

KAŻDY MOŻE BYĆ KOLPORTEREM !!!

Delta tańsza o 25 %

Kupując 150 egzemplarzy *Delty* płacisz tylko 1.500,- zł za numer.
Przesyłając pod adresem redakcji dowód wpłaty wielokrotności sumy 225 tysięcy złotych otrzymasz tyleż paczek po 150 egzemplarzy najbliższego numeru *Delty*.

Nasze konto:

PBK VIII OM Warszawa 370028-4170

Uniwersytet Warszawski, redakcja miesięcznika *Delta*

„Delta”
matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Edukacji Narodowej

Redaguje kolegium w składzie:

Krzysztof Biesaga
Lidia Goettig – z-ca red. nac.
Krystyna Kordos – sekr. red.
Marek Kordos – red. nac.
Paweł Krawczyk
Tomasz Kwast
Anna Rudnik
Jerzy Ryll
Katarzyna Słomka
Joanna Udalska

Adres Redakcji

Centrum Informatyczne UW
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa
tel. 20-03-81 wew. 841

Wydawca:

Uniwersytet Warszawski
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa

Nakład 18 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.,
2,50 ark. druk.,
papier offsetowy V kl. 70 g.
Wydrukowano
w Zakładach Graficznych
w Warszawie, ul. Srebrna 16

Skład systemem \TeX
wykonała redakcja.

Komitet Redakcyjny

Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichocki
Roman Duda
Jan A. Gaj
Tomasz Hofmokl – v-przewodniczący
Tadeusz Jarzębowski
Marcin Kubiak
Andrzej Mąkowski
Andrzej Pelczar
Zbigniew Płochocki
Zdzisław Pogoda
Konrad Rudnicki
Zbigniew Semadeni
Grzegorz Sitarski
Józef I. Smak
Kazimierz Stępień
Mieczysław Subotowicz
Andrzej Szymacha
Aniela Wolska
Andrzej Woszczyk
Wojciech Żakowski –
przewodniczący

WARUNKI PRENUMERATY

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na II kwartał 1991 r. wynosi 5 700,- zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
 - oddziały RSW właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora – odbioru zamówionych egzemplarzy dokonuje prenumerator w wyznaczonych punktach sprzedaży lub w inny, uzgodniony sposób,
 - urzędy pocztowe i listonosze – od prenumeratorów z terenów wiejskich lub innych miejscowości, w których nie ma oddziałów RSW, a w miastach tylko od osób niepełnosprawnych – poczta zapewnia dostawę zamówionych egzemplarzy pod wskazany adres pod warunkiem uiszczenia dodatkowej opłaty za każdy doręczany egzemplarz – opłata wynosi 500,- zł od egzemplarza,
 - Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział W-wa 370044-1195-139-11 – tylko od prenumeratorów zlecających dostawę za granicę.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
 - na kraj – do 20 XI na I kwartał roku następnego
do 20 II na II kwartał
do 20 V na III kwartał
do 20 VIII na IV kwartał
 - na zagranicę – do 31 X na I kwartał
oraz do 1 dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarza zł 2 000,-

SPIS TREŚCI

NUMERU 2(201)

Fotografowanie nieba <i>Joanna Udalska</i>	str. 1
O ewolucji języków programowania <i>Ryszard Kubiak</i> <i>Stefan Zemke</i>	str. 1
Zadanie olimpijskie	str. 4
Rozszerzona zasada nieoznaczoności	str. 5
Chaos w biologii? <i>Jan Kalinowski</i>	str. 6
Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki	str.10
Mała Delta	str.12
Klub 44	str.14
Korespondencyjny Klub Fizyków	str.17
Zadania	str.17

W następnym numerze:

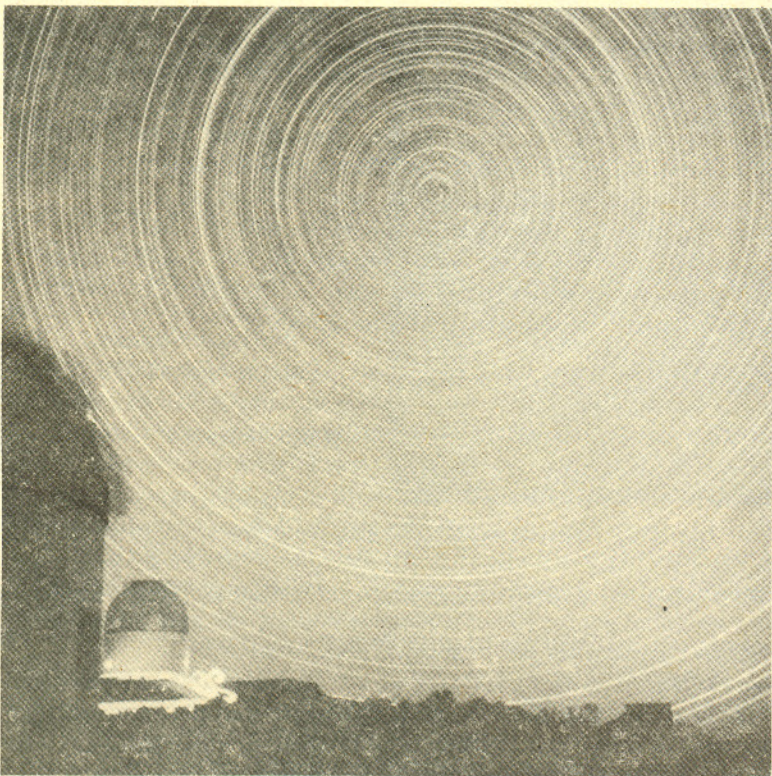
O metodzie portretów fazowych

Środkowa kartka *Delty*
może służyć jako poster
reklamujący studiowanie fizyki.

Joanna UDALSKA

Czy można fotografować niebo zatrzymanym teleskopem? Oczywiście można, lecz na skutek ruchu dziennego sfery niebieskiej gwiazdy na zdjęciu wyglądają jak łuki lub kreski. Każdy pewnie widział fotografie okolic bieguna nieba wykonane nieruchomym aparatem fotograficznym (teleskop fotografujący niebo to w końcu duży aparat fotograficzny) ilustrujące pozorny ruch sfery niebieskiej. Czy można jednak nieruchomym teleskopem uzyskać „normalne” obrazy nieba z gwiazdami w postaci punktów? Tu, oczywiście, nasuwającą się odpowiedzią jest: nie. A jednak! Najpierw dwa słowa o tym, jak we współczesnej astronomii fotografujemy niebo.

Gwałtowny rozwój elektroniki spowodował, że coraz rzadziej astronomowie używają dziś kliszy fotograficznej jako detektora. Nawet najlepsze klisze mają tzw. wydajność kwantową (procent fotonów zamienianych na elektrony) rzędu kilku dziesiątych procenta, a ich liniowość (zakres jasności, w którym zaczerpienie kliszy jest proporcjonalne do jasności obserwowanego obiektu) jest ograniczona do zaledwie kilku wielkości gwiazdowych. Najpowszechniejszym detektorem stosowanym obecnie do obrazowania nieba jest *Charge Coupled Device*, zwane w skrócie CCD. Jest to dwuwymiarowy detektor składający się z kilkuset tysięcy fotoczułych elementów umieszczonych na układzie scalonym w postaci siatki kilkaset na kilkaset rzędów i kolumn (patrz *Delta* 7/1986). Poszczególne elementy mają typowy rozmiar około $20\ \mu\text{m}$, są więc mniejsze lub porównywalne z ziarnem kliszy. Podczas naświetlania CCD światło padające na poszczególne fotoelementy wybija fotoelektrony uwięzione w ich obszarze. Po zakończeniu ekspozycji następuje odczytywanie układu.



Niebo sfotografowane w chilijskim obserwatorium Las Campanas. Oczywiście, jest to zdjęcie wykonane nieruchomym aparatem. Dlatego też gwiazdy trochę się poruszyły (czas ekspozycji: 9 godzin; zdjęcie wykonał R. F. Garrison).

O ewolucji

języków

programowania

Ryszard KUBIAK,

Stefan ZEMKE

Jesteśmy wszyscy świadkami dynamicznego rozwoju technologii komputerowej. Postępuje miniaturyzacja sprzętu, a jednocześnie wzrastają jego możliwości. Jednak zmiany następują nie tylko w tej dziedzinie. Przemianom ulega również oprogramowanie, w tym języki programowania.

Bogactwo języków programowania

Jednym ze skutków czterdziestoletniego rozwoju informatyki jest powstawanie ogromnej liczby języków programowania. Proces ten rządzi się podobnymi prawami, co rozwój języków naturalnych. Bywają języki bardzo rozpowszechnione oraz takie, które są używane tylko w małych społecznościach specjalistów z danej dziedziny. Niektóre języki wymierają, a w ich miejsce pojawiają się nowe, o wyższych walorach użytkowych. Języki potrafią żyć własnym życiem, wzbogacając się o coraz to nowe formy dialektowe.

W niniejszym szkicu spróbujemy Czytelnikowi przedstawić zaznaczające się główne tendencje rozwoju języków programowania. Będą nas interesować jednak tylko tak zwane języki ogólnego zastosowania. W takich językach można pisać programy dotyczące zagadnień inżynierskich, baz danych, redagowania tekstów. Można też pisać programy rozpoznające i interpretujące napisy w danym języku, tak zwane interpretery lub kompilatory. Zostawimy natomiast na boku języki wąsko specjalizowane, przeznaczone do sterowania konkretnymi systemami informatycznymi. W tej grupie znajdzie się na przykład język porozumiewania się z systemem rezerwacji miejsc lotniczych albo język opisu rysunków technicznych w systemie komputerowego wspomagania projektowania.

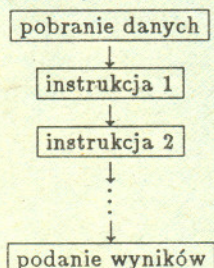
Języki programowania ogólnego zastosowania można podzielić na trzy grupy:

- języki imperatywne,
zwane też instrukcyjnymi;
- języki aplikatywne,
zwane też funkcyjnymi;
- języki deklaratywne,
zwane też logicznymi.

To, co odróżnia te trzy grupy języków, nie sprowadza się wyłącznie do reguł gramatycznych. Zasadniczym wyróżnikiem jest odmienny w każdym przypadku sposób myślenia programisty o stworzonym przez niego programie. W pewnym sensie, mamy tu analogię do różnic w sposobie myślenia o otaczającym nas świecie, gdy posługujemy się językiem polskim, angielskim czy chińskim. I aby dobrze władać danym językiem, nie wystarczy tylko znajomość obowiązujących w nim reguł gramatycznych. Trzeba jeszcze umieć w tym języku myśleć.

Myślenie w kategoriach instrukcji

Programowanie w języku imperatywnym polega na wypisywaniu ciągów instrukcji, które następnie przekazujemy komputerowi do wykonania.



Programista myśli o swoim zadaniu tak: gdy program otrzyma takie a takie dane, to należy kolejno wykonać na tych danych takie a takie operacje i w końcu zaprezentować wyniki. Świat w pamięci komputera zmienia się pod wpływem wykonywanych instrukcji. Programista musi w pełni panować nad dynamiką tych zmian.

Myślenie tego rodzaju jest nieodłącznie związane z budową i działaniem współczesnych komputerów. To właśnie komputer wykonuje kolejno zleczone mu instrukcje i wydaje się naturalnym programować w terminach dla niego podstawowych. Jest to zasadniczy powód, dla którego właśnie języki typu imperatywnego są najpowszechniej używane. Ugruntowany jest też pogląd, że dają one najpełniejsze możliwości efektywnego sterowania zasobami komputera: pamięcią, ekranem, drukarką, dyskami, itp.

Najpierw przez przyłożenie odpowiedniego napięcia pierwsza kolumna przesuwana jest do dodatkowej kolumny zerowej i wszystkie pozostałe przesuwają się o jedno miejsce w tym samym kierunku. Kolumna zerowa składa się, oczywiście, z tylu elementów, ile jest rzędów. Następnie kolejne komórki kolumny zerowej przesuwane są (również przez przykładanie odpowiedniego napięcia) do rejestru odczytującego. Napięcie zmierzone w rejestrze odczytu jest zamieniane na wartość cyfrową i zapisywane przez sterujący komputer w odpowiednim elemencie pamięci komputera. Po pomiarze do rejestru odczytującego przesuwana jest następna komórka itd., aż do odczytania całej kolumny. Po zakończeniu odczytu pierwszej kolumny w jej miejsce przesuwana jest następna (czyli druga) i proces jest powtarzany – aż do zakończenia odczytu ostatniej kolumny.

