SPIS TREŚCI

NUMERU 1(200)

Od tego numeru nie chwalimy się posiadanymi tytułami.
Niestety, autorzy
też muszą się z tym pogodzić.

W następnym numerze:

O ewolucji języków programowania

„Delta"
matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej

Adres Redakcji
Centrum Informatyczne UW
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa
tel. 20-03-81 wew. 841

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa

Nakład 18 000 egz. Objętość 2 ark. wyd., 2,50 ark. druk., papier offsetowy V kl. 70 g. Wydrukowano w Zakładach Graficznych w Warszawie, ul. Srebrna 16

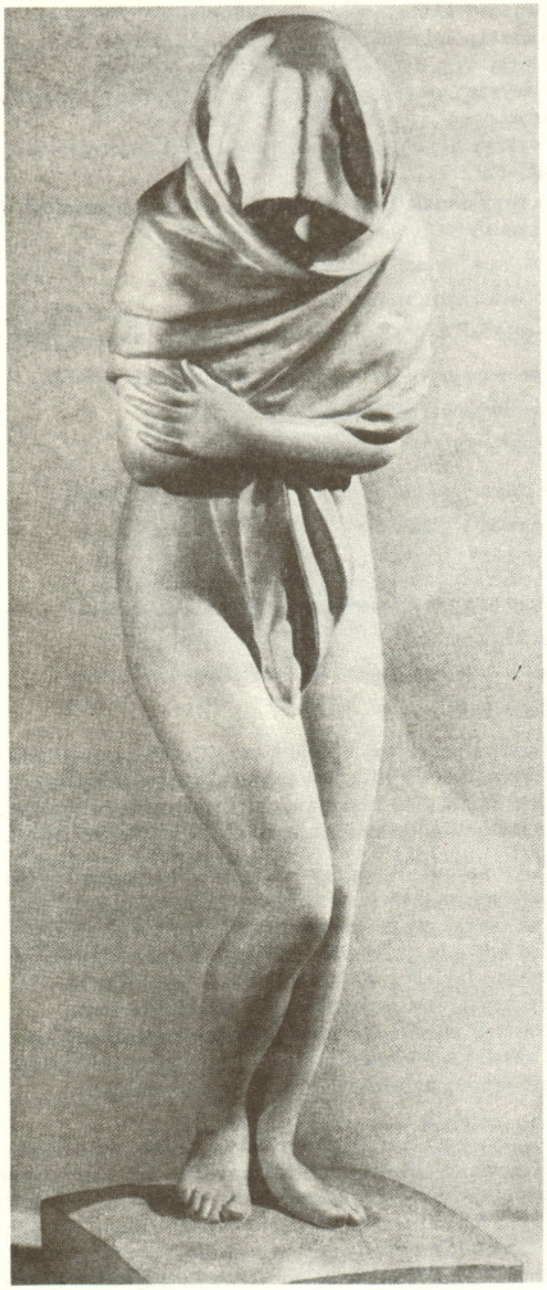
Skład systemem TEX wykonała redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na II kwartał 1991 r. wynosi 5 700,– zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
   - oddziały RSW właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora – odbioru zamówionych egzemplarzy dokonuje prenumerator w wyznaczonych punktach sprzedaży lub w inny, uzgodniony sposób,
   - urzędy pocztowe i listonosze – od prenumeratorów z terenów wiejskich lub innych miejscowości, w których nie ma oddziałów RSW, a w miastach tylko od osób niepełnosprawnych – poczta zapewnia dostawę zamówionych egzemplarzy pod wskazany adres pod warunkiem uiszczenia dodatkowej opłaty za każdy doręczany egzemplarz – opłata wynosi 250,– zł od egzemplarza,
   - Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział W-wa 370044-1195-139-11 – tylko od prenumeratorów zlecających dostawę za granicę.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
   - na kraj – do 20 XI na I kwartał roku następnego
     do 20 II na II kwartał
     do 20 V na III kwartał
     do 20 VIII na IV kwartał
   - na zagranicę – do 31 X na I kwartał
     oraz do 1 dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarza zł 2 000,–

Ten dwusetny numer *Delty* postanowiliśmy poświęcić wydarzeniom, które w naszych dyscyplinach wiedzy miały miejsce 200 lat temu. Były to czasy wielkiego porządkowania nauki.



Od lat dwódziestu pięciu blisko względem ciał składu i cząstek w nie wchodzących natury, mnogie czyniono doświadczenia, i takie, iakich było potrzeba do otrzymania decyduiących wypadkow. Dawny onych robienia sposob nie był w prawdzie dokładny. Rozbieraiąc ciało znaydowano częstokroć substancye, o których, że w złożenie tego ciała wchodzą, mniemano: mylono się iednakże często; substancye te potworzyły się w robocie: o czym przekonywał ciężar, który gdyby tylko miano nań baczność, większym się znaydował, niż był ciężar ciała na doswiadczenie użytego. Teraznieyszym iest on dobrze wiadomy, wszelką oni potrzebną zachowuią ostrożność, ażeby zebrać to wszystko, co się w czasie rozbioru wymyka, i kiedy powiększonym ciężar postrzegą, pewnemi są, że się nowa uformowała istota: na tym rzecz tylko cała, ażeby odkryć substancyą, która w złożenie nowey istoty wchodzących udzieliła cząstek; czego łatwo dochodzą na uwagę biorąc wszystkie, z którėmi rozbierane ciało stykało się w robocie.

Doświadczenia te nauczyły, że wielka iest ciał liczba, które przyiąć na siebie mogą stan cieczy sprężystey: w takowym względzie te uważano ciała. Nowe postępowania sposoby, których do rozpoznania składu ich i własności użyto, wielka przytym ludzi uczonych liczba, którzy się w całey Europie podobnemi zatrudnili badaniami, różne Fizyki części znaczną odkryciow wzbogaciły liczbą. Fenomena, które się dotąd zdawały osamotnione, i żadnego pomiędzy sobą nie maiące stosunku, nowemi zdarzeniami połączone zostały; a Fizyka dzisieysza licznieyszy ciąg zdarzeń i porządnieyszy wystawia.

Od czasu iednak prawdziwego w Naukach Fizycznych odnowienia, poiedyńczo ogłaszane były odkrycia w ten czas, kiedy kto onych dośledził: porozrzucane są prócz tego po różnych towarzystw uczonych pamiętnikach, i po niewielu Traktatach szczegulnych, nikt onych ieszcze nie zebrał w iedno nauki ciało. Nie stawało nam więc Traktatu o Fizyce w którymby zdarzenia do wzaiemney ich należności stosownie w niewielkiey powszechnych Fenomenow za zasady wziąść się mogących zawarte były liczbie, a w których też same fenomena widziećby można było systematycznym ułożone porządkiem, i łatwym do obięcia powiązane łancuchem.

M. J. Brisson, *Początki Fizyki*, 1797,
w tłumaczeniu W. Choynickiego, Wilno 1800.

Złoty medal dla Polski

W 1784 roku Berlińska Akademia Nauk, z inicjatywy Josepha Louisa Lagrange'a, ogłosiła konkurs na wyjaśnienie sprawy podstaw analizy matematycznej. Dokładniej: chodziło o podanie zadowalającego określenia różniczkowania i całkowania. Fakt ten może zdziwić: minęło już prawie 120 lat od czasu, gdy Newton za pomocą tych narzędzi wyprowadził (i wprowadził) prawo powszechnego ciążenia; były do dyspozycji wspaniałe prace Leibniza, Bernoullich, Eulera; sam Lagrange wykładał już rachunek różniczkowy i całkowy od 29 lat. I tu nagle taki konkurs. Dlaczego? Aby to wyjaśnić, przyjrzyjmy się stosowanym do tego czasu metodom np. różniczkowania.

Izaak Newton postępował tak. Różniczkowaniu u niego podlegały tylko równania. Aby zróżniczkować równanie, należało występujące w nich zmienne, np. x i y, zastąpić przez (odpowiednio) $x + o\dot{x}$ i $y + o\dot{y}$. Po tym zastąpieniu należy nowo otrzymane równanie uprościć stosując przy tym dwie reguły:

1° jeśli wszystkie wyrazy zawierają o, to należy równanie podzielić stronami przez o,

2° jeśli niektóre wyrazy nie zawierają o, to wyrazy zawierające o należy pominąć.

Obejrzyjmy to na przykładzie (autentycznym, z pracy Newtona): różniczkujemy równanie

$$(*) \qquad x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0\,.$$

Po wskazanym podstawieniu mamy

$$x^3 + 3x^2\dot{x}o + 3x\dot{x}^2o^2 + \dot{x}^3o^3 - ax^2 - 2ax\dot{x}o - a\dot{x}^2o^2 + axy + \\ + ay\dot{x}o + ax\dot{y}o + a\dot{x}\dot{y}o^2 - y^3 - 3y^2\dot{y}o - 3y\dot{y}^2o^2 - \dot{y}^3o^3 = 0\,,$$

co, wobec $(*)$, jest równoważne równaniu

$$3x^2\dot{x}o + 3x\dot{x}^2o^2 + \dot{x}^3o^3 - 2ax\dot{x}o - a\dot{x}^2o^2 + \\ + ay\dot{x}o + ax\dot{y}o + a\dot{x}\dot{y}o^2 - 3y^2\dot{y}o - 3y\dot{y}^2o^2 - \dot{y}^3o^3 = 0\,.$$

Można więc zastosować 1°, co daje

$$3x^2\dot{x} + 3x\dot{x}^2o + \dot{x}^3o^2 - 2ax\dot{x} - a\dot{x}^2o + ay\dot{x} + \\ + ax\dot{y} + a\dot{x}\dot{y}o - 3y^2\dot{y} - 3y\dot{y}^2o - \dot{y}^3o^2 = 0\,.$$

i, po zastosowaniu 2°,

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0\,.$$

Taki jest ostateczny wynik.

NORSKE LÖWE

Przytoczyłem konkretny przykład, bo nic z tego, co stosujemy dzisiaj, jego metod nie przypomina. Wynik jest taki, jaki uzyskalibyśmy i dziś przy założeniu, że x i y są funkcjami różniczkowalnymi jakiegoś (nieujawnionego) parametru i przy różniczkowaniu względem niego.

Różniczkowanie Newtona budziło opory już u współczesnych i tylko nieliczni jego uczniowie (np. Maclaurin) usiłowali kontynuować tę linię. Wyniki jednak, uzyskane za pomocą tego różniczkowania, były wspaniałe, więc nikt nie próbował tych metod odrzucić, ale intensywnie szukano jakiegoś, dającego się matematycznie obronić, sposobu na uzyskiwanie otrzymanych przez Newtona rezultatów. Sam Newton zresztą też miał poważne wątpliwości co do matematycznej zasadności swoich metod i jego pracę na ten temat opublikowali dopiero jego uczniowie w 10 lat po jego śmierci.

Formalizm, którego używamy dziś, jest autorstwa, nieco młodszego od Newtona, **Gottfrieda Wilhelma Leibniza**. Ten już różniczkuje funkcje i robi to formalnie tak, jak dziś czynią to bezmyślni uczniowie szkół średnich. Za tym formalizmem kryje się bardzo mocne założenie filozoficzne: każda liczba rzeczywista jest wyposażona w otoczenie (na osi liczbowej) zwane monadą, nie zawierające żadnej innej liczby rzeczywistej (Leibniz oznaczał je $(x - \mathrm{d}x; x + \mathrm{d}x)$). I znów był to chwyt dla ortodoksyjnych matematyków nie do strawienia (gwoli sprawiedliwości trzeba dodać, że idea monad wróciła do matematyki za sprawą Kleina gdzieś około roku 1900, a zadomowiła się w niej na dobre za sprawą Abrahama Robinsona czterdzieści lat temu jako analiza niestandardowa).

Reguły rachunku na monadach bardzo w istocie przypominały chwyty Newtona. Leibniz wypisuje zresztą zasady „szczególnego dla nich rodzaju rachunku". Np.

$$a + n\mathrm{d}x = a\,, \quad \mathrm{d}x \pm (\mathrm{d}x)^{n+1} = \mathrm{d}x\,, \quad a\sqrt{\mathrm{d}x} + b\mathrm{d}x = a\sqrt{\mathrm{d}x}\,, \quad \text{itp.}$$

FRYDERYK WILHELM

GEERTRUYD

Potrzebujący wiele analizy w swoich pracach, sześćdziesiąt lat młodszy **Leonhard Euler**, używa innej metody. Oczywiste spostrzeżenie, że $a \cdot 0 = 0$, każe mu napisać

$$\frac{0}{0} = a$$

i (ponieważ a jest dowolne) zastanawiać się nad tym, jak z zera wyłączać czynniki. Konkretnie, proponuje z licznika i mianownika ułamka $\frac{0}{0}$ wyłączać dotąd „jednakowe zera" (i skracać je), aż bądź licznik, bądź mianownik przestanie być zerem. Ma to oczywiste zastosowanie dla tzw. ilorazu różnicowego. Np.

$$\left.\frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0}\right|_{x_0} = \left.\frac{(x - x_0)(x + x_0)}{(x - x_0) \cdot 1}\right|_{x_0} = \left.\frac{x + x_0}{1}\right|_{x_0} = 2x_0\,,$$

skąd wniosek, że $(x^2)' = 2x$.

