

ISSN 0012-145X Nr 314/593...



KAŻDY MOŻE BYĆ KOLPORTEREM !!!

Delta tańsza o 25 %

Kupując 150 egzemplarzy *Delta* płacisz tylko 1.500,- zł za numer. Przesyłając pod adresem redakcji dowód wpłaty wielokrotności sumy 225 tysięcy złotych otrzymasz tyleż paczek po 150 egzemplarzy najbliższego numeru *Delta*.

Nasze konto:

PBK VIII OM W-wa 370028-4170

Uniwersytet Warszawski, redakcja miesięcznika *Delta*

„Delta”  
matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego, Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
Towarzystwa Astronomicznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Edukacji Narodowej

Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga  
dr Lidia Goettig – s-ca red. nac.  
mgr Maria Kapuścińska  
mgr Krystyna Kordos – sekr. red.  
dr hab. Marek Kordos – red. nac.  
dr Paweł Krawczyk  
dr Tomasz Kwast  
mgr Anna Rudnik  
dr Jerzy Ryll  
Katarzyna Słomka  
mgr Joanna Udałoka

Ilustrowała Maria Brykańska-Karlowska

Adres Redakcji

Centrum Informatyczne UW  
Krakowskie Przedmieście 26/28  
00-927 Warszawa  
tel. 20-03-81 wew. 841

Wydawca:

Uniwersytet Warszawski  
Krakowskie Przedmieście 26/28  
00-927 Warszawa

Nakład 18 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.,  
2,50 ark. druk.,  
papier offsetowy V kl. 70 g.  
Wydrukowano  
w Zakładach Graficznych  
RSW „Prasa-Książka-Ruch”  
w Warszawie, ul. Srebrna 16

Skład systemem TeX  
wykonała redakcja.

## SPIS TREŚCI

### NUMERU 11(198)

Od twierdzenia o antypodach  
do twierdzenia Brouwera  
*dr Krzysztof Ciesielski*  
*dr Zdzisław Pogoda* str. 1

O łączności międzygwiazdowej  
– praktycznie  
*prof. dr Mieczysław Subotowicz* str. 4

Zadania str. 5

Fotony w fizyce wysokich  
energii  
*dr Maria Krawczyk* str. 6

Mała Delta str. 8

Jak obliczyć momenty  
bezwładności bez całkowania  
*Radosław Szmytkowski* str.10

Patrz w niebo str.11

Korespondencyjny Klub  
Fizyków str.12

Kącik prac uczniowskich str.13

Klub 44 str.14

Drobizgi str.16

Wyznaczanie liczby rodzajów  
neutrino w LEP-ie  
*dr Maciej Górski* str.17

#### Komitet Redakcyjny

dr Maciej Bryński  
dr Bogdan Cichoński  
dr Antoni L. Dawidowicz  
dr Alicja Derkowska  
doc.dr Jan A. Gaj  
doc.dr Bolesław Gleichgewicht  
prof.dr Tomasz Hofmokr – v-przewodniczący  
doc.dr Tadeusz Jarszubowski  
doc.dr Marcin Kubiak  
mgr Andrzej Makowski  
dr Zbigniew Plochocki  
dr Jan Rempala  
prof.dr Konrad Rudnicki  
prof.dr Grzegorz Sitarski  
prof.dr Józef I. Smak  
prof.dr Kazimierz Stępień  
prof.dr Mieczysław Subotowicz  
doc.dr Andrzej Szymacha  
doc.dr Aniela Wołska  
prof.dr Andrzej Woszczyk  
prof.dr Wojciech Żakowski –  
przewodniczący

#### WARUNKI PRENUMERATY

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na I kwartał 1991 r. wynosi 5 700,- zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
  - oddziały RSW właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora
  - odbioru zamówionych egzemplarzy dokonuje prenumerator w wyznaczonych punktach sprzedaży lub w inny, uzgodniony sposób,
  - urzędy pocztowe i listonosze – od prenumeratorów z terenów wiejskich lub innych miejscowości, w których nie ma oddziałów RSW, a w miastach tylko od osób niepełnosprawnych – poczta zapewnia dostawę zamówionych egzemplarzy pod wskazany adres pod warunkiem uiszczenia dodatkowej opłaty za każdy doręczany egzemplarz – opłata wynosi 250,- zł od egzemplarza,
  - Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział W-wa 370044-1195-139-11 – tylko od prenumeratorów zlecających dostawę za granicę.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
  - na kraj – do 20 XI na I kwartał roku następnego  
do 20 II na II kwartał  
do 20 V na III kwartał  
do 20 VIII na IV kwartał
  - na zagranicę – do 31 X na I kwartał  
oraz do 1 dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarsa zł 2 000,-

W następnym numerze:

Planety Układu Słonecznego  
– tablice



# Od twierdzenia o antypodach do twierdzenia Brouwera

dr Krzysztof CIESIELSKI, dr Zdzisław POGODA

Nie raz i nie dwa denerwujemy się czekając na przystanku tramwajowym; zwłaszcza gdy czekamy długo, a w odpowiednim kierunku kursują dwie lub trzy linie. A gdy w końcu tramwaj przyjedzie, to zaraz za nim pojawi się ten drugi, a może i trzeci.

W matematyce można zaobserwować podobne zjawisko. Niekiedy mija wiele czasu, zanim uczeni uporają się z jakimś problemem, ale za to dzięki uzyskanemu wynikowi można bardzo łatwo otrzymać wiele innych konsekwencji. Zdarza się także, że pewne zasadnicze twierdzenia w prosty sposób wynikają z siebie nawzajem. W efekcie w podręcznikach występują one prawie zawsze obok siebie.

Jednym z najsympliczniejszych przykładów dotyczących opisanego zjawiska jest niezwykle ważne twierdzenie o punkcie stałym, udowodnione w 1910 roku przez Holendra Luitsena Brouwera, łączone z reguły z twierdzeniem o retrakcie. Przed sformułowaniem tych twierdzeń należy jednak podać kilka definicji.