Ogromna wydajność kwantowa elementów CCD, sięgająca czasem nawet 80%, sprawia, że rejestruje ono niemal całe światło obiektów niebieskich. Duża pojemność elementów CCD, sięgająca kilkuset tysięcy elektronów, powoduje, że układy te są liniowe w zakresie wielu wielkości gwiazdowych, co pozwala mierzyć jasności gwiazd zarówno słabych, jak i jasnych na tym samym obrazie. Są jednak i problemy. Główny to technologiczny – problem wykonania dużych układów mających wszystkie elementy o podobnych parametrach. Aktualnie największe działające układy zawierają 2048 na 2048 elementów skupionych na płytce o rozmiarach około 4 cm na 4 cm i wydaje się, że dość trudno będzie wytworzyć większe. Taki układ pokrywa (w zależności od teleskopu, z którym współpracuje) obszar nieba zaledwie od kilku do kilkunastu minut łuku. Do wykonywania obrazów większych obszarów pozostają więc ciągle jeszcze klisze fotograficzne (mogą mieć nawet do 0,5 na 0,5 m).

Wróćmy teraz do problemu fotografowania nieba zatrzymanym teleskopem. Oczywiście, jeśli użyjemy kliszy fotograficznej, uzyskamy obrazy w postaci kresiek. Co będzie jednak, gdy jako detektora użyjemy CCD i ustawimy go tak, by rzędy były równoległe do kierunku ruchu dziennego nieba (oczywiście, ze względu na małe rozmiary CCD możemy przyjąć, że łuki są liniami prostymi)? Jeśli zastosujemy teraz standardowy sposób odczytu: ekspozycja, odczyt – to efekt będzie identyczny jak w przypadku kliszy. Zastanówmy się jednak, co uzyskamy, gdy będziemy odczytywać układ w sposób ciągły i dobierzemy czas odczytu kolumny równy dokładnie czasowi przesunięcia się gwiazdy do sąsiedniej kolumny na skutek ruchu sfery niebieskiej. Założmy dla ułatwienia, że obraz gwiazdy zajmuje tylko jeden element (w rzeczywistości na skutek drgań atmosfery i niedoskonałości optyki teleskopów z reguły zajmuje on kilka elementów).

Światło gwiazdy dotarwszy do układu pada na któryś z elementów ostatniej kolumny. W międzyczasie odczytywana jest kolumna zerowa. Po zakończeniu ostatnia kolumna przesuwana jest na pozycję przedostatnią, w niej więc znajdują się teraz fotoelektrony wybite przez światło gwiazdy. Ale ponieważ odpowiednio dobraliśmy czas odczytu, również światło gwiazdy pada teraz na element kolumny przedostatniej (oczywiście, rząd jest ten sam co poprzednio, bo ustawiliśmy układ równoległe rzędami do ruchu dziennego). Fotoelektrony akumulują się teraz z wybitymi poprzednio. Po odczycie kolejnej kolumny interesujący nas element przesuwany jest na miejsce przed-przedostatnie, gwiazda przesuwa się również tam i tak dalej aż do osiągnięcia kolumny pierwszej. Po dojściu do kolumny pierwszej element zawiera wszystkie fotoelektrony wybite wzdłuż całego rzędu. Odczytując tę kolumnę dostajemy punktowy obraz gwiazdy o czasie ekspozycji równym czasowi przechodzenia gwiazdy przez układ.

Nic więc prostszego, jak odczytywać układ bez przerwy. Zamiast obrazu o wielkości kilka na kilka minut łuku, jak przy klasycznym zastosowaniu

CCD, uzyskamy obraz paska o szerokości kilku minut na ... no właśnie, to zależy od tego, jak długo będziemy odczytywać. Może to być stopień, kilka czy kilkanaście. Technika ta daje więc możliwości uzyskiwania obrazów CCD dużych obszarów nieba, czyli tego, co w zasadzie do dzisiaj było domeną klisz fotograficznych. A zalety są ogromne. Przede wszystkim duża czułość CCD powoduje, że przy obserwacjach zatrzymanym teleskopem o średnicy lustra 1 metr rejestruje się obiekty słabsze niż na „najgłębszych” przeglądach fotograficznych. Ponadto istnieje zawsze możliwość regulacji czasu ekspozycji przez wydłużenie czasu przechodzenia gwiazdy przez układ, np. dzięki wprowadzeniu teleskopu w ruch wolniejszy od ruchu sfery niebieskiej. Zauważmy też, że czas ekspozycji jest, oczywiście, funkcją deklinacji. Uzyskane w ten sposób dane mają znakomitą precyzję zarówno astrometryczną, jak i fotometryczną; mają więc znacznie większą wartość niż zwykle fotografie.

Technika ta, zwana z angielska techniką skanowania, została z sukcesem zastosowana ostatnio przez astronomów amerykańskich, Paula Schechtera i Steva Shectmana, w obserwatorium Las Campanas w Chile.

Wykorzystali oni do tego najnowszy układ CCD o wielkości 2048 na 2048 elementów. Oczywiście, jak to zwykle bywa w przypadku pionierskich przedsięwzięć, nie obyło się bez problemów technicznych. Okazało się po pierwsze, że czas odczytu kolumny tak dużego układu jest zbyt długi (każda taka kolumna to przecież 2048 elementów), zaszła więc konieczność stosowania tzw. superelementów, składających się z czterech (2 na 2) podstawowych komórek. CCD miał więc efektywną wielkość 1024 na 1024 superelementów. Innym ograniczeniem była ogromna ilość danych spływających z układu – jedna kolumna w tej konfiguracji zawiera 1024 razy 2 bajty. Obliczmy: przy światłosile 1 : 7 teleskopu o średnicy 1 m, 1 mm w ognisku teleskopu odpowiada około 30 sekundom łuku. Jeśli obserwujemy gwiazdę na równiku niebieskim (najszybciej poruszającą się ze względu na ruch sfery niebieskiej) – w ciągu 1 sekundy przemieszcza się ona o 15 sekund łuku, czyli o pół milimetra na układzie CCD. Pół milimetra to 0,5/0,02, czyli 25 kolumn oryginalnych lub 0,5/0,04, czyli 12,5 kolumn superelementów. Tak więc na sekundę odczytywano 25 kB danych. W tej sytuacji problemem staje się ich magazynowanie. Nie udało się, niestety, zapisywać ich bezpośrednio na ostatnim cudzie techniki – kasetkach EXABYTE. Kasetki te mają pojemność 2,2 GB, a więc jedna wystarczyłaby na rejestrację danych z całej nocy! Z tej

przyczyny ograniczono skany do kilkunastu minut i dopiero po zakończeniu ekspozycji wyniki zapisywano na kasetkach. Ogólnie jednak obserwacje zakończyły się pełnym sukcesem i pozwoliły zebrać dane przeglądowe nieba z wielu obszarów.

Paul Schechter twierdzi, że już wkrótce będziemy mieli cyfrowe przeglądy nieba. I rzeczywiście, choć pewnie nieprędko zostaną skonstruowane większe układy CCD, umieszczenie kilku, powiedzmy czterech, układów jeden obok drugiego umożliwi skanowanie pasków o szerokości rzędu stopnia. I po roku czy dwóch powinniśmy mieć skompletowany przegląd CCD całego nieba. Jedyne problemy to – kto będzie analizował tę super ogromną ilość danych. Paul odpowiada z uśmiechem: komputery i studenci!

Przykłady programów imperatywnych w języku BASIC mogą Czytelnicy odnaleźć w dziale μ miesięcznika *Problemy*. My zilustrujemy myślenie imperatywne programem w języku PASCAL na generowanie tak zwanych *trójek pitagorejskich*. Trójką pitagorejską nazywa się w matematyce trójkę liczb naturalnych a, b, c spełniających warunek z twierdzenia Pitagorasa: $a^2 + b^2 = c^2$. Można wykazać, że takich trójek jest nieskończenie wiele. Nasz program ma generować i wyświetlać wszystkie trójki, w których c nie przekracza danej liczby M .

Zastosowana w programie metoda polega na przeglądaniu wszystkich par b, c , w których $c \leq M$ i $b < c$, wyliczeniu wartości pierwiastka z liczby $c^2 - b^2$ i zaokrągleniu jej do liczby naturalnej przez odrzucenie części ułamkowej. Następnie sprawdzamy, czy otrzymane w ten sposób liczby: a , które obliczyliśmy, b oraz c spełniają warunek Pitagorasa. Jeśli tak, to otrzymaną trójkę wyświetlamy na ekranie. Po zbadaniu danej pary b, c przechodzimy do kolejnej według zasady, że dla ustalonego c badane są wszystkie b w porządku rosnącym od 1 do $c - 1$. Po wyczerpaniu zaś wszystkich b następuje przejście do kolejnego, większego c , aż do wyczerpania liczb od 1 do M .

```

program TrójkiPitagorejskie;
const
    M = 10;
var
    a, b, c : Integer;

begin
for c := 1 to M do
    for b := 1 to c - 1 do

        begin
            a := trunc(sqrt(c*c - b*b));

            if a*a + b*b = c*c then
                writeln (a, b, c)
        end
    end

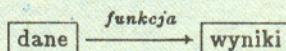
```

Maksymalna wartość zmiennej c .

Zmienne a, b, c mogą przyjmować liczbowe wartości całkowite. Początek instrukcji programu. Dla kolejnych wartości c od 1 do M wykonaj: przy ustalonym c dla kolejnych b od 1 do $c - 1$ wykonaj instrukcje pomiędzy słowami **begin** i **end**: przypisz zmiennej a wartość $\sqrt{c^2 - b^2}$ po odrzuceniu części ułamkowej, jeżeli otrzymana trójka jest pitagorejska – wyświetl liczby a, b, c .

Myślenie w kategoriach zbiorów i funkcji

W podejściu funkcyjnym program komputerowy jest traktowany jako funkcja, która w sposób jednoznaczny dla ustalonych danych wyznacza wyniki.



Programista ma możliwość myśleć w kategoriach pojęć matematycznych, takich jak zbiory i funkcje na zbiorach.

Program w języku aplikatywnym składa się na ogół z opisu zbiorów będących przedmiotem zainteresowania oraz z wielu definicji funkcji operujących na tych zbiorach. Definicje te są ze sobą wzajemnie powiązane w tym sensie, że raz zdefiniowane funkcje mogą być używane do definiowania następujących. Po wprowadzeniu programu do komputera można zażądać obliczenia wartości wybranej funkcji dla zadanych argumentów.

Oprócz składania funkcji drugim mechanizmem budowania programów funkcyjnych jest *rekurencja*. Jej istota polega na tym, że definiując wartość funkcji dla ustalonego argumentu możemy odwołać się do wartości tej samej funkcji dla innego argumentu, przy założeniu, że tę drugą wartość potrafimy (być może znowu z wykorzystaniem rekurencji) obliczyć. Oczywiście, dla pewnych argumentów wartość funkcji musi być podana jawnie. Mechanizm rekurencji można porównać do znanej ze szkoły zasady indukcji, która pozwala dowodzić twierdzenie dla ustalonej liczby naturalnej, przy założeniu, że dla liczb mniejszych jest ono prawdziwe.

Ilustracją myślenia w kategoriach funkcji rekurencyjnych niech będzie program w języku MIRANDA, który dla danej liczby M daje w wyniku zbiór wszystkich trójek pitagorejskich a, b, c , gdzie $c \leq M$.

$\text{TrójkiPitagorejskie}(M) = []$, $M = 1$

$\text{TrójkiPitagorejskie}(M) = T(M, M-1) ++$

$\text{TrójkiPitagorejskie}(M-1)$

$T(c, b) = []$, $b = 1$

$T(c, b) =$
 $[[a, b, c]] ++ T(c, b-1)$, $a = \text{trunc}(a)$
 where $a = \text{sqrt}(c * c - b * b)$

$T(c, b) = T(c, b-1)$

Interpretacja powyższych funkcji jest następująca. Funkcja $\text{TrójkiPitagorejskie}$ dla danego argumentu M daje w wyniku wszystkie trójki, w których c nie przekracza M .

Zadanie 3

Niech n oraz k będą ustalonymi liczbami naturalnymi. Zbiór S złożony z n punktów płaszczyzny ma następujące własności:

- a) żadne trzy punkty zbioru S nie leżą na jednej prostej;
 b) dla każdego punktu P , należącego do S , istnieje w S co najmniej k różnych punktów równo odległych od P .

