

KAŻDY MOŻE BYĆ KOLPORTEREM !!!

Delta tańsza o 25 %

Kupując 150 egzemplarzy *Delty* płacisz tylko 1.500,- zł za numer. Przesyłając pod adresem redakcji dowód wpłaty wielokrotności sumy 225 tysięcy złotych otrzymasz tyleż paczek po 150 egzemplarzy najbliższego numeru *Delty*.

Nasze konto:

PBK VIII OM W-wa 370028-4170

Uniwersytet Warszawski, redakcja miesięcznika *Delta*

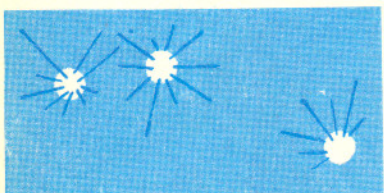
SPIS TREŚCI

NUMERU 12(199)

Ustawa – źródłem algorytmu <i>dr Antoni L. Dawidowicz</i>	str. 1
Układ Słoneczny	str. 8 i 9 str. 6 i 11 str. 4 i 13 str. 2 i 15
<i>Tablice opracował dr Tomasz Kwast</i>	
Dwa zadania <i>mgr Jarosław Wróblewski</i>	str. 3
Twierdzenie Fermata o rozkładzie liczby pierwszej na sumę kwadratów <i>doc. dr Wojciech Guzicki</i>	str. 5
Zadania	str. 5
Mała Delta	str. 7
Algorytm rozkładu liczby pierwszej na sumę kwadratów <i>doc. dr Wojciech Guzicki</i>	str.10
Korespondencyjny Klub Fizyków	str.12
Drobiazgi	str.14
Klub 44	str.16

W następnym numerze:

200 lat temu



Aby wygodnie korzystać z tablic, należy rozpiąć i usunąć zszywki egzemplarza.

„Delta”
matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Edukacji Narodowej

Komitet Redakcyjny

dr Maciej Bryński
dr Bogdan Cichocki
dr Antoni L. Dawidowicz
dr Alicja Derkowska
doc.dr Jan A. Gaj
doc.dr Bolesław Gleichgewicht
prof.dr Tomasz Hofmokr – v-przewodniczący
doc.dr Tadeusz Jarzębowski
doc.dr Marcin Kubiak
mgr Andrzej Mąkowski
dr Zbigniew Plochocki
dr Jan Rempala
prof.dr Konrad Rudnicki
prof.dr Grzegorz Sitarski
prof.dr Józef I. Smak
prof.dr Kazimierz Stępień
prof.dr Mieczysław Subotowicz
doc.dr Andrzej Szymacha
doc.dr Aniela Wolska
prof.dr Andrzej Woszczyk
prof.dr Wojciech Żakowski –
przewodniczący

WARUNKI PRENUMERATY

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na II kwartał 1991 r. wynosi 5 700,- zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumeratę.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
 - oddziały RSW właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora – odbioru zamówionych egzemplarzy dokonuje prenumeratę w wyznaczonych punktach sprzedaży lub w inny, uzgodniony sposób,
 - urzędy pocztowe i listonosze – od prenumeratorów z terenów wiejskich lub innych miejscowości, w których nie ma oddziałów RSW, a w miastach tylko od osób niepełnosprawnych – poczta zapewnia dostawę zamówionych egzemplarzy pod wskazany adres pod warunkiem uiszczenia dodatkowej opłaty za każdy doręczany egzemplarz – opłata wynosi 250,- zł od egzemplarza,
 - Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział W-wa 370044-1195-139-11 – tylko od prenumeratorów zlecających dostawę za granicę.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
 - na kraj – do 20 XI na I kwartał roku następnego
do 20 II na II kwartał
do 20 V na III kwartał
do 20 VIII na IV kwartał
 - na zagranicę – do 31 X na I kwartał
oraz do 1 dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga
dr Lidia Goettig – z-ca red. nac.
mgr Maria Kapuścińska
mgr Krystyna Kordos – sekr. red.
dr hab. Marek Kordos – red. nac.
dr Paweł Krawczyk
dr Tomasz Kwast
mgr Anna Rudnik
dr Jerzy Ryll
Katarzyna Słomka
mgr Joanna Udalska

Ilustrowała Maria Brykalska-Karlowska

Adres Redakcji

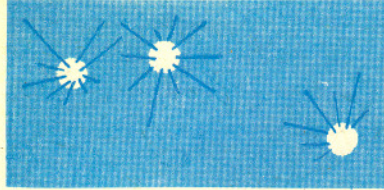
Centrum Informatyczne UW
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa
tel. 20-03-81 wew. 841

Wydawca:

Uniwersytet Warszawski
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa

Nakład 18 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.,
2,50 ark. druk.,
papier offsetowy V kl. 70 g.
Wydrukowano
w Zakładach Graficznych
RSW „Prasa-Książka-Ruch”
w Warszawie, ul. Srebrna 16

Skład systemem **TeX**
wykonała redakcja.



Ustawa – źródłem algorytmu

dr Antoni Leon DAWIDOWICZ

Rozumowanie matematyczne można stosować w wielu różnych sytuacjach. Niektórzy matematycy doszukiwali się treści matematycznych w dziełach literackich, artystycznych, itp. Przedmiotem moich rozważań będzie szukanie treści matematycznych w aktach prawnych. Żeby nie być gołosłownymi, weźmy do ręki ustawę z dnia 19 IV 1969 (z późniejszymi zmianami) – Kodeks Karny. Czytamy w niej m.in.

Art. 67. § 1. *Kara łączna nie może być niższa od najwyższej z kar wymierzonych za poszczególne przestępstwa i nie może przekraczać sumy kar wymierzonych, jak również górnej granicy danego rodzaju kary.*

Przyjmijmy dla uproszczenia oznaczenia $x_1 \wedge \dots \wedge x_n = \min\{x_1, \dots, x_n\}$ oraz $x_1 \vee \dots \vee x_n = \max\{x_1, \dots, x_n\}$. Dla większej przejrzystości rozumowania rozważmy tylko karę pozbawienia wolności. Dzieli się ona na dwa rodzaje, tj. pozbawienie wolności do lat 15 (Art. 30 i 32) oraz 25 lat pozbawienia wolności (Art. 30). Na początek rozważmy tylko karę do 15 lat pozbawienia wolności. Wówczas – na podstawie cytowanego artykułu ustawy – jeżeli przez x_1, \dots, x_n oznaczmy poszczególne składowe kary łącznej, a przez X karę łączną, otrzymujemy, że $x_1 \vee \dots \vee x_n \leq X \leq x_1 + \dots + x_n$. To jednak nie wszystko, wiemy bowiem, że kara łączna nie może przekroczyć górnej granicy dla danego rodzaju kary (w tym przypadku 15 lat). Zatem prawidłowa postać wzoru w tej sytuacji powinna wyglądać następująco:

$x_1 \vee \dots \vee x_n \leq X \leq (x_1 + \dots + x_n) \wedge 15$. Rozważmy teraz sytuację, gdy jedną z „składowych” kary łącznej jest kara 25 lat pozbawienia wolności. Wówczas, oczywiście, tyle samo musi wynieść ta ostatnia. Spróbujmy i to zapisać w formie algorytmu. Istotnie, jeżeli $x_1 \vee \dots \vee x_n = 25$, to $X = 25$, natomiast jeżeli $x_1 \vee \dots \vee x_n < 25$, to $x_1 \vee \dots \vee x_n \leq X \leq (x_1 + \dots + x_n) \wedge 15$. Zatem ostateczny wzór ma postać: $x_1 \vee \dots \vee x_n \leq X \leq (x_1 + \dots + x_n) \wedge (x_1 \vee \dots \vee x_n \vee 15)$. Nieprawdaż? Również inne akty prawne można by ujmować w ten sposób, ale to może być na przykład tematem pracy na konkurs prac uczniowskich. Ja natomiast chciałem się zatrzymać na innym akcie prawnym, którego analiza pod tym kątem prowadzi do ciekawych wniosków dotyczących samej ustawy. Weźmy do ręki ustawę z dnia 19 IV 1969 (z późniejszymi zmianami) – Kodeks Postępowania Karnego. W ustawie tej czytamy m.in.

Art. 98

§ 1. *Orzeczenia zapadają większością głosów.*

§ 2. *Jeżeli zdania się tak podzielą, że żadne z nich nie uzyska większości, zdanie najmniej korzystne dla oskarżonego przyłącza się do zdania najbardziej doń zbliżonego, aż do uzyskania większości.*

Artykuł powyższy mówi o zasadach ustalenia wymiaru kary, gdy członkowie kompletu orzekającego mają różne poglądy. Niech x_1, \dots, x_{2n-1} oznaczają wymiary kary proponowane przez poszczególnych $2n - 1$ członków kompletu orzekającego (praktycznie $2n - 1 = 3$ lub 5 , a zawsze jest liczbą nieparzystą) uporządkowane tak, by $x_1 \leq \dots \leq x_{2n-1}$. Niech $R(x_1, \dots, x_{2n-1})$ oznacza wymiar kary ustalony przy tych propozycjach. Aby miał zastosowanie § 1, musi być $x_p = \dots = x_q$, gdzie $p + q - 1$ (co najmniej n członków kompletu orzekającego musi mieć to samo zdanie). Ale wtedy (ponieważ $0 \leq p < q \leq 2n - 1$) musi być $p \leq n \leq q$, a z tego wynika, że $R(x_1, \dots, x_{2n-1}) = x_n$. W przypadku, gdy nie zachodzi powyższa sytuacja, stosujemy przekształcenie opisane w § 2 tak długo, aż będzie można zastosować § 1.

Opiszmy to przekształcenie. Oznaczmy je przez α i niech $\alpha(x_1, \dots, x_{2n-1}) = (y_1, \dots, y_{2n-1})$. Przekształcenie to jest określone dla tych argumentów, dla których nie działa § 1. Niech $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{p-1} < x_p = \dots = x_{2n-1}$. Dla każdego argumentu $x = (x_1, \dots, x_{2n-1})$ takie p istnieje (gdy $x_1 = \dots = x_n$, przyjmujemy z definicji $p = 1$) i oznaczamy je przez $p(x)$. Oczywiście, jeżeli $p(x) < n$, wtedy ma zastosowanie § 1 (istotnie, wtedy $2n - 1 - p(x) \geq n$). Natomiast gdy $p(x) \leq n$, definiujemy $y_k = x_k$ dla $k < p(x)$ i $y_k = x_{p-1}$ dla $k \geq p(x)$. Oczywiście, $p(\alpha(x)) < p(x)$, zatem po skończonej liczbie kroków dojdziemy do sytuacji, w której ma zastosowanie § 1. Ponadto przy zastosowaniu operacji α zawsze $y_n = x_n$. Wynika stąd, iż zawsze $R(x) = x_n$, czyli bez względu na rozkład głosów ostateczny wyrok będzie medianą proponowanych wymiarów kary.

Na koniec wypada podać pewien komentarz natury niematematycznej. Otóż tekst ustawy sugeruje, jakoby preferował środki łagodniejsze w stosunku do surowszych. W istocie jednak tak nie jest; gdyby analogiczną procedurę prowadzić odrzucając najpierw kary najłagodniejsze, efekt byłby identyczny. Można by więc zastanowić się, czy tłumacząc inne ustawy na język algorytmu nie znajdziemy też przejawów pozornego humanitaryzmu ustawodawcy.



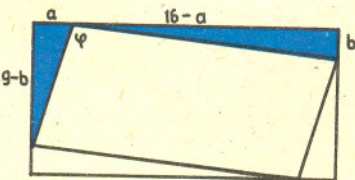
Rozwiązanie zadania M 588.

Nazwijmy pola na dolnej i górnej linii brzegowej (tej długości n) skrajnymi, a pozostałe środkowymi. Na skrajne pole można przejść koniem tylko z pola środkowego. Jeżeli koń obszedł wszystkie pola, to $2n$ ruchów wykonano z pól środkowych na skrajne, a pozostałe $2n$ ruchów z pól skrajnych na środkowe i ruchy tych obu rodzajów wykonano na przemian. Ale przy każdym ruchu zmienia się kolor pola, na którym stoi koń, stąd wniosek, że wszystkie pola skrajne są tego samego koloru. Sprzeczność.



Rozwiązanie zadania M 584.

Możemy założyć, że pierwszy prostokąt ma boki długości 9 i 16.



Ponieważ kąt ϕ jest prosty, więc trójkąty zakreślowane są podobne. Stąd

$$(*) \quad \frac{a}{b} = \frac{4}{7} \quad \text{i} \quad 7a - 4b = 0,$$

oraz

$$(**) \quad \frac{16-a}{9-b} = \frac{7}{4} \quad \text{i} \quad 4a - 7b = 1.$$

Odejmując $(**)$ od $(*)$ otrzymujemy $3a + 3b = -1$, co jest sprzeczne z tym, że a i $b > 0$.