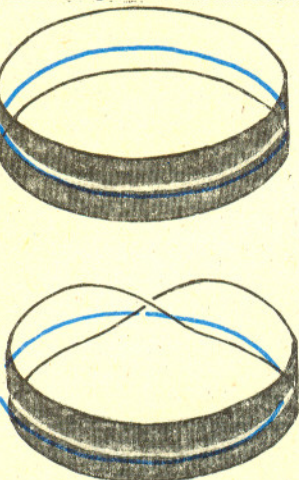
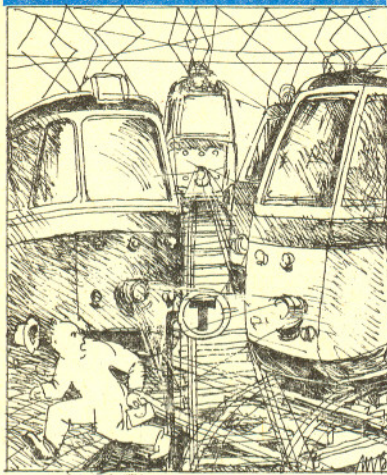
Rozważać będziemy przestrzeń  $\mathbb{R}^n$ , czyli zbiór  $\{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$ . Przez  $\|x\|$  oznaczamy normę punktu  $x \in \mathbb{R}^n$  (czyli odległość punktu od zera). Kulą jednostkową ( $n$ -wymiarową) w tej przestrzeni nazywamy zbiór  $K^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$ , sferą  $n$ -wymiarową zaś zbiór  $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ . Zarówno kula, jak i sfera, mają środek w początku układu, w punkcie  $0 = (0, \dots, 0)$ . Oczywiście, brzegiem kuli  $n$ -wymiarowej jest sfera  $(n-1)$ -wymiarowa. Czytelnik, który czuje niechęć do przestrzeni o wyższych wymiarach, może skupić swoją uwagę na wymiarach 2 i 3. Tu kula trójwymiarowa to zwykła kula, jej brzeg to sfera dwuwymiarowa, czyli zwyczajna sfera. Kula dwuwymiarowa to koło, jej brzeg to sfera jednowymiarowa, czyli okrąg.

Potrzebne nam jeszcze będzie pojęcie retraktu (od łacińskiego słowa „retraho” – odciągać, zaciągać, wlec). Zbiór  $A$  nazywamy retraktem zbioru  $B$  (zawierającego  $A$ ), jeśli istnieje funkcja ciągła  $f : B \rightarrow A$ , na zbiorze  $A$  identycznościowa (zaznaczmy, że ciągłość polega, intuicyjnie, na przyporządkowaniu bliskim argumentom bliskich wartości). Funkcję taką nazywamy retrakcją. Na przykład, zbiór  $[0, \infty)$  jest retraktem  $\mathbb{R}$  (odpowiednią retrakcją jest funkcja: wartość bezwzględna), a zbiór  $\{0, 1\}$  nie jest retraktem odcinka  $[0, 1]$  (chcąc stworzyć retrakcję musielibyśmy rozzerwać wykres, a więc funkcja nie byłaby ciągła – formalny dowód wymaga wykorzystania twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich). Kolejny przykład można obejrzeć na rysunku 1.

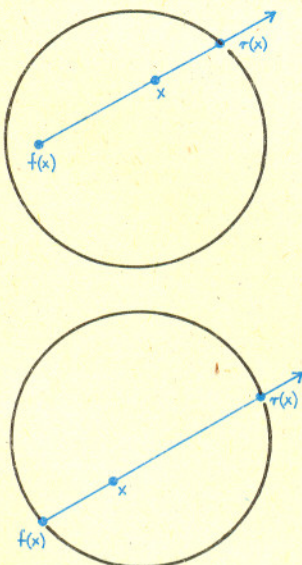
Możemy przejść teraz do obiecanych rezultatów. Twierdzenie Brouwera mówi, że dowolna funkcja ciągła  $f : K^n \rightarrow K^n$  ma punkt stały, tzn. taki punkt  $x$ , że  $f(x) = x$ . Innymi słowy, jeśli będziemy kulę wyginać, ścisnąć, ciągnąć (nie rozrywając jej), byleby nie wyjść poza nią, zawsze przynajmniej jeden punkt pozostanie tam, gdzie był. Twierdzenie o retrakcie stwierdza natomiast, że sfera  $(n-1)$ -wymiarowa nie jest retraktem kuli  $n$ -wymiarowej, czyli że kuli nie da się w sposób ciągły przekształcić na jej brzeg, zostawiając wszystkie punkty brzegu na swoim miejscu. Dowody tych faktów nie są łatwe, przeprowadzenie ich wymaga użycia pokazanego aparatu matematycznego. Gdy jednak ma się jedno z tych twierdzeń, błyskawicznie można otrzymać i drugie. Wykażemy to.

Przypuśćmy, że istnieje retrakcja  $r : K^n \rightarrow S^{n-1}$ . Zdefiniujemy  $f : K^n \rightarrow S^{n-1} \subset K^n$  wzorem:  $f(x) = -r(x)$ . Funkcja ta jest ciągła i nie ma punktu stałego; istotnie, punkt stały odwzorowania  $f$  musiałby należeć do  $S^{n-1}$ , a tu  $f(x) = -x$ , bo  $r$  jest na  $S^{n-1}$  równa identyczności. Jedynym punktem, dla którego  $x = -x$ , jest  $0$ , które do sfery nie należy. Wykazaliśmy, że z twierdzenia Brouwera wynika twierdzenie o retrakcie.

Na odwrót: przypuśćmy, że istnieje funkcja ciągła  $f : K^n \rightarrow K^n$ , taka że  $f(x) \neq x$  dla dowolnego  $x$ . Utwórzmy półprostą, rozpoczynającą się w punkcie  $f(x)$  i przechodzącą przez  $x$ ; punkty te są różne, więc półprosta jest wyznaczona jednoznacznie. Ponieważ  $f(x)$  należy do  $K^n$ , półprosta ma punkt wspólny ze sferą (rys. 2); ten punkt oznaczmy przez  $r(x)$ . Może się zdarzyć, że półprosta ma ze sferą dwa wspólne punkty; taka sytuacja zaistnieje tylko wtedy, gdy  $f(x)$  należy do sfery i wówczas  $r(x)$  definiujemy jako ten drugi punkt. Skonstruowaliśmy w ten sposób funkcję  $r : K^n \rightarrow S^{n-1}$ . Opierając się na konstrukcji można łatwo wykazać, że funkcja  $r$  jest ciągła i że punktom ze sfery przyporządkowuje je same. Jest więc ona retrakcją kuli na sferę, co jest niemożliwe.