Udowodnić, że $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez T zbiór trójek uporządkowanych (M, N, P) punktów zbioru S o tej własności, że $|PM| = |PN|$. Niech t będzie liczbą wszystkich takich trójek. Z warunków zadania wynikają następujące fakty:

a') Dla dowolnych punktów $M, N \in S$ istnieją w zbiorze T co najwyżej dwie różne trójki, których pierwszymi dwoma elementami są te właśnie punkty M i N (bowiem każdy punkt P uzupełniający parę (M, N) do trójki (M, N, P) musi leżeć na symetralnej odcinka MN , która – w myśl warunku a) – przechodzi przez nie więcej niż dwa punkty zbioru S). Ponieważ punkt M można ustalić na n sposobów, a punkt N – przy ustalonym M – na $n-1$ sposobów, zatem

$$(1) \quad t \leq 2n(n-1).$$

b') Dla dowolnego punktu $P \in S$ istnieje w zbiorze T co najmniej $k(k-1)$ różnych trójek, których ostatnim elementem jest P ; mamy bowiem – zgodnie z warunkiem b) – co najmniej k punktów zbioru S równo odległych od P ; możemy wybrać dowolny z nich jako punkt M , a następnie dowolny z pozostałych $k-1$ punktów jako punkt N . Ponieważ punkt P można ustalić na n sposobów, otrzymujemy nierówność

$$(2) \quad t \geq nk(k-1).$$

Z nierówności (1) i (2) wynika, że $k(k-1) \leq 2(n-1)$, a stąd

$$2n \geq k^2 - k + 2 > \left(k - \frac{1}{2}\right)^2,$$

co dowodzi tezy zadania.

Dla $M = 1$ zbiór rozwiązań jest pusty. W przeciwnym razie, dla $M > 1$ zbiór trójek dla c od 1 do M uzyskujemy dołączając (operacja $++$) do zbioru trójek dla ustalonego $c = M$ zbiór trójek otrzymany (rekurencyjnie) dla wszystkich $c \leq M-1$.

Niezależnie od wartości c , dla $b = 1$ zbiór rozwiązań jest pusty.

W przeciwnym razie:

gdy $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ jest liczbą całkowitą, dołączamy do zbioru rozwiązań trójkę a, b, c ;

natomiast gdy żaden z dwóch powyższych warunków nie jest spełniony, zbiór rozwiązań dla b pokrywa się ze zbiorem dla $b-1$.

Ponieważ

$$M = m + m_w, \quad \frac{m_w}{M} = \frac{b^2}{a^2}, \quad \text{więc} \quad M = \frac{ma^2}{a^2 - b^2}, \quad m_w = \frac{mb^2}{a^2 - b^2}.$$

Ostatecznie znajdujemy

$$I = m \left(\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{b^2 d^2}{a^2 - b^2} \right).$$



Rozwiązanie zadania F 301.

Zauważmy, że moment bezwładności jest wielkością addytywną, tzn. moment bezwładności danego ciała jest sumą momentów jego części składowych. A zatem moment bezwładności pełnego walca możemy przedstawić jako sumę momentu I naszej bryły i momentu I_w walca (wykonanego z tego samego materiału) wsuniętego w wydrążenie:

$$\frac{1}{2} M a^2 = I + I_w$$

(M oznacza masę pełnego walca).

I_w obliczamy korzystając z tw. Steinera:

$$I_w = \frac{1}{2} m_w b^2 + m_w d^2,$$

gdzie przez m_w oznaczyliśmy masę walca wsuniętego do wydrążenia.

Rozszerzona zasada nieoznaczoności

Zasada nieoznaczoności Heisenberga – jedno z podstawowych twierdzeń mechaniki kwantowej odzwierciedlające naturę obiektów kwantowych. Ogranicza jednocześnie dokładną mierzalność wielkości fizycznych, których operatory nie są przemiennie, np. dla składowych położenia i pędu $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$.

Kłopoty naukowców z uzyskaniem odpowiednich funduszy na badania naukowe stają się w pełni zrozumiałe, jeśli przyjąć, że obowiązuje tzw. rozszerzona zasada nieoznaczoności Epsteina–Heisenberga. Każde przedsięwzięcie naukowe (projekt) określone jest przez 3 parametry: temat, czas i środki niezbędne do jego realizacji. Zasada ta mówi, że jednocześnie można określić jedynie 2 z tych 3 parametrów, tj.:

- 1) jeśli dokładnie znany jest cel i zadany został przedział czasu, w którym należy go osiągnąć, wtedy nie można przewidzieć, jakie pociągnie to za sobą koszty;
- 2) jeśli czas i środki są ściśle określone, wtedy nie sposób przewidzieć, jaka część projektu zostanie zrealizowana;
- 3) jeśli cel jest sprecyzowany i zapewnione są środki takie, jakie wynikają z kosztorysu, wtedy nie sposób przewidzieć, czy i kiedy projekt zostanie zrealizowany.

Dodatkowo reguła mówi, że jeśli wszystkie trzy parametry daje się jednocześnie ściśle określić, to należy mieć pewność, że charakter przedsięwzięcia nie ma nic wspólnego z nauką. Odetchnęliśmy z ulgą – ten test warszawski cyklotron U-200 przeszedł pomyślnie.

Lidia GOETTIG

Rozwiązanie zadania F 300. Równanie ruchu pocisku możemy zapisać w postaci

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -cv \cdot \vec{v} + m\vec{g}$$

Widać stąd, że tak długo, jak $v^2 \gg \frac{mg}{c}$, efekt wpływu siły ciężkości na ruch jest znikomy. Zatem w początkowej fazie ruchu

$$(*) \quad m \frac{d\vec{v}}{dt} \approx -cv \vec{v}$$

i ruch zachodzi wzdłuż prostej będącej przedłużeniem lufy.

Wprowadzając teraz drogę s przebytą przez pocisk i uwzględniając, że $\frac{ds}{dt} = v$, możemy (*) przepisać w formie skalarnej:

$$m \frac{dv}{ds} = -cv$$

Rozwiązaniem tego równania (spełniającym warunek początkowy $s(v = v_0) = 0$) jest funkcja

$$s(v) = \frac{m}{c} \ln \frac{v_0}{v}$$

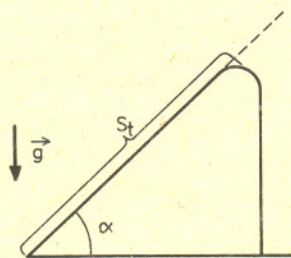
Ruch o takim charakterze będzie trwał, dopóki prędkość pocisku nie spadnie do wartości

$$v \approx v_t = \sqrt{\frac{mg}{c}}$$

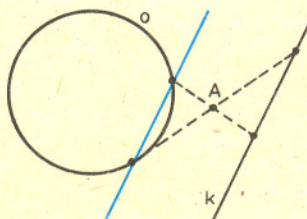
Od tego momentu można zaniedbać składową poziomą ruchu – w przybliżeniu będziemy mieć do czynienia z pionowym spadkiem ze stałą prędkością v_t . Tor pocisku wygląda więc tak, jak na rysunku, a zasięg i wysokość strzału dane będą przez

$$R = s_t \cdot \cos \alpha, \quad H = s_t \cdot \sin \alpha,$$

gdzie $s_t = \frac{m}{c} \ln \frac{v_0}{v_t}$.



Rozwiązanie zadania M 589. Symetria względem punktu A przeprowadza szukany odcinek na niego samego. Zatem obraz symetryczny k względem A przecina się z o w punktach, z których każdy jest końcem jednego z szukanych odcinków. Gdy przecięć nie ma – nie ma i rozwiązania.



Natomiast funkcja pomocnicza T dla ustalonego c sprawdza wszystkie wartości b dołączając do zbioru rozwiązań pojedyncze trójki.

Jeżeli teraz zechcemy obliczyć wartość funkcji:

Trójki Pitagorejskie(10),

to rozwiązaniem będzie zbiór:

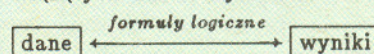
$$\{(6, 8, 10), (8, 6, 10), (3, 4, 5), (4, 3, 5)\}.$$

Wykonanie programu funkcyjnego przypomina pracę fabryki samochodów. Fabryka otrzymuje od współwytwórców półprodukty, jak stal, blachy, opony, szyby okienne, silniki itp. W różnych wydziałach fabryki montuje się z tych materiałów podwozia, karoserie, koła, drzwi, układy napędowe itd. Aż w końcu gotowy samochód wyjeżdża z fabryki.

Podobnie jest w programie funkcyjnym. Funkcja otrzymuje argumenty, na podstawie których może obliczyć wynik. Wynik ten jest przekazywany następnie dalej do tej funkcji, która zgłosiła nań zapotrzebowanie. W końcu zostaje „zmontowane” ostateczne rozwiązanie, na które zapotrzebowanie pochodziło od człowieka. Programista gra rolę budowniczego takiej „fabryki”. W realnych zagadnieniach często przybiera taka „fabryka” – program olbrzymie rozmiary.

Myślenie w kategoriach logiki

Formalną podstawą języków logicznych jest rachunek predykatów będący działem logiki matematycznej. Program w takim języku ma postać układu formuł wiążących dane z wynikami.



Właśnie te formuły są nazywane predykatami. Przykładem predykatu może być warunek Pitagorasa

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{ i } \quad c \leq M,$$

który wiąże ze sobą cztery wielkości a, b, c i M . Przy ustalonej wartości zmiennej M predykat ten definiuje pewien skończony zbiór trójek pitagorejskich. Nie określa on jednak sposobu, jak taki zbiór wyznaczyć.

Istotą języków typu logicznego jest to, że mają one wbudowany mechanizm wyznaczania obiektów spełniających określone przez programistę warunki. Tym samym zwalniają one programistę z myślenia o tym, jaką drogą osiągnąć rozwiązanie problemu. Niestety, istniejące obecnie języki nie czynią tego w pełni. Niekiedy programista musi udzielić pewnych wskazówek odnośnie dróg dojścia do rozwiązania.

Chaos w biologii?

Oto zapis w języku PROLOG predykatu Trójki Pitagorejskie oraz predykatu pomocniczego Nat:

Trójki Pitagorejskie(A, B, C, M) if
 $Nat(1, C, M)$ and $Nat(1, B, M)$ and $Nat(1, A, M)$
 and $A * A + B * B = C * C$.

$Nat(K, X, L)$ if $K \leq L$ and $X = K$ or
 $K \leq L$ and $K1 = K + 1$ and $Nat(K1, X, L)$.

Obiekty A, B, C, M spełniają pierwszy predykat, jeżeli A, B, C są liczbami naturalnymi z przedziału od 1 do M i spełniają warunek Pitagorasa. Natomiast predykat $Nat(K, X, L)$ określa, co to znaczy, że X jest liczbą naturalną należącą do przedziału od K do L , gdzie K i L są naturalne oraz $K \leq L$. Mianowicie, X jest, albo najmniejszą w tym przedziale liczbą K albo X należy do przedziału od $K + 1$ do L .

Spróbujmy teraz zadać pytania postaci:

Trójki Pitagorejskie(3, 4, 5, 10)

Trójki Pitagorejskie(2, 7, 9, 10)

Trójki Pitagorejskie($A, B, C, 10$)

W pierwszym przypadku dowiemy się, że liczby 3, 4, 5, 10 spełniają nasz predykat. Na drugie pytanie padnie, oczywiście, odpowiedź negatywna. Natomiast najciekawsza jest odpowiedź na trzecie pytanie, gdzie otrzymamy wszystkie rozwiązania:

- $A = 3, B = 4, C = 5$
- $A = 4, B = 3, C = 5$
- $A = 6, B = 8, C = 10$
- $A = 8, B = 6, C = 10$.

W tym miejscu niejeden Czytelnik zapyta: no dobrze, ale jaka jest strategia znajdowania rozwiązań? Możemy częściowo zaspokoić naszego Ciekawskiego podając analogię do poszukiwania wyjść z labiryntu. Podane przez nas predykaty i ich wzajemne powiązania tworzą właśnie taki labirynt; trójki A, B, C , spełniające warunek Pitagorasa, to wyjścia, a te, które go nie spełniają, to ślepe korytarze. Wyposażeni w nić Ariadny, która pozwala się cofać do już przebytych rozwidleń (powrót do nadrzędnego wywołania rekurencyjnego) i posługując się regułą prawej ręki (warianty są rozpatrywane w uporządkowany sposób) mamy gwarancję znaleźć wszystkie wyjścia.

Na układ predykatów w języku typu logicznego można patrzeć jak na bazę danych, w której są zapamiętane pewne fakty oraz zależności między nimi.

Na podstawie Science, tom 243 (1989), str. 310
 opracował Jan KALINOWSKI.

Chaos jest dziwnym porządkiem matematycznym, który wydaje się być przypadkowy. Chaos jest deterministyczny – spełnia równania matematyczne. O chaosie możecie przeczytać w *Delcie* 2/1989.

