko połączyć, żeby się nie rozsypało? Myślę, że sobie, Czytelniku, poradzisz. A teraz problem zasadniczy:

Zrobiliśmy pomiar, a gdzie temperatura?

To jest teoretyczna część zadania, która Cię czeka.

Aby nie była ona zbyt trudna, poczynimy pewne założenia upraszczające. Otrzymany wynik będzie niezbyt dokładnym przybliżeniem, ale chodzi tu przede wszystkim o zasadę pomiaru. A oto założenia:

1. Włókno wolframowe żarówki jest ciałem doskonale czarnym, a więc moc wysyłanego przez nie promieniowania wynosi: $P = \sigma T^4$, gdzie σ jest stałą, a T – temperaturą w kelwinach (aby ją otrzymać, należy do temperatury w stopniach Celsjusza dodać 273,2°).
2. Temperatura, w której zauważamy żar wynosi, 500° C.
3. Całkowita moc prądu wydzielana we włóknie jest oddawana w postaci promieniowania (zaniedbujemy przewodzenie ciepła i konwekcję wewnątrz żarówki).
4. Opór wolframu jest proporcjonalny do temperatury bezwzględnej (w kelwinach).
5. Promieniowanie ciepłone od otoczenia pochłaniane przez włókno można zaniedbać.

Uzbrojeni w te założenia możemy wyznaczyć temperaturę normalnej pracy żarówki (przy napięciu 220 V).
Powodzenia!

Redaguje Jan GAJ

**Zadania**

Redaguje Michał WOJCIECHOWSKI

M 592. Na stole leży 100 chodzących zegarków. Udowodnić, że w pewnej chwili suma odległości od środka stołu do końców minutowych wskazówek jest nie mniejsza od sumy odległości od środka stołu do środków zegarków.

Rozwiązanie na str. 8

M 593. Każdemu z wierzchołków piętnastokąta foremnego przyporządkowano liczbę 1 lub -1. Przekształcamy układ liczb zmieniając znaki tych liczb, które są przyporządkowane wierzchołkom jakiegoś wielokąta foremnego (trójkąt, pięciokąt, piętnastokąt). Czy w wyniku takich przekształceń zawsze można dojść do układu złożonego z samych jedynek?

Rozwiązanie na str. 6

M 594. Mamy pięć takich odcinków, że z każdych trzech spośród nich można zbudować trójkąt. Wykazać, że z pewnych trzech można zbudować trójkąt ostrokątny.

Rozwiązanie na str. 10

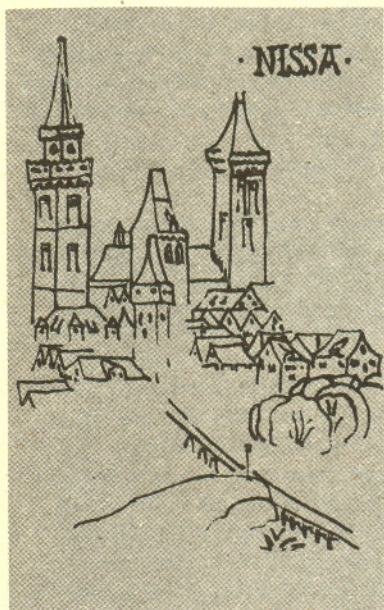
Redaguje Paweł KRAWCZYK

F 302. W filmie „Wojny Gwiezdne” Darth Vader, dowodzący okrętem kosmicznym Imperium Zła, całkowicie zniszczył planetę Alderaan. Korzystając z tej informacji i zakładając, że Alderaan był planetą typu ziemskiego, oszacować potencjał militarny Imperium (w megatonach TNT).

Rozwiązanie na str. 14

F 303. Dwa wrogie czołgi zbliżają się kursem na zderzenie czołowe. W pewnym momencie załogi obydwu czołgów oddają jednoczesne strzały w kierunku przeciwnika. Zakładając, że prędkości pocisków (względem czołgów) wynosiły v_1 i v_2 , lufy zaś były nachylone do poziomu odpowiednio pod kątami α_1 i α_2 oraz przyjmując, że obydwie strzały były celne, znaleźć względną prędkość czołgów.

Rozwiązanie na str. 10



Patrz w niebo

Jak sporządzić mapę gwiazdy, skoro każdą widzimy jedynie jako punkt? Ten beznadziejny, zdawałoby się, problem został jednak pozytywnie rozwiązany – powstała technika zwana dopplerowską techniką obrazową, której ideę pokrótce prześledzimy.