Rys. 1. Wyróżniony okrąg jest retraktem paska papieru sklejanego zarówno „normalnie” (wałca bez podstaw), jak i sklejanego po przekręceniu jednego końca o  $180^\circ$  (wstęgi Möbiusa).



Rys. 2



Kolejnym twierdzeniem, które „chodzi w parze” z innym, jest twierdzenie Borsuka-Ulana o antypodach, wykazane przez Karola Borsuka i Stanisława Ulana w 1933 roku. Oba twierdzenia, tzn. twierdzenie o antypodach i twierdzenie Brouwera, mają dwie ważne cechy najpiękniejszych twierdzeń matematyki: są bardzo proste w sformułowaniu i niebanalne w dowodzie. Nadmienimy, że o obu tych twierdzeniach w *Delcie* już była mowa; było to jednak bardzo dawno, w czasach, gdy niektórzy z obecnych autorów *Delty* rozpoczęli swoją edukację w szkołach podstawowych.

Podajmy więc (przypomnijmy) tak zareklamowane twierdzenie. Mówi ono, że dla dowolnej funkcji ciągłej  $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  istnieją dwa punkty antypodyczne (tzn. leżące dokładnie naprzeciwko siebie), w których funkcja przyjmuje te same wartości; inaczej, istnieje  $x \in S^n$  takie, że  $f(-x) = f(x)$ . Można to sobie wyobrazić w ten sposób, że mamy balonik w kształcie kuli, z którego wypuszczamy powietrze i następnie go idealnie spłaszczamy. Zawsze znajdują się wtedy punkty, które uprzednio były na przeciwnych biegunach balonika, a po spłaszczeniu skleją się ze sobą.

Twierdzenie to jest „stowarzyszone” z twierdzeniem o odwzorowaniu antypodalnym. Ono zaś powiada, że jeśli  $m < n$ , to nie istnieje funkcja ciągła  $f: S^n \rightarrow S^m$ , antypodalna (tzn. zachowująca własność „leżenia naprzeciwko siebie”, czyli taka, że  $f(-x) = -f(x)$  dla wszystkich  $x$ ). Inaczej, jeśli przekształcamy w sposób ciągły sferę np. dwuwymiarową na okrąg, to zawsze znajdują się dwa punkty, które pierwotnie leżały naprzeciwko siebie, a po przekształceniu tej własności mieć nie będą.

I tu dowód równoważności nie jest zbyt trudny. Przypuśćmy najpierw, że pewna funkcja ciągła  $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ma własność  $f(x) \neq f(-x)$  dla wszystkich  $x$ . Określmy  $g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$ . Mianownik tego wyrażenia jest dla wszystkich  $x \in S^n$  liczbą różną od 0, wyrażenie więc ma sens. Wartości  $g$  należą do  $S^{n-1}$ , bo należą do  $\mathbb{R}^n$  i dla wszystkich  $x$  mamy  $\|g(x)\| = \frac{\|f(x) - f(-x)\|}{\|f(x) - f(-x)\|} = 1$  (gdyż jedna z podstawowych własności normy mówi, że  $\|\lambda y\| = |\lambda| \|y\|$  dla  $\lambda \in \mathbb{R}$  i  $y \in \mathbb{R}^n$ ). Ponadto  $g$  jest funkcją ciągłą (bo wiadomo, że norma jest funkcją ciągłą) i  $g(-x) = -g(x)$  dla wszystkich  $x$ , co przeczy twierdzeniu o odwzorowaniu antypodalnym.

Na odwrót: przypuśćmy, że istnieje  $f: S^n \rightarrow S^m$  ciągła, taka, że  $f(-x) = -f(x)$  dla wszystkich  $x$ . Zbiór  $S^m$  jest podzbiorem  $\mathbb{R}^{m+1}$ , a zatem także podzbiorem  $\mathbb{R}^n$  (bo  $m+1 \leq n$ , a gdy  $m+1 < n$ , możemy na ostatnich współrzędnych dopisać zera – np. okrąg, leżący na płaszczyźnie, możemy traktować jako podzbiór przestrzeni trójwymiarowej). Ale wobec tego  $f(x) \neq f(-x)$  dla wszystkich  $x$  z dziedziny, bo gdyby dla pewnego  $x$  było prawdą, że  $f(x) = f(-x)$ , to z założenia  $f(-x) = -f(x)$ , czyli  $f(x) = -f(x)$  i  $f(x) = 0$ , co jest niemożliwe, gdyż  $f(x)$  jest elementem  $S^m$ , czyli należy do sfery o środku w zerze. A więc i te dwa twierdzenia łatwo wynikają z siebie nawzajem. Trzeba tylko do któregoś z nich dotrzeć...

Informacje o tym, że te dwie pary twierdzeń są równoważne, znajdują się w prawie wszystkich podręcznikach topologii, wspominających o tych faktach. Są tam także i inne, bardzo ciekawe wnioski z podanych wyżej wyników. Naszym głównym celem jest natomiast zapoznanie Czytelników z pewnym zjawiskiem, które w podręcznikach znaleźć jest znacznie trudniej. Okazuje się bowiem, że z twierdzenia Borsuka-Ulana można bardzo szybko otrzymać twierdzenie Brouwera! Co więcej, dowód tego wcale nie jest trudny. W chwili obecnej jesteśmy do niego odpowiednio przygotowani i możemy się tym zająć.

Najpierw udowodnimy lemat.

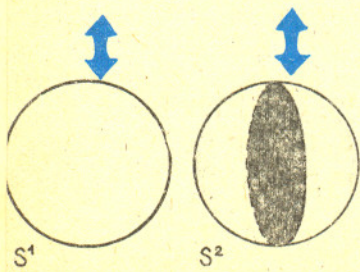
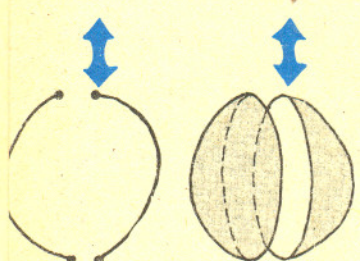
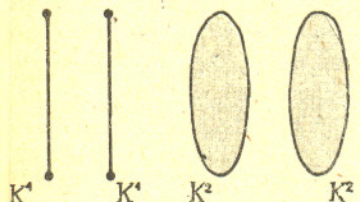
**Lemat.** *Jeżeli  $f: K^n \rightarrow S^{n-1}$  jest funkcją ciągłą, to istnieje takie  $x \in S^{n-1}$ , że  $f(x) = f(-x)$ .*

Lemat ten mówi, określając to bardziej poglądowo, że jeśli funkcja ciągła przeprowadza kulę w jej brzeg, to musi ona „skleić” dwa punkty leżące naprzeciwko siebie na sferze. Wykażemy go za pomocą twierdzenia o antypodach.