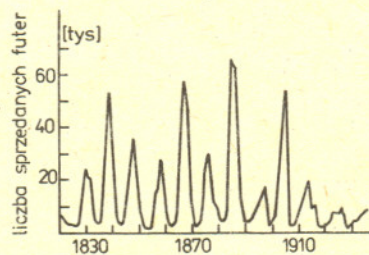
Zainteresowanie biologów chaosem trwa już ponad 15 lat. Biolodzy zajmujący się populacją byli jednymi z pierwszych, którzy zaczęli studiować chaos. W 1974 r. Robert May, ekolog z Princeton, opublikował pracę z modelem matematycznym prostego układu ekologicznego. Rozpatrzył on przypadek jednego gatunku zwierząt i dla prostoty założył, że w każdej chwili żyją zwierzęta należące tylko do jednej generacji.

Najprostszy model chaosu w biologii:

Założenia: jeden gatunek zwierząt – nazwijmy je owadami – wykluwa się z jaj wiosną, żyje latem, składa jaja jesienią i ginie. Liczba owadów w danym roku N_i określa liczbę owadów w roku przyszłym N_{i+1} . Ścisły związek N_{i+1} z N_i jest trudny do ustalenia w rzeczywistości, w modelu zakładamy $N_{i+1} = aN_i - bN_i^2$, gdzie a odpowiada przyrostowi naturalnemu, b – reakcji na przepełnienie. Dobierając odpowiednio jednostki możemy napisać $N_{i+1} = \alpha(N_i - N_i^2)$, gdzie $0 < \alpha$ (aby liczba owadów była zawsze dodatnia). To prościutkie równanie ma bardzo różne rozwiązania (sprawdź!) w zależności od wartości α .

- 1) $0 < \alpha < 1$; populacja ginie szybciej niż odtwarza się, $N_i \rightarrow 0$.
- 2) $1 < \alpha < 3$; $N_i \rightarrow \text{const}$, wartość stałej zależy od α , ale nie zależy od wartości początkowej N_i . Np. dla $\alpha = 2$, $N_i \rightarrow \frac{1}{2}$.
- 3) $3 < \alpha < 3,4$; N_i oscyluje między dwiema wartościami ekstremalnymi.
- 4) α trochę większe niż 3,4; N_i skacze między czterema wartościami. Wzrost α powoduje pojawienie się 8, 16, 32, itd. wartości, między którymi oscyluje N_i . Proces ten nazywa się podwajaniem okresowości.
- 5) $\alpha > 3,57$; nie ma wartości ustalonych, N_i zmienia się chaotycznie.

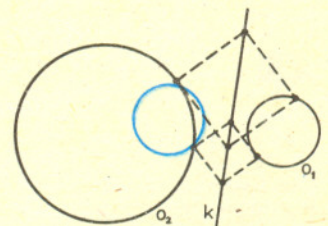
Chaos to nie „przypadkowy” wygląd krzywej N_i w zależności od i , lecz „czułość” na warunki początkowe. W przypadku „niechaotycznym” ($\alpha < 3,57$) N_i zachowuje się tak samo po kilku lub kilkunastu latach bez względu na początkową liczebność owadów N_0 . Np. dla $\alpha = 2$ wielkość N_i dąży do $\frac{1}{2}$ ze wzrostem i – jest to tzw. stabilny atraktor. W przypadku chaotycznym ($\alpha > 3,57$) wartość N_i z roku na rok zależy bardzo silnie od początkowej populacji. Zmiana początkowej populacji nawet o 1% spowoduje zupełnie inną wartość N_i już po kilku latach i zachowanie N_i w zależności od i będzie zupełnie inne.



Rys. 1. Populacja ryśiów kanadyjskich zmieniała się gwałtownie między 1820 r. i 1930 r. Maksima pojawiają się regularnie co 9–10 lat, ale ich wartości są różne. Ponieważ ryśie były poszukiwane ze względu na ich cenne futro od ponad 200 lat, zapiski firm handlujących ich futrami dostarczyły informacji na temat populacji w okresie dłuższym niż dla jakichkolwiek innych danych zebranych przez naukowców.



Rozwiązanie zadania M 590. Symetria względem prostej k przeprowadza szukany kwadrat na niego samego. Zatem obraz symetryczny o_1 względem k przecina o_2 w punktach, z których każdy jest wierzchołkiem jednego z szukanych kwadratów. Gdy przecięć nie ma – nie ma i rozwiązania.

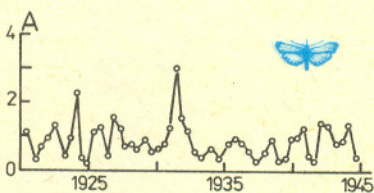


Okazało się, że w zależności od tempa urodzeń i reakcji zwierząt na przepelnianie ich populacja może osiągnąć stałą równowagę, oscylować między dwiema ustalonymi wartościami, oscylować między czterema lub dowolną liczbą ustalonych wartości lub zachowywać się w sposób chaotyczny. Zaskakujące w wynikach uzyskanych przez Mayę było to, że prosty układ deterministyczny może zachowywać się w skomplikowany sposób, wyglądający na zupełnie przypadkowy. Do tej pory sądzono, że skomplikowane zachowanie jest możliwe w układach bardzo złożonych lub zawierających element przypadku, np. gwałtowne zmiany pogody itp.

Chociaż modele z jednym gatunkiem zwierząt są najprostsze i najłatwiejsze do analizy, to wartości parametrów odpowiadające chaosowi są zbyt duże w porównaniu z wartościami występującymi w przyrodzie. W bardziej skomplikowanych modelach z wieloma gatunkami zwierząt można uzyskać zachowanie chaotyczne na wiele sposobów.

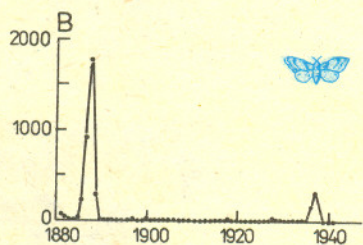
Badania nad chaosem w biologii spowodowały zmianę poglądów na problemy populacji nawet tych biologów, którzy nie wierzą w chaos w naturalnych populacjach. Każdy układ samopowtarzający się ma skłonność do zachowania chaotycznego. Układy biologiczne wykazują istnienie dodatniego sprzężenia zwrotnego i zwiększając wartość odpowiedzialnego za niego parametru można wymusić chaos. Nawet jeśli chaos nie występuje w naturalnej populacji, to na skutek biotechnologii, stymulowania wzrostu itp. działanie ludzkie może doprowadzić do chaosu.

Po 15 latach badań nikt nie przedstawił danych doświadczalnych, które byłyby powszechnie przyjęte jako przejaw chaosu w naturalnych populacjach. Pokazano natomiast wiele zbiorów danych sugerujących chaos w populacjach zmieniających się dziwnie z roku na rok w interesujący sposób. Nawet jeśli okaże się, że chaos nie występuje w biologicznych populacjach, to badania nad nim rzuciły wyzwanie panującym dogmatom w biologii i spowodowały powstanie nowych koncepcji zachowania się układów biologicznych.

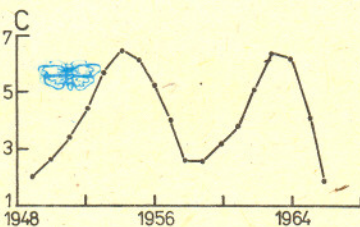


Rys. 2. Populacje gatunków ćmy wykazują różne zachowania.

a) Populacja ćmy *Chilo suppressalis* w Japonii fluktuuje wokół wartości średniej, która pozostaje w przybliżeniu stała.



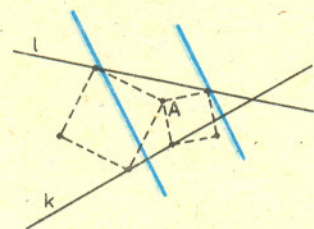
b) Populacja ćmy *Dendrolimus pini* w Niemczech jest bardzo mała z wyjątkiem krótkich okresów nagłego wzrostu.



c) Populacja *Zeiraphera diniana* w Szwajcarii zmienia się o cztery rzędy wielkości w cyklu około dziesięcioletnim.



Rozwiązanie zadania M 591. Obrót względem A o 90° przeprowadza wierzchołek szukanego kwadratu leżący na prostej k na przeciwległy wierzchołek leżący na prostej l , czyli na punkt przecięcia prostej l z obrazem prostej k w tym obrocie (uwaga: obracać możemy w dwie strony!). Rozwiązań nie ma jedynie wtedy, gdy $k \perp l$, chyba że A leży na jednej z dwusiecznych utworzonego przez nie kąta.



Przykładem niech będzie następujący układ faktów:

Dziecko(„Jan”, „Beata”).

Dziecko(„Danuta”, „Lech”).

Dziecko(„Małgorzata”, „Jan”).

Dziecko(„Dariusz”, „Beata”).

Dziecko(„Roman”, „Małgorzata”).

Zgodnie z intuicją, fakt postaci *Dziecko*(D, R) oznacza, że osoba o imieniu D jest dzieckiem osoby R . Z takiej bazy faktów może robić użytek predykat *Potomek*(X, Y), który jest spełniony, gdy osoba X jest potomkiem Y :

Potomek(X, Y) if *Dziecko*(X, Y) or *Dziecko*(X, Z) and *Potomek*(Z, Y).

Treść tego predykatu jest łatwa do rozszyfrowania: jest się potomkiem pewnej osoby, jeżeli jest się jej dzieckiem, albo jeżeli jest się dzieckiem potomka tej osoby. Oczywiście, gdy X jest potomkiem Y , to ten ostatni jest przodkiem X . Zatem znalezienie odpowiedzi na poniższe pytania nie powinno nastęrczać trudności. Zadanie to pozostawiamy Czytelnikowi:

Potomek(„Roman”, „Jan”),

Potomek(X , „Beata”),

Potomek(„Roman”, Y),

Potomek(X, Y).

Co z tego może wynikać?

Nie bez powodu przedstawiliśmy trzy grupy języków w powyższej kolejności. Jest to nie tylko zgodne z chronologią pojawienia się tych grup, ale również związane ze współczesnymi tendencjami rozwoju.

Wydaje się, że karta historii języków imperatywnych powoli się zamyka. Docierające zewsząd sygnały o nienadążaniu rozwojowi oprogramowania za burzliwym rozwojem elektroniki komputerowej mają swoje źródła w niedoskonałości dostarczanych przez języki imperatywne środków wyrazu.

Złożoność zagadnień, wobec których staje dzisiaj informatyka, rodzi konieczność pisania programów ogromnej wielkości, dochodzących do kilkuset tysięcy, a nawet milionów linii. Panowanie nad poprawnością i wewnętrzną spójnością takich dzieł staje się niemożliwe ani dla jednostek, ani dla zespołów programistów. Dzieje się tak, mimo że nowoczesne języki imperatywne, takie jak PASCAL, MODULA lub ADA, mają wbudowane środki grupowania instrukcji w tak zwane procedury oraz moduły.

ZOSTAŃ STUDENTEM FIZYKI na Uniwersytecie Warszawskim

**Andrzej K. Wróblewski –
Rektor Uniwersytetu
Warszawskiego**

Czterdzieści lat temu zdecydowałem się studiować fizykę na uniwersytecie. Gdybym miał dziś znów podjąć decyzję, to mój wybór byłby identyczny. Ani przez chwilę nie żałowałem wyboru, lecz radowałem się, że jestem fizykiem, że

dane mi jest uczestnictwo w poznawaniu najgłębszych tajemnic wszechświata.

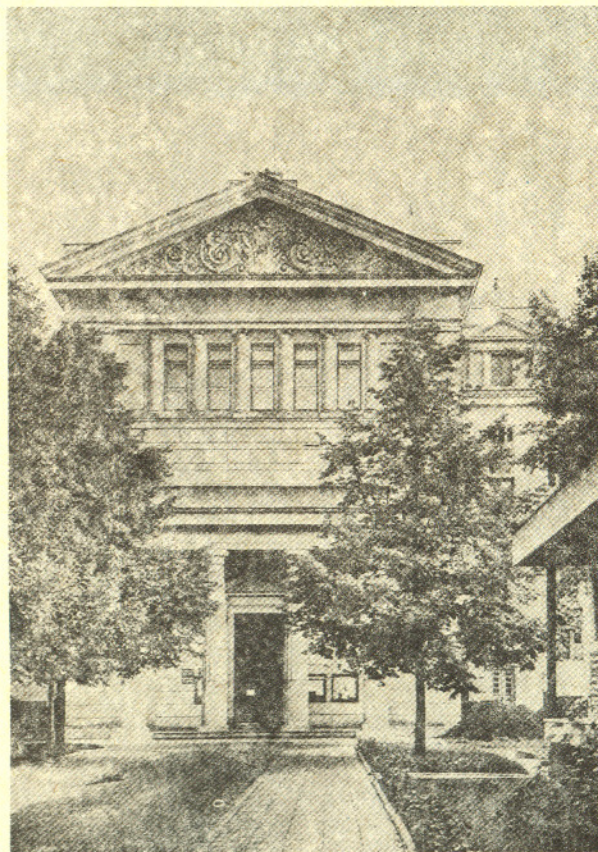
Pracuję obecnie jako fizyk i nauczyciel akademicki. Ale nawet gdybym obecnie pracował w innym zawodzie, to i tak wartości wyniesione ze studiów byłyby mi pomocne w życiu i drogie.