I znów każdy nauczyciel licealny przyzna, że ma w swojej klasie wielu Eulerów. Ale matematycy (przy całym szacunku dla rezultatów Eulera) nie mogli jednak przystać na teorię „różnych zer".

Młodszy z kolei o trzydzieści lat od Eulera **Lagrange** proponował inny sposób. Rozwijał on przez umiejętne, wręcz artystyczne, szacowanie funkcję na szereg potęgowy. I jeśli znalazł współczynniki a_i szeregu

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\,,$$

to pisał, że

$$(\nabla) \qquad f^{(k)}(0) = k!\,a_k\,,$$

zgodnie z udowodnionym (na gruncie jeszcze techniki newtonowskiej) w 1742 roku przez Colina Maclaurina wzorem

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k\,.$$

ASTROLABE

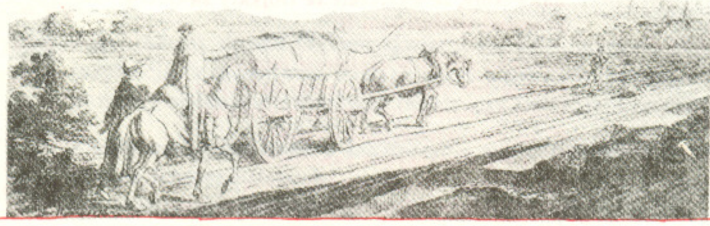
Wzór (∇) pozwala (choć to znów artystyczna robótka) znajdować pochodne wszelkich rozwijalnych w szereg potęgowy funkcji. Tu już nic nie można zarzucić, ale wykonanie rozkładu na szereg jest rzeczą niezwykle trudną (por. *Delta* 4/1989, artykuł *Bez pochodnych*).

Konkurs trwał dwa lata. Jury (pod przewodnictwem Lagrange'a) przyznało pierwszą nagrodę pracy, w której usiłowano sprecyzować ideę granicy. Pomysł granicy został opublikowany w Encyklopedii francuskiej przez (zmarłego na rok przed ogłoszeniem konkursu) Jeana le Rond d'Alemberta – była to jednak tylko ledwie zarysowana idea.

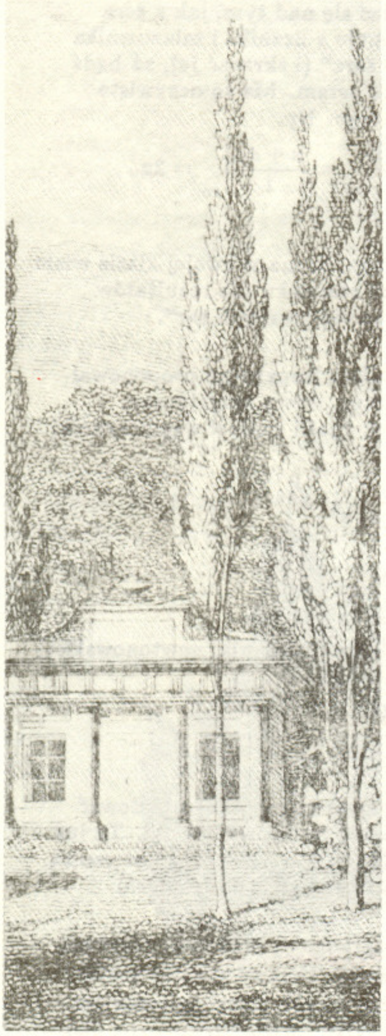
Autorem nagrodzonej pracy był Szwajcar, Simon l'Huilier. Dlaczego więc napisałem, że zwycięstwo było polskie? Otóż l'Huilier pracował w Polsce – był bibliotekarzem króla Stanisława Augusta Poniatowskiego. Jego wykształcenie matematyczne było zresztą doceniane przez Polaków – to jemu właśnie (dziesięć lat przed konkursem) Komisja Edukacji Narodowej powierzyła napisanie szkolnych podręczników matematyki, z którego to zadania wywiązał się znakomicie.

Co zaś się tyczy nagrodzonej pracy, to nie odegrała ona praktycznie żadnej roli w uściślaniu analizy. Sam przewodniczący jury w wydanej w 1797 roku *Théorie des fonctions analytiques* używa nadal swojej techniki rozwijania w szereg. Na uściślenie podstaw analizy trzeba było poczekać aż na Carla Weierstrassa, który w latach sześćdziesiątych XIX wieku zrealizował idee Augustina Louisa Cauchy'ego sprowadzenia podstawowych problemów analizy do arytmetyki liczb rzeczywistych, a konkretnie do rozwiązywania nierówności z wartością bezwzględną.

Marek KORDOS



Co oznaczał termin *fizyka* 200 lat temu



Obecne znaczenie terminu *fizyka* jest wynikiem wielowiekowej ewolucji. Proces ten jednak nie przebiegał w dziejach ludzkości równomiernie. Aż do Galileusza (1564 – 1642) rozumiano fizykę tak, jak Arystoteles (384 – 322 p.n.e). W stosunku do tego, co współcześnie określamy mianem fizyki, oznaczało to jednocześnie i rozszerzenie, i ograniczenie. Rozszerzenie – bo obejmowało również zjawiska organiczne i psychologiczne obok zjawisk nieorganicznych, zawężenie dotyczyło metod, które nie używały matematyki ani eksperymentu.

Jeden z siedemnastowiecznych bohaterów Moliera pyta swego nauczyciela, co to jest fizyka i dowiaduje się, że jest to ... *nauka, która tłumaczy zasady rzeczy naturalnych i własności ciał, która rozważa o naturze pierwiastków, metali, minerałów, kamieni, roślin i zwierząt, która uczy nas przyczyn wszystkich meteorów ...*

Konsekwentne wprowadzenie do fizyki przez Galileusza matematyki i eksperymentu (zdecydowanie poparte przez Newtona (1643 – 1727), Hooke'a (1635 – 1703) i Boyle'a (1627 – 1691)) stworzyło niejako drugą fizykę, znacznie bliższą dzisiejszemu rozumieniu tego słowa. Dlatego też, kiedy dzisiaj mamy wymieniać osiągnięcia fizyki XVIII wieku, sięgamy na ogół po wyniki fizyki eksperymentalnej i fundamentalne monografie fizyki matematycznej, jak np. *Mechanica, sive motus scientia analytice exposita* (1736), *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum* (1765) Eulera (1707 – 1783), *Mécanique analytique* (1788) Lagrange'a (1736 – 1813), od której liczy się historię mechaniki teoretycznej, czy *Mécanique celeste* (1799 – 1825) Laplace'a (1749 – 1827). Pamiętamy też raczej o bardzo nowoczesnych szkołach wojskowych, czy powstałych tuż po Rewolucji Francuskiej École Normale i École Polytechnique (gdzie uczono fizyki bardzo nam bliskiej) niż o uniwersytetach.

Pamiętać jednak należy również o tym, że obok fizyki nowoczesnej wielką rolę odgrywała wówczas fizyka bardzo odmienna. Jeszcze, założony w 1773 roku, *Journal de physique* nawoływał o publikacje z historii naturalnej, a badania rolnicze uważane były za obiecującą gałąź fizyki. Paryska Akademia Nauk w 1798 roku oferowała nagrodę z dziedziny fizyki za najlepszą publikację na temat „porównania natury, formy i roli wątroby u różnych klas zwierząt".

Podział na klasy owej Akademii też rzuca światło na przyjęty zakres fizyki. Paryska Akademia miała dwie klasy, jedną matematyczną, która obejmowała geometrię (tak wówczas nazywano wszystko to, co dziś nazywa się matematyką), astronomię i mechanikę oraz drugą – fizyczną, która obejmowała anatomię, biologię i chemię. W 1785 roku dodano jeszcze dwie nowe podklasy: eksperymentalną fizykę i historię naturalną. Fizykę eksperymentalną dołączono do klasy matematyki (co w świetle uwag poczynionych wyżej nie powinno dziwić), a historię naturalną do klasy fizyki. Podziały te wskazują po prostu, że termin matematyka ogarniał to, co skłonni bylibyśmy dziś nazwać naukami ścisłymi, a fizyka – przyrodniczymi.

Rozwiązanie zadania M 587. Tak – można wskazać taką liczbę, w której zapisie dziesiętnym będą występować tylko zera i jedynki. Przy tym można w treści zadania liczbę 1991 zastąpić dowolną liczbą naturalną n.

Liczba $l = \sum_{i=0}^{n-1} 10^{2^i}$ ma sumę cyfr równą n (dla $n = 1$ mamy $l = 1$, a np. dla $n = 4$, $l = 100010101$). Mamy

$$l^2 = \left(\sum_{i=0}^{n-1} 10^{2^i}\right)^2 = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} 10^{2^i+2^j}$$

Zauważmy (i sprawdźmy), że dla $(i,j) \neq$ $\neq (k,m)$ mamy $2^i + 2^j \neq 2^k + 2^m$. Wobec tego suma cyfr liczby l^2 jest równa liczbie składników sumy $\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} 10^{2^i+2^j}$, czyli n^2.

Rozwiązanie zadania M 588. Doprowadzimy do sprzeczności przypuszczenie, że tak nie jest.

Rozważmy wszystkie takie liczby w, że istnieje wielościan wypukły o w wierzchołkach, którego szkielet zawiera więcej niż $3w - 8$ trójkątów. Jeśli jest chociaż jedna taka liczba, to istnieje też najmniejsza liczba w_0 o tej własności.

Niech W będzie wielościanem wypukłym o w_0 wierzchołkach, którego szkielet zawiera więcej niż $3w_0 - 8$ trójkątów. Zauważmy, że wszystkie te trójkąty są ścianami wielościanu W.

Istotnie, gdyby w szkielecie istniał trójkąt nie będący brzegiem żadnej ze ścian, to można by rozciąć wielościan W na dwa wielościany wypukłe W_1 i W_2 płaszczyzną zawierającą ten trójkąt. Oznaczmy ich liczbę wierzchołków odpowiednio przez w_1 i w_2 $(w_1 + w_2 - 3 = w_0)$.

Ponieważ $w_1, w_2 < w_0$, więc wielościany W_1 i W_2 spełniają tezę naszego zadania. Stąd szkielet W musiałby zawierać co najwyżej $3w_1 - 8 + 3w_2 - 8 - 1 = 3w_0 - 8$ trójkątów, wbrew jego definicji.

Jeśli więc trójkąty zawarte w szkielecie W są wszystkie brzegami jego ścian, to oznaczając przez k liczbę jego krawędzi, przez s – liczbę ścian, przez s_i – liczbę ścian i-kątnych, mamy na mocy wzoru Eulera

$$\begin{aligned}2 &= w_0 - k + s = w_0 - \tfrac{1}{2}(3s_3 + 4s_4 + \\ &+ 5s_5 + \ldots) + (s_3 + s_4 + s_5 + \ldots) = \\ &= w_0 - \tfrac{1}{2}s_3 - s_4 - \tfrac{3}{2}s_5 - \ldots \leq \\ &\leq w_0 - \tfrac{1}{2}s_3 .\end{aligned}$$

Otrzymana stąd nierówność $s_3 \leq 2w_0 - 4$ jest mocniejsza od $s_3 \leq 3w_0 - 4$, a to przeczy istnieniu liczby w_0 i, tym samym, dowodzi tezy zadania.

Zasadnicze twierdzenie algebry

Do braków w zaopatrzeniu zdążyliśmy się przyzwyczaić, ale gdy w upalny dzień człowiek spragniony znajdzie wreszcie sklep z szyldem *Napoje*, a w środku dowie się, że nic do picia nie ma, to irytacja tego nieszczęśnika jest ogromna. Jak to, nie ma?