Rozwiązanie zadania M 585.

Możemy założyć, że wielomian $P(x) =$

$$= \sum_{k=0}^m a_k x^k \quad \text{jest rosnący dla } x > x_0.$$

Niech $n > x_0$ będzie taką liczbą naturalną, że $P(n) > 1$. Wówczas mamy

$$\begin{aligned} P(n) &< P(P(n) + n) = \\ &= \sum_{k=0}^m a_k (P(n) + n)^k = \\ &= \sum_{k=0}^m a_k n^k + P(n) \cdot S = \\ &= P(n) \cdot (S + 1), \end{aligned}$$

gdzie S jest pewną liczbą całkowitą.

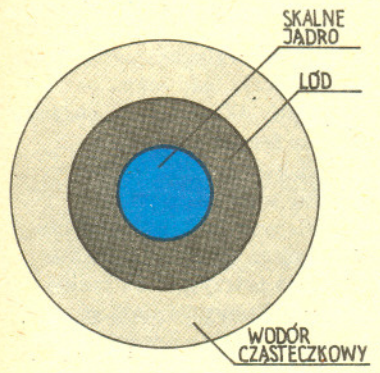
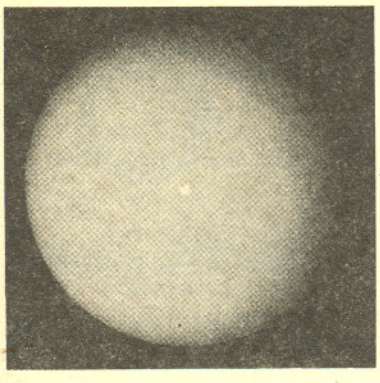
Tak więc $P(n)$ jest dzielnikiem

$P(P(n) + n)$, $P(n) > 1$ oraz

$P(P(n) + n) > P(n)$, stąd wnioskujemy, że $P(P(n) + n)$ nie jest liczbą pierwszą.



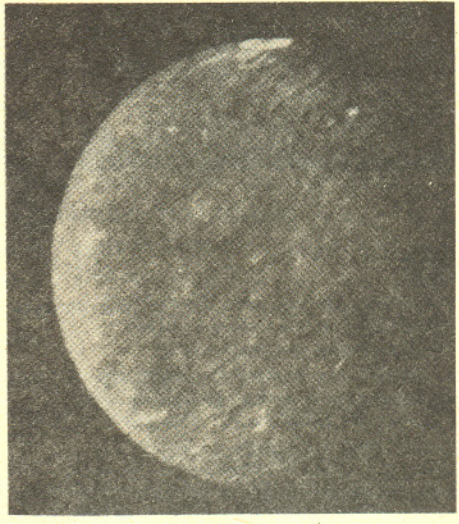
URAN



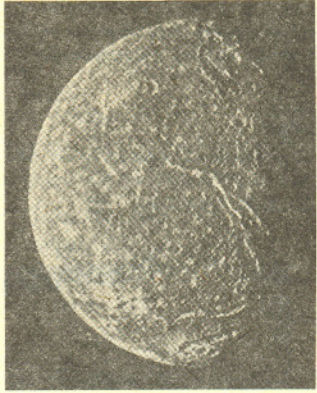
Planeta w zasadzie możliwa do zauważenia gołym okiem. Ponieważ jednak nie wiadomo było, gdzie jej szukać (i czy w ogóle), odkryta została przez Williama Herschela dopiero w 1781 r. za pośrednictwem teleskopu. Planeta jest wyjątkowa przez to, że jej oś obrotu leży praktycznie w płaszczyźnie orbity, przez co nawet bieguny bywają oświetlone niemal prostopadłymi promieniami Słońca.

Uran został z bliska przebadany przez jedną tylko sondę, Voyagera 2, w styczniu 1986 r. Uzyskane wtedy obrazy ukazują zdumiewająco „gładką” powierzchnię planety. Dopiero silne sztuczne wzmocnienie kolorów ujawnia wielkoskalową strukturę równoleżnikową. Wyjątkowo wysoka zawartość metanu w atmosferze nadaje planecie lekko zielonkawe zabarwienie.

wielka półoś orbity	19,304 j.a.
mimośród	0,0503
nachylenie	0°773
promień równikowy	25 400 km
masa	14,56 masy \oplus
okres obrotu	-0,465
okres obiegu	87,818 lat



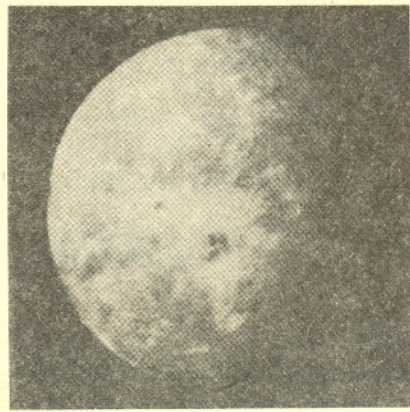
Umbriel



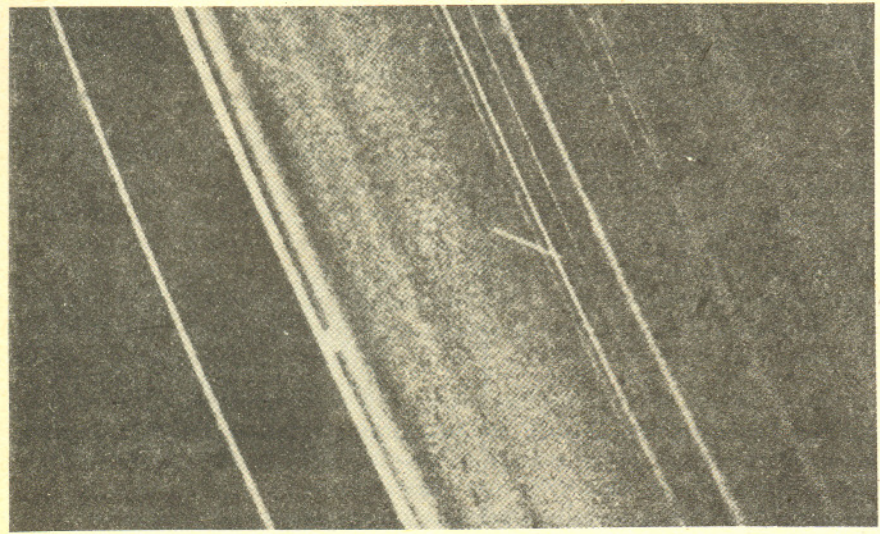
Titania

Pierścienie Urana, choć bezpośrednio zaobserwowane dopiero przez Voyagera 2, znane były już wcześniej. O ich obecności wiedzano od chwili, gdy planeta przesłoniła 30 III 1977 gwiazdę SAO 158687. Mianowicie przed i po zakryciu gwiazdy zaobserwowano symetryczne wahania jej blasku, co zinterpretowano właśnie jako skutek obecności pierścieni.

Na większych satelitach Voyager 2 wykrył ślady działalności wulkanicznej, ruchów tektonicznych i prawdopodobnie obecności dawnych rzek. Zupełnie zagadkowe są niezwykle głębokie (do 20 km) kaniony na powierzchni Mirandy – nieznanym jest mechanizm tak dramatycznych zjawisk na tak małym obiekcie.



Oberon



Pierścienie Urana

	Satelity		
	półoś orbity (mln km)	okres obiegu (dni)	średnica (km)
Miranda	0,129	1,414	550
Ariel	0,191	2,520	1400
Umbriel	0,266	4,144	1100
Titania	0,436	8,706	1600
Oberon	0,584	13,463	1650

plus 10 drobnych o średnicy < 100 km, których nie wszystkie dane są znane. Kierunek obiegu satelitów zgodny z kierunkiem obrotu planety.

Dwa zadania

10
219
4796
105030
2300104
50371117
1103102046
24157378203
529034393290
11585586272312
253718493496142
5556306986017175
121680319386464850
2664737596978110299
58356408797678883616
1277975907130111287030
27987027523701766535844
612901781044839990619277
13422239746246942029463326
293940277834746405249823203
6437143767881726489806973190
140970200455734695276637468392
3087176259086334835548776106122
67607602343297851162601939391695
1480572377802050246594187936024890
32423788005073752816976163732130379
710064596881545822871428836670676836
15550056386553447472796412677073638630
340538388601466711930899827265490092384
7457618881148419333592105943068579865437

Zadanie 1: Znaleźć regułę, według której skonstruowany jest ciąg o 30 początkowych wyrazach podanych obok.

Rozwiązanie 1:

$A(1) = 10, A(2) = 219, A(n+2) = A(n+1)^2/A(n)$ zaokrąglone do najbliższej liczby całkowitej.

To znaczy: zaczynamy od 10 i 219, za każdym razem wybieramy liczbę, która z najlepszym przybliżeniem tworzy ciąg geometryczny z poprzednimi dwiema.

Rozwiązanie 2:

Zaczynamy od 10, 219, 4796, 105030 i kontynuujemy według wzoru $A(n+4) = -11 \cdot A(n) + 18 \cdot A(n+1) - 3 \cdot A(n+2) + 22 \cdot A(n+3)$ (rekursja liniowa 4 rzędu).

Zadanie 2: Skoro dany ciąg może być zdefiniowany na 2 różne sposoby, to jak wykazać, że te dwie definicje są równoważne.

Rozwiązanie:

No cóż, można obliczyć pierwszych 1000 wyrazów używając obu definicji i przekonać się, że wszystko się zgadza. Wydrukowanie tysiąca początkowych wyrazów zajęłoby pokaznych rozmiarów książkę. Czyż trzeba bardziej przekonującego argumentu? Tak, trzeba. Tylko że takiego argumentu po prostu nie ma. Obie, bądź co bądź, bardzo proste definicje określają 2 różne ciągi!!! Jedynie „skromny” początek obu ciągów składający się z 1402 wyrazów jest taki sam. Ale według pierwszej definicji 1403 wyraz jest równy

1943708471314943308059445452657010940487450311864066842732596790939279068
191168021439671095304800683519756645143142801766345115405789059172602192
426024357604507643919310528104572431148473422703387902120314696316682603
735267692111685622339243356242260056059336217912799059786079481997806631
913955493134941095358770263918313025848373581726054928149011342047774528
154248287433782463237576416857026309254788755903742777139477594456385042
020381315538604379941789590322666368814892780385046811477655985825537894
431894143994712043942268394043823543450207513886190799409707531632679517
052869104335940723488960240770470438470434329535343866330429132657179201
894810776495469936998716229270764904917198741365340242782600909003168195
629553831589770365472687705483796661474238920271726070390505179067208859
490817765494636249793643314197295308500154814706778732034270622318621910
522030142040283435992446877395852252468365235219657327211742475429216859
612898009146799397834207588995393930733511691021384920256724554594857336
855550714963221355049079118765001875374835520434138927516201876958496564
958805765202364476313555615826884516631224599151532590504446541236893625
713832620042439077419006777861484860386048975978762433100742439296700782
881889486380714070148887484098410694218233687263042755465493793927981497
199521026920386200848153568287674310343346371498689283968784694184354766
679111870702565268681491357079215569781219694309328629243757829281537544
222305623084962270299300645420182502879046175714261919397771509700298570
157891004711917373029290386303109701959096841328964650889891682871446978
568692922345060182670103628056600403977432916893829069098732545636174794
446362475483205590674696119315488543667867514676786440758126850754300452
964368265133082563202580908171650074203739290735941387946242005524276316
413356912394816492851593842390985938520048268384592849898513622096090183
58701822,

podczas gdy druga definicja daje 1403 wyraz o 1 większy.

mgr Jarosław WRÓBLEWSKI

Rozwiązanie zadania F 297.

Środek masy układu osiągnie najniższe położenie wtedy, gdy znajdzie się na poziomie wody w szklance. Jeśli bowiem poziom wody leżałby poniżej środka masy układu, to po dolaniu wody środek masy obniżyłby się (zwiększyłaby się wtedy masa poniżej środka masy). Jeśli zaś poziom wody znajdowałby się wyżej niż środek masy układu, to po wylaniu części wody środek masy także by się obniżył.