Mój przyjaciel, zmarły w ubiegłym roku profesor Grzegorz Białkowski, poprzedni rektor Uniwersytetu Warszawskiego, tak napisał:

Ktoś, kto nie znałby fizyki dzisiejszej, byłby odcięty od wielkiego nurtu refleksji nad światem, nad przyrodą, nurtu, który w tak wielkim stopniu kształtował człowieka i nawet jego dzieje społeczne, nie mówiąc już o sztuce; która jest do głębi przesiąknięta refleksją filozoficzną.

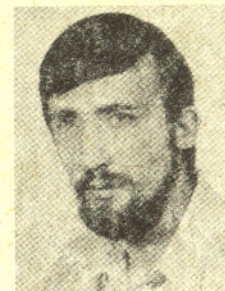
Studia fizyczne dają bowiem człowiekowi wartości, które czynią go lepszym, dojrzałym, bardziej odpornym na półprawdy.

Warto więc popробować tych studiów!



Cała historia fizyki Uniwersytetu Warszawskiego, w szczególności fizyki doświadczalnej, wiązała się stale z budynkiem przy ulicy Hożej 69 i w ten sposób „Hoża” stała się symbolem fizyki warszawskiej. Mówiąc po prostu „Hoża” miało się zawsze na myśli ośrodek powołany do życia przez Stefana Pieńkowskiego w 1921 roku.

Jerzy PNIEWSKI



Witold Nazarewicz,

ur. w 1954 r., w 1977 r. ukończył studia na Wydziale FTiMS Politechniki Warszawskiej, doktorat uzyskał w 1980 r. w Instytucie Badań Jądrowych, a habilitację w 1987 r. na Wydziale Fizyki UW. Specjalista w dziedzinie teorii jądra atomowego, docent w Instytucie Fizyki Teoretycznej UW.

Autor 110 publikacji w specjalistycznych czasopismach o zasięgu międzynarodowym.

Witold Nazarewicz odpowiada na pytanie:

Czym jest dla mnie fizyka?

Fizyka to – fascynacja, wielowymiarowy puzzle, który usiłujesz złożyć. Ciężka praca w nadziei, że uda Ci się odnaleźć kilka właściwych, pasujących do siebie kawałków.

Fizyka to – satysfakcja, kiedy uda Ci się rozwiązać zagadkę i ułożysz małą fragment puzzle'a. Wielka frajda – gdy wiesz, że oto (być może?) poznałeś cząstkę obiektywnej prawdy.

Fizyka to – poszukiwanie, uświadomienie sobie naszej niewiedzy. Im dłużej pracujesz nad jakimś zagadnieniem, tym bardziej uświadamiasz sobie, jak mało wiesz i jak wiele jest jeszcze do zrobienia.

Fizyka to – narkotyk, który wciąga, ale i wyniszcza, wymaga wyrzeczeń, poświęcenia części życia rodzinnego i innych zainteresowań.

Fizyka to – frustracja i życie w stresie, strach przed popełnieniem błędu. Pamiętaj: prawdziwy ekspert to ten, który popełni wszystkie możliwe błędy w swojej dziedzinie – ale tylko raz.

Fizyka to – droga do poznania świata i fantastycznych ludzi, którzy czują i myślą podobnie jak Ty i na których możesz liczyć.

Fizyka to – wielki business, ma swój rynek, konkurencję i reklamę. Wiesz, że nad Twoim problemem pracują Twoi koledzy, współpartnerzy, współpracownicy... Kto będzie pierwszy? Czasem jest to kwestia paru miesięcy, a czasem kilku godzin. Wielkie konferencje naukowe przypominają targi handlowe, na których wystawia się



Laser barwnikowy z laboratorium „Hożej”

kiem przy ulicy Hożej 69 i w ten sposób „Hoża” stała się symbolem fizyki warszawskiej. Mówiąc po prostu „Hoża” miało się zawsze na myśli ośrodek powołany do życia przez Stefana Pieńkowskiego w 1921 roku.

Jerzy PNIEWSKI

Sam budynek został sfinansowany przez Marię Curie-Skłodowską, która oddała na ten cel swoją drugą Nagrodę Nobla.

Współczesne badania fizyczne wymagają szerokich kontaktów międzynarodowych i szybkiego przepływu informacji. Ułatwiają to:

- niedawno założony, pierwszy w Polsce węzeł światowej sieci komputerowej BITNET,
- antena satelitarna (druga co do wielkości w Warszawie) współpracująca z aparaturą rejestrującą wysokiej klasy.

Wydział Fizyki UW posiada niemal 200 komputerów osobistych (linii IBM: PC, XT, AT, 386 i 486) oraz dostęp do komputerów linii DEC. Przystępujemy do utworzenia ogólnowydziałowej sieci komputerowej.

Fizyka to – wielki business, ma swój rynek, konkurencję i reklamę. Wiesz, że nad Twoim problemem pracują Twoi koledzy, współpartnerzy, współpracownicy... Kto będzie pierwszy? Czasem jest to kwestia paru miesięcy, a czasem kilku godzin. Wielkie konferencje naukowe przypominają targi handlowe, na których wystawia się i sprzedaje swój towar. Niestety, tak jak i w handlu, czasem opakowanie może okazać się ważniejsze od zawartości.

Fizyka to – dyplomacja i strategia w organizowaniu badań naukowych, zmaganiach z urzędnikami decydującymi o funduszach. Niestety, tak jak i w polityce często sukces należy do demagogów.

Oferujemy studia na następujących kierunkach:

- | | | |
|---|--|--|
| <input type="checkbox"/> fizyka cząstek elementarnych | <input type="checkbox"/> fizyka jądra atomowego | <input type="checkbox"/> fizyka atomu i cząsteczek |
| <input type="checkbox"/> fizyka ciała stałego | <input type="checkbox"/> biofizyka | <input type="checkbox"/> geofizyka |
| <input type="checkbox"/> fizyka medyczna | <input type="checkbox"/> astronomia, kosmologia i teoria względności | |

Na każdym kierunku można wybrać specjalizację doświadczalną, teoretyczną lub komputerową

Na kierunkach: biofizyka, fizyka medyczna i geofizyka studia trwają 5,5 roku, na pozostałych kierunkach – 5 lat

System studiów umożliwia indywidualizację programu

W ramach specjalizacji komputerowej możesz poznać:

- techniki komputerowe w eksperymencie fizycznym
- metody numeryczne, modelowanie i symulację komputerową

Staniesz się ekspertem w dziedzinie najbardziej wyrafinowanych zastosowań komputerów

Od przyszłego roku akademickiego (1991/92) rozpocznie działalność NAUCZYCIELSKIE KOLEGIUM FIZYKI

studia 5-letnie

dają kwalifikacje i dyplom magistra nauczyciela fizyki

studia 3-letnie

umożliwiają działalność zawodową

Wszystkich doświadczone serdecznie zapraszam na pomyślnie z fizyką. Mito mi będzie powitać Was w gronie studentów naszego Wydziału.
Krzysztof Ernst
Dziekan Wydziału Fizyki

Arkadiusz SKIERSKI – student I roku fizyki

Jak tylko daleko sięgnę pamięcią, to zawsze chciałem zostać lekarzem. A ponieważ na studia medyczne obowiązują egzaminy z biologii, chemii i fizyki, więc do liceum poszedłem do klasy biologiczno-chemicznej, a fizyki postanowiłem uczyć się sam. Nie szło mi to najlepiej, poza tym miałem kiepskiego nauczyciela. Chyba w trzeciej czy drugiej klasie „ogólniaka” sięgnąłem z czystej ciekawości po jakieś popularnonaukowe opracowanie szczególniej teorii względności. Zapamiętałem z tego tyle tylko, że czas jest pojęciem względnym i że dzięki temu miony mogą dolatywać do detektorów naziem-

nych. Skrócenie długości, dylatacja czasu tak mnie wciągnęły, że zacząłem czytać inne popularnonaukowe książki z dziedziny fizyki. Potem poszło już z górki. Chciałem wiedzieć coraz więcej i więcej. Dlatego właśnie jestem na pierwszym roku fizyki. Od studiów oczekuję, że umożliwią mi poznanie tego, co interesuje mnie najbardziej. Chodzi mi tu o fizykę cząstek elementarnych i astrofizykę, a właściwie kosmogonię.

Jak chyba każdy uczący się fizyki marzę o Nagrodzie Nobla..., jednakże po pierwszych kartkówkach na ćwiczeniach mój zapał trochę osłabł, ale zobaczymy, jak będzie po kolokwiałach i po sesji.



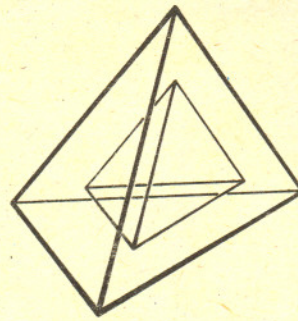
Środki te umożliwiają podział rozwiązywanego problemu na łatwiejsze do opanowania podproblemy. Niemniej, do naprawde dużych zagadnień okazuje się to niewystarczające.

Potrzebne są zwięzlejsze i bardziej abstrakcyjne środki wyrazu, które uwalniałyby programistę od potrzeby szczegółowego opisywania rozwiązania oraz od myślenia o budowie i sposobie działania maszyny cyfrowej. Właśnie temu celowi mają służyć języki typu funkcyjnego i logicznego. Programując w nich możemy operować abstrakcyjnymi pojęciami matematycznymi. Rola maszyny ma polegać na „rozumieniu” tych abstrakcyjnych pojęć w myśl zasady, że komputer ma służyć człowiekowi, a nie na odwrót.

Dzięki zbliżeniu języków funkcyjnych i logicznych do tradycyjnego języka matematyki łatwiejsze staje się badanie własności programów. Matematyka bowiem ma już wypracowane środki do badania takich obiektów, jak zbiory, funkcje, predykaty, i mają one w niej dobrze określone znaczenia. Język matematyki może zatem służyć zarówno do zapisywania programów, jak i do opisywania jego własności.

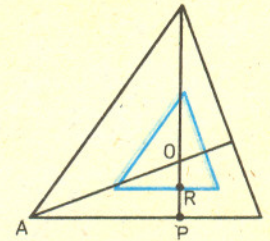
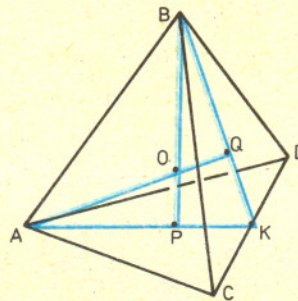
Bylibyśmy jednak nierzetelni dostrzegając wyłącznie pozytywne strony języków funkcyjnych i logicznych. Na drodze upowszechnienia się ich zastosowań stoi bowiem poważna przeszkoda: ich komputerowe realizacje są prawie zawsze mniej efektywne od realizacji języków imperatywnych. W praktyce oznacza to, że program w języku MIRANDA albo PROLOG może na tym samym komputerze wykonywać się kilka, kilkanaście, a może nawet kilkaset razy wolniej od realizującego to samo zadanie programu w języku PASCAL, wymagając przy tym znacznie więcej pamięci. Nie powinno to dziwić, skoro w tym ostatnim przypadku szczegółowa droga dojścia do rozwiązania pochodzi od „mądrego” człowieka, a nie od „głupiej” maszyny.

Nadzieja na przełamanie impasu w tej dziedzinie wiąże się z nową generacją tak zwanych równoległych architektur komputerów. Ich istotą jest możliwość wykonywania więcej niż jednej operacji jednocześnie przez niezależnie od siebie działające procesory. Jednak na dzień dzisiejszy architektury zorientowane na realizację języków funkcyjnych lub logicznych nie wychodzą poza laboratoria naukowców.



Spróbujmy w czworościanie foremny o krawędzi 1 umieścić kulę. Jakikolwiek byłby jej promień R , jeśli rzeczywiście da się ona umieścić wewnątrz czworościanu, to jej środek będzie się znajdował wewnątrz mniejszego czworościanu foremnego, którego krawędź jest już przez R wyznaczona.