Niektóre równania algebraiczne nie mają pierwiastków rzeczywistych, inne mają ich mniej, niż można by się spodziewać. Ten brak był dla niektórych matematyków równie irytujący, jak braki w zaopatrzeniu w napoje chłodzące. Człowiekowi spragnionemu niewiele pomoże wyjaśnienie, że „nie dowieźli"; matematykom też nie wystarczało twierdzenie:

Równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ o współczynnikach rzeczywistych spełniających warunek $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.

Radykalnym środkiem na braki pierwiastków równań algebraicznych okazało się zasadnicze twierdzenie algebry:

Każdy wielomian stopnia większego od zera ma pierwiastek w zbiorze liczb zespolonych.

Zaraz, zaraz, a w szkole uczyli, że trójmian kwadratowy o ujemnym wyróżniku nie ma pierwiastków. Racja, ale taki trójmian nie ma pierwiastków rzeczywistych, a zasadnicze twierdzenie algebry mówi o pierwiastkach zespolonych. Weźmy na przykład trójmian $w(x) = x^2 + 2x + 5$, obliczmy wyróżnik $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 5 = 4 - 20 = -16 < 0$. Nie ma więc pierwiastków rzeczywistych. Ale w zbiorze liczb zespolonych istnieje $\sqrt{\Delta} = 4i$, a stosując znane wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego otrzymamy

$$x_1 = \frac{-2-4i}{2} = -1 - 2i, \quad x_2 = -1 + 2i.$$

Proszę sprawdzić, że istotnie liczby zespolone x_1 i x_2 są pierwiastkami rozważanego trójmianu kwadratowego $w(x)$.

Zasadnicze twierdzenie mówi o jednym pierwiastku, ale stąd już wynika, że wielomian stopnia n ma n pierwiastków zespolonych. Istotnie, jeśli liczba zespolona z_1 jest pierwiastkiem wielomianu $w(x)$, to $w(x) = (x - z_1) \cdot w_1(x)$, gdzie $w_1(x)$ jest wielomianem stopnia $n - 1$. Do wielomianu w_1 można znów zastosować zasadnicze twierdzenie algebry: wielomian $w_1(x)$ ma pierwiastek z_2, więc $w(x) = (x - z_1)(x - z_2) \cdot w_2(x)$, itd., aż otrzymamy rozkład wielomianu $w(x)$ na n czynników liniowych $w(x) = (x - z_1)(x - z_2) \ldots (x - z_n) \cdot c$. Zatem wielomian $w(x)$ ma n pierwiastków zespolonych $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (niektóre z tych pierwiastków mogą być równe). Udowodniliśmy twierdzenie:

Wielomian stopnia n ma n pierwiastków zespolonych.

Ostatnie zdanie podaje pierwsze sformułowanie zasadniczego twierdzenia algebry, które pojawiło się w pracach matematyków już w XVII wieku, m.in. w pracach Kartezjusza. Próby dowodu zasadniczego twierdzenia algebry podejmowane były w wieku XVIII. Pierwszy dowód podał Jean le Rond d'Alembert w 1746 r., niestety, dowód zawierał pewne nieścisłości. Poprawny dowód opublikował w 1799 r. Carl Friedrich Gauss. Dowód ten opierał się w pełni na metodach analitycznych. Kilkanaście lat później Gauss podał inny, algebraiczny dowód. Następne lata przyniosły jeszcze wiele innych dowodów, wszystkie one jednak są dość skomplikowane, co może utwierdzić nas w przekonaniu, że zasadnicze twierdzenie algebry wyraża fakt bardzo głęboki.

Sformułowanie twierdzenia podaliśmy dość nonszalancko „każdy wielomian ...". Czy chodzi o wielomiany o współczynnikach rzeczywistych, czy zespolonych? Kartezjuszowi i współczesnym mu matematykom chodziło, oczywiście, o wielomiany o współczynnikach rzeczywistych. Gauss również zajmował się wielomianami o współczynnikach rzeczywistych i udowodnione przez niego twierdzenie brzmiało:

Każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych stopnia większego od 1 można rozłożyć na czynniki liniowe lub kwadratowe (o ujemnych wyróżnikach) mających współczynniki rzeczywiste.

Algebraiczny dowód Gaussa zawierał szereg pomysłów, które okazały się wkrótce inspiracją do powstania nowych pojęć algebraicznych, m.in. pojęcia ciała. Dzięki temu możemy obecnie sformułować zasadnicze twierdzenie algebry, jak następuje:

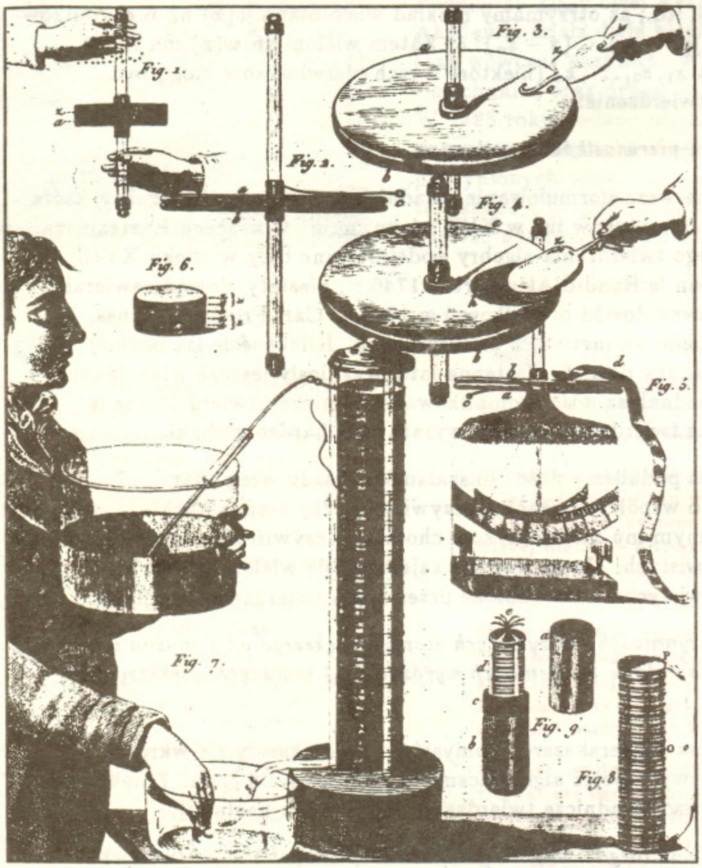
Każdy wielomian stopnia dodatniego o współczynnikach zespolonych ma pierwiastek w ciele liczb zespolonych.

Wszystkie wymienione poprzednio sformułowania są szczególnymi przypadkami tego ostatniego.

Maciej BRYŃSKI

Pomiary i przyrządy 200 lat temu

Alessandro Volta (1745–1827), profesor fizyki na uniwersytecie w Pawii. Jeden z największych eksperymentatorów w dziedzinie elektryczności. Wynalazca ogniwa elektrycznego.



Ilustracja eksperymentu pokazującego różnice potencjałów kontaktowych pomiędzy różnymi metalami. Na Fig. 5 pokazano elektroskop, a na Fig. 7, 8 i 9 różne rodzaje ogniw i sposoby ich użycia do ładowania kondensatorów.

W 1782 r. stały członek Berlińskiej Akademii Nauk, F. K. Achard, twierdził, że *fizyk, który nie mierzy, zabawia się jedynie, a od dziecka różni się tylko rodzajem gry i konstrukcją zabawek.* Profesorowie fizyki, jak Kästner, Karsten i Volta kładli ogromny nacisk na dokładność eksperymentu twierdząc, że bez tego fizyka, a w szczególności elektryczność, nie rozwiną się. Wspomniany wyżej Achard spędzał dnie i noce w swoim laboratorium; w jego dorobku znajdują się np. pomiary napięcia powierzchniowego z dokładnością do 4 cyfr znaczących.

Wielkie znaczenie, jakie pod koniec XVIII wieku zaczęto przywiązywać do dokładności pomiaru, wpłynęło również na podniesienie poziomu prac naukowych. Edytor *Journal de physique* pisał: *nie będziemy oferować materii leniwym amatorom tylko dla rozrywki, ani też stwarzać im słodkiej ułudy, że wiedzą coś na temat nauki, podczas gdy są zupełnymi ignorantami.*

Jednocześnie towarzystwa naukowe zaczęły uważniej przyglądać się propozycjom nowych członków. I tak np. Towarzystwo Holenderskie, które na początku przyjmowało każdego chętnego, od 1795 roku ograniczyło się tylko do *profesjonalistów, którzy są profesorami bądź tych, którzy uzyskali reputację poprzez prace opublikowane lub nadesłane do Towarzystwa.* Zmiana podejścia dotyczyła nawet korespondencji. Towarzystwo Berlińskie, przerażone wzrastającym napływem korespondencji naukowej, zdecydowało się porzucić zwyczajowe kwieciste powitania i pozdrowienia i zwracało się do swoich korespondentów z prośbą, aby czyniąc tak samo, szybko przechodzili do sedna sprawy.

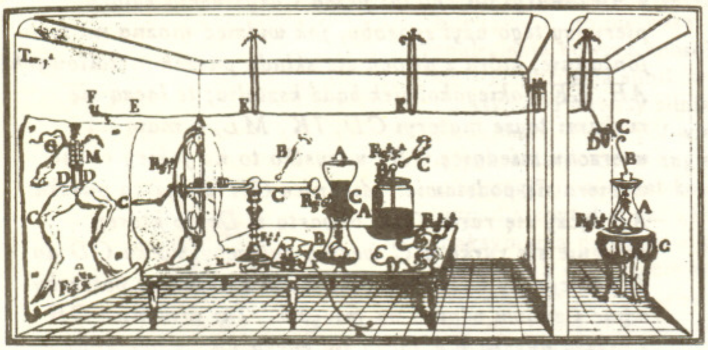
Po roku 1780 jakość i ilość aparatury fizycznej, dostępnej na rynku, szybko wzrastała. Dla przykładu: liczba **nowych** firm angielskich produkujących przyrządy fizyczne, zakładanych w ciągu 10 lat, pozostawała równa około 20 – 30 w latach 1720 – 1780. W latach 80. i 90. średnia ta wynosiła 48. W Holandii było to w latach 1700 – 1730 pięć nowych firm na 10 lat, w latach 1730 – 1750 piętnaście firm na 10 lat, a w latach 1770 – 1800 już trzydzieści firm na 10 lat. Przy czym, o ile w pierwszej połowie wieku firmy składały się zaledwie z właściciela i paru asystentów, to pod koniec wieku miały nieraz i 50 wykwalifikowanych pracowników.

Anglia i Holandia były potęgami w dziedzinie budowy aparatury, przy czym Holendrzy produkowali raczej na potrzeby wewnętrzne, a londyńscy producenci zaopatrywali również większość innych ośrodków. Niemcy, Włosi, jeśli było ich na to stać, zaopatrywali się u Anglików. Volta pisał o aparaturze kupionej za granicą: *te maszyny z Paryża są tandetne, niedobrze zniosły podróż, ale za to te z Londynu są bellissima, eleganckie i przyjechały w doskonałym stanie.*

Oprócz aparatury zgromadzonej na uniwersytetach, akademiach i w szkołach pojawiły się również kolekcje prywatne. Pod koniec wieku XVIII zidentyfikowano ich około 70, a pewnie istniało wiele więcej. Te największe z nich zawierały około 250 – 350 różnych przyrządów.

Jednocześnie z rozwojem produkcji aparatury i przyrządów doskonalono ich jakość i dokładność. Jeśli w 1750 roku można było mierzyć kąty z dokładnością do minut, to w roku 1773 najmniejsza podziałka kątomierza wynosiła 10 sekund.

Luigi Galvani (1737–1798). profesor anatomii na uniwersytecie w Bolonii. Mimo niemałych osiągnięć w medycynie znany głównie dzięki pionierskim doświadczeniom w dziedzinie elektryczności.



Wnętrze laboratorium Galvaniego. Warto zwrócić uwagę na żaby przygotowane do eksperymentu oraz maszynę elektrostatyczną z butelką lejdejską.

Niezwykle wzrosła precyzja **barometrów** i **termometrów**. W 1720 roku nie korygowano wskazań barometru ze względu na wahania temperatury, bo i tak dokładność wskazań była mniejsza. W 1777 roku najnowocześniejszy przyrząd dawał wskazania z dokładnością do kilku setnych mm Hg. W roku 1731 niezwykle na swe czasy dokładny Réaumur uważał za przesadę pomysł, aby użyć papieru zamiast mosiądzu do wyrobu skali termometrycznej. Około roku 1780 dobre termometry pozwalały zmierzyć temperaturę z dokładnością do piątej lub dziesiątej części stopnia. Termometry wykonane specjalnie dla Lavoisiera miały dokładność aż $\frac{1}{100}$ stopnia. W roku 1787 Saussure wspiął się na szczyt Mont Blanc z termometrem, który miał dokładność $\frac{1}{1000}$ stopnia i wyznaczył punkt wrzenia wody na szczycie z dokładnością do 0,1%.