Aby obliczyć wysokość poziomu wody w szklance, oznaczymy przez m_1 – masę wody, m_2 – masę ścianek i przez m_3 – masę dna szklanki. Przez y oznaczymy położenie środka masy układu. Środek masy ścianek szklanki znajduje się na wysokości $h/2$, dna – 0, zaś wody – $y/2$. Z definicji środka masy dostaniemy związek

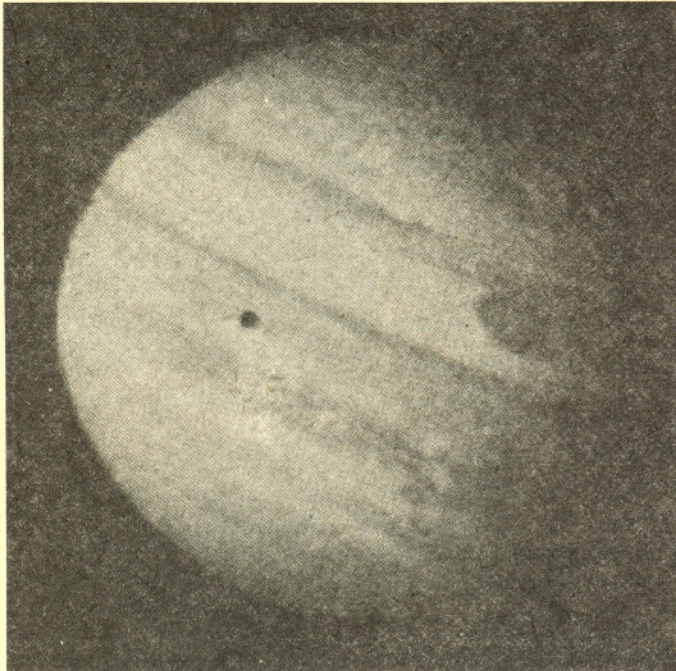
$$(m_1 + m_2 + m_3)y = m_1 \cdot \frac{y}{2} + m_2 \cdot \frac{h}{2} + m_3 \cdot 0.$$

Podstawiając $m_1 = \pi r^2 y \rho$, $m_2 = \pi r h \mu$, $m_3 = \pi r^2 d \mu$ otrzymujemy równanie kwadratowe

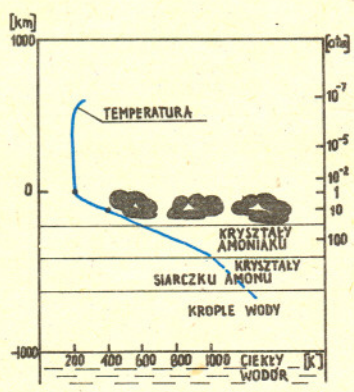
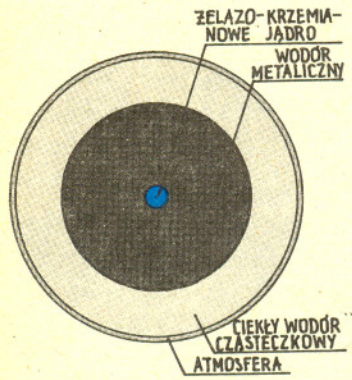
$$y^2 \rho + \mu(8h + 2d)y - 4h^2 \mu = 0.$$

które ma jedno dodatnie rozwiązanie:

$$y = \frac{1}{\rho} (\sqrt{\mu^2(4h+d)^2 + 4h^2 \mu \rho} - \mu(4h+d)).$$

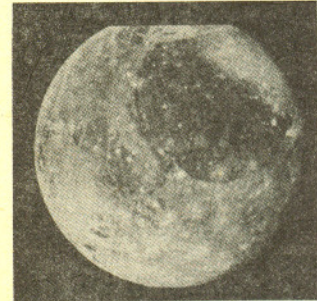


- wielka półoś orbity 5.204 j.a.
- mimośród 0.0478
- nachylenie 1°306
- promień równikowy 71 398 km
- masa 317.9 mas \oplus
- okres obrotu 0^d413
- okres obiegu 11.874 lat



Atmosfera Jowisza

Jest planetą o masie większej niż łączna masa pozostałych planet. Obserwując go wraz z czterema największymi satelitami Galileusz nie mógł nie uwierzyć w hipotezę Kopernika – oto widział przecież Układ Słoneczny w miniaturze! Jowisz jest największym przedstawicielem planet zupełnie innego typu niż cztery drobne planety najbliższe Słońca. Cztery następne to ogromne globy zbudowane głównie z wodoru, być może ze skalnym jądrem i grubą wodorowo-metanowo-amoniakalną atmosferą przesłaniającą nie grunt – bo go tam nie ma – też powierzchnię bezbrzeżnego wodorowego oceanu. Jowisz wyróżnia się wśród nich szczególnie intensywnym wydzielaniem wewnętrznego ciepła – emituje on dwukrotnie więcej energii niż otrzymuje od Słońca. Wskutek tego jego gładka od dołu atmosfera jest szczególnie niespokojna, zachodzi tam intensywna konwekcja, która nakładając się na szybki ruch wirowy daje charakterystyczny obraz równoleżnikowych pasów atmosferycznych. Są to obszary wypiętrzania się mas atmosfery (jasne) i zapadania (ciemne). W atmosferze powstają ponadto ogromne długotrwałe wiry. Najstynnijszym jest Wielka Czerwona Plama (zdjęcie) utrzymująca się nieprzerwanie od rozpoczęcia teleskopowych obserwacji planety. Jowisza odwiedziły cztery sondy: Pioneer 10 (XII 1973), Pioneer 11 (XII 1974), Voyager 1 (IV 1979), Voyager 2 (VII 1979). Oprócz badań samego Jowisza przeprowadziły obserwacje jego galileuszowych satelitów, odkryły szereg nowych, drobnych satelitów oraz słaby pierścień pyłowy Jowisza. Wyjątkowym satelitą jest Io, niezwykle aktywny i strzelający siarką ze swych wulkanów na wysokość setek kilometrów.



Ganimedes



Wielka Czerwona Plama

Satelite

	półoś orbity (mln. km)	okres obiegu (dni)	rozmiary (km)
Metis	0.128	0.294	40
Adrastea	0.129	0.297	30×20
Amaltea	0.181	0.498	270×153
Thebe	0.222	0.678	80
Io	0.422	1.769	3 632
Europa	0.671	3.551	3 126
Ganimedes	1.070	7.155	5 276
Callisto	1.883	16.689	4 820
Leda	11.100	239.2	14
Himalia	11.470	250.6	170
Lysitea	11.710	259.0	35
Elara	11.740	260.0	80
Ananke	20.700	-631	28
Carne	22.350	-692	40
Pasiphae	23.300	-739	70
Sinope	23.700	-758	36

Twierdzenie Fermata o rozkładzie liczby pierwszej na sumę kwadratów

Klasyczne już dziś twierdzenie Fermata mówi, że każda liczba pierwsza p postaci $4n + 1$ jest sumą dwóch kwadratów: $p = a^2 + b^2$. Znamy wiele dowodów tego twierdzenia. Chyba najkrótszy został niedawno opublikowany przez D. Zagiera w *American Mathematical Monthly*. Zapoznajmy się z tym dowodem.

Rozważmy skończony zbiór S zdefiniowany następująco:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 : x^2 + 4yz = p\}$$

oraz funkcję $f : S \rightarrow S$ określoną wzorem:

$$f(x, y, z) = \begin{cases} (x + 2z, z, y - x - z), & \text{jeśli } x < y - z, \\ (2y - x, y, x - y + z), & \text{jeśli } y - z < x < 2y, \\ (x - 2y, x - y + z, y), & \text{jeśli } x > 2y. \end{cases}$$

Funkcja f jest involucją, tzn. dla dowolnej trójki liczb $(x, y, z) \in S$ zachodzi równość $f(f(x, y, z)) = (x, y, z)$.

Zauważamy następnie, że trójka $(1, 1, n)$ jest punktem stałym funkcji f : $f(1, 1, n) = (1, 1, n)$. Jest to przy tym jedyny punkt stały tej funkcji. Inny punkt stały dawałby bowiem rozkład liczby p na iloczyn dwóch liczb całkowitych. Wynika stąd, że zbiór S ma nieparzystą liczbę elementów.

Weźmy teraz nową funkcję $g : S \rightarrow S$ daną wzorem

$$g(x, y, z) = (x, z, y).$$

Ta funkcja jest również involucją: $g(g(x, y, z)) = (x, y, z)$. Zbiór S ma nieparzystą liczbę elementów, a więc funkcja g musi mieć co najmniej jeden punkt stały: $g(x, y, z) = (x, y, z)$.

Ale wtedy $y = z$, czyli $p = x^2 + 4yz = x^2 + 4y^2 = x^2 + (2y)^2$, co kończy dowód twierdzenia. Pomińcie szczegóły dowodu pozostawię Czytelnikowi jako bardzo łatwe ćwiczenie.

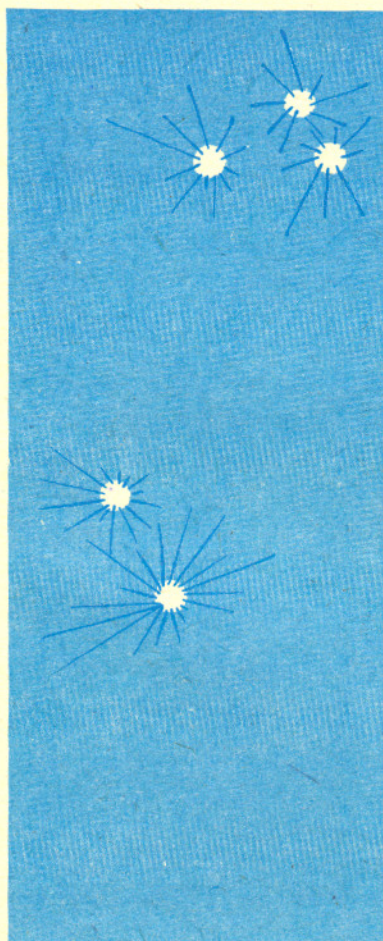
Przeprowadzony wyżej dowód twierdzenia Fermata jest bardzo prosty, ale ma jedną zasadniczą wadę. Nie pokazuje on, w jaki sposób można znaleźć takie liczby a i b , że $p = a^2 + b^2$. Jest on całkowicie niekonstruktywny. Znamy wiele dowodów tego twierdzenia dających różne metody otrzymywania liczb a i b . Uzyskiwane w ten sposób algorytmy mają różne własności, jedne działają szybciej, inne wolniej.

Bardzo ładne wzory podał Gauss. Jeśli $p = 4n + 1$ oraz przez (x) oznaczymy taką „resztę” z dzielenia x przez p , że $|(x)| < \frac{p}{2}$, (tzn. $x = q \cdot p + (x)$ oraz $|(x)| < \frac{p}{2}$), to:

$$a = \left\langle \frac{1}{2} \cdot \binom{2n}{n} \right\rangle, \quad b = ((2n)! \cdot a).$$

Te wzory, niestety, też są zupełnie nieprzydatne w praktyce. Do obliczenia liczby $(2n)!$ trzeba wykonać $2n$ mnożeń. Jeśli liczba n ma kilkadziesiąt cyfr, to takie obliczenia trwałyby co najmniej miliardy lat. Przy wyznaczaniu liczb a i b , zgodnie z algorytmem danym przez wzory Gaussa, musimy wykonać liczbę działań proporcjonalną do liczby p . Dla dużych liczb p jest to niewykonalne. Jesteśmy więc zainteresowani znalezieniem algorytmu szybkiego i prostego. Są takie algorytmy. Jeden z nich przedstawiamy w tym numerze *Delta* (str. 10).

doc. dr Wojciech GUZICKI



Zadania

Redaguje mgr Michał WOJCIECHOWSKI

M 583. Czy szachownicę o wymiarach $4 \times n$ można obejść ruchem konika szachowego tak, by na każdym polu stać dokładnie raz i w ostatnim posunięciu wrócić na pole startu?

Rozwiązanie na str. 1.

M 584. Czy w prostokąt o stosunku długości boków $9 : 16$ można wpisać prostokąt o stosunku długości boków $4 : 7$, tak by na każdym boku pierwszego prostokąta leżał wierzchołek drugiego?

Rozwiązanie na str. 1.

M 585. Udowodnić, że nie istnieje wielomian dodatniego stopnia o współczynnikach całkowitych, którego wartości we wszystkich punktach całkowitych są liczbami pierwszymi.

Rozwiązanie na str. 1.

Redaguje dr Krzysztof CHARCHUŁA

F 296. Rakieta wyposażona w impulsowy silnik odrzutowy, pozwalający zmieniać prędkość w ciągu bardzo krótkiego czasu, krąży wokół Ziemi po orbicie kołowej. Jak użyć tego silnika, aby przemieścić raketę na orbitę również kołową, ale o nieco większym promieniu?

Rozwiązanie na str. 16.

F 297. Do szklanki o średnicy d i wysokości h nalano wody. Przy jakim poziomie wody środek masy układu: szklanka + woda przyjmie najniższe położenie? Przyjmając, że ścianki i dno szklanki są jednorodne i mają gęstość powierzchniową μ , woda zaś gęstość objętościową ρ .