Istotnie, mniejszy czworościan to zbiór tych wszystkich punktów większego czworościanu, których odległość od ścian jest nie mniejsza od R . Spróbujmy obliczyć długość a krawędzi mniejszego czworościanu. W tym celu zauważmy, że oba czworościany są jednokładne i środek jednokładności jest (między innymi) ich środkiem ciężkości. Odcinki łączące środek ciężkości ściany dowolnego czworościanu z przeciwległym wierzchołkiem są dzielone przez ten środek w stosunku 1 : 3 (dlaczego?) i wobec tego odległość środka ciężkości od ściany czworościanu wynosi $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}$ długości krawędzi (proszę samemu przeprowadzić obliczenia).



$$CK = \frac{1}{2}AB, AK = \frac{\sqrt{3}}{2}AB, AP = \frac{\sqrt{3}}{3}AB, BP = \sqrt{\frac{2}{3}}AB, OP = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}AB$$

Rozpatrując odpowiedni przekrój obu czworościanów stwierdzamy, że

$$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot a = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}} - R,$$

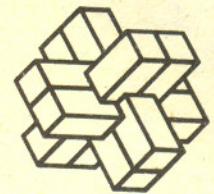
co daje ostatecznie

$$(*) \quad a = 1 - 2\sqrt{6}R.$$

Do czego ten rezultat może się przydać?

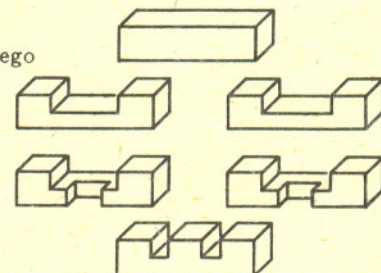
Krzyżak znacznie prościej

Pan Krzysztof Sitko z Tarnowa nadesłał nam inny sposób rozkładu krzyżaka na sześć klocków. Przypominamy: chodzi o tak wycięte z prostopadłościennych patyczków klocki, by dał się z nich złożyć krzyżak nie rozpadający się i nie mający luk we wnętrzu (por. *Delta* 7/1990).



Na rysunku obok przedstawiamy propozycję pana Sitko.

Jest ona o wiele prostsza od oryginalnego rozwiązania litewskiego i łatwo się domyślić, jak z takich klocków złożyć krzyżak. Tyle że można sądzić, iż Litwini specjalnie skomplikowali rozkład krzyżaka, by utrudnić życie składającemu.



Kącik Prac Uczniowskich ukazuje się w *Delcie* od numeru 3/1988 (z przerwami: *Delta* 6, 12/1988, 1, 6, 7, 8/1989, 6/1990 i 1/1991). Zawiera on propozycje ewentualnych tematów na Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki. Oczywiście, chętnie widzimy także prace na inne tematy.



Otóż do rozwiązywania następującego zadania:

W czworościanie foremnym o krawędzi 1 umieszczono n jednakowych kul. Jaki może być ich największy promień $r(n)$?

Np. dla $n = 2$. Szukamy w małym czworościanie dwóch najodleglejszych punktów – ich odległość to maksymalna średnica jednakowych, przecinających się kul, które mają w nich środek. Konkretnie mamy więc (bo w czworościanie najodleglejszymi punktami są jego wierzchołki) $2R = a$. Stąd rozwiązaniem naszego zadania jest rozwiązanie równania

$$2R = 1 - 2\sqrt{6} \cdot R,$$

a więc

$$R = \frac{1}{2(1 + \sqrt{6})} = r(2).$$

A dla większych n ? Szukamy takich n punktów w małym czworościanie, by najmniejsza z odległości między nimi była maksymalna. Przypuśćmy, że znaleźliśmy tę odległość i wynosi ona $f(n)$ – np. $f(2) = a$.

Rozwiązaniem naszego zadania będzie pierwiastek równania (*), w którym zamiast a podstawimy wartość obliczoną z zależności $2R = f(n)$ – można to zrobić, bo dla ustalonego n wartość $f(n)$ zależy tylko od a .

Mimo istnienia tak konkretnego przepisu znajdowanie wartości $r(n)$ jest trudne. Tak trudne, że nie tylko podanie ogólnej formuły, lecz także wyliczenie konkretnych wartości dla n do – powiedzmy – dwudziestu jest otwartym i wartościowym (w skali naukowej matematyki) problemem.

Przy okazji ciekawostka: $r(2) = r(3) = r(4)$. Sądzę, że każdy z Czytelników z łatwością to zauważy.

Jako temat samodzielnej (i, jeszcze raz to podkreślę, naukowo wartościowej) pracy polecam obliczanie wartości $r(n)$, a także rozwiązywanie analogicznego zadania dla sześcianu czy któregoś z pozostałych wielościanów foremnych.

M. K.

Okazuje się zatem, że podczas gdy przemysł elektroniczny narzeka na kryzys w dziedzinie oprogramowania, informatycy mają podstawy, by narzekać na elektronikę, która nie jest w stanie sprostać wymaganiom stawianym przez nowoczesne oprogramowanie. A co z tego może wynikać? Oczywiście – postęp.

Dodatek nadzwyczajny

Metoda generowania trójek pitagorejskich zastosowana w przytoczonych programach nie jest optymalna. Można uzyskać rozwiązania biorąc takie trójki liczb naturalnych k, l, m , że $k < l$ i $m(k^2 + l^2) \leq M$. Dla każdej takiej trójki możemy wyznaczyć rozwiązanie bezpośrednio ze wzorów:

$$a = m(l^2 - k^2), \quad b = 2mkl, \quad c = m(k^2 + l^2).$$

Wydaje się to najefektywniejszą z możliwych, a w dodatku dla małych wartości M nie wymagającą użycia komputera, metodą znajdowania trójek. Na dodatek staje się jasne, że trójek pitagorejskich jest nieskończenie wiele, bowiem tyle jest trójek liczb: m, l, k .

Uwagę tę zamieszczamy dla zaspokojenia tych Czytelników, którzy lubią rozwiązania optymalne, a zarazem ku przestrodze tym, którzy bezgranicznie wierzą w możliwości komputera.

Odpowiedzi na postawione w tekście pytania są następujące:

prawda;

$X = „Jan”, \quad X = „Dariusz”,$

$X = „Małgorzata”, \quad X = „Roman”;$

$Y = „Małgorzata”, \quad Y = „Jan”,$

$Y = „Beata”;$

wszystkie 8 możliwych takich par X, Y , że X oznacza potomka Y .

Regulamin Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

1. Konkurs organizowany jest corocznie przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Redakcję miesięcznika *Delta*, przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.

2. W konkursie mogą brać udział uczniowie wszystkich typów szkół.

3. Konkurs składa się z eliminacji i finału.

4. W eliminacjach bierze udział uczeń, który w terminie do dnia 1 maja prześle pod adresem Redakcji *Delt*y jeden egzemplarz swojej pracy matematycznej. Do pracy należy dołączyć następujące informacje: adres prywatny autora, klasa, nazwa i adres szkoły, imię, nazwisko i adres nauczyciela – opiekuna pracy.

5. Praca powinna zawierać samodzielny wkład ucznia i pełną informację o źródłach, z których korzystał jej autor. Prace czysto kompilacyjne nie będą dopuszczone do finału konkursu.

6. Prace nadesłane na eliminacje zostaną ocenione przez Komisję Konkursu i kompetentnych recenzentów. Te spośród prac, które spełniają warunki konkursu, zostaną przedstawione Jury Konkursu. Jury zakwalifikuje najlepsze prace do finału, który odbędzie się w trakcie dorocznej Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

7. Zawiadomienia o zakwalifikowaniu do finału zostaną przesłane autorom prac oraz nauczycielom – opiekunom prac przed końcem roku szkolnego.

8. Finałiści i nauczyciele opiekujący się ich pracami otrzymują od Zarządu Głównego PTM zaproszenie do udziału w Sesji na koszt Towarzystwa.

9. Finał polega na wygłoszeniu (nie na odczytaniu) przez ucznia, podczas specjalnego otwartego posiedzenia Sesji, referatu (trwającego nie dłużej niż 15 minut) i wzięciu udziału w dyskusji na temat, któremu poświęcona była praca.

10. Rezultaty finału oceni Jury Konkursu. Jury będzie brało pod uwagę, oprócz merytorycznej wartości pracy, również samodzielność i oryginalność ujęcia tematu oraz przebieg referatu i dyskusji. Jury przyznaje medale: złoty, srebrny i brązowy, wyróżnienia oraz nagrody pieniężne ufundowane przez Ministerstwo Edukacji Narodowej.

11. Ogłoszenie wyników finału następuje w trakcie Walnego Zgromadzenia Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Medale wręcza Prezes Towarzystwa. Wszyscy uczestnicy finału otrzymują dyplomy.

12. Wyniki konkursu i skróty zwycięskiej pracy będą opublikowane w miesięczniku *Delta*.

13. Komisję Konkursu oraz Jury Konkursu powołuje Zarząd Główny PTM na wniosek Komitetu Redakcyjnego *Delt*y.

δ

mała delta

Jak zoptymalizować rozpraszanie energii?

(Rozwiązanie zadania 108 z *Delty* 9/1990 z Klubu 44 F)

Pytanie wydaje się dziwne: przecież energię trzeba oszczędzać. Owszem, gdy jednak chcemy zatrzymać rozjeżdżony samochód, musimy jego energię kinetyczną jakoś rozproszyć – na tym właśnie polega hamowanie.

A teraz przenieśmy się na łono natury, najlepiej gdzieś w góry. Wyobraźmy sobie (rysunek) przepaść (głębokość przepaści $H = 14$ m), nad nią poziomy taras (szerokość tarasu $L = 7$ m) i oblodzoną krawędź przepaści. Na tarasie widzimy dwóch taterników – nazwijmy ich Alkiem (A) i Bolkim (B) – połączonych liną asekuracyjną; Alek (masa $m_A = 100$ kg) przywiązany jest do niej w sposób stały, Bolek (masa $m_B = 70$ kg) ma możliwość wypuszczania liny dowolnie regulując siłę jej naciągu.

W pewnej chwili, gdy Bolek znajduje się w najbardziej oddalonym punkcie tarasu, Alek zaczyna spadać w przepaść. Teraz od refleksu Bolka (i jego znajomości fizyki) zależy, jak się sprawa zakończy.

A wygląda poważnie: upadek – nie hamowany – z wysokości 14 m, to niechybna śmierć. Musimy więc przyjąć, że Bolkowi nie brakuje przytomności umysłu i szybkości działania. Cóż zatem robi?

I. Jeśli jest ostrożny, będzie linę wypuszczał z taką siłą F_1 , aby samemu nie spaść w poślizg, tzn.

$$F_1 < f_s m_B g$$

($f_s = 0,7$ – orientacyjna wartość współczynnika tarcia statycznego obuwi o podłoże, $g = 9,8$ m/s² – przyspieszenie ziemskie). W ten sposób podczas całego spadania (na odcinku o długości H) zostanie rozproszona energia o wartości równej

$$F_1 H < f_s m_B g H,$$

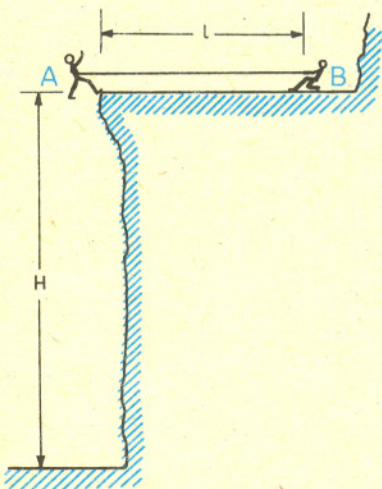
co dla naszych danych może dochodzić do 49% energii potencjalnej $E = m_A g H$, jaką miał Alek względem dna przepaści. W najlepszym razie (przy znaku równości) energia kinetyczna Alka w chwili jego upadku na dno będzie taka, jak przy spadku z wysokości $0,51H \approx 7$ m (prędkość $v_1 = 11,8$ m/s). Oznacza to, niestety, znaczne poturbowanie.