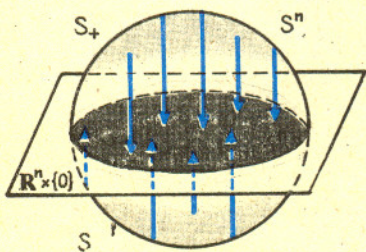
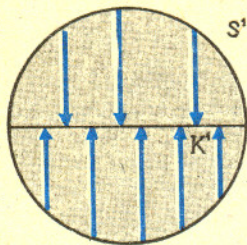
Wiemy, że sferę  $n$ -wymiarową możemy otrzymać za pomocą sklejenia wzdłuż brzegu dwóch kul  $n$ -wymiarowych (po uprzednim ich odpowiednim wygięciu). Okrąg (sferę jednowymiarową) dostaniemy po sklejeniu dwóch wygiętych odcinków (kul jednowymiarowych). Sferę skonstruujemy sklejąc dwa koła (rys. 3) – i tak dalej, ale może nie próbujmy sobie tego wyobrazić... Formalnie możemy napisać, że

$$S^n = \left\{ \left( x_1, \dots, x_n, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2} \right) \right\} \cup \left\{ \left( x_1, \dots, x_n, -\sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2} \right) \right\}.$$

Oznaczmy pierwszy zbiór przez  $S_+$  (górną półsferę), drugi przez  $S_-$  (dolną).







Rys. 4

Rozważmy rzutowania punktów z obu półsfery na przestrzeń o wymiarze o jeden niższym wyznaczoną przez „równik” (czyli na  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$  - rys. 4). Rzutujemy wzdłuż prostej prostopadłej do  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ ; w przypadku sfery dwuwymiarowej jest to rzut prostopadły na płaszczyznę równika. Pierwsze rzutowanie (o dziedzinie  $S_+$ ) oznaczmy przez  $\varphi_+$ , drugie (o dziedzinie  $S_-$ ) przez  $\varphi_-$ . Mamy

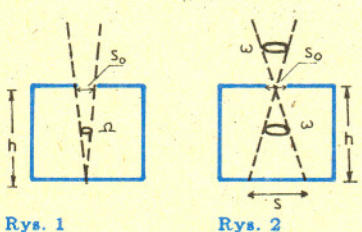
$$\varphi_+ \left( \left( x_1, \dots, x_n, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2} \right) \right) = (x_1, \dots, x_n),$$

$$\varphi_- \left( \left( x_1, \dots, x_n, -\sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2} \right) \right) = (x_1, \dots, x_n).$$

Obie te funkcje przyjmują wartości w  $K^n$  (bo  $x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1$ ) i są - jako rzutowania - ciągłe. Ponadto na części wspólnej obu półsfery (czyli na sferze  $S^{n-1}$ , tam, gdzie ostatnia współrzędna równa jest 0) są one takie same i równe funkcji identycznościowej.

Zdefiniujemy dwie nowe funkcje prowadzące z  $K^n$  do  $K^n$ . Niech  $f_+(x) = f(x)$ , zaś  $f_-(x) = \|x\|f(x)$ . Jeżeli teraz rozważymy dwa złożenia:  $(f_+ \circ \varphi_+)$  i  $(f_- \circ \varphi_-)$ , to łatwo zauważymy, że częścią wspólną ich dziedzin jest  $S^{n-1}$ . Tu zaś funkcje  $\varphi_+$  i  $\varphi_-$  są identycznościami i w konsekwencji zarówno  $f_+ \circ \varphi_+$ , jak i  $f_- \circ \varphi_-$  przyjmują dla punktów należących do  $S^{n-1}$  takie same wartości (zgodnie z definicjami,  $f_+(\varphi_+(x)) = f_+(x) = f(x)$  i  $f_-(\varphi_-(x)) = f_-(x) = \|x\|f(x) = f(x)$ , gdyż  $S^{n-1}$  jest brzegiem  $K^n$  i dla punktu  $x$  należącego do  $S^{n-1}$  norma  $\|x\|$  wynosi 1). Dziedziną pierwszego złożenia jest górna półsfera, drugiego - dolna, na części wspólnej tych półsfery wartości obu złożań są takie same, możemy zatem określić kolejną funkcję:  $F: S^n \rightarrow K^n \subset \mathbb{R}^n$ ; dla punktu  $x$  z górnej półsfery definiujemy  $F(x)$  jako  $(f_+ \circ \varphi_+)(x)$ , z dolnej zaś jako  $(f_- \circ \varphi_-)(x)$ . Ze względu na wykazaną powyżej własność  $F$  jest zdefiniowana poprawnie; w matematyce takie  $F$  nazywa się sklejeniem  $(f_+ \circ \varphi_+)$  oraz  $(f_- \circ \varphi_-)$ . Obie „klejone” funkcje są (na odpowiednich półsferych) ciągłe, jako złożenia funkcji ciągłych. Całkiem elementarnie można na podstawie tego udowodnić, że także funkcja  $F$  jest ciągła. Mamy zatem ciągłe odwzorowanie  $F: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  i w tej chwili przygotowaliśmy grunt do skorzystania z twierdzenia o antypodach. Na jego mocy musi istnieć taki punkt  $x \in S^n$ , że  $F(x) = F(-x)$ . Punkt taki musi jednak należeć do  $S^{n-1}$ ! Dzieje się tak dlatego, że gdy weźmiemy dwa punkty antypodalne, to jeden z nich należy do górnej półsfery, a drugi do dolnej. Wartości funkcji  $F$  na tych argumentach są równe, a więc i ich normy też. Zgodnie z definicją  $F$  dla punktu  $x$  z górnej półsfery  $\|F(x)\| = \|f(\varphi_+(x))\| = 1$ , gdyż  $f$  przyjmuje wartości na sferze jednostkowej, natomiast dla punktu  $x$  z dolnej półsfery mamy  $\|F(x)\| = \|\varphi_-(x)\| \|f(\varphi_-(x))\|$ , ta wartość jest równa jeden tylko wtedy, gdy  $\|\varphi_-(x)\| = 1$ , czyli  $\varphi_-(x)$  musi należeć do sfery  $S^{n-1}$ , a więc na mocy definicji  $\varphi_-$  punkt  $x$  musi należeć do sfery  $S^{n-1}$ . Znaleźliśmy wobec tego  $x$  należący do  $S^{n-1}$  (wtedy także i  $-x \in S^{n-1}$ ) o własności  $F(x) = F(-x)$  (por. rys. 5). Ostatnie współrzędne punktów  $x$  i  $-x$  (w przestrzeni  $\mathbb{R}^{n+1}$ ) są zerami, punkty te należą do  $S_+$  i mamy  $\varphi_+(x) = x$ ,  $\varphi_+(-x) = -x$ . Oznacza to, że  $F(x) = f_+(\varphi_+(x)) = f_+(x) = f(x)$ , zaś  $F(-x) = f_+(\varphi_+(-x)) = f_+(-x) = f(-x)$ . Wykazaliśmy zatem, że  $f(x) = f(-x)$  i w ten sposób doszliśmy do tezy naszego lematu.