Rozwiązanie na str. 3.

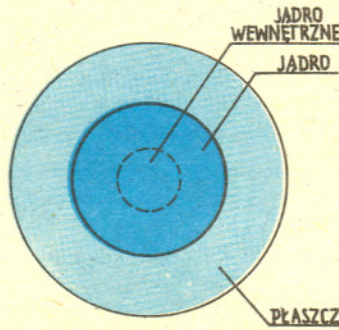
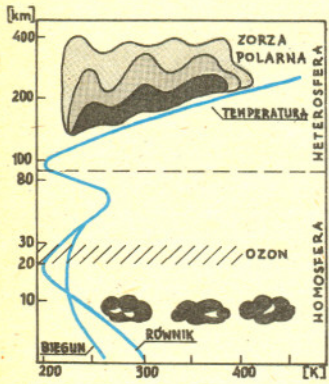


ZIEMIA



Planeta uznawana do 1543 r. za centrum Wszechświata. Kres temu pogładowi przyniosła hipoteza Kopernika opublikowana w tym właśnie roku. Nasze informacje o Ziemi pochodzą, siłą rzeczy, głównie z nauk nie mających nic wspólnego z astronomią. Ale od 1957 r. zaczęto Ziemię i jej otoczenie badać metodami „kosmicznymi”, tzn. za pośrednictwem sztucznych satelitów i sond kosmicznych. W tym właśnie roku został wystrzelony pierwszy sztuczny satelita Sputnik 1. Metodami satelitalnymi przebadano ziemską atmosferę, odkryto pasy radiacyjne, przesondowano magnetosferę.

Według obecnej wiedzy Ziemia jest jedyną (przynajmniej w Układzie Słonecznym) planetą, na której rozwinęło się życie. Życie to, zanim stworzyło cywilizację i wyszło w kosmos (J. Gagarin, 1961), przejawiało swoje istnienie w skali kosmicznej już dawno – mianowicie wczesne organizmy wytworzyły atmosferyczny tlen (około 1/5 masy atmosfery), z którego teraz inni, być może zbyt rozrzutnie, korzystają.



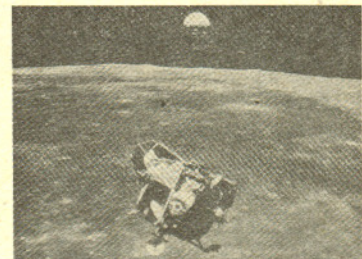
wielka półoś orbity	150 mln km
mimośród	0,0167
nachylenie	0
promień równikowy	6 378 km
masa	$5,974 \times 10^{24}$ kg
okres obrotu	$0,997^d$
okres obiegu	$365,25^d$

Atmosfera Ziemi

KSIĘŻYC

promień orbity	384 400 km
okres obiegu	$27,3217^d$
promień	1 738 km
masa	$7,348 \times 10^{22}$ kg

Księżyc jest w stosunku do swojej macierzystej planety najmasywniejszym satelitą w Układzie Słonecznym (być może, z wyjątkiem układu Pluton – Charon). Nic więc dziwnego, że właśnie on warunkuje szereg zjawisk zachodzących na Ziemi, np. precesja osi ziemskiej, pływy i wynikające z tego spowalnianie ruchu obrotowego Ziemi (w tempie $0,002$ s/stulecie) i in. Również Ziemia wywarła swój wpływ na Księżyc, np. wyhamowując jego obrót tak, że obecnie jego okres obrotu równy jest okresowi obiegu. Dlatego Księżyc widzimy stale z jednej tylko strony – pierwsze obrazy odwrotnej strony Księżyca przesłała Luna 3 w 1959 r. Z kolei spowalnianie obrotu Ziemi, czyli ubytek jej momentu pędu, musi być skompensowany wzrostem momentu pędu Księżyca – dlatego obecnie Księżyc oddala się od Ziemi, co jest bezpośrednio mierzalne metodami laserowymi. Wreszcie naturalną rzeczą jest, że Księżyc został pierwszym celem kosmicznej wyprawy człowieka (N. Armstrong, 1969).

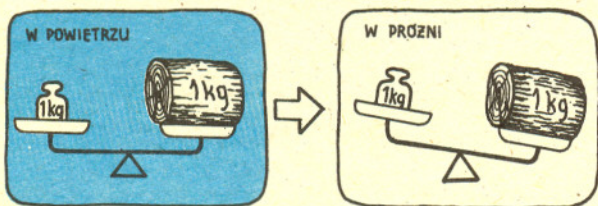


LM nad Księżycem

Mała delta

Ważenie – czynność prosta!

Ważenie to jedna z tych zwyczajnych czynności, z którymi spotykamy się na co dzień. Na żartobliwe pytanie z czasów dzieciństwa, co jest cięższe: 1 kg drewna czy 1 kg żelaza, nie damy się nabrać i wszyscy chórem, choć czasem bez głębszego zastanowienia, odpowiemy: 1 kg to 1 kg, więc waży tyle samo. Czy rzeczywiście?



Każde ciało zanurzone w powietrzu doznaje parcia, tj. siły wyporu, skierowanego ku górze i równego ciężarowi wypartego przez to ciało powietrza. Innymi słowy, każde ciało w powietrzu traci pozornie na ciężarze tyle, ile wynosi ciężar powietrza zajmującego taką objętość jak to ciało. Jest to treść prawa Archimedesesa, które stosuje się zarówno do cieczy, jak i do gazów.

Weźmy teraz wagę szalkową i na jednej szalce ustawmy jednokilogramowy żelazny odważnik, a na drugiej – drewno w takiej ilości, aby waga znalazła się w równowadze. Powiemy, że odważyliśmy w ten sposób 1 kg drewna. Oczywiście jest więc, iż 1 kg drewna waży tyle samo co 1 kg żelaza. Oczywiście, ale niedokładne. Na lewą szalkę działa siła ciężaru odważnika równa $m \cdot g$ (m – masa odważnika, g – przyspieszenie grawitacyjne) pomniejszona o siłę wyporu powietrza skierowaną przeciwnie i równą $V \cdot d \cdot g$ (V – objętość odważnika, d – gęstość powietrza). Siłę wyporu trzeba również uwzględnić dla drewna na prawej szalce. Z równości sił działających na obie szalki wagi znajdującej się w równowadze, wynika, że:

$$m_d \cdot g - V_d \cdot d \cdot g = m_z \cdot g - V_z \cdot d \cdot g,$$

gdzie indeksy d , z oznaczają odpowiednio drewno i żelazo.

Stąd otrzymujemy, że

$$\frac{m_d}{m_z} = \frac{1 - d/d_z}{1 - d/d_d}.$$

Podstawiając dane liczbowe:

gęstość żelaza	$d_z = 7,9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$,
gęstość drewna (suszone sosnowe)	$d_d \cong 0,5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$,
gęstość powietrza	$d \cong 1,3 \text{ kg/m}^3$,

otrzymujemy

$$m_d/m_z \cong 1,0024.$$

Wynika stąd, iż rzeczywisty (czyli wyznaczony w próżni) ciężar 1 kg drewna (w powietrzu) jest większy niż rzeczywisty (czyli w próżni) ciężar 1 kg żelaza (w powietrzu) o około 2,5 g. Drewno ma mniejszą od żelaza gęstość, więc ta sama masa drewna zajmuje większą objętość, a więc i wypiera więcej powietrza, waży więc w powietrzu mniej. Aby te materiały w powietrzu ważyły tyle samo (waga znajduje się w równowadze), masa drewna musi być większa. Paradoksalna teza, że 1 kg drewna jest cięższy od 1 kg żelaza jest, o dziwo!, prawdziwa.

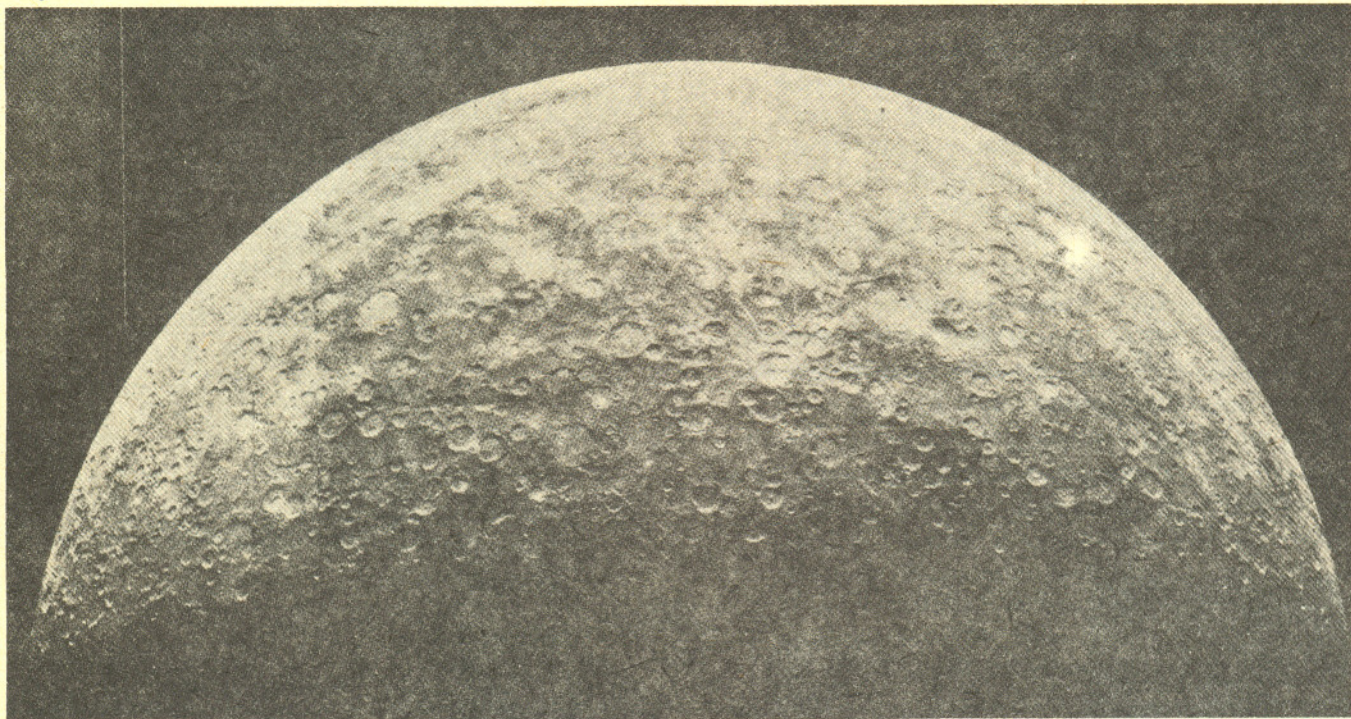
Poprawka na ważenie w powietrzu jest tym większa, im gęstość ważonego towaru jest bliższa gęstości powietrza, przy założeniu, że masy towarów porównujemy z masą odważników mosiężnych czy żelaznych (albo też używamy wagi sprężynowej). Gdy kupujemy 1 kg cukru, to w rzeczywistości dostajemy go o około 1,5 g więcej, ale nie ma to większego znaczenia, gdyż dokładność ważenia w sklepie wynosi w najlepszym przypadku 5 g.

Koniecznym natomiast trzeba uwzględnić poprawkę na wypór powietrza wtedy, gdy pomiaru dokonujemy z dokładnością do mg (10^{-3} g) lub dziesiątej części mg, a taką dokładność można uzyskać posługując się np. wagą analityczną.

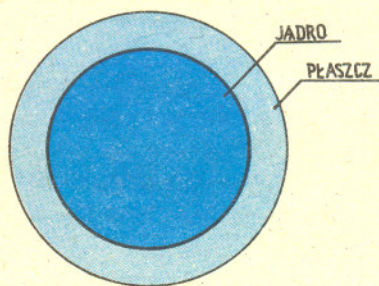
Małą Deltę przygotowała Lidia GOETTIG



MERKURY



Ta najbliższa Słońcu planeta jest bardzo trudna do zaobserwowania – z reguły ginie w blasku Słońca, ponieważ jej kątowa od niego odległość nie przekracza 28° . Z tego też powodu topografia Merkurego właściwie zupełnie nie była znana do 1974 r., wtedy bowiem zbliżyła się doń jedyna, jak dotychczas, sonda Mariner 10 (Mariner Venus–Mercury). Kamery sondy ukazały, że glob planety do złudzenia przypomina Księżyc, tak że bez znajomości topografii tych obiektów nie sposób ich rozróżnić. Najwybitniejszym tworem na powierzchni Merkurego jest kołowy wał górski o średnicy 1300 km, zwany Caloris Planitia. Jest to najprawdopodobniej pozostałość po upadku wielkiego meteorytu. W okolicy antypodycznej teren jest szczególnie chaotycznie ukształtowany, co interpretuje się jako wynik zogniskowania fali sejsmicznej powstałej w wyniku uderzenia tego meteorytu.



wielka półoś orbity	0,387 j.a.
mimośród	0,2056
nachylenie	$7^\circ 00'$
promień równikowy	2 439 km
masa	0,0553 masy \oplus
okres obrotu	$58^d,6462$
okres obiegu	$87^d,95$

Wskutek bliskości Słońca i braku atmosfery warunki na Merkurym są wyjątkowo surowe. Pogłębia to dodatkowo długość doby (176^d), w wyniku czego na oświetlonej półkuli temperatura sięga 500°C , a na nieoświetlonej spada do -150°C . Z kolei dzięki bliskości Słońca Merkurj bywa niekiedy widoczny na tle jego tarczy. Do końca stulecia zjawisko to można będzie obserwować jeszcze dwukrotnie: 6 XI 1993 i 15 XI 1999.