Udoskonalono **pompy próżniowe** zwiększając znacznie ich moc. O ile w połowie wieku najlepsze pompy pozwalały osiągnąć próżnię rzędu $\frac{1}{80}$ atmosfery, to w latach 70. przeciętna pompa dawała już $\frac{1}{165}$ atmosfery, a najdoskonalsze do $\frac{1}{600}$ atmosfery (po upływie 6 minut!).

Wprowadzona po raz pierwszy w 1740 roku **maszyna elektrostatyczna** dawała napięcie około 10 tys. V. Tzw. Biały Słoń Van Maruma z końca lat 80. miał średnicę szklanego dysku około 165 cm i pozwalał wytworzyć napięcie około 100 tys. V. O ile te pierwsze maszyny pozwalały zmagazynować energię jedynie rzędu 10^{-3} J, to za pomocą maszyny Van Maruma, jak się ocenia, uzyskiwano ok. 3 000 J.

Lidia GOETTIG

Rozwiązanie krzyżówki astronomicznej z *Delty* 5/1990

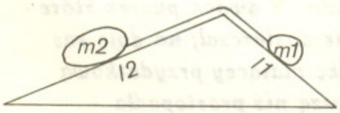
```
O B S E R W A T O R I U M   M E G A P A R S E K
B   U       B         R   M   P   R   R   T    
E X P L O R E R   P L A N E T A   K W A Z A R  
R   E       R     O   N   T   K   T       D   T
O O R T   A R I E L     C E N T A U R   M I R A
N   N       A     A   A   O   A   R   Z   O   I
  I O       C H A R O N   R           A   N Ó W
    W   B   J     N   T   Y     Z N A K I     Ś
  P A L O M A R   A M A L T E A   U   R   P    
G       D       O     R     K     T   Y D A I H
R E F L E K T O R   T E L E S K O P   C   R   A
A   O       R   I R A S     T     E P I C Y K L
N U T A C J A   O   U   E R Y D A N   E   Ż   O
U   O   H   P   N           N       S          
L E M   A R E C I B O   R E K T A S C E N S J A
A   E   O   Z   D     K     C       Y         S
C E T U S     T Y C H O     J U N O N A       T
J   R                 Z I M A   E   T   G     R
A R I E S   W E N E R A         W   Y   L A T O
    A   Ł   I       A     Z   S T Y L   O     N
  D     O   T   W   N     A     O   A L B E D O
T O R U Ń   E L O N G A C J A   N O C   U     M
  B     C   L   L   E     Ą         J   L     I
M A G N E T O S F E R A   C   P A R A L A K S A
```

Dostaliśmy zaledwie 18 rozwiązań. Spośród nich 11 jest bezbłędnych, zatem postanowiliśmy, że ich autorzy bez losowania dostają nagrody – książkę z serii *Delta przedstawia* pt. *Nie tylko o kwazarach* Bożeny Czerny i Marka Sikory.

Oto lista jedenastu nagrodzonych nadawców rozwiązania:

Marcin Bownik	– Gdańsk	Jacek Piotrowski	– Rzeszów
Piotr Dzikowski	– Leszno	Jerzy Skoracki	– Tomaszów Maz.
Artur Farbiś	– Kowala	Agata Strojna	– Dzierżążno
Krzysztof Konopacki	– Gniezno	Tomasz Węgrzyn	– Łódź
Jerzy Małopolski	– Kraków	Tomasz Wietecha	– Tarnów
Maria Pietrys	– Żywiec		

Rozwiązanie zadania F 299. Nie, bowiem składowa ciężaru przesuwająca nachylony odcinek łańcucha jest w tym samym stosunku do ciężaru tego łańcucha co długość jego rzutu pionowego do całej długości.

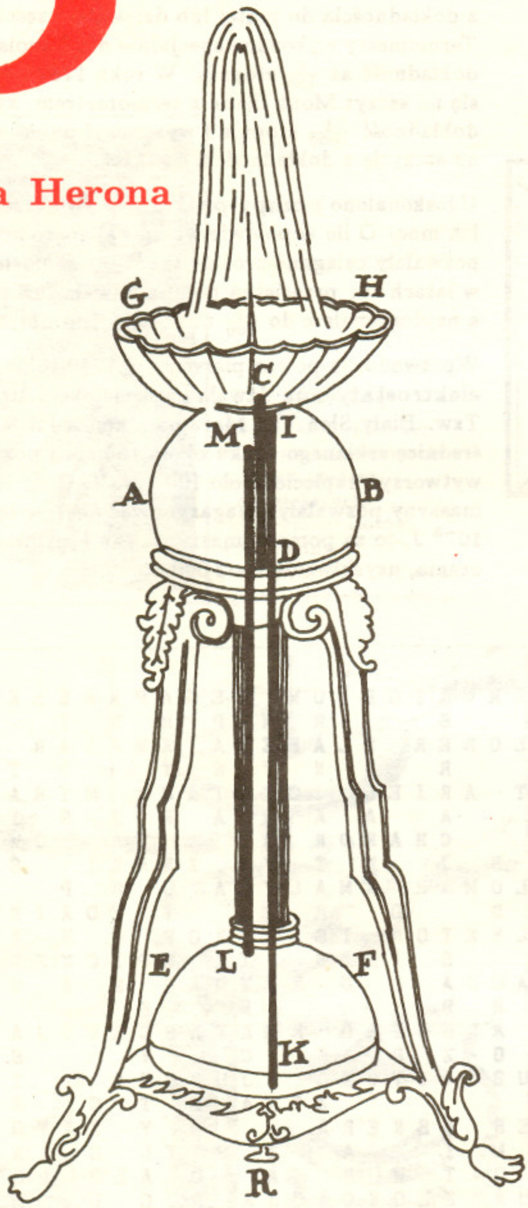


Podobnie i dwa ciężary połączone sznurem równoważą się na powierzchniach nachylonych, o ile stosunek mas $\frac{m_2}{m_1}$ jest równy stosunkowi długości zboczy $\frac{l_2}{l_1}$.

mała delta

Fontanna Herona

W *Początkach Fizyki* M. J. Brissona z roku 1797 (wydane w Polsce, w Wilnie, w roku 1800) znajdujemy poniższy opis samonapędzającej się fontanny. Jeśli poradzicie sobie z językiem (pisownia oryginalna), to może spróbujecie ją skonstruować?



Można do podniesienia wody, pożytecznie użyć sprężystości słupem wody ciśnionego powietrza. Heron z Alexandryi na 120 lat przed Chrystusem żyiący, pierwszy tego użył sposobu, jak widzieć można na jego fontannie, która z dwóch się składa puszek metallowych AB, EF, jakiegokolwiek bądź kształtu; te łączą się rurkami teyże materyi CD, IK, ML, a maią na wierzchu miednicę GH; wszystko to na jakiey chcąc wspiera się podstawie. Miednica GH z wyższą puszką AB łączy się rurką CD, otwartą w D; do którey szrubuie się rurka w C według potrzeby; rurka CD do dna miednicy wszrubowana, może się według potrzeby odiąć i znowu włożyć na mieysce. Taż miednica GH z niższą puszką EF łączy się rurką IK, z obu końcow otwartą, która się aż do dna puszki ciągnie. Obie nakoniec łączą się z sobą razem rurką ML, także z obu końcow otwartą, przez całą prawie puszki wyższey AB wysokość przechodzącą. Chcąc, żeby grała fontanna, wyższa puszka AB do trzech czwartych części wodą się nalewa, odszrubowawszy rurkę CD, która się potym znowu nazad wkłada. Nalewa się wodą miednica GH tak, żeby jey rurka IK zawsze pełną była.

Słup wody, który się do niższey puszki EF wylać usiłuie, ciężarem swoim zawartą w niey powietrza massę ściska. Powietrze tym sposobem ściśnione, wymyka się przez rurkę LM, i siłę sprężystości swoiey wywiera na wody w wyższey puszce będącey powierzchnią AB: ta nakoniec woda powietrza sprężystością ściskana, wytryska przez rurkę DC, do którey końca C cieńsza przydana jest rurka, którey wedle upodobania kilka otworow dać można. Widać, że tym sposobem woda z wyższey puszki AB przechodzi do miednicy GH, z miednicy znowu idzie do puszki EF, pełną zawsze utrzymuiąc rurkę IK. Po skończoney robocie wypróżnia się niższa puszka otwieraiąc u dołu korek R.

Ztąd wnieść łatwo, że zamiast fontanny, możnaby tym sposobem, według okoliczności, wodę do pewney wysokości podnieść. Na to potrzeba mieć nieco podniesione mieysce, a wśrzod jego dosyć obfite źrzódło. Z dwóch puszek które być mogą drewniane, wyższą niżey potoku umieścisz, który jey wody do podniesienia będzie dostarczał; na dole zaś niższą postawisz. Złącz obie puszki rurami, jakośmy nadmienili; a zamiast rurki DC, rurkę maiącey przydatkową utkwiy na jey mieyscu rurę w górę prowadzącą, którey wysokość powinna być nieco mnieyszą niż prostopadła dwóch puszek odległość. Ostatnią dobrze przyszrubowawszy do puszki, puszczay wodę ze źrzódła, tak, żeby rura odpowiadaiąca rurze IK zawsze była pełną. Widzisz, że tym sposobem woda wyższey puszki, zamiast wytryskania, przez rurę w górę prowadzącą póydzie do wysokości do jakiey ją podnieść chcemy. Możnaby tym sposobem podnieść czwartą albo piątą część wody, którey źrzódło dostarcza. Kiedy wyższey puszki woda w górę wyniesioną została, nowey się na to mieysce nalewa, a ta się wylewa, która do niższey weszła. Puszczaiąc potym wodę ze źrzódła na otwor rurki IK, machina na nowo grać zacznie.

Żelazny koń

Każdy, kto kiedykolwiek oglądał western lub czytał kowbojskie historie, zna słowo dyliżans. To powóz niosący przez amerykańską prerię co koń wyskoczy (a raczej, co wyskoczy szóstka koni) ludzi, pocztę i złoto, tak chętnie napadany w filmach przez złych Indian i jeszcze gorszych bandytów. Przywędrował dyliżans do Nowego Świata z Europy. W XVIII wieku wprowadzono w Anglii, Francji i Niemczech regularne połączenia pomiędzy większymi miastami, obsługiwane właśnie przez dyliżansy. Typowy dyliżans z tego okresu różnił się znacznie od tego, jaki znamy z filmów. Był to ciężki, kryty powóz, o rozstawie kół 5 ówczesnych stóp angielskich, tj. 1,435 m, mieszczący w trzech przedziałach 13 osób i ciągnięty przez czwórkę koni w majestatycznym tempie, średnio 4 – 6 km/h. Podróż dyliżansem musiała być więc długa i męcząca.

Niewątpliwie szybszy środek transportu zapewniały ówczesne żaglowce, osiągające prędkości dochodzące nawet do kilkunastu węzłów. Cóż, jednak były one zależne od kaprysów pogody i ich użycie połączone było zawsze z ryzykiem. Ponadto, niewątpliwie nie wszędzie można dotrzeć drogą morską. W tej sytuacji usprawnienie transportu stało się jednym z większych wyzwań końca XVIII wieku. Poszukiwania szły w dwóch kierunkach: po pierwsze – ulepszenia istniejących środków transportu i po drugie – znalezienia nowych sposobów przemieszczania. Postępy w pierwszym kierunku wiążą się z konstrukcją silników parowych i ich zastosowaniem do napędu „dyliżansów" i statków. Pierwszy silnik parowy zbudował już w 1712 r. angielski kowal Thomas Newcomen. Przez pół wieku daleka od doskonałości konstrukcja Newcomena służyła do napędzania pomp w angielskich kopalniach, gdy w 1769 r. francuski mechanik Cugnot „zaprzągł" ją zamiast koni do powozu. Ta pierwsza próba pojazdu mechanicznego nie wypadła zbyt dobrze. „Powóz" Cugnota obsługiwany przez czterech ludzi rozwijał maksymalną prędkość 3 km/h. Po 15 minutach jazdy następowała nieuchronna przerwa na napełnienie kotła wodą i wytworzenie nowej porcji pary. Na dodatek, jak przystało na osobę zasiadającą po raz pierwszy w świecie za kierownicą, Cugnot rozbił podczas próbnej jazdy jakiś mur. Wszystko to sprawiło, że francuskie ministerstwo wojny, finansujące badania Cugnota, wycofało swoje poparcie i prace przerwano.