**Rozwiązanie zadania F 295.**



Przyjęcie założenia o całkowitym zachmurzeniu oznacza, że światło jest zupełnie rozproszone, a zatem strumień światła na jednostkę kąta bryłowego nie zależy od kierunku. Oznaczmy przez  $\sigma$  wartość strumienia światła w jednostkowym kącie bryłowym i padającego na jednostkę powierzchni otworu. W nieobecności soczewki na dno pudła padają promienie świetlne pochodzące z kąta bryłowego o rozwartości  $\Omega \approx S_0/h^2$  (rys. 1), gdzie przez  $S_0$  oznaczyliśmy powierzchnię otworu. Zatem w tym przypadku natężenie oświetlenia dna wynosi

$$E_1 = \sigma \cdot \Omega = \frac{\sigma S_0}{h^2}.$$

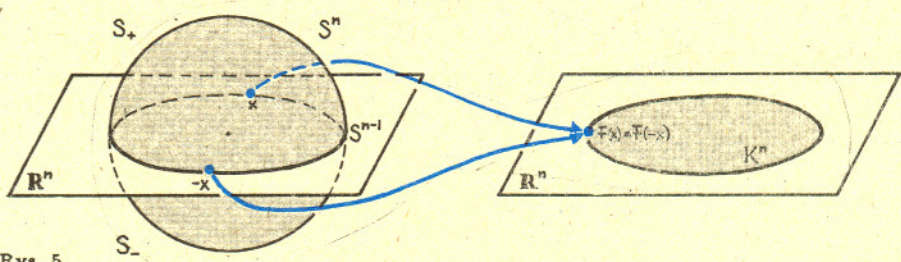
Soczewka zbiera w swojej płaszczyźnie ogniskowej (pokrywającej się z dnem pudła) promienie świetlne pochodzące z pewnego kąta bryłowego  $\omega$  (rys. 2), powierzchnia oświetlonego obszaru wynosi zaś

$$S = h^2 \omega.$$

Tym samym strumień światła dany jest przez iloczyn  $\Phi = \sigma \cdot S_0 \cdot \omega$ , a oświetlenie

$$E_2 = \frac{\Phi}{S} = \frac{\sigma S_0}{h^2} = E_1.$$

A zatem natężenie oświetlenia dna pudła pod otworem nie ulegnie zmianie



Rys. 5

Teraz jesteśmy już o krok od twierdzenia Brouwera. Mianowicie z powyższego lematu wynika natychmiast twierdzenie o retrakcie! Istotnie, gdyby istniała retrakcja  $r$  kuli  $K^n$  na sferę  $S^{n-1}$ , spełniałaby ona, jako funkcja ciągła, założenia powyższego lematu. Retrakcja jednak na sferze jest identycznością, więc dla wszystkich punktów należących do  $S^{n-1}$  mielibyśmy:  $r(x) = x \neq -x = r(-x)$ . Nie istniałby zatem punkt ze sfery taki, że  $r(x) = r(-x)$ , co przeczy tezie lematu wykazanego przed chwilą. Otrzymaliśmy twierdzenie o retrakcie, które, jak wykazaliśmy na początku, jest równoważne twierdzeniu Brouwera. Cel nasz został osiągnięty.

Na zakończenie wypada zwrócić uwagę na to, że oprócz potężnego wyniku, jakim jest twierdzenie Borsuka-Ułama o antypodach, w dowodzie powyższym wykorzystywaliśmy jedynie elementarne fakty z matematyki (tzw. wyższej).



prof. dr Mieczysław SUBOTOWIČZ

Nasza cywilizacja jest coraz bardziej zdominowana przez naukę, dlatego bywa nazywana cywilizacją naukowo-techniczną (CNT). Mianowicie gdy życie człowieka przestało być jedynie walką o biologiczne przetrwanie, człowiek postawił sobie i swojej cywilizacji zadanie ambitniejsze, m.in. wyjście w przestrzeń pozaziemską i znalezienie odpowiedzi na odwieczne pytanie: czy jesteśmy samotni we Wszechświecie?

Można bowiem przypuszczać, że procesy prowadzące do powstania CNT mogły zajść na planetach krążących wokół innych gwiazd. W samej naszej Galaktyce jest około 250 mld gwiazd, część z nich może mieć układy planetarne (obserwacje w podczerwieni wskazują na obecność dysków pyłowych wokół wielu gwiazd, a nawet – być może – obecność planet typu jowiszowego), odkryto w Galaktyce i innych galaktykach obfitość różnych związków organicznych, a kosmochemia dowodzi istnienia ewolucji chemicznej we Wszechświecie. Na Ziemi obserwujemy ewolucję biologiczną, jednak przebieg ewolucji organizmów pozaziemskich może być zasadniczo odmienny, przyroda realizuje wszak ewolucję metodą prób i błędów. Czy w tych warunkach można twierdzić, że *Homo sapiens* znajduje się na głównej linii rozwoju materii we Wszechświecie, może na jej szczycie? Gdyby wśród planet pozasłonecznych znalazły się niezbyt daleko od Słońca istoty rozumne (ETI, od ExtraTerrestrial Intelligence), zdolne do stworzenia CNT, powinniśmy byli już od dawna odbierać od nich sygnały elektromagnetyczne. Tymczasem Wszechświat milczy...