Dzięki szybkiemu ruchowi orbitalnemu i stosunkowo dużemu mimośrodkowi orbity Merkurj dostarczył jednego z dowodów słuszności ogólnej teorii względności. Teoria mianowicie przewiduje, że duża część orbity Merkurego powinna obracać się (po uwzględnieniu perturbacji ze strony innych planet) w tempie $0,1$ na jeden obieg – zjawisko to jest od dawna obserwowane.

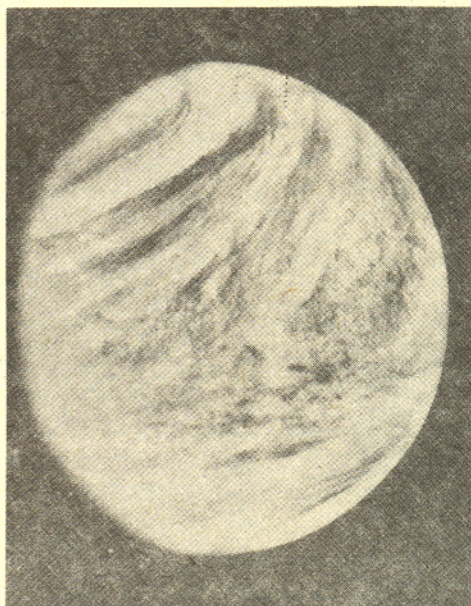


Powierzchnia Merkurego

WENUS



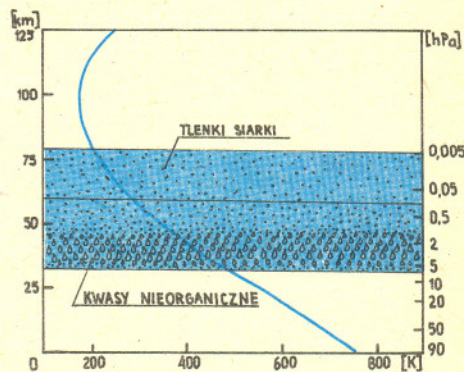
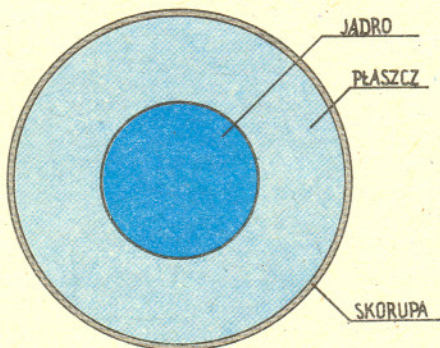
Ta podobna rozmiarami i masą do Ziemi planeta jest – po Słońcu i Księżycu – najjaśniejszym obiektem na naszym niebie. Jej kątowa odległość od Słońca nie przekracza 46° ; Wenus świeci wtedy jako Gwiazda Poranna lub Wieczorna. Fazy Wenus obserwował już Galileusz. Swój blask planeta zawdzięcza silnie odbijającej światło słoneczne warstwie chmur (struktura chmur na zdjęciu u góry widoczna jest w nadfiolecie). Dlatego jej topografia i okres obrotu zostały poznane dopiero niedawno dzięki technice radarowej. Różnice poziomów terenu są na Wenus tego rzędu co na Ziemi.



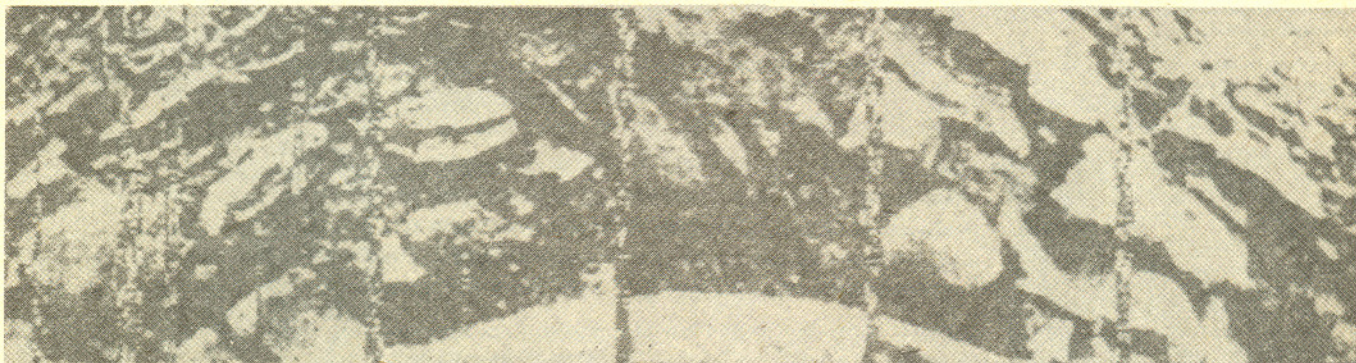
Wenus w nadfiolecie

Atmosferę Wenus odkrył M. Lomonosow przy obserwacji przejścia planety przed tarczą Słońca (najbliższe takie zjawisko nastąpi dopiero 8 VI 2004). W ostatnich latach atmosfera Wenus była wielokrotnie sondowana przez stacje serii Wenera, które również przekazały na Ziemi obrazy panoram w miejscu lądowania (zdjęcie u dołu). Okazało się, że atmosfera składa się głównie z dwutlenku węgla, co tłumaczy warunki panujące na powierzchni planety. Mianowicie ciśnienie wynika po prostu z wielkiego ciężaru gęstej atmosfery, za temperaturę zaś odpowiedzialny jest tzw. efekt cieplarniany. Polega on na tym, że warstwa CO_2 źle przepuszcza promieniowanie podczerwone gruntu, który wobec tego nie może się dostatecznie szybko wychłodzić. Surowość warunków na Wenus pogłębiają dodatkowo deszcze kwasów, głównie siarkowego. Przy tym wszystkim wręcz zaskakujące jest, że na powierzchni planety jest jednak dość widno – 14% oświetlenia na Ziemi.

wielka półoś orbity	0,723 j.a.
mimośród	0,0068
nachylenie	$3^\circ 394$
promień równikowy	6 052 km
masa	0,815 masy \oplus
okres obrotu	$-243^d 01$
okres obiegu	$224^d 7$

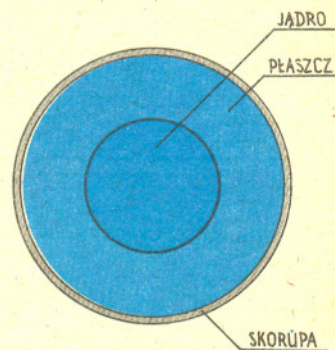
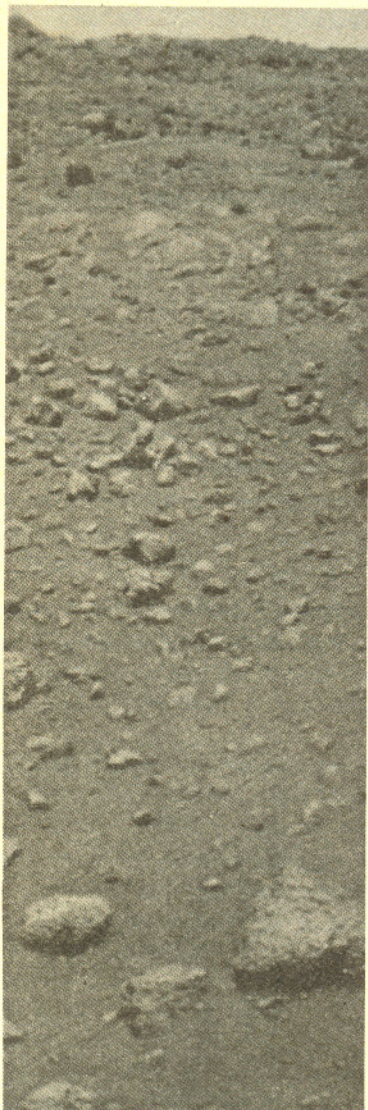
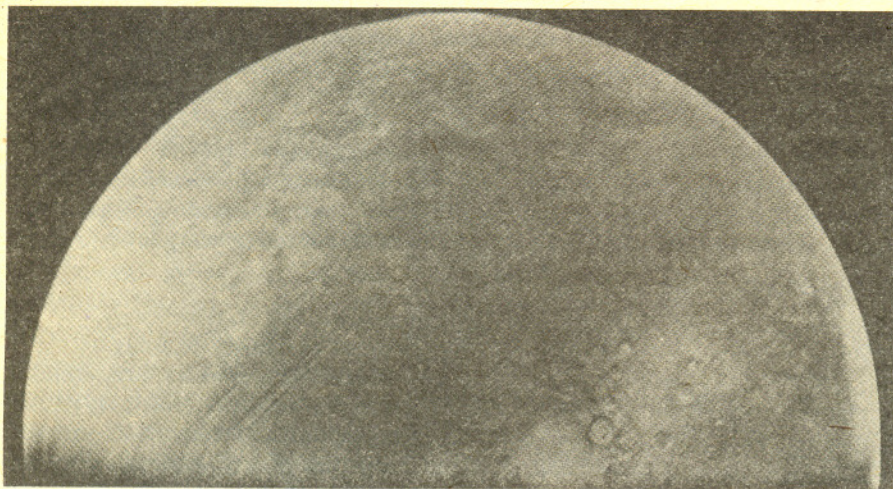


Atmosfera Wenus



Grunt wenusjański

MARS



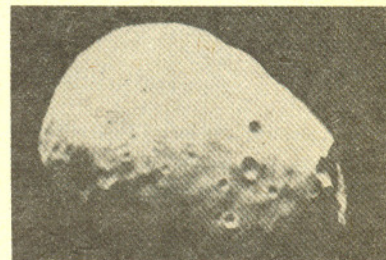
Na niebie łatwo go poznać po wyraźnym czerwonym blasku – dlatego został nazwany imieniem boga wojny. Stosunkowo silne spłaszczenie jego orbity zauważył Kepler i tak Mars przyczynił się do sformułowania słynnych praw ruchu planet. Za to później planeta stała się źródłem zadziwiającego masowego złudzenia: wszyscy obserwatorzy widzieli na powierzchni Marsa „kanały”, co stało się nawet przyczyną spekulacji o cywilizacji zamieszkującej planetę. O istnieniu życia na Marsie świadczyły też jakoby sezonowe zmiany zabarwienia gruntu interpretowane jako efekt cyklicznego rozwoju i zamierania roślinności. Właściwie dopiero dzięki obserwacjom przeprowadzonym z bliska przez sondy kosmiczne okazało

wielka półoś orbity	1,524 j.a.
mimośród	0,0934
nachylenie	1°850
promień równikowy	3 397 km
masa	0,107 masy \oplus
okres obrotu	1 ^d 026
okres obiegu	1,881 lat

się wyraźnie, że kanałów po prostu nie ma, planeta jest pustynna, a zmiany zabarwienia gruntu wynikają z przenoszenia przez wiatry wielkich ilości pyłu. Niemniej jednak w 1976 r. automatyczna aparatura dwóch sond (Viking 1 i 2), które osiadły na powierzchni Marsa, wykonała biochemiczne badania gruntu mające na celu poszukiwanie produktów przemiany materii w jego próbkach. Badania dały wynik negatywny.

Faktem pozostaje, że w przeszłości Mars był planetą bardziej urozmaiconą, mianowicie dzięki obecności wody. Świadcza o tym liczne koryta dawnych rzek. Przypuszcza się, że woda została wchłonięta przez skorupę planety pokruszoną wskutek bombardowania przez wielkie meteoryty. Na powierzchni Marsa woda jest obecnie skupiona (wraz z zestalonym CO_2) w czapach polarnych, a dowodami silnego bombardowania są liczne kraterzy uderzeniowe, obecnie już mocno zerodowane. Śladami dawnej aktywności są też wygasłe wulkany. Jeden z nich, Olympus Mons, jest prawdopodobnie najwyższą górą w całym Układzie Słonecznym. Wznosi się na 25 km ponad poziom okolicznego gruntu.