II. Jeśli Bolek jest nerwowy (albo nie ma „wyczucia”) i przytrzyma linę z siłą większą od $f_s m_B g$, doprowadzi do zablokowania liny i zacznie się ślizgać w stronę przepaści. Będzie przy tym hamował swego towarzysza zaledwie siłą

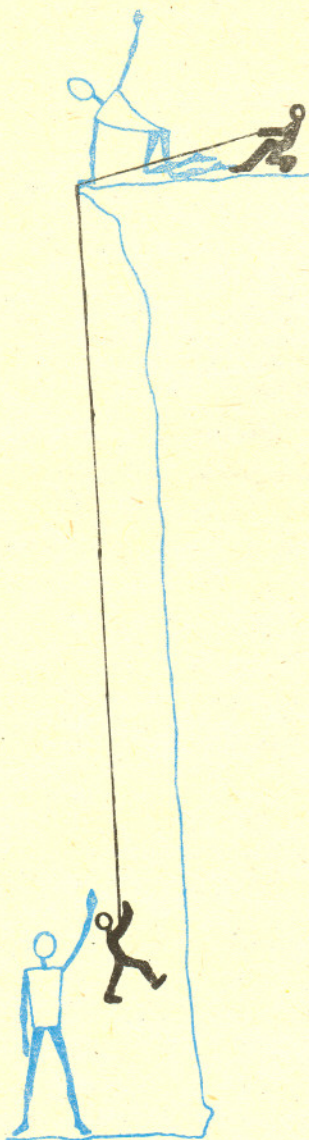
$$F_2 = f_k m_B g < f_s m_B g$$

($f_k = 0,5$ – orientacyjna wartość współczynnika tarcia kinetycznego obuwi o podłoże). Bierna praca tej siły na drodze L stanowi w naszym przypadku zaledwie około 18% energii E . W rezultacie upadek Alka na dno nastąpiłby z taką prędkością, jak przy spadku z wysokości $0,72H = 11,5$ m ($v_2 = 15,0$ m/s), co jest trudne do przeżycia. O ile na dodatek Bolek w porę nie puści liny, to nastąpi podwójna tragedia.

III. Jeśli Bolek dobrze orientuje się w prawach mechaniki, może poza tarciem wykorzystać zasadę zachowania pędu. Tak więc najpierw będzie postępował jak w punkcie I, a na krótko przed osiągnięciem przez Alka dna przytrzyma linę



108. Dwaj taternicy znajdują się na poziomym, płaskim tarasie nad przepaścią o wysokości $H = 14$ m. W pewnej chwili taternik A spada w przepaść. Jego kolega B, stojący w odległości $l = 7$ m od krawędzi, trzyma linę asekuracyjną, do której przywiązany jest spadający. Jak powinien on postępować, aby zminimalizować prędkość upadku towarzysza na dno przepaści i samemu nie spaść? Może on trzymać się liny kurczowo bądź też dowolnie regulować siłę jej wypuszczania. Przyjmując, że tarcie liny o próg skalny jest zaniedbywalne, natomiast współczynniki tarcia taternika B o podłoże wynoszą: $0,5$ dla tarcia kinetycznego i $0,7$ dla tarcia statycznego. Masy taterników A i B wynoszą odpowiednio $m_A = 100$ kg, $m_B = 70$ kg. Wytrzymałość liny, którą można uznać za nierozciągliwą, jest równa 2000 N. Obliczyć przybliżoną prędkość upadku taternika A w najbardziej korzystnym przypadku.



mocniej i przejmie część jego pędu (którą potem może wytracić ślizgając się po podłożu w stronę przepaści).

Proces przytrzymywania liny przypomina zderzenie niesprężyste dwóch ciał A i B. W wyidealizowanym więc przypadku natychmiastowego szarpnięcia (lina nierozciągliwa i nieograniczone siły działające w zaniedbywalnym czasie) obliczamy prędkość końcową obu taterników jako

$$v = \frac{m_A}{m_A + m_B} v_1 \approx 6,9 \text{ m/s},$$

co odpowiada spadkowi z wysokości 2,5 m. Sprawdzamy jeszcze, że energia kinetyczna, jaką uzyskał Bolek $m_B v^2 / 2 = 1690 \text{ J}$, nie przewyższa wartości pracy biernej sił tarcia $F_2 L = 2400 \text{ J}$, bo to jest warunkiem jego zatrzymania się przed krawędzią przepaści.

W rzeczywistości siły szarpnięcia nie mogą przekroczyć pewnej wartości, którą – ze względu na bezpieczeństwo obu taterników – możemy określić np. na $Q = 2000 \text{ N}$ (wytrzymałość lin bywa znacznie większa). Obliczenia dla takiego przypadku są dość żmudne. Przy założeniu nierozciągliwej liny wynika z nich (dla podanego zespołu danych) następująca procedura optymalna:

- 1) od początku spadania Alka Bolek wypuszcza linę z siłą zbliżoną do $f_s m_B g = 343 \text{ N}$, tzn. na granicy własnego poślizgu (patrz punkt I);
- 2) z chwilą, gdy Alek znajdzie się na wysokości 1,1 m nad dnem przepaści, Bolek zwiększa nagle siłę hamowania liny do wartości $Q = 2000 \text{ N}$, przez pewien czas (0,3 s) występuje poślizg liny, a jej zablokowanie następuje w momencie, gdy Alek osiąga dno, Bolek uzyskuje w tym czasie prędkość równą co do wartości prędkości upadku Alka;
- 3) Bolek wyhamowuje tę prędkość ślizgając się po podłożu i zatrzymuje się 0,2 m przed krawędzią przepaści (!).

W ten sposób daje się przez tarcie rozproszyć około 80% energii spadającego taternika, dzięki czemu jego prędkość upadku odpowiada spadkowi z wysokości niespełna 3 m – jest więc bezpieczna.

Interesujące jest jeszcze porównanie, jakie części energii rozproszonej przypadają na poszczególne procesy:

- tarcie liny wypuszczanej przez Bolka w fazie 1 – 49%,
- tarcie liny w fazie 2 – szarpnięcia – 30%,
- tarcie Bolka o podłoże podczas poślizgu w fazach 2 i 3 – 21%.

Małą Deltę przygotował Andrzej NADOLNY

Uwagi taternika

Sytuacja opisana w zadaniu w praktyce w górach nie powinna się w ogóle wydarzyć. Jeśli taternik B pokonał trudny (14 m) uskok skalny, to powinien on po drodze założyć tzw. przelotowe punkty asekuracyjne (haki, kostki czy петельki), a po dojściu w łatwy teren (półka) założyć stanowisko asekuracyjne. Dopiero wtedy może on ściągać partnera będąc z góry przygotowany na jego ewentualny upadek. Tak powinno to wyglądać zgodnie ze sztuką wspinania i asekuracji, co w oczywisty sposób zmienia warunki wyjściowe zadania. Tarcie liny na przelotach, jej rozciągliwość (z założenia wszystkie liny alpinistyczne są elastyczne), tarcie liny o skałę i inne jeszcze czynniki bardzo znacznie zmniejszają wartość siły działającej na asekurującego (np. jeżeli kąt przegięcia liny na karabinku jest bliski 180° , może to zredukować działanie tej siły nawet o połowę!).

Przyjmijmy jednak, że nasi taternicy są niedoświadczeni i wspinają się w takim terenie z tzw. lotną asekuracją (bez przelotów, obydwaj

jednocześnie). Możliwe są wtedy następujące sytuacje:

1. Z chwilą upadku A zaskoczony i nieprzygotowany taternik B zostaje automatycznie wyrwany ze stanowiska. Jest mało prawdopodobne, aby zachował nawet pozycję pionową. Zaczyna zsuwać się w przepaść razem. W tym wypadku jedynym ratunkiem dla nich będzie tarcie liny o krawędź skały i tarcie taternika B o podłoże. Oczywiście, zakładając, że półka nie jest gładka ani oblodzona, gdyby tak było – obydwaj spadną.

2. Jeżeli taternik B utrzyma się na nogach i będzie mógł kontrolować sytuację, wtedy impet upadku zostanie przeniesiony na jego ciało (poprzez przyrząd asekuracyjny), zostanie on też złagodzony przez rozciągnięcie liny oraz tarcie liny o krawędź.

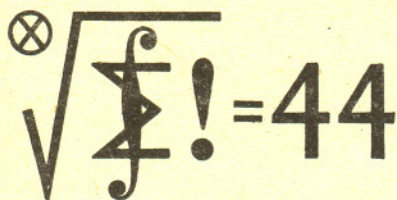
Przy prawidłowym przytomnym zachowaniu taternika B mogą wyjść z opresji cało, czyli jak w pkt. III.

Wojciech LEWANDOWSKI

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł *Weterana*. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 7/1990.

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 V 1991

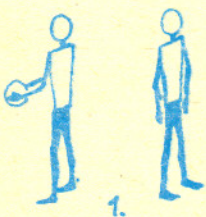


Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 201 ($WT=2,06$) i 202 ($WT=1,57$)
z numeru 5/1990

Henryk Kornacki – Augustów	46,82
Adam Czornik – Bytom	45,99
Jerzy Malopolski – Kraków	44,49
Adrian Langer – Nisko	42,38
Paweł Kubit – Krosno	36,74
Tomasz Grzesiak – Kraków	36,41

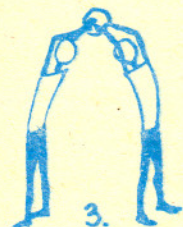
Szeregi Klubu 44 M zasilili panowie Kornacki i Czornik. Pan Malopolski zgromadził 44 punkty już powtórnie (wracając do zmagania ligowych po dłuższej przerwie). Witamy!



1.



2.



3.

Zadania z matematyki nr 215, 216

Redaguje Marcin E. KUCZMA

215. Wyznaczyć wszystkie takie punkty P leżące wewnątrz kwadratu $ABCD$, że
 $|\angle PAB| + |\angle PBC| + |\angle PCD| + |\angle PDA| = 180^\circ$.

216. Udowodnić, że reszta z dzielenia liczby naturalnej n przez liczbę naturalną $k > 1$ równa się

$$\frac{k-1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\sin \frac{j}{k}(2n+1)\pi}{\sin \frac{j}{k}\pi}$$

Zadanie 216 zaproponował pan Andrzej Paszkiewicz z Zegrza.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/1990

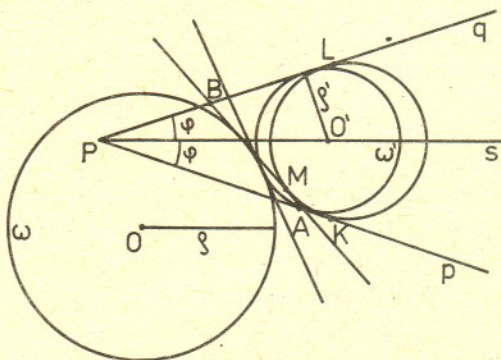
Przypominamy treść zadań:

211. Na płaszczyźnie dane są dwie półproste o wspólnym początku P (nie zawarte w jednej prostej) oraz koło zawierające punkt P w swoim wnętrzu. Wyznaczyć konstrukcyjnie trójkąt o minimalnym obwodzie mający dwa boki zawarte w danych półprostych, a trzeci bok styczny do danego koła.

212. Znaleźć ogólną postać funkcji wymiernej $F \neq 0$, spełniającej równanie $F(x) = F(\frac{1}{x})$ (dla wszystkich x , dla których obie strony mają sens).

211. Dwie dane półproste oznaczmy przez p i q , dany okrąg – przez ω ; jego środek i promień – przez O i ρ ; rozwartość kąta (wypukłego) między p i q – przez 2φ ; półprostą dwusieczną tego kąta – przez s .

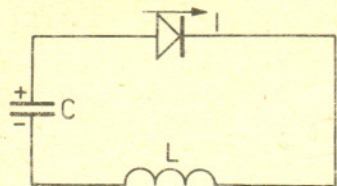
Niech PAB będzie dowolnym trójkątem o wierzchołkach $A \in p$, $B \in q$, o boku AB stycznym do ω . Weźmy pod uwagę okrąg dopisany, styczny do przedłużeń boków PA , PB oraz do boku AB odpowiednio w punktach K , L , M (rysunek 1). Obwód trójkąta PAB równa się $|PA| + |PB| + |AM| + |BM| = |PK| + |PL| = 2|PK|$, a więc jest minimalny wtedy, gdy rozważany okrąg dopisany leży możliwie najbliżej punktu P – czyli gdy jest zewnętrznie styczny do okręgu ω . Prosta AB jest wówczas wspólna styczna obu okręgów.