Jakie są szanse wykrycia ETI? Można by złożyć im wizytę lub oczekiwać ich wizyty. Można jednak pokazać, że szanse realizacji relatywistycznych lotów międzygwiazdowych są niezmiernie małe nawet dla cywilizacji nieporównanie bardziej zaawansowanej niż nasza, ziemską CNT. Nie ma żadnych naukowych dowodów wizyty ETI na Ziemi. Żadna dyskusja ani analiza teoretyczna nie odpowie nam nigdy na pytanie o istnienie ETI. Mogą to zrobić wyłącznie poszukiwania naukowe. Od filozofowania na temat „wielości światów” przeszliśmy do epoki eksperymentowania. Sondy kosmiczne poszukiwały prymitywnych form życia w Układzie Słonecznym, obecnie szukamy życia i zaawansowanych CNT w Galaktyce, stosując teleskopy w obszarze radiowym, podczerwonym i optycznym. Początek tej akcji dała praca G. Cocconiego i Ph. Morrisona w *Nature* (1959) pod tytułem *Searching for Interstellar Communications – W poszukiwaniu łączności międzygwiazdowej*. W tematyce tej stosujemy dwa kryptonimy: „CETI – Communication with ExtraTerrestrial Intelligence – łączność z pozaziemskimi istotami rozumnymi” oraz „SETI – Search for the ExtraTerrestrial Intelligence – poszukiwanie pozaziemskich istot rozumnych”. Jak widać, CETI oznacza łączność aktywną i bierną z ETI (pozaziemskimi istotami rozumnymi), zaś SETI – łączność bierna, czyli odbieranie sygnałów ETI.

Amerykański radioastronom, dr F.D. Drake, zapoczątkował CETI, wysyłając w roku 1960 w ramach programu OZMA za pomocą radioteleskopu o średnicy 26 metrów w Green Bank (Zachodnia Wirginia) sygnały o długości fali 21 cm (linia wodorowa) w kierunku gwiazd  $\epsilon$  Eridani (odległość 10,7 lat świetlnych) oraz  $\tau$  Ceti (11,9 lat świetlnych). Napisał on także również na liczbę współistniejących CNT w Galaktyce. Liczba ta zależy od: prędkości formowania się gwiazd w Galaktyce, ułamka gwiazd mających układ planetarny, etapu ewolucji takich gwiazd, liczby planet w ekosferze danej gwiazdy, prawdopodobieństwa powstania życia na odpowiedniej planecie, ułamka układów biologicznych, z których powstały istoty rozumne, liczby inteligentnych gatunków zdolnych do podjęcia CETI, średniego czasu istnienia cywilizacji realizującej łączność międzygwiazdową. Wszystkie te czynniki, ich wartości liczbowe, zależą od punktu widzenia, ponieważ brak jest w tej chwili danych obserwacyjnych. Dlatego optymistycznie szacuje się liczbę CNT w naszej Galaktyce na dziesiątki milionów. Pesymistyczne zaś oszacowania wymieniają tylko jedną CNT – ziemską. Jedną, jedyną nie tylko w Galaktyce, ale i we Wszechświecie.

Nie jest też wykluczone, że nie wykryto sygnałów pozaziemskich CNT z powodu ich niewielkich zasobów energetycznych lub z powodu ich samozagłady. Nadawanie tylko izotropowych sygnałów wywoławczych wymaga użycia ilości energii, porównywalnych z produkcją energii ziemskiej CNT. Dotąd wszystkie poszukiwania były prowadzone na wybranych częstotliwościach „magicznych”, znanych cywilizacjom nadającym i słuchającym, np. linia wodorowa, linia amoniaku i in. Może to być nie linia, lecz pewien wybrany przedział częstotliwości, na przykład okno mikrofalowe Ziemi (1–10 GHz). Głębokie lokalne minimum szumów, na które składają się: tło nietermiczne, tło promieniowania relikтового (2,7 K) oraz szumy kwantowe, przedstawia tak zwana „dziura wodna” (1,4–1,75 GHz), która leży w obszarze szerokiego minimum (1–10 GHz). Dla tych badań w tak szerokim obszarze częstotliwości budowany jest przez P. Horowitza wielokanałowy analizator widma (MCSA) na 8 257 536 kanałów o zdolności







rozdzielczej 1 Hz w pasmie o szerokości 8 MHz, 0,05 Hz na kanał w pasmie o szerokości 420 kHz, oraz 32 Hz w obszarze częstości od 1 GHz do 10 GHz. Układ taki będzie zdolny przebadać „kosmiczny stóg siana”, w którym igłą jest sygnał od rozumnego nadawcy. Rejestrowane będą następujące charakterystyki: położenie źródła, częstość wysyłanego promieniowania, natężenie sygnału, okresy nadawania i wstrzymywania transmisji, szerokość pasma, polaryzacja, modulacja sygnału. Kosmiczny stóg siana ma taką objętość, że dotąd, w ciągu 25 lat, gdy dokonano około 50 seansów SETI z wynikiem negatywnym, zbadano zaledwie jedną miliardową jednej miliardowej tej przestrzeni ( $10^{-18}$ ). Przy użyciu MCSA i wykorzystaniu istniejących radioteleskopów (łącznie z tym w Arecibo o średnicy 305 m) można zwiększyć tempo uzyskiwania informacji o czynnik około  $10^7$ .

Program NASA SETI obejmuje dwa podprogramy: przemiatanie nieba oraz poszukiwania docelowe, które skoncentrują się na 800–1000 obiektach łącznie z 773 gwiazdami typu widmowego F, G i K w odległości do 25 parseków (81,5 lat świetlnych), łącznie z gwiazdami osobliwymi. Na poszukiwania docelowe 1000 gwiazd, po 1000 s każda, przy pasmie częstości 8 MHz razy 100 pasm na pokrycie obszaru częstości od 1,2 do 2,0 GHz wokół dziury wodnej trzeba 3,3 lat przy użyciu radioteleskopu Arecibo. Uwzględniając pewne szczegóły techniczne, czas ten należy zwiększyć do 5 lat.