Dwa księżyce Marsa są bardzo trudne do zaobserwowania, gdyż giną w blasku samej planety (odkrył je Asaph Hall w 1877 r.). Fobos obiega Marsa tak nisko, że jego obieg trwa krócej niż marsyjska doba, wskutek czego wschodzi na zachodzie i zachodzi na wschodzie. Jest to jedyny taki przypadek w całym Układzie Słonecznym.



Fobos

Satellity

	promień orbity (km)	okres obiegu (dni)	rozmiary (km)
Fobos	9 378	0,319	26×21
Deimos	23 459	1,265	13

Grunt marsyjski

Drodzy Członkowie i Sympatycy Klubu!
Przypominamy, że co miesiąc przyznajemy nagrodę książkową dla autora najciekawiej opracowanego rozwiązania postawionych zagadnień.

Dzisiaj proponuję doświadczenia związane z pływaniem ciał. Uczono nas w szkole, że ciało pływa, jeżeli ciężar wypartej cieczy może zrównoważyć ciężar zanurzonego ciała. Jest to możliwe, kiedy gęstość ciała zanurzonego nie przewyższa gęstości cieczy. Chciałbym wyjść poza ten najprostszy warunek i zapytać, w jakiej pozycji ciało może stabilnie pływać? Wiadomo, że na przykład ołówek wrzucony do wody będzie pływał w pozycji poziomej, natomiast nie da się go przekonać, aby pływał pionowo. Inaczej jest z tzw. areometrem, przyrządem, który służy do wyznaczania gęstości cieczy. Ten pływa pionowo. Spróbujmy zbadać nieco dokładniej, od czego zależy zdolność ciała do stabilnego pływania w określonej pozycji. Do naszych badań wybierzemy sobie

Obiekt fizyczny

Będzie nim zwykły ołówek, najlepiej nowy (nie zatemperowany). Jeżeli chcemy, aby nasze doświadczenia były precyzyjne, należy go przed włożeniem do wody zaimpregnować, aby nie nasiąkał wodą. Zrobimy to zanurzając ołówek na kilka minut w gorący pokost lub olej. Po wyjęciu wytrzymamy go szmatką. Możemy teraz przystąpić do właściwych doświadczeń. Aby dać ołówkowi szansę pływania pionowo, będziemy go obciążali. Najwygodniejszy jest do tego drut miedziany (bez izolacji). Zaopatrzywszy się w drut i narzędzie do jego cięcia oraz naczynie z wodą, w którym ołówek może swobodnie pływać, przechodzimy do następnego etapu, którym jest

Badanie stabilności pływania

Bierzemy kawałek drutu o długości, powiedzmy, l i nawijamy go na ołówek tak, aby utworzył możliwie skupione obciążenie w dowolnie wybranej odległości d od końca ołówka (patrz rysunek 1). Całkowitą długość ołówka oznaczmy przez h . Wrzucamy teraz obciążony ołówek do wody. Jeżeli tonie, skracamy długość drutu l , poszukując takiej największej jego długości l_{max} , przy której ołówek jeszcze pływa. Jeżeli wiemy już, ile drutu możemy nawinąć nie topiąc ołówka, wykonujemy serię doświadczeń dla różnych długości drutu, na przykład: $0,9 l_{max}$, $0,8 l_{max}$ itd. Każde doświadczenie będzie polegało na przesuwaniu kłęбка drutu wzdłuż ołówka (czyli zmienianiu odległości d) i ustalaniu, w jakiej pozycji ołówek pływa. Wyniki zapisujemy w tabeli, na przykład dla $l_{max} = 30$ cm:

Długość l (cm)	Wynik doświadczenia	
	plywa pionowo	plywa poziomo
25	dla $d < 5$ cm lub $d > 13$ cm	dla 5 cm $< d < 13$ cm
10	nigdy	zawsze (dla każdego d)
itd.	itd.	itd.

Wyniki takich doświadczeń można przedstawić na wykresie (patrz rysunek 2).

Dysponując odpowiednią liczbą wyników będziemy mogli na płaszczyźnie wykresu wyróżnić obszary o różnym zachowaniu układu:

- 1) pływanie poziome,
- 2) pływanie pionowe,
- 3) tonięcie.

Taki wykres przypomina tak zwane wykresy fazowe w fizyce. Na przykład można przedstawiać stan skupienia wody na wykresie ciśnienia w zależności od temperatury (patrz rysunek 3). Można z niego na przykład odczytać, że przy ciśnieniu 1000 hPa woda krzepnie w temperaturze 0°C (przejście lód-ciecz) i wrze w temperaturze 100°C (przejście ciecz-para).

Wracając do naszych doświadczeń, jak zawsze należy notować wszystkie istotne dla doświadczenia informacje, na przykład grubość drutu, jego ciężar, ciężar i wymiary ołówka, długość wystającej z wody części ołówka pływającego pionowo itd.

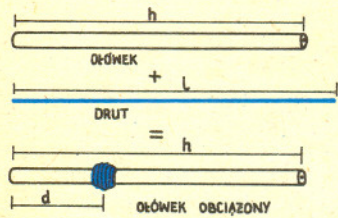
Oczywiście, podobne doświadczenia można wykonywać z innymi obiektami pływającymi. Dla najambitniejszych mam propozycję próby opisu teoretycznego otrzymanych wyników. A, jeszcze jedno: trzeba się strzec ołówków kopiowych – nie nadają się do doświadczeń w wodzie!

Powodzenia.

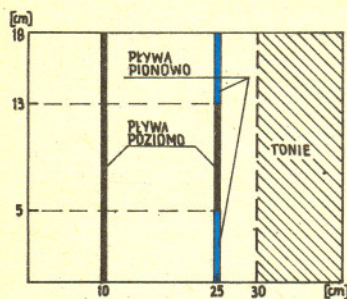
Redaguje doc. dr Jan GAJ

Z opisanym zjawiskiem fizycznym wiąże się problem matematyczny: jakie kształty mogą mieć ciała pływające jednakowo dobrze w każdej pozycji. Napiszemy o tym w jednym z kolejnych numerów.

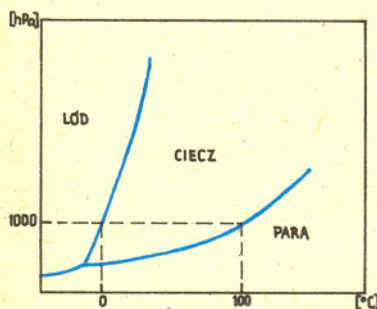
Redakcja



Rys. 1



Rys. 2

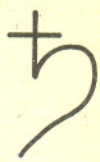


Rys. 3. Wykres fazowy wody.

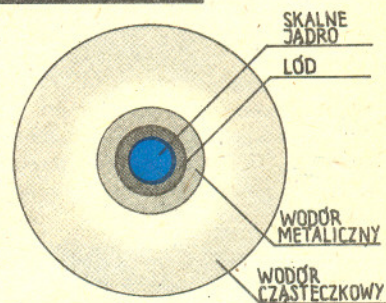
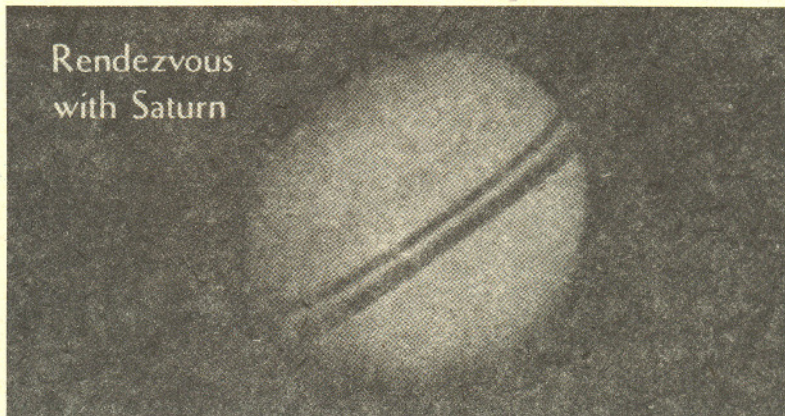
Listy prosimy przysyłać pod adresem:

Korespondencyjny Klub Fizyków,
Wydział Fizyki Uniwersytetu
Warszawskiego
ul. Hoża 69, 00-681 Warszawa.

SATURN



Odkrywcą pierścieni Saturna, Galileusz, nie wiedział, co właściwie widzi. Był przekonany, że odkrył planetę „potrójną”, tak bowiem mógł wyglądać Saturn z pierścieniami oglądany przez lunetę o nie najlepszej optyce. Prawdłowo przedstawił pierścienie dopiero Christiaan Huygens w 1658 r. W ostatnich latach okazało się, co prawda, że wszystkie planety olbrzymie mają pierścienie, ale u Saturna są one najbardziej rozbudowane, najgęstsze i demonstrują szereg zjawisk mechanicznych nigdzie więcej nie spotykanych. Można tu wymienić np. przerwy w pierścieniach odpowiadające orbitom, na których czas obiegu wokół planety byłby współmierny z czasem obiegu niektórych satelitów; przejawy tzw. ogniskowania grawitacyjnego cienkiego pierścienia przez dwa satelity poruszające się po orbitach: nieco ciaśniejszej i nieco obszerniejszej niż sam pierścień; nie wytłumaczone dotychczasowo we skręcenie jednego z cienkich pierścieni. Stwierdzono też, że po powierzchni pierścieni przesuwają się w tempie obrotu Saturna ciemne radialne smugi, wyraźniej związane z magnetosferą planety.

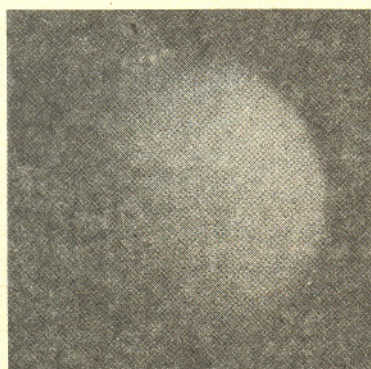


wielka pół orbity 9,575 j.a.
 mimośród 0,0527
 nachylenie 2°486
 promień równikowy 60 000 km
 masa 95,17 mas \oplus
 okres obrotu 0^d4375
 okres obiegu 29,630 lat

Wszystkie te fakty znane są dzięki obserwacjom wykonanym przez sondy: Pioneer 11 (IX 1979), Voyager 1 (XI 1980), Voyager 2 (VIII 1981). Sondy te ponadto przekazały obrazy wielu satelitów i odkryły kilka nowych drobnych. W układzie satelitów stwierdzono kilka ciekawostek. Np. Janus i Epimetheus poruszają się praktycznie po tej samej orbicie, ale zawsze antypodycznie. Drobny satelita Dione B znajduje się w jednym z trójkątnych punktów libracji układu Saturn-Dione, podobnie Telesto i Calypso obiegają Saturna będąc stale w trójkątnych punktach libracji układu Saturn-Tethys. Nadal nie znamy powierzchni największego satelity Saturna, Tytana, ponieważ przesłania ją szczelnie gęsta atmosfera, znana zresztą już od dawna na podstawie obserwacji naziemnych. Atmosfera ta składa się głównie z azotu i argonu, z drobniejszymi domieszkami metanu, amoniaku, wodoru i in. Na wysokości 50 km rozciąga się warstwa chmur z kropelek azotu, a ciśnienie przy powierzchni ocenia się na około 1,5 atm.

Sam Saturn, mimo wszystkich podobieństw fizycznych do Jowisza, jest globem znacznie spokojniejszym, dlatego jego wodorowo-metanowo-amoniakalna atmosfera jest bardziej jednolita i przypomina atmosferę Jowisza dopiero po sztucznym wzmocnieniu kolorów.