Być może francuski konstruktor osiągnąłby lepsze wyniki, gdyby swoje próby przeprowadził kilka lub kilkanaście lat później. Oto bowiem w tym samym 1769 r. słynny James Watt ulepszył silnik Newcomena, a w trzynaście lat później opatentował własną konstrukcję silnika parowego (dając tym samym podstawy rewolucji przemysłowej), by wreszcie w 1784 r. wyposażyć go w odśrodkowy regulator prędkości, zwany dziś powszechnie regulatorem Watta. Nawet jednak maszyna parowa znakomitego Szkota nie pozwoliłaby pojazdowi Cugnota na prześcignięcie dyliżansu. Na przeszkodzie stał po prostu stan dróg, których w XVIII wieku jeszcze nie utwardzano. Postęp okazał się możliwy dopiero wówczas, gdy napędzany silnikiem parowym pojazd skierowano na tory. Torowisko nie było zresztą w XVIII wieku wynalazkiem nowym: już pod koniec XV wieku układano szyny w niemieckich kopalniach srebra. W XVII wieku urobek wielu angielskich kopalni węgla transportowano do najbliższej huty czy portu pojazdami toczącymi się po szynach. Z tym, że były to szyny drewniane. Zastąpienie ich szynami żeliwnymi umożliwił... kryzys gospodarczy. Nie mogąca się uporać z upłynnieniem swoich produktów dyrekcja angielskiej huty w Colbrookdale poleciła tymczasowo ułożyć zamiast szyn drewnianych, zalegające magazyny beleczki żeliwne. W razie poprawy koniunktury miano je zdemontować, przetopić i sprzedać, ale – oczywiście – do tego nie doszło. Żeliwne szyny spisywały się tak znakomicie, że rychło zastąpiono nimi wszystkie torowiska drewniane. Szyny ówczesne różniły się od szyn dzisiejszych – każdy producent stosował inny ich kształt. Zawsze jednak układano je tak, by ich odległość odpowiadała rozstawowi kół typowego dyliżansu. I tak ustaliła się szerokość współczesnych linii kolejowych.

Człowiekiem, który zbudował pierwszy parowóz poruszający się po szynach, był Anglik, Richard Trevithick. Nastąpiło to już w XIX wieku, a konkretnie w roku 1808. Jednak Trevithick również nie odniósł sukcesu: jego lokomotywa okazała się zbyt ciężka i pękały pod nią szyny. Konstruktor wobec tego znacznie ją „odchudził". W efekcie pojazd nie niszczył szyn, a za to ślizgał się po nich już po doczepieniu dwóch pustych wagoników – tarcie kół o szyny było zbyt małe. Chcąc poprawić tę wadę następcy Trevithicka realizowali najdziwniejsze pomysły. Wyposażali lokomotywy w koła zębate toczące się po trzeciej, karbowanej szynie, a nawet dorabiali do nich swoiste stalowe nogi. Dopiero George Stephenson wprowadził w życie właściwą koncepcję: wytrzymałość szyn należy dostosować do ciężaru lokomotywy, a nie na odwrót. Jego pierwsza lokomotywa (czy też raczej „żelazny koń", bo takiej nazwy wówczas używano) powstała w 1814 r. Pierwszą prawdziwą linię kolejową Darlington–Stockton (15 km) obsługiwaną przez lokomotywę Stephensona otwarto 27 X 1825 r. Dodajmy jeszcze, że lokomotywa nie tylko została wybudowana według projektu konstruktora, ale także w założonej przez niego w 1823 r. fabryce. Stephenson poszedł tu zresztą w ślady Watta, który podobnie wykorzystał swoje wynalazki (1775).

Paweł KRAWCZYK

Heinrich Olbers (1758–1840)

Przełom XVIII i XIX wieku to okres działalności takich „olbrzymów”, jak William Herschel, Carl Friedrich Gauss, Friedrich Bessel czy Pierre Simon de Laplace. Mniej znaną postacią jest Heinrich Olbers, lekarz (chyba musiał być niezłym lekarzem, skoro w 1811 r. dostał od Napoleona nagrodę za rozprawę o chorobach skórnych). Zajmował się ponadto astronomią, która z biegiem czasu wyparła z jego życia medycynę. Olbers żył w czasach, gdy teoria grawitacji Newtona była już dobrze ugruntowana, ale jeszcze zbierane były cegiełki do budowy nowoczesnej mechaniki nieba – wielkich syntez w tej dziedzinie dokonali na początku XIX w. Laplace i Gauss. Olbers wsławił się właśnie dostawieniem jednej takiej cegiełki – opracowaniem metody wyznaczania elementów orbity nieznanego obiektu (np. nowej komety) z trzech obserwacji. Jego metoda narzucała przy tym jeden warunek: wyznaczana orbita była z założenia paraboliczna. Było to o tyle usprawiedliwione, że orbity komet nieokresowych są rzeczywiście niemal paraboliczne.

Problem wyznaczenia elementów orbity jest w istocie zagadnieniem rachunkowym, bowiem jego idea jest bardzo prosta. Z Ziemi można zaobserwować tylko kierunek do komety, określony np. w układzie współrzędnych równikowych przez cosinusy kierunkowe l, m, n. Odległość komety ϱ jest nie znana. Uważamy tu za znane (bo zawsze można je obliczyć) współrzędne geocentryczne Słońca X, Y, Z. Wtedy współrzędne heliocentryczne komety x, y, z są równe

$$x = \varrho l - X,\qquad y = \varrho m - Y,\qquad z = \varrho n - Z, \tag{1}$$

co wynika ze zwykłego „dodawania” boków trójkąta utworzonego przez Ziemię, Słońce i kometę. W tych współrzędnych x, y, z uwikłane są elementy orbity w ogólności w liczbie sześciu, a ponieważ, jak wspomnieliśmy, ϱ też jest nie znane, więc dopiero mając 3 obserwacje (czyli 3 zestawy po 3 takie równania dla trzech momentów t_1, t_2, t_3) dysponujemy dziewięcioma równaniami na 9 niewiadomych, którymi są elementy orbity oraz ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3.

Drugi banalny fakt wykorzystywany w tym zagadnieniu to ten, że heliocentryczne wektory wodzące komety leżą w jednej płaszczyźnie. Wobec tego np. współrzędne w drugiej chwili będą kombinacją liniową współrzędnych w chwili pierwszej i trzeciej:

$$x_2 = N_1x_1 + N_3x_3,\qquad y_2 = N_1y_1 + N_3y_3,\qquad z_2 = N_1z_1 + N_3z_3. \tag{2}$$

Współczynniki N_1 i N_3 zależą od czasu (tj. od momentów obserwacji) oraz – tak się szczęśliwie składa – dość słabo od nie znanych jeszcze odległości komety od Słońca r_1, r_2, r_3.

Podstawiwszy równania (2) do (1), zapisanych dla chwili drugiej, można z dwóch ostatnich (bo najłatwiej) tak utworzonych równań wyeliminować ϱ_2 otrzymując związek w rodzaju

$$\varrho_3 = M\varrho_1 + m, \tag{3}$$

gdzie współczynniki M i m zależą od czasu poprzez N_1 i N_3 oraz od współrzędnych położenia komety i Słońca na niebie. Związek ten jest znany jako równanie Olbersa.

Wreszcie metoda Olbersa korzysta z jeszcze jednego algebraicznego związku, tzw. równania Eulera dla paraboli (tu właśnie z góry narzucone jest, że mimośród orbity jest równy 1!):

$$6\sqrt{GM_\odot}(t_3 - t_1) = (r_1 + r_3 + s)^{3/2} - (r_1 + r_3 - s)^{3/2}, \tag{4}$$

gdzie G jest stałą grawitacji, $M_\odot$ masą Słońca, a s cięciwą paraboli między położeniami pierwszym i trzecim.

Proces obliczeń przebiega następująco. „Z sufitu” przyjmuje się r_1 i r_3 i oblicza się z równania Eulera cięciwę s oraz przybliżone wartości N_1 i N_3. Mamy teraz układ równań liniowych z niewiadomymi ϱ_1 i ϱ_3:

$$\begin{cases} (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 = s^2 \\ \varrho_3 = M\varrho_1 + m \end{cases} \tag{5}$$

bowiem każdy chyba widzi, że jeżeli do pierwszego z tych równań podstawić (1), to pojawią się tam tylko nie znane ϱ_1 i ϱ_3.

Rozwiązanie zadania M 586. Mamy

$$\left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}\right)^2 = \frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} + 2(x^2 + y^2 + z^2) =$$

$$= \tfrac{1}{2}x^2\left(\frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{y^2}\right) + \tfrac{1}{2}y^2\left(\frac{x^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2}\right) + \tfrac{1}{2}z^2\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) + 2 \geq$$

$$\geq x^2 + y^2 + z^2 + 2 = 3$$

(skorzystaliśmy tutaj z oczywistej nierówności $\frac{p}{q} + \frac{q}{p} \geq 2$). Stąd kres dolny rozpatrywanego wyrażenia jest co najmniej $\sqrt{3}$.

Z drugiej strony dla $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$ wyrażenie przyjmuje wartość $\sqrt{3}$; taki jest więc kres dolny jego wartości.

Tak więc po rozwiązaniu układu (5) obliczamy z (1) nie znane x_1, y_1, z_1, x_3, y_3, z_3 i tak dostajemy lepsze r_1 i r_3. Z ich użyciem obliczamy lepsze N_1 i N_3 oraz lepsze s z równania Eulera itd. aż do ustalenia się wszystkich wielkości. Na końcu jednorazowo obliczamy x_2, y_2, z_2 i w ten sposób dostajemy trzy punkty paraboli w przestrzeni. Obliczenie stąd elementów tej paraboli jest już mechaniczne. Tę metodę Olbersa (1797) udoskonalił później Gauss tworząc algorytm obliczania wszystkich sześciu elementów orbity bez żadnych wstępnych założeń.

Nazwisko Olbersa wiąże się z jeszcze jednym zagadnieniem, znacznie poważniejszym, jeżeli wagę problemu mierzyć w kilometrach, bowiem dotyczącym całego Wszechświata. Otóż Olbers doszedł do wniosku (ale było to już w 1826 r.), że jeżeli Wszechświat jest stacjonarny, wszędzie średnio jednakowy i nieskończony, to patrząc w dowolnym kierunku powinno się zobaczyć jakąś gwiazdę, a więc niebo powinno mieć jasność powierzchniową jak gwiazda. Prymitywne stwierdzenie, że niebo w nocy jest czarne, dowodzi, że któreś z tych założeń (może wszystkie) jest niedobre. Fakt ten znany jest jako fotometryczny paradoks Olbersa. W ten sposób niemiecki lekarz, żyjący około 200 lat temu, dołożył swoją cegiełkę również do kosmologii.

Tomasz KWAST

200 lat od obalenia teorii flogistonowej

Pod koniec wieku XVIII ostatecznie rozprawiono się z teorią flogistonową.

Nazwę *flogiston* (od greckiego słowa *phlogistos* znaczy *palny*) wprowadził Georg Ernst Stahl około roku 1697. Zasada była prosta: kiedy ciało się spalało – traciło flogiston. Ludzie od dawna uważali, że w czasie spalania coś ubywało, zwykle pozostałość po spaleniu jest dużo mniejsza niż materiał wyjściowy. Stahl uważał, że utlenianie się metali to też tracenie flogistonu. Stąd więc tlenki uważano za substancje proste, a metale za złożone, składające się z tlenku i flogistonu. Powietrze spełniało jedynie funkcję unoszenia flogistonu w czasie jego uwalniania.

Główny zarzut, że tlenek jest cięższy niż metal, z którego powstał, nie miał znaczenia dla Stahla, który w zasadzie nie przypisywał flogistonowi własności materialnych. Późniejsi flogistoniści musieli okazać się bardzo pomysłowi, aby wytłumaczyć ubytki lub przyrosty flogistonu w różnych reakcjach. Czasem uważano nawet, że flogiston ma ujemną masę. Kiedy odkryto wodór – niektórzy chemicy uważali, że jest to właśnie czysty flogiston.

Powietrze uważano za nieaktywne, ale Stephen Hales (angielski botanik) i Hermann Boerhaave (duński chemik) zaczęli podejrzewać, że powietrze może brać udział w reakcjach chemicznych. Zostało to wykazane przez Josepha Blacka w 1756 r. w Edynburgu, kiedy zademonstrował pobieranie dwutlenku węgla przez tlenek wapnia w procesie powstawania węglanu wapnia, czyli kredy i odwrotnie – proces rozkładu w czasie podgrzewania. Następnie odkryty został tlen prawie jednocześnie przez K. W. Scheelego (1772) i Josepha Priestleya (1774).