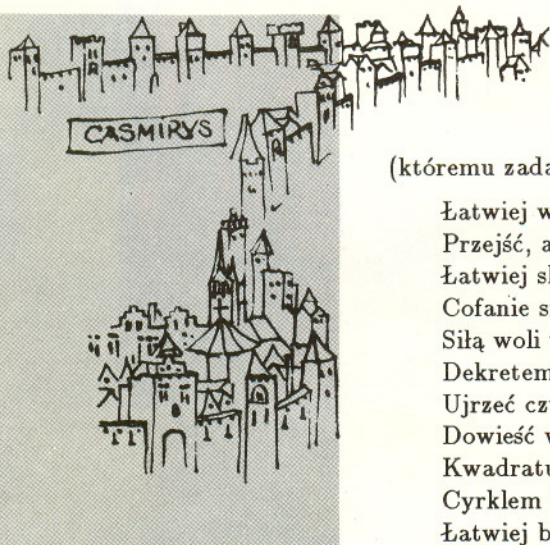
Co to w ogóle jest mapa gwiazdy? – nie ma tam przecież lądów i mórz. Rozumiemy pod tą nazwą obraz rozkładu różnych pierwiastków na powierzchni gwiazdy. Jest on, co prawda, zmienny (jak np. rozkład plam na Słońcu), ale dość powoli, więc praktycznie można go uznać za niezmienny w ciągu wielu dni. Plamą będziemy nazywać mały obszar powierzchni gwiazdy o podwyższonej zawartości jakiegoś dowolnego pierwiastka.

Wyobraźmy sobie gwiazdę z jedną tylko małą plamą. Linie widmowe tej plamy będą widoczne, oczywiście, tylko wtedy, gdy znajdzie się ona na widocznej z Ziemi półkuli gwiazdy. Suma okresu widoczności i niewidoczności plamy jest równa okresowi obrotu gwiazdy. Mało prawdopodobne jest, by te dwa okresy składowe były jednakowe, a jeżeli są niejednakowe, to znaczy, że gwiazdę widać w pozycji niczym nie wyróżnionej i że plama leży gdzieś między równikiem a biegunem gwiazdy. Jak wyznaczyć kąt między osią gwiazdy a promieniem widzenia oraz „szerokość geograficzną” plamy?

Otóż, plama pojawiając się na skraju tarczy gwiazdy zbliża się do obserwatora, czyli ma ujemną prędkość radialną. Prędkość ta następnie maleje co do wartości bezwzględnej, jeszcze później rośnie i wreszcie plama znika oddalając się stale od obserwatora. Cały przebieg prędkości radialnej można wyznaczyć z obserwacji dopplerowskich przesunięć linii widmowych plamy. Ale znając typ widmowy gwiazdy i jej okres obrotu można określić jej promień i odtworzyć teoretycznie przebieg prędkości radialnej plamy przy zadanej jej „szerokości geograficznej” i przy zadanym ustawieniu osi obrotu gwiazdy. Należy więc tak długo żonglować tymi dwoma parametrami, aż teoretyczny przebieg prędkości radialnej zgodzi się z obserwowanym – dwa parametry mamy w ten sposób wyznaczone.

Łatwo przewidzieć, że w rzeczywistości wszystko jest dużo bardziej skomplikowane, bo rozkład pierwiastków na powierzchni gwiazdy nigdy nie jest tak wzorcowo prosty. Zawsze linia widmowa czegokolwiek pochodzi od wielu obszarów, z których jedne zbliżają się, a inne oddalają od obserwatora, linia ulega więc w zawiły sposób poszerzeniu zmiennemu w czasie, ale daje się to – oczywiście do pewnych granic – rozwikłać, nie daje się tylko tego tak „na palcach” przedstawić. Wynik, czyli mapę gwiazdy, uzyskuje się po wykonaniu ogromnych rachunków, co jest obecnie wykonalne dzięki zastosowaniu komputerów. Mapy takie nie dorównują, oczywiście, ostrością zdjęciom np. Słońca, nie zapominajmy jednak, że są to przecież mapy punktów! Na tylnej okładce prezentujemy mapy „zaplamionych” gwiazd.

Tomasz KWAST



O MĘCE UCZNIA

(któremu zadano napisanie wiersza barokowego)

Łatwiej wielbłądowi przez igielne ucho
Przejść, a śmiertelnemu morze stopą suchą,
Łatwiej skonstruować *perpetuum mobile*,
Cofanie się czasu spowodować na chwilę,
Siłą woli wstrzymać swobodne spadanie,
Dekretem zawiesić prawa zachowania,
Ujrzeć czwarty wymiar realnego świata,
Dowieść wielkiego twierdzenia Fermata,
Kwadratury koła dokonać na lekcji,
Cyrklem i linijką kąta trysekcji,
Łatwiej bezzębnemu przeżuć przymę tłucznią,
Niżli poloniście pojąć mękę ucznia.

Paweł Sikora, 1988

Wiersz powstał w III klasie liceum nie wywołując entuzjazmu nauczyciela. Autor zgodził się na jego publikację w „pierwszym obiegu” dopiero po szczęśliwym zdaniu matury.