Satelity	pół orbity (mln km)	okres obiegu (dni)	rozmiary (km)
Atlas	0,138	0,602	60
1980S27	0,139	0,613	140×80
1980S26	0,142	0,627	110×70
Janus	0,151	0,695	220×60
Epimetheus	0,151	0,695	140×100
Mimas	0,186	0,942	390
Enceladus	0,238	1,369	510
Tethys	0,295	1,885	1 050
Telesto	0,295	1,885	50
Calypso	0,295	1,885	60
Dione	0,377	2,737	1 120
Dione B	0,377	2,737	60
Rhea	0,527	4,511	1 530
Tytan	1,222	15,910	5 120
Hyperion	1,483	21,281	410×220
Japetus	3,560	79,1	1 440
Phoebe	12,950	549,1	200



Tytan

DROBIAZGI

Ubiegły rok przyniósł w fizyce kilka kontrowersyjnych wyników opublikowanych w poważnych czasopismach naukowych. Wyników, które wzbudziły wiele emocji, by po krótkim czasie okazać się fałszywymi. Wspomnieć tu należy przede wszystkim o „zimnej syntezie jądrowej”. Być może podobny los spotka pracę uczonych japońskich H. Hayasaki i S. Takeuchiego, w której donoszą oni o obserwacji ubytku masy przez... wirujący żyroskop. Ubytek ten ma być proporcjonalny do prędkości kątowej i wynosić około $5 \cdot 10^{-9}$ początkowej masy w przypadku jednego obrotu na minutę. Co dziwniejsze, Hayasaka i Takeuchi twierdzą, że efekt zależy od kierunku i zwrotu prędkości kątowej: jest ekstremalny, gdy oś obrotu ma kierunek pionowy. Gdyby patrzeć na żyroskop z góry, to ubytek masy byłby maksymalny dla obrotów zgodnych z ruchem wskazówek zegara, a znikałby zupełnie przy obrotach przeciwnych. Społeczność naukowa zmęczona nieco pseudorewelacjami odnosi się sceptycznie do japońskiego doniesienia. Warto jednak pamiętać, że gdyby okazało się ono prawdziwe, musielibyśmy całkowicie zmienić poglądy na naturę oddziaływań grawitacyjnych.

Słowo „synchrotron” przez wiele lat było synonimem niezmiernie kosztownych urządzeń, których fizycy cząstek elementarnych używali do swych ezoterycznych doświadczeń. Wszystko wskazuje na to, że sytuacja ta ulegnie już wkrótce radykalnej zmianie. Od 1972 roku wiadomo, że niezwykle energetyczne promieniowanie elektromagnetyczne, emitowane przez cząstki rozpędzane w synchrotronach, może zostać użyte do produkcji układów scalonych wielokrotnie mniejszych, a więc i szybszych niż wytwarzane obecnie. Technologia ta, zwana litografią rentgenowską, wchodzi obecnie w fazę badań praktycznych. Przewiduje się w tej dziedzinie Japonia, gdzie buduje się siedem synchrotronów specjalnie przeznaczonych do tych celów. Przewidywania mówią, że rozwój elektroniki będzie wymagał konstrukcji około 175 synchrotronów w ciągu najbliższych kilkudziesięciu lat.

Fizyka to teoria i doświadczenie. Jednak poglądy na rolę odgrywaną przez każdy z tych składników bywają całkowicie sprzeczne. Artur Conan Doyle, autor *Przypadku Sherlocka Holmesa*, był zdania, że *Teoretyzowanie, zanim pozna się dane, jest podstawowym błędem. Nieświadomie zaczynamy naginać fakty, aby pasowały do teorii, zamiast zmieniać teorię, by pasowały do faktów.* Odmiennego zdania był jeden z pionierów ogólnej teorii względności, Artur Eddington: *Rozważnie jest nie ufać zbyt wiele wynikom doświadczalnym, dopóki nie zostaną one potwierdzone przez teorię.*

Istniejące sposoby rozwiązywania równań aerodynamiki nie są w stanie wytłumaczyć zasad lotu owadów. Symulacje komputerowe prowadzą do przewidywania siły ciągu ich skrzydeł kilkakrotnie mniejszego niż zmierzony doświadczalnie. Dla usprawiedliwienia aerodynamików można powiedzieć, że niektóre owady stosują niezwykle wyrafinowane metody lotu, np. stykają ze sobą skrzydełka w ich najwyższym położeniu. Ich rozłączenie wytwarza następnie chwilową próżnię pomiędzy nimi, co drastycznie zwiększa siłę ciągu.

Plazma bywa nazywana „czwartym stanem materii”. Zasluguje ona jednak raczej na miano „pierwszego stanu”, gdyż jest wszechobecna we Wszechświecie. Ponad 99% obserwowanej materii to właśnie plazma. Masa naszego Układu Słonecznego jest całkowicie zdominowana przez ogromną kulę plazmatyczną, jaką jest Słońce. Najbardziej zdumiewające jest to, że materia, którą określamy jako plazmę, występuje w formach, których gęstości różnią się aż o 30 rzędów wielkości.

Coraz więcej danych wskazuje na to, że używanie komputerów jest szkodliwe dla zdrowia. Nie chodzi jednak np. o wpływ promieniowania monitorów czy też o inne oddziaływanie specyficzne dla komputerów, ale o powszechne naruszenie zasad ergonomii przy ich stosowaniu. Rezultatem stają się wady postawy, bóle korzonkowe itp.

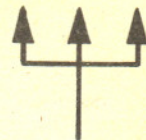
Naukowcy z laboratoriów IBM w Yorktown Heights (USA) opracowali metodę przesyłania sygnałów uniemożliwiającą jakikolwiek podsłuch. W metodzie tej informacja kodowana jest jako polaryzacja wiązki świetlnej tak słabej, że istotne stają się dla niej efekty kwantowe. W rezultacie zasady nieoznaczoności dowolna próba przechwycenia sygnału bez posługiwania się specjalnym kodem odbioru (do ustalenia przez porozumiewającą się stronę) powoduje zniszczenie informacji.

Wirusy, czyli samopowielające się programy, mogą być niebezpieczne dla komputerów. Wiedzą o tym wszyscy użytkownicy. Ale także komputery mogą być szkodliwe dla wirusów. No, oczywiście, nie komputerowych, ale prawdziwych, biologicznych. Od około dziesięciu lat prowadzone są badania nad lekami antywirusowymi wykorzystujące projektowanie komputerowe. Powodem, dla którego używa się do tych badań komputerów, jest konieczność uzyskania leku o wysokiej swoistości i precyzji działania: musi on przerywać namnażanie wirusów bez zahamowania cyklu rozwojowego komórki, której integralną częścią staje się wirus. Niestety, do tej pory nie udało się wykryć poszukiwanego specyfiku. Jednak wraz z rozwojem coraz szybszych komputerów szanse na końcowy sukces rosną.

Wiele wskazuje na to, że apokaliptyczne wizje miast zatopionych na skutek podniesienia się poziomu mórz, wywołanego przez efekt cieplarniany, są mocno przesadzone. Ostatnie badania w dziedzinie klimatologii pokazują, że najprawdopodobniej Ziemia jest lepszym homeostatem, niż sobie to dotychczas wyobrażano. Po pierwsze, wzrost temperatury wywoła wzmożone parowanie mórz, a więc i wzrost zachmurzenia. To z kolei może powstrzymać lub zwolnić wzrost temperatury. Na skutek zwiększenia wilgotności powietrza zwiększy się również prawdopodobnie szybkość tworzenia lodu w pobliżu biegunów. W końcowym efekcie polarne czapy lodowe mogą nawet nieznacznie wzrosnąć, powodując spadek poziomu mórz, ale tylko o około 1 mm.

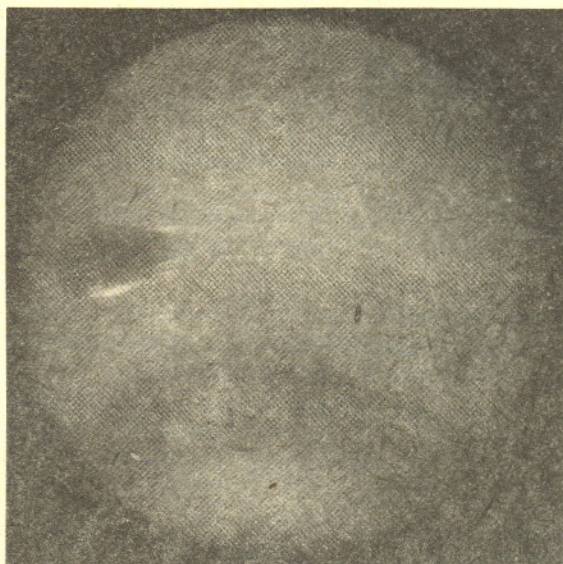
Choć może się to wydać dziwne, tzw. alternatywne sposoby generowania energii elektrycznej budzą czasem sprzeciw obrońców naturalnego środowiska. W Wielkiej Brytanii np. istnieje opozycja przeciw instalowaniu elektrowni wiatrowych, gdyż gigantyczne wiatraki niszczą piękno krajobrazu brytyjskich wzgórz. Podobne problemy stwarzają w cieplejszych krajach elektrownie słoneczne – aby generować znaczącą ilość energii, baterie słoneczne muszą zajmować ogromne powierzchnie. Ostatnio praktyczni Szwajcarzy znaleźli następujące rozwiązanie: umieszczają oni baterie wzdłuż swych wysokogórskich autostrad.

NEPTUN

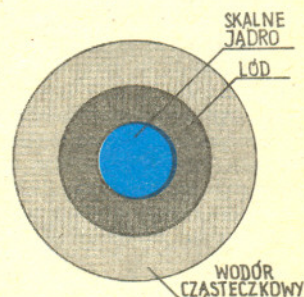


Najdalej położona planeta, do której dotarła sonda – Voyager 2 (w sierpniu 1989). Został odkryty w wyniku analizy zaburzeń ruchu Urana. Zaobserwował go Johann Galle w 1781 r. na podstawie obliczeń Urbaina Leverriera, aczkolwiek stosowne obliczenia wykonał rok wcześniej John C. Adams (poszły one jednak „do szuflady”). Było to w owym czasie niezwykle efektownym dowodem potęgi matematyki i mechaniki newtonowskiej.

Biorąc pod uwagę opisy poprzednich planet oczekiwaliśmy, że Neptun będzie globem całkiem martwym. Tymczasem jego atmosfera okazała się nadspodziewanie aktywna: mamy tu wyraźne pasy równoleżnikowe, wielkie wiry i liczne pasma chmur zamrożonego metanu. Voyager 2 odkrył też kilka drobnych satelitów i układ słabych pierścieni wokół planety (aczkolwiek nie możemy podać pełnej tabeli satelitów – wyniki obserwacji są jeszcze w stadium opracowywania). Widać, że pod tym względem wyniki obserwacji wszystkich planet olbrzymich są „nużące” podobne. Ogromne bogactwo struktur geologicznych ukazała sonda na powierzchni Trytona. Zobaczyliśmy liczne kraterki uderzeniowe, uskoki, zamrożone jeziora oraz czynne wulkany (gejzery?) strzelające ciekłym azotem.



wielka półoś orbity	30,206 j.a.
mimośród	0,0040
nachylenie	1°,773
promień równikowy	24 300 km
masa	17,24 mas \oplus
okres obrotu	0 ^d ,768
okres obiegu	166,02 lat



Tryton

	Satelity		
	półoś orbity (mln km)	okres obiegu (dni)	średnica (km)
Tryton	0,355	-5,88	5 000
Nereida	5,510	360	400
	plus kilka drobnych o średnicy < 100 km		

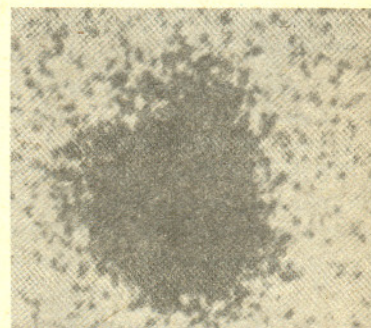
PLUTON

Metoda odkrywania nowych planet na podstawie analizy ruchu planet znanych pozornie sprawdziła się po raz drugi – w 1930 r. Clyde Tombaugh znalazł na zdjęciach Plutona na podstawie obliczeń wykonanych przez Percival Lowella i William Pickeringa. Ale ... położenie obserwowane nowej planety nie zgadzało się z obliczonym, wyznaczona później masa nie zgadzała się z obliczoną, itd. W rezultacie podejrzewa się, że odkrycie było jednak przypadkowe.

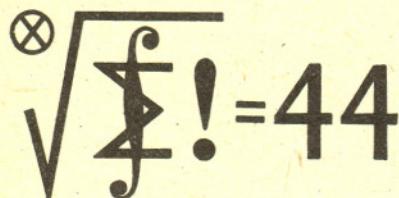
wielka półoś orbity	39,91 j.a.
mimośród	0,2567
nachylenie	17°,136
promień równikowy	~2 000 km
masa	~0,003 masy \oplus
okres obrotu	-6 ^d ,4
okres obiegu	252,1 lat

Osobliwością Plutona jest duży mimośród orbity. W wyniku tego bywa on niekiedy bliżej Słońca niż Neptun – taki okres mamy właśnie obecnie. O jego cechach fizycznych do dziś wiele nie wiadomo, z trudem udało się ocenić jego rozmiary.