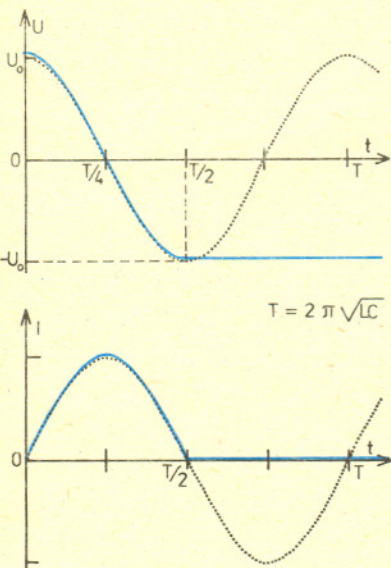
Rys. 1

Oznaczmy ten „optymalny” okrąg (styczny do p , q , ω) przez ω' , a jego promień i środek – przez ρ' i O' . Oto jedna z metod konstrukcyjnego wyznaczenia punktu O' . Na przedłużeniu półprostej s odkładamy odcinek PQ o długości $\rho / \sin \varphi$ (rysunek 2). Wówczas

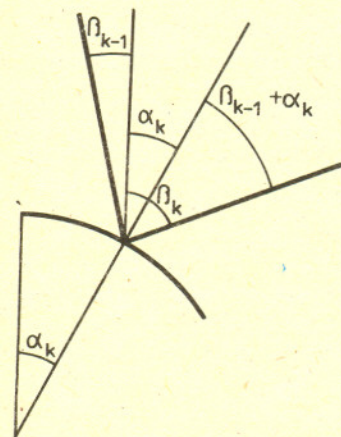
$$|QO'| = |QP| + |PO'| = \frac{\rho}{\sin \varphi} + \frac{\rho'}{\sin \varphi} = \frac{|OO'|}{\sin \varphi}$$



Rys. 1



Rys. 2



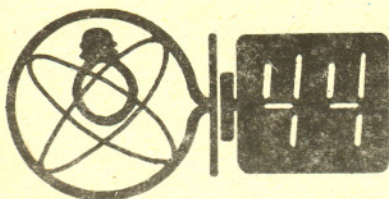
Rys. 3

**Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F**

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 103 (WT=1,55) i 104 (WT=1,30)
z numeru 7/1990

Przemysław		
Gworys	- Cząstochowa	45,13
Andrzej Borowski	- Aleksandrów Kuj.	44,99
Leszek Motyka	- Kraków	39,13
Paweł Perkowski	- Saczeń	23,25
Dzierżysław		
Lipiński	- Lublin	22,72

Panowie Gworys i Borowski zostają
członkami Klubu 44F (z numerami
szesnastym i siedemnastym).



Przypominamy treść zadań:

109. Obwód składa się z diody, kondensatora C , cewki L (rys. 1). Między okładkami kondensatora panuje napięcie U_0 . Znaleźć napięcie na kondensatorze oraz natężenie prądu płynącego w obwodzie po upływie czasu t od zamknięcia wyłącznika.

110. Kula A o promieniu r spada na nieruchomą kulę B o promieniu R i wielokrotnie się od niej odbija. W chwili początkowej środek kuli A znajduje się na wysokości $h \gg R + r$ nad środkiem kuli B i w odległości $\epsilon \ll R + r$ od prostej pionowej przechodzącej przez środek tej kuli. Znaleźć współrzędną poziomą środka kuli A po k odbiciach.

109. Po zamknięciu obwodu popłynie prąd w kierunku oznaczonym strzałką (dodatnia wartość natężenia prądu I), który jest kierunkiem przewodzenia diody. Wobec zaniedbywalnego oporu diody nasz obwód jest równoważny prostemu obwodowi LC (bez diody). Jak wiadomo, w takim obwodzie zachodzą drgania rezonansowe o okresie $T = 2\pi\sqrt{LC}$. Zależności czasowe napięcia na kondensatorze oraz natężenia prądu I płynącego w obwodzie rezonansowym przedstawiają linie kropkowane na rys. 2. Ponieważ w obwodzie z diodą prąd nie może płynąć w kierunku zaporowym, zatem w chwili $t = \pi\sqrt{LC}$ prąd przestanie płynąć, a napięcie na kondensatorze pozostanie stałe, równe $-U_0$. Odpowiednie zależności czasowe napięcia na kondensatorze i natężenia prądu w omawianym obwodzie przedstawiają krzywe na rys. 2 wykreślone linią kolorową.

110. Oznaczmy różnicę współrzędnych poziomych środków obu kul przy k -tym przesunięciu przez x_k (czyli x_1 to zadana odległość początkowa ϵ). Będziemy rozpatrywać tylko tę fazę ruchu kulki, w której jej przesunięcie poziome jest małe w porównaniu z $R + r$, czyli z pominięciem odbić końcowych. Zakładamy więc, że pozioma składowa prędkości jest bardzo mała w porównaniu z maksymalną wartością składowej pionowej, czyli że wysokość, którą osiąga kulka, pozostaje po każdym odbiciu jednakowa i równa h , a odstęp czasu między odbiciami jest stałe równy $t \approx 2\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Oznaczmy:

- v - pionowa składowa prędkości w momencie odbicia, $v \approx \sqrt{2gh}$,
- v_k - pozioma składowa prędkości po k -tym odbiciu, v_0 - przed pierwszym odbiciem (z warunku początkowego mamy $v_0 = 0$),
- $\alpha_k \approx \frac{x_k}{R+r}$ (zob. rys. 3) - kąt, jaki tworzy z pionem prostopadła do powierzchni kuli B w k -tym punkcie odbicia,
- $\beta_k \approx \frac{v_k}{v}$ - kąt, jaki tworzy z pionem prędkość po k -tym odbiciu, czyli przed $(k+1)$ -szym odbiciem.

Przyrównując kąt padania (równy $\beta_{k-1} + \alpha_k$) do kąta odbicia otrzymujemy:

$$\beta_k = 2\alpha_k + \beta_{k-1},$$

czyli

$$(1) \quad v_k \approx v_{k-1} + 2 \frac{v x_k}{R+r}.$$

Dołączając do tego tożsamość

$$(2) \quad x_k = x_{k-1} + v_{k-1} t$$

mamy parę równań rekurencyjnych pozwalających z początkowych danych $x_1 = \epsilon$, $v_0 = 0$ znaleźć kolejne wartości x_k i v_k :

$$v_1 \approx \frac{2v\epsilon}{R+r},$$

$$x_2 \approx \epsilon + \frac{2vt\epsilon}{R+r},$$

$$v_2 \approx \frac{2v\epsilon}{R+r} + \frac{2v\epsilon}{R+r} + \left(\frac{2v}{R+r}\right)^2 t\epsilon.$$

Zauważmy, że $vt \approx \sqrt{2gh} \cdot 2\sqrt{\frac{2h}{g}} = 4h$, zatem z założenia $h \gg R + r$ wynikają przybliżenia:

$$v_k \approx \left(\frac{8h}{R+r}\right)^k \cdot \frac{1}{t} \cdot \epsilon, \quad x_k \approx \left(\frac{8h}{R+r}\right)^{k-1} \cdot \epsilon.$$

Nietrudno skonstruować program komputerowy obliczający tor kulki ściśle, tzn. bez zakładania, że kąty są małe, ani że $h \gg R + r$. Na przykład, dla $\epsilon = 10^{-5}$, $R + r = 30$, $h = 135$ otrzymuje się $x_2 = 37\epsilon$, $x_3 = 1405\epsilon$, $x_4 = 53350\epsilon$, $x_5 = 20,54 \cdot 10^5 \epsilon$ (dla porównania: $\frac{8h}{R+r} = 36$, $(\frac{8h}{R+r})^2 = 1296$, $(\frac{8h}{R+r})^3 = 46656$).

Drodzy Czytelnicy!
Jak co miesiąc, przyznamy nagrodę książkową dla autora najciekawszej odpowiedzi.

Dzisiaj proponuję Ci, Czytelniku, doświadczenia dotyczące jednego z najpowszechniejszych zjawisk fizycznych – tarcia. Przed rozpoczęciem doświadczeń przypomnijmy sobie, o co chodzi. Tarcie T jest siłą hamującą ruch przy ślizganiu się po sobie dwóch powierzchni dociskanych siłą F_N . Oczywiście, aby ruch wywołać, winniśmy ciągnąć (pchać) ciało (w kierunku ruchu) jakąś siłą, powiedzmy F :

Jeżeli ciało się ślizga po powierzchni podłoża, siła tarcia T związana jest z siłą dociskającą F_N wzorem:

$$T = f F_N,$$

gdzie bezwymiarowy współczynnik f nosi nazwę współczynnika tarcia. Tak określony współczynnik tarcia nazywamy często dynamicznym, w odróżnieniu od statycznego, który mierzy siłę tarcia występującą przy ruszaniu z miejsca. Tarcie statyczne jest z reguły większe od dynamicznego. Ładnym dowodem doświadczalnym tej prawidłowości jest

Doświadczenie 1.

Pocieraj zwilżonym palcem brzeg szklanki lub kieliszka ruchem okrężnym (patrz rys.2). Jeżeli szklanka i palec są czyste, to po chwili usłyszysz piękny czysty dźwięk – drgania szklanki. Czy potrafisz wytłumaczyć to zjawisko?

Jeżeli jesteś, Czytelniku, ambitniejszy i chciałbyś ująć badane zjawisko w liczby, wykonaj

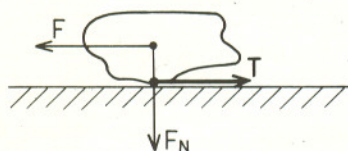
Doświadczenie 2: pomiar współczynnika tarcia.

W tym celu potrzebne jest gładkie, czyste i suche podłoże, na przykład deska, płytka szklana itp. Podłoże (o długości l) opieramy jednym końcem na stole, a drugi podnosimy na wysokość h , przy której położone na podłożu badane ciało (na przykład gumka) zaczyna się zsuwać (rys.3). Jeżeli nie będziemy gumce pomagać w zsuwaniu się, zmierzmy w ten sposób współczynnik tarcia statycznego (tarcie przy wprawieniu w ruch). Aby zmierzyć współczynnik tarcia dynamicznego, znajdujemy taką wysokość h , przy której gumka, której ruch zapoczątkujemy dodatkowym pchnięciem, nie zatrzyma się, lecz będzie się zsuwać nie rozpędzając się ani nie zwalniając.

Jako dodatkowe, bardzo proste zagadnienie teoretyczne, proponuję wykazanie, że współczynnik tarcia jest równy

$$f = \frac{h}{\sqrt{l^2 - h^2}}.$$

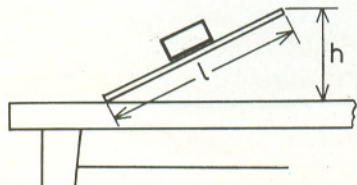
Wyniki doświadczeń dla różnych ciał ujmujemy w tabelkę zawierającą wartości współczynnika tarcia statycznego i dynamicznego. Oczywiście, doświadczenie opisujemy notując warunki jego przeprowadzenia (rodzaj podłoża, masę użytego ciała itp.). Powodzenia!



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Listy prosimy przysyłać pod adresem:
Korespondencyjny Klub Fizyków,
Wydział Fizyki Uniwersytetu
Warszawskiego,
ul. Hoża 69, 00-681 Warszawa.

Redaguje Jan GAJ

M 589. Dany jest punkt A , prosta k i okrąg o . Skonstruować taki odcinek mający jeden koniec na k , drugi na o , którego środkiem jest punkt A .

Rozwiązanie na str. 5

M 590. Dana jest prosta k i dwa okręgi o_1 i o_2 . Skonstruować taki kwadrat, którego dwa przeciwległe wierzchołki leżą odpowiednio na o_1 i o_2 , a pozostałe – na k .

Rozwiązanie na str. 6

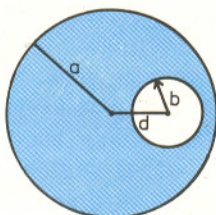
M 591. Dany jest punkt A i dwie proste k i l . Skonstruować taki kwadrat, którego dwa przeciwległe wierzchołki leżą odpowiednio na k i l , a jednym z pozostałych jest A .

Rozwiązanie na str. 7

Zadania matematyczne zostały zaczerpnięte z programu zajęć z geometrii na Trzyletnim Studium Zawodowym nauczycieli matematyki na Uniwersytecie Warszawskim.



Zadania



Redaguje Paweł KRAWCZYK

F 300. Pocisk o masie m został wystrzelony z lufy armatniej nachylonej do poziomu pod kątem α . Prędkość pocisku u wylotu lufy wynosi v_0 . Zakładając, że siła oporu działająca na pocisk jest proporcjonalna do kwadratu jego prędkości, $F_{op} = -cv^2$ (i skierowana przeciwie do wektora prędkości), oszacować zasięg strzału oraz maksymalną wysokość, na jaką wzniesie się pocisk w przypadku, gdy prędkość początkowa spełnia warunek

$$v_0 \gg \sqrt{\frac{mg}{c}}$$

(gdzie g jest przyspieszeniem grawitacyjnym).

Rozwiązanie na str. 5

F 301. W jednorodnym walcu o promieniu a wycięto równoległe do osi cylindryczny otwór o promieniu b , którego środek odległy jest od osi o d (patrz rysunek). Znaleźć moment bezwładności tej bryły względem osi wiedząc, że jej masa wynosi m , ($d + b < a$).

Rozwiązanie na str. 4