Na podstawie tych odkryć Lavoisier obalił w latach 1770 – 1790 teorię flogistonową.

Lidia GOETTIG

Śladami Fermata

Od połowy XVII wieku wielu matematyków starało się udowodnić (oczywiście bezskutecznie) hipotezę zwaną Wielkim Twierdzeniem Fermata, czyli wykazać, że

żadne liczby naturalne x, y, z nie spełniają równości

$$x^n + y^n = z^n,$$

o ile tylko n jest większe od 2.

Ale byli też i tacy, którzy proponowali różne konkurencyjne, ale za to pozytywne hipotezy. Np. można by powiększyć liczbę dodawanych n-tych potęg i zażądać, by po prawej stronie można było postawić dowolnie obraną liczbę naturalną. Hipotezę taką postawił w 1782 roku Edward Waring (1734 – 1798). Sformułujmy ją dokładnie:

dla dowolnego wykładnika naturalnego n istnieje taka najmniejsza liczba naturalna $g(n)$, że dowolną liczbę naturalną l można przedstawić jako sumę $g(n)$ liczb naturalnych (lub zer) podniesionych do n-tej potęgi, czyli

$$l = k_1^n + k_2^n + \ldots + k_{g(n)}^n .$$

Rzeczywiście, można było tak mniemać przez ekstrapolację, bo właśnie Lagrange udowodnił, że

każda liczba naturalna jest sumą czterech kwadratów liczb naturalnych (lub zer).

Hipoteza Waringa nie zyskała sobie nigdy sławy równej Wielkiemu Twierdzeniu Fermata, ale była przez wielu badana i w końcu została udowodniona w 1909 roku przez Davida Hilberta.

Pozostał jednak do dziś otwarty problem, jakie są wartości $g(n)$. Wiemy, że $g(2) = 4$. Wieferich w 1909 wykazał, że $g(3) = 9$, dziś wiemy też, że $g(4) = 19$. A dalej?

Jest dość proste oszacowanie

$$g(n) \geq 2^n + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^n\right] - 2,$$

które można uzyskać rozkładając $2^n\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n\right] - 1$ na sumę n-tych potęg (spróbuj, Czytelniku). Do tej pory sprawdzono, że w powyższym wzorze równość ma miejsce dla n zawartego między 2 i 471 600 000 (J. M. Kubina, M. C. Wunderlich, 1989) oraz dla n dostatecznie dużych, choć nie wiadomo jak dużych (K. Mahler, 1957).

Marek KORDOS

Potęga czystego rozumu

Rozwiązanie zadania F 298. Na pokrywkę. Górne warstwy mleka po ochłodzeniu będą się przemieszczać ku dołowi i zamieniać miejscami z cieplejszymi. Odwrotnie jest przy podgrzewaniu – dlatego grzejemy od dołu.

W swym znanym dziele *Krytyka czystego rozumu* Immanuel Kant kwalifikuje pojęcia liczby i przestrzeni do kategorii pojęć *a priori*, co oznacza, że są one niezależne od doświadczenia i względem doświadczeń grają rolę organizującą, nadającą doświadczeniom formę.

Łatwo dostrzec, że naturalną konsekwencją tego poglądu jest przyjęcie, iż własności liczb i przestrzeni także są nam dane nie poprzez kontakt z jakimś naszym „zewnętrzem", lecz są z założenia jedynymi możliwymi.

To też można by jeszcze przyjąć. Gorzej, że Kant wyciąga stąd jawny wniosek o jedyności geometrii euklidesowej. Nadaje jej rangę jedynej „struktury przestrzennej" mającej walory nauki.

W roku 1781, gdy ukazała się *Krytyka*, opinia taka miała charakter nie tylko poglądu filozoficznego, lecz także wyraźnej interwencji w matematykę. Zamykała bowiem siłowo (tak chyba nazywają się wszelkie rozstrzygnięcia narzucone spoza obszaru sporu) trwające od ponad tysiąca lat dyskusje nad wyprowadzalnością postulatu o równoległych z pozostałych aksjomatów Euklidesa. Nie ma o czym dyskutować – dekretował Kant – bo i tak nie ma żadnego wyboru.

Piąty postulat Euklidesa orzeka: *jeśli dwie proste przecięte trzecią tworzą kąty jednostronne wewnętrzne o sumie mniejszej od dwóch kątów prostych, to proste te, po przedłużeniu, przetną się i to z tej właśnie strony.* Jest on dużo bardziej skomplikowany od pozostałych czterech i dlatego próbowano się go pozbyć. Dziś wiemy, że jego wyeliminowanie prowadzi do geometrii odmiennej od powszechnie używanej.

Nie byłoby może warto o tym wspominać (choć niektórych to do dziś denerwuje – Morris Kline np. pisze: *głębia filozoficznych przemyśleń Kanta była rezultatem wyłącznie ograniczoności jego wyobraźni geometrycznej*), gdyby nie fakt, że wywarło to wpływ na rozwój wydarzeń w matematyce i na życiorysy przynajmniej kilku matematyków.

Praktycznie od V wieku (gdy Proklos postawił jawnie zagadnienie piątego postulatu) każdy wybitny matematyk pozostawił po sobie jakiś dowód postulatu o równoległych na podstawie pozostałych postulatów. Koledzy bądź uczniowie znajdowali w każdym z tych dowodów błąd i sami produkowali następne dowody, które dzieliły los swych poprzedników. Dopiero w XVIII stuleciu sytuacja zaczęła się wyjaśniać. Girolamo Saccheri (w 1733 roku) skonstruował geometrię alternatywną do euklidesowej, ale uzyskane jej twierdzenia odrzucił, jako sprzeczne „z samą istotą" pojęć geometrycznych. Z tej pracy, a raczej z jej konkluzji wysnuł, zapewne, swoje przemyślenia Kant. Jego kategoryczna opinia miała jednak znaczącą wagę. Dalsze próby konstruowania alternatywnych geometrii stały się w świecie prawdziwych uczonych nieodpowiedzialnym bełkotem.

Praca Saccheriego nosiła tytuł *Euclides ab omni naevo vindicatus*, co oznacza *uwolniony od wszelkich zarzutów.*

Felix Klein podaje, że z listów i dziennika Gaussa wynika, że zajmował się on piątym postulatem już od 1792 roku upewniając się stopniowo coraz bardziej o istnieniu geometrii nieeuklidesowej. Jednak nacisk opinii Kanta był tak wielki, że nie tylko nie publikował swoich rezultatów, lecz doradzał licznym, proszącym go o opinię badaczom, by też powstrzymywali się od publikacji.

Obaj uznani twórcy geometrii nieeuklidesowej, Nikołaj Łobaczewski i Janos Bolyai, podchodzili do swoich prac skrajnie nerwowo, co pierwszego kosztowało wyrzucenie z pracy (ze stanowiska rektora uniwersytetu w Kazaniu), a drugiego przyprawiło o pełne załamanie nerwowe i samotnicze życie na wsi przez lat dwadzieścia.

Łobaczewski opublikował swoją pracę *O podstawach geometrii* w 1829 roku w Kazaniu, praca Bolyaia była dodatkiem do wydanej w Niemczech w 1832 roku pracy jego ojca. Zbieżność tych dat stworzyła pole do niegustownej awantury o priorytet w stworzeniu geometrii nieeuklidesowej,

Jedyny odważny z wybitnych matematyków tych czasów, który opublikował pracę o geometrii nieeuklidesowej, Johann Heinrich Lambert, nazwał ją *Teoria równoległych* i nigdy nie ubiegał się o uznanie swoich wyników za początek nowej geometrii.

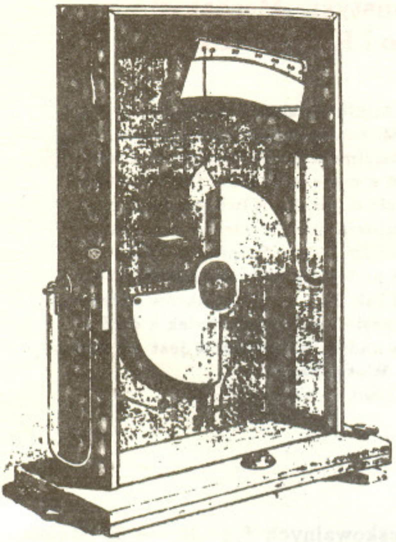
Z drugiej strony wzrósł nacisk na udowodnienie metodami matematycznymi stwierdzeń Kanta. Ciekawym przykładem jest tu Andrien Mari Legendre, który w 1794 roku napisał podręcznik *Geometria elementarna* z „dowodem" piątego postulatu, wprowadzony przez rewolucyjne władze oświatowe Francji do szkół (dopiero w dalszych wydaniach błąd usunięto).

Najsmutniejszym zaś przykładem (choć najdobitniej pokazującym siłę zakazu Kanta) jest „dowód" piątego postulatu opublikowany w 1870 roku (a więc czterdzieści lat po pracach Łobaczewskiego i Bolyaia, a nawet piętnaście lat po pracy Riemanna znacznie zwiększającej rodzinę geometrii nieeuklidesowych) przez Josepha Bertranda.

Wykład habilitacyjny Riemanna z 1854 roku *O hipotezach leżących u podstaw geometrii* zawierał tak wielki wybór możliwych geometrii, że niewiele go do dziś poszerzyliśmy.

Z tego wszystkiego widać, jak wielki może być wpływ czystego rozumu na życie, nawet gdy spełnia on definicję: czysty rozum to taki, któremu nieznajomość faktów nie przeszkadza w jasności teoretycznych uogólnień.

Marek KORDOS



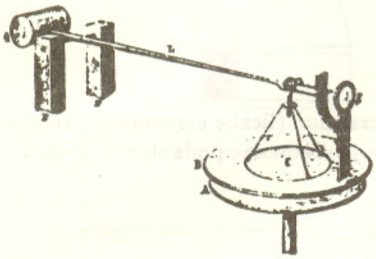
Jak 200 lat temu uczono fizyki i jak ją uprawiano

Koniec XVIII wieku to powstanie pojęcia *podręcznik*, który miał być czymś odmiennym od monografii czy dzieła przeglądowego. Do tej pory bowiem wyższe wykształcenie zdobywano studiując wyłącznie takie dzieła. Podręczniki pisano tylko dla szkół niższych.

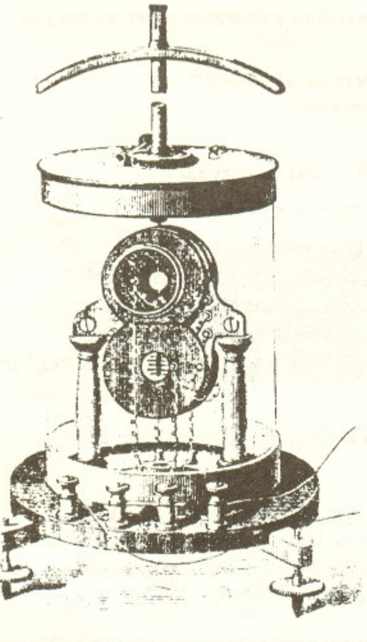
W matematyce pierwszym i dominującym przez lata podręcznikiem była *Géométrie descriptive* (1795 – 1799) Gasparda Monge'a (1746 – 1818), wbrew pozorom będąca podręcznikiem całej matematyki. W fizyce taką rolę odgrywał niemiecki tekst J. C. P. Erxlebena z roku 1772.

Pokrywa on cały materiał wtedy uznany za standardowy: ruch, grawitację, sprężystość, kohezję, hydrostatykę, pneumatykę, optykę, ciepło, elektryczność, magnetyzm, elementarną astronomię i geofizykę. W podręczniku starano się nadążyć za szybkim wówczas postępem wiedzy, tak że drugie wydanie podręcznika (1784) wymagało, jak pisze autor, *dużych zmian, bowiem tyle się nowego w fizyce zdarzyło.*

Podstawowym czynnikiem zmieniającym zakres i oblicze fizyki był eksperyment. Rozkwit znaczenia eksperymentu i odwieczna fascynacja nieznanym doprowadziły do tego, że pokazy z fizyki stały się w wieku XVIII niezwykle popularne. Jeden z wykładowców skarżył się nawet, że *studenci chcą tylko fizykę oglądać, a nie uczyć się jej.*



Fascynacja eksperymentem miała i drugą stronę. Koniec wieku XVIII wprowadził ogromny szacunek dla dokładności pomiaru. M. J. Brisson, który opublikował w 1787 roku tablice gęstości z dokładnością do paru cyfr znaczących, opracował je *nie podając wyniku dopóty, aż wyniki powtórzonych pomiarów albo wcale nie wykazywały różnic, albo te były zaniedbywalnie małe.* Brisson (urodzony w 1723 roku) różni się tu skrajnie od swojego, starszego o 23 lata nauczyciela – Nolleta, który prawie niczego sam nie zmierzył.