Okres obrotu określono na podstawie zmian jasności – obrót planety okazał się synchroniczny z obiegiem Charona (promień ~1 000 km, masa ~0,1 masy Plutona, promień orbity ~20 000 km), zatem w tym przypadku planeta jest do swego satelity zwrócona stale jedną stroną. Jest to jedyny taki przypadek w Układzie Słonecznym. Obserwacje spektroskopowe wydają się dowodzić, że powierzchnia planety pokryta jest metanowym lodem, wyżej zaś rozciąga się rzadka metanowa atmosfera. Istnienie atmosfery przypisuje się właśnie wyjątkowo obecnie małej odległości od Słońca.



P

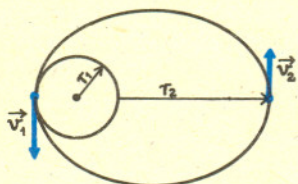


Rozwiązanie zadania F 296.

Załóżmy, że promień pierwszej orbity wynosi r_1 . Wówczas prędkość rakiety dana jest wzorem

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r_1}},$$

gdzie M jest masą Ziemi. W pewnym momencie ustawiamy rakietę równoległe do kierunku jej prędkości i uruchamiamy silnik. W rezultacie jego działania prędkość rakiety osiągnie wartość $v_1 = v + \Delta v_1$, natomiast odległość od Ziemi nie ulegnie zmianie. Orbita stanie się teraz elipsą o ognisku w środku Ziemi, przy czym (jak wynika z zasady zachowania energii) punkt, w którym znajduje się rakietka po ustaniu działania silników, będzie perigeum nowej orbity. Po upływie pewnego czasu rakietka przemieści się do apogeum odległego od środka Ziemi o r_2 .



Prędkość w apogeum v_2 będzie, oczywiście, mniejsza niż w perigeum. Wystarczy teraz ponownie uruchomić silnik i przyspieszyć rakietę do prędkości odpowiadającej ruchowi po orbicie kołowej o promieniu r_2 : $v' = \sqrt{\frac{GM}{r_2}}$. Obliczymy teraz zarówno r_2 , jak i v_2 . Z zasad zachowania energii i momentu pędu (obowiązujących, gdy nie działają silniki) dostaniemy następujące równości:

$$-\frac{GM}{r_1} + \frac{v^2}{2} = -\frac{GM}{r_2} + \frac{v_2^2}{2},$$

$$r_1 v_1 = r_2 v_2.$$

Znajdujemy stąd

$$r_2 = \frac{r_1^2 v_1^2}{2GM - r_1 v_1^2},$$

$$v_2 = \frac{2GM - r_1 v_1^2}{r_1 v_1} = \sqrt{\frac{GM(2GM - r_1 v_1^2)}{r_1 v_1}} - \Delta v_2,$$

gdzie przez $\Delta v_2 = v' - v_2$ oznaczyliśmy przyrost prędkości konieczny do osiągnięcia orbity kołowej w apogeum.

Szczegółowy regulamin Klubu 44 zamieściliśmy w *Delcie* 7/1990, a jego skrót – we wszystkich numerach, w których są zadania ligowe (tj. w tym roku z wyjątkiem numerów 11 i 12).

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 8/1990

Przypominamy treść zadań:

207. Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają równość

$$\frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy} + \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz} + \frac{z^2 + x^2 - y^2}{2zx} = 1.$$

Dowiedz, że dwa spośród ułamków będących składnikami lewej strony są równe 1 (a pozostały -1).

208. Rozważamy ciąg funkcji (f_n) określonych na przedziale $(0; \pi)$ wzorem: $f_1(x) = \sin x$, $f_{n+1}(x) = (\sin x)^{f_n(x)}$. Dla każdego n naturalnego wyznaczyc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$.

207. Zachodzi łatwa do sprawdzenia tożsamość

$$\frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy} + \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz} + \frac{z^2 + x^2 - y^2}{2zx} - 1 = \frac{(-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z)}{2xyz}$$

Skoro lewa strona ma być równa zero, jeden z czynników prawej strony musi być zerem. Jeśli na przykład $x + y - z = 0$, to

$$\frac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz} = \frac{(y - z)^2 - x^2 + 2y^2}{2yz} = 1$$

i podobnie

$$\frac{z^2 + x^2 - y^2}{2zx} = 1.$$

Stąd teza.

208. Zamiast ciągu (f_n) rozważmy ciąg funkcji (g_n) określony wzorem rekurencyjnym

(1) $g_1(x) = x, \quad g_{n+1}(x) = x^{g_n(x)}$ dla $x > 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$

Ciągi (f_n) i (g_n) są związane zależnością

(2) $f_n(x) = g_n(\sin x)$ dla $x \in (0; \pi), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$

wynikającą przez natychmiastową indukcję wprost z definicji tych ciągów.

Przyjmijmy dodatkowo: $g_0(x) = 1$; oczywiście, wzór (1) jest wówczas słuszny i dla $n = 0$. Wykażemy przez indukcję, że

(3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g_{2k}(x) = 1$ dla $k = 0, 1, 2, \dots$

Dla $k = 0$ nie ma czego dowodzić. Przyjmijmy, że relacja (3) zachodzi dla pewnego k ; mamy wykazać jej słuszność z k zwiększonym o 1. Z założenia indukcyjnego $g_{2k}(x)$ dąży do 1 przy x dążącym z prawej strony do zera, a wobec tego $1/2 < g_{2k}(x) < 2$ dla x dostatecznie bliskich 0. Stąd, przez dwukrotne zastosowanie wzoru (1),

(4) $x^{x^{1/2}} < g_{2k+2}(x) < x^{x^2}$ dla x bliskich 0.

Dla każdego wykładnika $p > 0$ mamy, zgodnie z regułą de l'Hospitala,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-p}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{-1}}{-px^{-p-1}} = -\frac{1}{p} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^p = 0,$$

a stąd

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{x^p} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \exp(x^p \ln x) = 1.$$

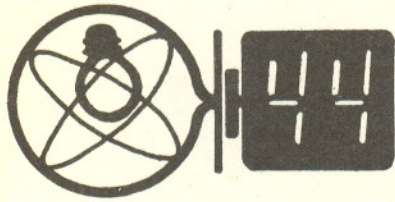
Zatem oba skrajne człony nierówności podwójnej (4) dążą do 1 (przy $x \rightarrow 0^+$), więc i środkowy musi dążyć do 1. To kończy indukcyjny dowód relacji (3).

Z (3) wynika natychmiast:

(5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g_{2k+1}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{g_{2k}(x)} = 0$ dla $k = 0, 1, 2, \dots$

Wobec zależności (2) takie same są też wartości granic prawostronnych w zerze funkcji f_n :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n \text{ parzystych,} \\ 0 & \text{dla } n \text{ nieparzystych.} \end{cases}$$



Przypominamy treść zadań:

105. Statek o okresie własnym kołysania poprzecznym τ płynie z prędkością \vec{v} przez fale oceaniczne o długości d , poruszające się z prędkością \vec{u} . Przy spełnieniu jakich warunków wystąpią cztery różne „wrażliwe kursy” statku, dla których działanie fal na statek będzie wzbudzało jego drgania własne? Kurs statku określony jest przez wektor \vec{v} .

106. Jednorodny, wiotki, cienki, obdarzony masą sznurek (lub łańcuszek) o długości l , zawieszony na jednym końcu, może wykonywać drgania poprzeczne o różnych częstotliwościach, którym odpowiada różna liczba węzłów (jeden z nich występuje zawsze w punkcie zawieszenia). Częstotliwości takich małych drgań są proporcjonalne do $\sqrt{g/l}$ (g – przyspieszenie ziemskie). Obliczyć – w sposób numeryczny – pierwsze cztery częstotliwości małych drgań tego sznurka, przyjmując, że poszczególne elementy sznurka drgają harmonicznym z tą samą częstotliwością, lecz z różnymi amplitudami.

105. Prędkość statku względem fal jest równa $\vec{v} - \vec{u}$. Prostopadła do fal składowa tej prędkości wynosi

$$v \cos \alpha - u,$$

gdzie α jest kątem między wektorami \vec{u} i \vec{v} .

Spotkania statku z kolejnymi grzbietami fal będą następowały w odstępach czasu

$$t = \frac{d}{v \cos \alpha - u}.$$

Aby mogło przy tym następować wzbudzenie własnych drgań statku o okresie T , powinien zachodzić warunek $t = \pm T$, który – po wprowadzeniu oznaczenia na okres fal $\tau = \frac{d}{u}$ – przyjmuje postać

$$(*) \quad \cos \alpha = \frac{u}{v} \left(1 \pm \frac{\tau}{T} \right).$$

„Wrażliwe kursy” odpowiadają kątom α spełniającym równanie (*). Aby mogło mieć ono cztery pierwiastki α , musi zachodzić

$$\left| \frac{u}{v} \left(1 \pm \frac{\tau}{T} \right) \right| < 1.$$

Wobec $\tau > 0, T > 0$ oznacza to

$$1 + \frac{\tau}{T} < \frac{v}{u},$$

z czego wynika

$$v > u + \frac{d}{T}.$$

Jeżeli mają być wzbudzone drgania poprzeczne, obliczone z równania (*) kąty nie powinny mieć wartości zbyt bliskich 0° oraz 180° . Ponadto długość fal d nie powinna być większa od rozmiarów statku.



106. Dla uproszczenia przyjmujemy, że sznurek składa się z n punktów materialnych o masie $\frac{m}{n}$ odległych od siebie o $\frac{l}{n}$. Oznaczmy wychylenia kolejnych mas jako $x_1 \dots x_n$, poczynając od dolnego końca. Siła napięcia sznurka pomiędzy i -tym a $(i+1)$ -szym punktem materialnym ma (w przybliżeniu małego odchylenia od pionu) wartość $\frac{mgi}{n}$, zaś jej pozioma składowa wynosi

$$(1) \quad \frac{mgi}{n} \frac{x_{i+1} - x_i}{l/n} = \frac{mgi}{l} (x_{i+1} - x_i).$$

Podstawiając $i = 1$ możemy przyrównać to wyrażenie do iloczynu masy $\frac{m}{n}$ i przyspieszenia dolnego punktu $a_1 = -\omega^2 x_1$. Po przekształceniach otrzymujemy

$$(2) \quad x_2 = \left(1 - \frac{A}{n} \right) x_1, \quad \text{gdzie } A = \frac{\omega^2 l}{g}.$$

Na każdy z następných punktów materialnych działają dwie siły określone równaniem (1) – górna i dolna. Odejmujemy je

$$\frac{mgi(x_{i+1} - x_i)}{l} - \frac{mg(i-1)(x_i - x_{i-1})}{l}$$

i przyrównując do $\frac{m}{n}(-\omega^2 x_i)$ otrzymujemy jak poprzednio

$$(3) \quad x_{i+1} = \frac{1}{i} \left(x_i \left(2i - 1 - \frac{A}{n} \right) - x_{i-1}(i-1) \right).$$

W równaniach (2) i (3) możemy (skracać po obu stronach zależność od czasu daną czynnikiem $\cos \omega t$) uważać, że x_i są amplitudami drgań (z dopuszczeniem znaku minus, jeśli faza jest przeciwna). Schemat obliczeń jest następujący: wybrawszy na chybił trafił A podstawiamy za amplitudę dolnego końca $x_1 = 1$, obliczamy x_2 z równania (2), a następnie kolejno $x_3 \dots x_{n+1}$ z równania (3). Prawidłowej wartości A odpowiada $x_{n+1} = 0$, tzn. nieruchomy górny koniec. W razie otrzymania $x_{n+1} \neq 0$ należy skorygować A i powtórzyć rachunek od początku. Aby zorientować się z grubszą w wielkości i znaku niezbędnej poprawki, a także aby stwierdzić, ile węzłów występuje w rozpatrywanym drganiu, dobrze jest przedstawić x_i graficznie. Obliczenia mogą być wykonane za pomocą komputera lub kalkulatora. Wyniki na marginesie.

Ponieważ $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{A}}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$, więc żądany w treści zadania bezwymiarowy współczynnik jest równy $\frac{\sqrt{A}}{2\pi}$.

Wykonując pomiary częstotliwości pierwszych dwóch wahań łańcuszka metalowego o długości około 30 cm, otrzymaliśmy wyniki zgodne z obliczonymi wartościami A , z błędem nie przekraczającym 5%.

I drganie	$n = 20$	$A = 1,411$
	$n = 50$	$A = 1,432$
	$n = 100$	$A = 1,439$
	$n = 200$	$A = 1,442$
II drganie	$n = 50$	$A = 7,54$
	$n = 100$	$A = 7,58$
	$n = 200$	$A = 7,60$
	III drganie	$n = 50$
$n = 100$		$A = 18,63$
$n = 200$		$A = 18,68$
IV drganie		$n = 100$
	$n = 200$	$A = 34,68$
	$n = 500$	$A = 34,73$