Przemiatanie nieba w obszarze przestrzennego kąta pełnego wymaga radioteleskopów o średnicy 34 m; zdolność rozdzielcza wyniesie po 32 Hz na kanał, przedział częstości od 1 do 10 GHz. Poświęcając 0,3 do 3 s na zlokalizowanie gwiazdy w pasmie 250 MHz i mając 36 takich pasm, aby obsłużyć obszar częstości od 1 do 10 GHz, trzeba około  $10^5$  s, czyli też około 5 lat.

Tak więc trzeba użytkować radioteleskop przez około 10 lat przy realizacji programu NASA SETI w ramach poszukiwań docelowych i przemiatania nieba. Przyjmijmy, że dysponujemy 5–10 różnymi radioteleskopami na 10–20 % ich czasu roboczego oraz kilkoma jednostkami MCSA. Przyjmując wariant optymistyczny, cały program NASA SETI można by zrealizować w ciągu 5 lat; wariant realistyczny przedłużałby ten czas na 10 lat, czyli od roku 1990 do 2000. Od programu OZMA do programu NASA SETI dokonał się w ciągu 30 lat olbrzymi postęp. Realizowany w roku 1960 przez 200 godzin program OZMA mógłby być dziś wykonany przy użyciu anteny Arecibo i superanalizatora MCSA w ciągu ułamka sekundy. W ciągu 10–20 lat, być może, dowiemy się wiele o zaawansowanych CNT w naszej Galaktyce i będziemy mogli dokonać nowych odkryć astronomicznych. Rezultat negatywny wskazywałby, jak unikalna jest ziemska CNT i jak ważne jest w skali kosmicznej przetrwanie gatunku *Homo sapiens* oraz stworzonej przez niego cywilizacji. Za tę lekcję warto zapłacić kilkaset milionów dolarów, bo tyle będzie kosztował program NASA SETI.



## Zadania

Redaguje mgr Michał WOJCIECHOWSKI

**M 580.** Dla wielomianu  $P(x)$  stopnia  $n$  zachodzi  $P(k) = 1 - \frac{1}{k+1}$  dla  $k = 0, 1, \dots, n$ . Znaleźć  $P(n+1)$ .

Rozwiązanie na str. 17

**M 581.** Udowodnić, że dla dowolnego czworokąta wypukłego stosunek największej odległości między wierzchołkami do najmniejszej jest nie mniejszy niż  $\sqrt{2}$ .

Rozwiązanie na str. 10

**M 582.** Niech  $m = 2^n$ . Dla układu  $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ , złożonego z  $m$  liczb  $a_i \in \{-1, 1\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , określamy operację  $S(A) = (a_1 a_2, a_2 a_3, \dots, a_m a_1)$ . Udowodnić, że w ciągu  $A, S(A), S(S(A)), \dots$  znajdzie się układ złożony z samych jedynek.

Rozwiązanie na str. 17

Redaguje dr Krzysztof CHARCHUŁA

**F 294.** Okres obiegu Merkurego wokół Słońca wynosi 88 ziemskich dób, a okres obrotu wokół swojej osi – 59 dób. Jak długo trwa doba merkuryjska?

Rozwiązanie na str. 13

**F 295.** W pokrywie zamkniętego pudła o wysokości  $h = 1$  m zrobiono niewielki okrągły otwór. Jak zmieni się natężenie oświetlenia dna pod otworem, gdy w otwór wstawimy soczewkę o zdolności skupiającej równej jednej dioptrii? Przyjąć, że pudło stoi pod gołym niebem równomiernie zasnutym chmurami.

Rozwiązanie na str. 3



dr Maria KRAWCZYK

Zderzenia cząstek elementarnych odgrywają podstawową rolę w badaniach struktury mikroświata. Od wielu lat w ośrodkach naukowych świata odbywa się coś, co można by żartobliwie nazwać gigantyczną grą w kule. Chodzi tu o doświadczenia z wiązkami elektronów i protonów, jak również ich antycząstek, czyli odpowiednio: pozytonów i antyprotonów, zderzającymi się z energiami rzędu 100 - 1000 GeV (1 gigaelektronvolt = 1 GeV = = 10<sup>9</sup> eV). Planowane są dalsze doświadczenia tego typu z jeszcze większymi energiami, umożliwiającymi dotarcie do głębszej struktury cząstek elementarnych.

Nieraz w grze tej jesteśmy jedynie biernymi obserwatorami. Tak właśnie jest przy oddziaływaniu promieni kosmicznych z atmosferą ziemską lub górną warstwą skorupy ziemskiej. Nazwą promieniowania kosmicznego określa się strumień cząstek elementarnych docierających do nas z Kosmosu. Są to cząstki różnego typu i pochodzenia. Oznaczają się nieraz skrajnie dużymi energiami, znacznie większymi od tych, które mogą być osiągnięte w obecnych, a nawet planowanych na najbliższe lata, doświadczeniach. Największa energia zaobserwowana dotychczas w promieniowaniu kosmicznym wynosi 10<sup>21</sup> eV. Powszeczenie uważa się, że w przyszłości w badaniu struktury mikroświata będziemy korzystać w coraz większym stopniu z tego właśnie naturalnego i największego akceleratora cząstek elementarnych, jakim jest Kosmos. Jaką rolę w tych badaniach odgrywają fotony? Czy przejawiają one jakieś specjalne cechy, czy też możemy się nimi posługiwać podobnie jak elektronami i protonami i urządzać sobie fotonowy bilard? Jakie są największe energie fotonów dostępne obecnie w laboratoriach? Czy równie duże jak energie elektronów i protonów? Czy fotony o bardzo dużych energiach występują w promieniowaniu kosmicznym? Na te pytania chcielibyśmy odpowiedzieć, choćby częściowo, w niniejszym artykule.