Coraz powszechniej obowiązywało galileuszowskie: *Filozofia przyrody jest napisana w wielkiej księdze stale otwartej przed naszymi oczami – mówię o Wszechświecie – ale pojąć ją może tylko ten, kto najpierw opanuje język i znaki, którymi jest ona napisana. A napisana jest ta księga w języku matematyki, a jej znaki to trójkąty, okręgi i inne figury geometryczne, bez których nie można wyrazić po ludzku jej słów – bez nich pozostaje beznadziejne krążenie po ciemnym labiryncie.* Jednak odrębność fizyki od jej matematycznych metod była ciągle podkreślana. Gravesande pisał: *W fizyce mamy odkrywać prawa przyrody poprzez zjawiska, potem przez indukcję dowieść, że są to prawa ogólne. Całą resztą zajmuje się matematyka.* I matematyki w ówczesnych podręcznikach fizyki jest ciągle niewiele. Tym bardziej było to konieczne, że szersza publiczność, wliczając w to studentów uniwersytetów, z matematyką niewiele miała do czynienia.

Do działów zmatematyzowanych (chętnie zaliczanych w ogóle do matematyki) już około 1750 roku kwalifikowano optykę, mechanikę, hydrostatykę, hydrodynamikę, akustykę i astronomię planetarną. Byli tacy, którym podział na fizykę matematyczną i „inną" nie odpowiadał. W 1792 r. Pierre Prevost pisał, że fizyk powinien umieć „liczyć, obserwować i porównywać". Ale dodawał, że i w fizyce (jak w każdej dziedzinie życia) z konieczności musi dokonany być podział pracy.

Działem, który najtrudniej się matematyzował, były zjawiska elektromagnetyczne. W 1756 roku d'Alembert pisał, że ... *to przede wszystkim doświadczeniem trzeba badać zjawiska, których przyczyn nie możemy dojść rozumem i gdzie związki dostrzegamy jedynie niedokładnie, jak to jest w przypadku elektryczności i magnetyzmu.* Jednak już około 1785 roku W. C. G. Karsten uważał elektryczność za część fizyki matematycznej, choć *nie tak całkiem matematycznej jak mechanika czy optyka.*

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

$\otimes\sqrt{\sum\!\!\!\int !} = 44$

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 7/1990.

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 1991

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 199 (WT=2,27) i 200 (WT=2,06) z numeru 4/1990

Jerzy Janowicz	– Bolesławiec	45,82 pkt
Andrzej Krzysztofowicz	– Gdańsk	45,23 pkt
Adam Czornik	– Bytom	43,59 pkt
Kazimierz Serbin	– Sanok	43,36 pkt
Henryk Kornacki	– Augustów	43,35 pkt
Adrian Langer	– Nisko	38,75 pkt

Siedem pełnych rund! Serdecznie gratulujemy panu Janowiczowi. A także panu Krzysztofowiczowi, dzięki któremu liczba członków Klubu 44 M zaokrągliła się do 60.

Zadania z matematyki nr 213, 214

Redaguje Marcin E. KUCZMA

213. Rozstrzygnąć, czy dla każdej pary funkcji różniczkowalnych $f, g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ istnieje funkcja różniczkowalna $h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, której pochodna jest równa iloczynowi pochodnych funkcji f i g.

214. Obliczyć sumę

$$\sum_{A,B\subset\{1,\ldots,n\}} |A \cup B|;$$

n jest ustaloną liczbą naturalną; symbol $|A \cup B|$ oznacza moc (liczbę elementów) zbioru $A \cup B$, a sumowanie rozciąga się na wszystkie pary uporządkowane podzbiorów zbioru $\{1, \ldots, n\}$.

Zadanie **214** zaproponował pan Werner Mnich z Opola.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/1990

Przypominamy treść zadań:

209. Czy istnieje w $\mathbf{R}^3$ zbiór domknięty, którego część wspólna z dowolną płaszczyzną jest zbiorem skończonym, niepustym?

210. Niech $m, n \geq 1$ będą liczbami naturalnymi, $d = \mathrm{NWD}(m, n)$, $u = 2^m - 1$, $v = 2^n + 1$.
(a) Dowieść, że $\mathrm{NWD}(u, v) = 1$, gdy m/d jest liczbą nieparzystą.
(b) Obliczyć $\mathrm{NWD}(u, v)$, gdy m/d jest liczbą parzystą.

209. Przykładem takiego zbioru może być krzywa K o parametryzacji:

$$x = t^5, \quad y = t^3, \quad z = t \qquad (-\infty < t < +\infty).$$

Dowolna płaszczyzna P jest wyznaczona przez równanie postaci $ax + by + cz + d = 0$, w którym co najmniej jeden ze współczynników a, b, c jest różny od zera. Część wspólna $K \cap P$ składa się z punktów krzywej K odpowiadających tym wartościom parametru t, które spełniają równanie $at^5 + bt^3 + ct + d = 0$. Lewa strona jest wielomianem stopnia nieparzystego, zatem zbiór jego pierwiastków (rzeczywistych) jest skończony, niepusty.

210. Pisząc $m = 2^k q$, $n = 2^l r$ (q, r nieparzyste, $k, l \geq 0$) mamy

$$d = 2^{\min(k,l)} \cdot \mathrm{NWD}(q, r).$$

Iloraz m/d jest liczbą nieparzystą wtedy i tylko wtedy, gdy $k \leq l$.

Oznaczmy: $\mathrm{NWD}(u, v) = w$; jest to liczba nieparzysta.

(a) Należy wykazać, że jeśli $k \leq l$, to $w = 1$.

Dowód. Kongruencję $2^m \equiv 1 (\mathrm{mod}\ w)$ podnosimy stronami do potęgi o wykładniku $2^{l-k} r$; kongruencję $2^n \equiv -1 (\mathrm{mod}\ w)$ podnosimy stronami do potęgi q. W obu przypadkach dostajemy po lewej stronie to samo wyrażenie, natomiast po prawej stronie otrzymujemy raz 1, drugi raz -1. Stąd w, jako liczba nieparzysta, musi być równa 1.

(b) Zakładając, że $k > l$, mamy wyznaczyć wartość w. Wykażemy, że $w = 2^d + 1$.

Dowód. Teraz $d = 2^l \cdot \mathrm{NWD}(q, r)$. Oznaczmy: $2^d = c$, $m/d = a$, $n/d = b$.

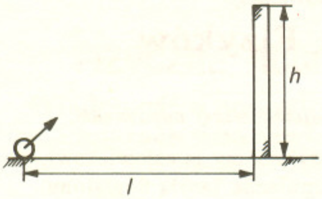
Zauważmy, że b jest nieparzyste, a więc liczba $v = c^b + 1$ dzieli się przez $c + 1$; natomiast a jest parzyste, zatem liczba $u = c^a - 1$ dzieli się przez $c^2 - 1$, więc i przez $c + 1$. To dowodzi, że w dzieli się przez $c + 1$.

Liczby a i b są względnie pierwsze; wobec tego $ax - by = 1$ dla pewnych liczb naturalnych x, y (przy tym y musi być nieparzyste). Liczba w, jako wspólny dzielnik liczb $u = c^a - 1$ oraz $v = c^b + 1$, dzieli także liczby $c^{ax} - 1$ oraz $c^{by} + 1$; dzieli więc ich sumę, czyli liczbę $c^{ax} + c^{by} = c^{by}(c + 1) = 2^{bdy}(c + 1)$. Ponieważ w jest liczbą nieparzystą, musi dzielić czynnik $c + 1$.

W ten sposób stwierdziliśmy, że każda z liczb w, $c + 1$ jest podzielna przez drugą, czyli że liczby te są równe. A to właśnie mieliśmy wykazać.

Zadania z fizyki nr 111, 112

Redaguje Jerzy BROJAN



111. W odległości l od leżącej na ziemi piłki znajduje się płot o wysokości h. Jaka jest minimalna prędkość, jaką trzeba nadać piłce, aby mogła przelecieć ponad płotem?

112. Opisz wady obrazu dyfrakcyjnego wynikające z następujących wad siatki dyfrakcyjnej:

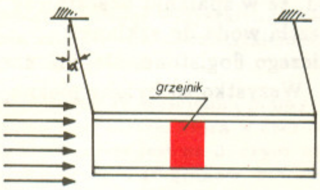
a) Rysy nierówno odległe. Rozważ przypadek, gdy na przemian występuje nieco większa i nieco mniejsza odległość, ewentualnie także przypadek, gdy co trzecia odległość jest nieco inna od dwóch poprzednich.

b) Rysy nierówno głębokie. Rozważ podobne przypadki, jak poprzednio.

Czy istnieje doświadczalna możliwość rozróżnienia, która z ewentualności a) i b) jest przyczyną obserwowanej wady obrazu?

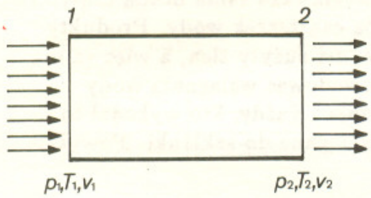
Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/1990

Przypominamy treść zadań:



107. Lekki cylinder wykonany z materiału izolującego cieplnie jest zawieszony na dwóch nitkach jak na rysunku. Na wewnętrznej powierzchni cylindra w połowie jego długości znajduje się grzejnik elektryczny w kształcie pierścienia. Umieszczenie cylindra w laminarnym strumieniu powietrza skierowanym wzdłuż jego osi powoduje odchylenie się nici zawieszenia od pionu o pewien kąt α. Czy włączenie zasilania grzejnika będzie miało wpływ na ten kąt, a jeśli tak, to jaki?

108. Rozwiązanie problemu stanowiącego treść zadania 108 zostanie przedstawione w *Małej Delcie* w następnym numerze.



107. Przy włączonym grzejniku powietrze wewnątrz cylindra ogrzewa się i rozszerza. W rezultacie szybkość jego wypływu (z prawego końca cylindra) jest większa, aniżeli w przypadku wyłączonego grzejnika. Dodatkowy pęd powietrze to uzyskuje w procesie oddziaływania z cylindrem (grzejnikiem). Na cylinder działa zatem siła skierowana w lewo, która powoduje zmniejszenie kąta α.

Spróbujmy to poprzeć obliczeniami na podstawie uproszczonego modelu (patrz rysunek). Oznaczmy pole poprzecznego (wewnętrznego) przekroju cylindra przez S, ponadto ciśnienia, temperatury i prędkości powietrza na lewym (1) oraz prawym (2) końcu cylindra odpowiednio przez p_1, T_1, v_1 oraz p_2, T_2, v_2 (rozpatrujemy prędkości i siły działające wzdłuż osi cylindra, przyjmując za dodatni zwrot w prawo).

Niech przez cylinder przepływa w jednostce czasu masa m powietrza. Przyrost pędu tego powietrza w cylindrze wynosi

$$m(v_2 - v_1) = (p_1 - p_2)S - F\,,$$

gdzie $-F$ jest siłą oddziaływania cylindra na powietrze w nim przepływające. Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki na cylinder działa ze strony powietrza siła $+F$, która powoduje odchylenie nitek zawieszenia.

Na podstawie równania Clapeyrona mamy

$$\frac{p_1 S v_1}{T_1} = \frac{p_2 S v_2}{T_2}\,.$$

powyższych równań uzyskujemy

$$(\star) \qquad F = (p_1 - p_2)S - m v_1\left(\frac{T_2 p_1}{T_1 p_2} - 1\right).$$

Można przyjąć $p_2 = \text{const}$ (ciśnienie atmosferyczne) oraz $\Delta p = p_1 - p_2 = \text{const}$ (związane ze stałością strumienia nadmuchu) oraz ponadto $\Delta p \ll p_2$. W tej sytuacji pierwszy człon wyrażenia $(\star)$ jest stały, a zachowanie drugiego członu przy wzroście wartości stosunku T_2/T_1 poczynając od jedności określone jest przez wyrażenie w nawiasie.

Wynika stąd, że podgrzewanie powietrza wewnątrz cylindra, pociągające za sobą wzrost wartości stosunku T_2/T_1, powoduje zmniejszenie wartości siły F.

Doświadczalnie daje się uzyskać wręcz zmianę znaku siły F (kąt α także zmienia wówczas znak).

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 99 (WT=2,35), 100 (WT=2,80), 101 (WT=2,24) i 102 (WT=2,28) z numerów 5/1990 i 6/1990

Adam Sikorski	– Lublin	49,19 pkt
Przemysław Gworys	– Częstochowa	43,00 pkt
Andrzej Borowski	– Aleksandrów Kuj.	42,97 pkt
Leszek Motyka	– Kraków	36,43 pkt
Mariusz Bogacz	– Pińczów	31,91 pkt
Paweł Perkowski	– Szczecin	23,25 pkt
Dzierżysław Lipniacki	– Lublin	20,33 pkt

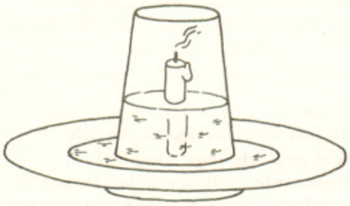
Pan Sikorski po raz drugi przekroczył 44 punkty (po zadaniach 99, 100).

Korespondencyjny Klub Fizyków

Drodzy Czytelnicy!

Jak co miesiąc, przyznamy nagrodę książkową dla autora najciekawszej odpowiedzi.

Dzisiejsze zadanie jest z pogranicza chemii i fizyki, a zawdzięczamy je człowiekowi, który 200 lat temu rozprawił się z bardzo w tym czasie popularną teorią flogistonu. Antoine Laurent Lavoisier urodził się w Paryżu w 1743 roku. 201 lat temu wydał *Traité elementaire de chimie*, podręcznik chemii, gdzie pozbył się teorii, w myśl której ciała palne zawierają tajemniczą substancję „flogiston". Podczas spalania flogiston miał uwalniać się na przykład z węgla czy innego palnego materiału. Niestety, to, co Lavoisier flogistonowi, Rewolucja Francuska zrobiła jemu samemu - osiągnięcia naukowe nie uratowały go od egzekucji. Ale do rzeczy: proponuję Ci, Czytelniku, samodzielne doświadczalne zbadanie sprawy flogistonu. Wstępem będzie opisywane często



Doświadczenie ze świecą

Na talerzu z wodą stawiamy palącą się świecę, a następnie przykrywamy ją odwróconą szklanką. Po chwili świeca gaśnie, a poziom wody w szklance podwyższa się (patrz rysunek). Doświadczenie to jest reklamowane jako dowód, że w spalaniu uczestniczy tlen z powietrza - to właśnie w miejsce zużytego tlenu weszła woda do szklanki. Spalanie nie polega więc na wydzielaniu żadnego tajemniczego flogistonu, ale, jak uczą nas w szkole, na łączeniu palącej się substancji z tlenem. Wszystko to byłoby piękne, gdyby nie jedno proste pytanie:

A co z produktami spalania?

Świeca składa się w głównej mierze z węgla i wodoru. Produktami spalania są więc woda (H_2O) oraz dwutlenek węgla (CO_2) - oczywiście w stanie gazowym. Z określonej liczby cząsteczek tlenu (O_2) powstanie przy spalaniu węgla taka sama liczba cząsteczek CO_2, a przy spalaniu wodoru - dwa razy większa liczba cząsteczek wody. Produkty spalania będą więc zawierały większą liczbę cząsteczek, niż zużyty tlen, a więc zajmą większą objętość. Wobec tego spalanie nie powinno powodować wciągania wody do szklanki, tylko wypychanie jej przez produkty spalania. Każdy, kto wykonał to doświadczenie, wie jednak, że woda rzeczywiście jest wciągana do szklanki. Powyższe rozumowanie jest więc błędne.

Listy prosimy przysyłać pod adresem:
Korespondencyjny Klub Fizyków
Wydział Fizyki Uniwersytetu
Warszawskiego
ul. Hoża 69, 00-681 Warszawa.

Redaguje Jan GAJ

Gdzie jest błąd?

To jest właśnie zadanie do wykonania. Należy wyjaśnić przebieg doświadczenia formułując własny opis tego, co się rzeczywiście dzieje, a następnie uzasadnić swoje twierdzenia za pomocą dodatkowych doświadczeń. Powodzenia!

Zadania

Redaguje Michał WOJCIECHOWSKI

M 586. Liczby dodatnie x, y i z spełniają warunek $x^2+y^2+z^2=1$. Obliczyć kres dolny wartości wyrażenia

$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}.$$

Rozwiązanie na str. 10

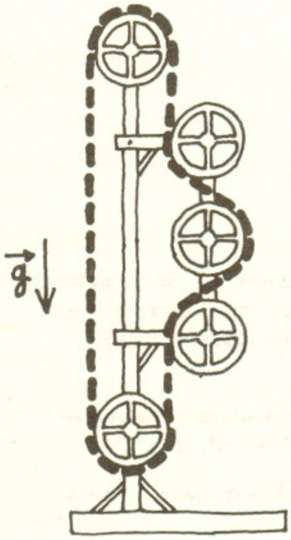
M 587. Czy istnieje liczba o sumie cyfr równej 1991, której kwadrat ma sumę cyfr równą 1991^2?

Rozwiązanie na str. 4

M 588. Nazwijmy szkieletem wielościanu figurę będącą sumą jego wszystkich krawędzi. Udowodnić, że szkielet wielościanu wypukłego zawiera co najwyżej $3w-8$ trójkątów, gdzie w jest liczbą wierzchołków wielościanu.

Rozwiązanie na str. 4

Redaguje Lidia GOETTIG



F 298. Gdzie położyć kawałek lodu, aby szybciej ochłodzić gorące mleko – pod garnek czy na pokrywkę?

Rozwiązanie na str. 12

F 299. Ciężki łańcuch założono pomiędzy pięć kół zębatych w sposób pokazany na rysunku. Lewa strona łańcucha jest krótsza niż prawa. Czy łańcuch będzie się przesuwał (*perpetuum mobile?*) pod wpływem tej różnicy ciężaru?

Rozwiązanie na str. 7

FIZYCZNE NOWINKI

Wiadomość o nowych wagach i miarach ustanowionych 7 kwietnia 1795 r.

M. J. Brisson

Miar pierwiastek od wszystkich mieszkańców ziemi nie zaprzeczony mieć chciano; ażeby powiedzieć mógł z nich każdy: miara ta do mnie należy. Obrano więc tę miarę w naturze. Za miarę pierwiastkową wzięto część dziesięć millionową czwartey Południka Ziemskiego części, która w miarach dotąd używanych, wynosi 36 cali 11 linii, 441 932 millionowych: i dano tey pierwiastkowey mierze nazwisko **metra**.

Metra jest więc miar wszystkich pierwiastkiem; **metra wzdłuż** jest pierwiastkiem wszystkich miar liniowych; **metra kwadratowa** pierwiastkiem miar wszystkich powierzchni; **metra sześcienna** pierwiastkiem miar wszystkich pełności.

Daymyż teraz, że sześcienną mamy wody dystyllowaney metrę, która w czczości ważona, kiedy ciepłomierz jest na 0, czyni 2044 funtow 6 uncyi 0 drachm 40 granow, biorąc na wagę grzywnową; millionowa część sześcienney metry wody będzie **gramma**, która wag jest wszystkich pierwiastkiem; taki jest ciężar sześcienney setnometry wody.

Ważność miar nowych w miarach dotąd używanych:

	linie	cale	stopy
metra	443,441952	36,953496	3,079458

	funty	uncye	drachmy	grana
gramma	–	–	–	18,841
kilogramma	2	0	5	49,
hektogramma	–	3	2	12,1

Nowy podział dnia:
Każdy dzień dziesiętkowy składa się
z 10 godzin
albo z 1 000 minut
albo z 100 000 sekund.

Nowy podział koła:
Koło dzielić się będzie
na 400 stopni
albo na 40 000 minut
albo na 4 000 000 sekund.

Na uniwersytetach – 200 lat temu

Osiemnasty wiek nie był zbyt pomyślny dla uniwersytetów. Były one niedofinansowane z powodu wojen i inflacji. Spadał nabór studentów. Jeśli np. w Niemczech na wszystkich uniwersytetach kończyło rocznie studia ok. 4200 studentów w latach 1700 – 1750, to później rozpoczął się prawie że liniowy spadek do ok. 2900 w roku 1800. Uniwersytety nie były zbyt duże. Największy w Niemczech, w Halle, nie miał więcej stałych pracowników niż 40, a liczba studentów wynosiła 700 – 1500. Oxford miał pomiędzy 1000 – 1700 studentów. Jeśli chodzi o nauczanie fizyki i matematyki, to sytuacja wyglądała różnie na różnych uniwersytetach. Na jezuickich uniwersytetach i kolegiach przewagę, bo aż 65%, stanowili studenci fakultetów filozoficznych. Tam profesor fizyki uczył filozofii naturalnej wszystkich studentów na drugim roku. Z kolei np. na niemieckich uniwersytetach protestanckich sytuacja była odwrotna: 43% studiowało teologię, 38% – prawo, a 11% – medycynę i fizyki było mało.

Od dobrego profesora fizyki eksperymentalnej wymagano, aby był „widowiskowy", musiał przyciągać widownię, bo ta z kolei była źródłem jego zarobków. John Robinson, profesor filozofii naturalnej na Uniwersytecie w Edynburgu, skarżył się, że nie jest popularnym nauczycielem i nie widzi możliwości wzbogacenia się w swojej profesji, bowiem prowadzi wykłady w ten sposób, aby nauczyć niektórych studentów, przez co jest mniej atrakcyjny dla reszty słuchaczy, którzy w większości przychodzą tylko po wiedzę powierzchowną lub po prostu po czczą rozrywkę.

Pensje akademickie nie pozwalały na luksus. Aby móc żyć wygodnie, profesorowie uczyli więcej niż wymagały tego ich kontrakty, pisali podręczniki, udzielali konsultacji, często prowadzili pensjonaty, a jeśli byli duchownymi – przyjmowali dodatkowe obowiązki parafialne czy klasztorne.

Na Uniwersytecie Paryskim w 1783 r. profesor filozofii zarabiał rocznie ok. 96 gwinei, co uważano za raczej skromną pensję wystarczającą na pokrycie przeciętnych potrzeb i ograniczonych przyjemności. Na prowincji pensje były, oczywiście, znacznie niższe.

We Włoszech niższy standard życia powodował, że i pensje były skromniejsze, w Neapolu – tylko 52 gwinee (w przeliczeniu) rocznie w 1777 r., w Katanii – 32 gwinee w 1787 r. Pod koniec wieku sytuacja zaczęła się poprawiać i tak np. profesor fizyki w Pizie otrzymywał 108 gwinei rocznie, a roczna pensja Volty wynosiła 160 gwinei w 1795 r.

Profesor fizyki w Oxfordzie lub Cambridge miał od 100 do 300 gwinei rocznie, w Szkocji od 150 do 300. W przeciwieństwie do zasad obowiązujących w Anglii duża część pensji szkockich profesorów fizyki i matematyki zależała bezpośrednio od liczby posiadanych studentów i liczby godzin wykładowych. W Edynburgu, który stał się pod koniec XVIII w. wiodącym uniwersytetem brytyjskim, aż $\frac{2}{3}$ do $\frac{5}{6}$ pensji profesorskiej pochodziło z bezpośrednich opłat studentów uczęszczających na wykłady.

Będąc profesorem fizyki czy matematyki największą jednakże karierę finansową w XVIII wieku można było zrobić w Holandii i protestanckich Niemczech.

A jak miały się do wysokości profesorskich zarobków ceny standardowego wyposażenia laboratorium fizycznego? W końcu lat 80. pełen zestaw nowoczesnych przyrządów kosztował powyżej 400 gwinei. W tym najbardziej kosztowne były pompy próżniowe i maszyny elektrostatyczne. Standardowa pompa kosztowała w 1780 r. 36 gwinei, a najlepsza duża maszyna elektrostatyczna z pełnym oprzyrządowaniem – 80 gwinei.

Zupełnie inna była sytuacja profesorów wyższych uczelni wojskowych czy quasi-wojskowych (jak École Normale czy École Polytechnique), ale to już zupełnie inna historia.

Lidia GOETTIG

Gwinea – angielska złota moneta stosowana od 1663 do 1813 roku. Nazwa pochodzi od kraju w Afryce, skąd przywożono złoto, z którego monety były wykonywane. Wartość ustalono w 1717 roku na 21 szylingów.