Najpierw ustalmy pewne podstawowe fakty. Zaczniemy od tego, co to jest foton. Jak wiemy, promieniowanie elektromagnetyczne przejawia w pewnych warunkach własności korpuskularne, czyli zachowuje się jak cząstka. Foton jest właśnie taką „cząstkową” reprezentacją promieniowania elektromagnetycznego. Traktujemy go jak każdą inną cząstkę elementarną. Ogólne prawa rozchodzenia się sygnałów elektromagnetycznych wykazują, że foton ma zerową masę spoczynkową. Z tej własności fotonu wynika, że nigdy nie uda nam się utworzyć nieruchomej tarczy fotonowej. Można powiedzieć, że foton żyje jedynie w ruchu, jego prędkość w próżni wynosi  $c \approx 3 \cdot 10^8$  m/s i jest taka sama w każdym inercjalnym układzie odniesienia. Pozostaje nam więc jedynie możliwość formowania wiązek fotonów o określonych pędach  $\vec{p}$  i energii  $E$ . Wielkości te są związane ze sobą w następujący sposób

$$E = c |\vec{p}|.$$

Masa spoczynkowa fotonu wynosi zero, pęd zaś wyraża się przez prędkość wzorem

$$\vec{p} = \frac{\vec{v}E}{c^2}.$$

Dla cząstki o masie spoczynkowej  $m$  różnej od zera,

poruszającej się z prędkością  $\vec{v}$ , związki te wyglądają następująco:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad E = c\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2c^2}.$$

Cząstki mogą się zderzyć elastycznie (sprężyście), tak że po zderzeniu mamy nadal do czynienia z tymi samymi cząstkami, choć na ogół ze zmienionymi pędami i energiami. Mogą również wystąpić procesy nieelastyczne z produkcją nowych cząstek, przy czym cząstki pierwotne mogą nawet całkowicie zniknąć. Zasady zachowania całkowitej energii i całkowitego pędu układu wyznaczają możliwe pędy i energie cząstek po zderzeniu. Nie wszystkie stany końcowe są równie prawdopodobne, a teoria kwantowa oddziaływań pozwala wyznaczyć prawdopodobieństwo pojawienia się konkretnego stanu końcowego.

Przechodzimy teraz do omówienia najprostszego, a zarazem najważniejszego, procesu z udziałem fotonu - elastycznego zderzenia fotonu z elektronem. Proces ten ma podstawowe znaczenie w fizyce cząstek elementarnych; rola jego wzrosła w ostatnich latach, gdyż okazuje się, że pozwala on również zrozumieć oddziaływanie fotonu z innymi cząstkami, na przykład z kwarkami.

Będziemy rozpatrywać elastyczne zderzenia fotonu z elektronem. Interesować nas będzie przebieg zderzeń w obszarze wysokich energii w trzech różnych przypadkach:

- I. Energetyczny foton zderza się ze spoczywającym elektronem.
- II. Zderzają się elektron i foton o dużych i, w przybliżeniu, równych energiach.
- III. Energetyczny elektron zderza się z fotonem o małej energii.

Zamiast tych trzech różnych doświadczeń można by właściwie wykonać tylko jedno z nich, powiedzmy I, a przejście do pozostałych dwóch „zrealizować”, zgodnie ze szczególną teorią względności, przez odpowiednią zmianę układu odniesienia. My przyjmiemy tutaj punkt widzenia eksperymentatora, który obserwuje przebieg procesu zderzenia fotonu z elektronem w różnych warunkach doświadczalnych (I-III) w konkretnym układzie odniesienia - w swoim laboratorium.

I. Gdy zderzenie odbywa się ze spoczywającym elektronem, foton może część swojego pędu (i energii) przekazać elektronowi. Stan końcowy jest tutaj bardzo charakterystyczny. Obserwujemy poruszający się elektron oraz foton o energii mniejszej od początkowej. Jest to tak zwany proces Comptona, od nazwiska uczonego, który go po raz pierwszy zaobserwował w roku 1922.

Przy rozpraszaniu fotonu o energii  $\omega$  na spoczywającym elektronie o masie spoczynkowej  $m$ , możliwe są tylko takie konfiguracje pędów rozproszonych cząstek, dla których kąt rozproszenia fotonu względem kierunku pędu początkowego  $\theta$  i jego energia  $\omega'$  związane są zależnością

$$(*) \quad \omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{mc^2}(1 - \cos \theta)}.$$

Dla konkretnej wartości  $\omega'$  oraz  $\theta$  stan rozproszonego elektronu jest wyznaczony jednoznacznie.



Nie wszystkie stany końcowe opisywane wzorem (\*) są jednakowo prawdopodobne. Bardzo energetyczny foton o energii dużo większej od energii spoczynkowej elektronu  $mc^2$ , niechętnie zmienia swoją energię i pęd. Oznacza to, że po zderzeniu najbardziej prawdopodobny jest stan z fotonem poruszającym się z tą samą energią ( $\omega' = \omega$ ), i w tym samym kierunku, co foton początkowy (kąąt rozpraszania  $\theta = 0^\circ$ ). Mówimy o tzw. rozpraszaniu do przodu.

Najmniejszą energią dysponuje foton rozproszony do tyłu względem kierunku początkowego ( $\theta = 180^\circ$ ,  $\omega' = \omega / (1 + 2\omega/mc^2)$ ). Odpowiada to, oczywiście, sytuacji, w której elektron syskuje największy „zastrzyk” energii.

II. Zobaczmy teraz, jak przebiega zderzenie fotonu z elektronem w przypadku, gdy poruszają się one naprzeciw siebie z pędami równymi co do wartości. Dla bardzo dużych wartości pędów możemy w rozważaniach pominąć masę spoczynkową elektronu w porównaniu z jego energią. Wtedy proces wygląda tak, jakby rozpraszali się na sobie dwa, w przybliżeniu, bezmasowe obiekty. W zderzeniu energie poszczególnych cząstek nie ulegają zmianie, a najbardziej prawdopodobna konfiguracja pędów końcowych cząstek odpowiada rozpraszaniu do tyłu. Mamy tu sytuację analogiczną do zderzenia (centralnego) dwóch jednakowych kul z równymi co do wartości i kierunku, lecz przeciwnymi co do swrotu pędami. Po zderzeniu prawdziwe kule odekakują od siebie. W przypadku rozważanego przez nas procesu cząstki zachowują się najchętniej, tzn. z największym prawdopodobieństwem, tak samo jak kule.

III. Bardzo interesująco przebiega proces zderzenia fotonu z elektronem w przypadku, gdy przed zderzeniem foton miał bardzo małą energię, elektron zaś był bardzo energetyczny. Jest to sytuacja w pewnym sensie odwrotna do rozważanego przez nas rozpraszania na spoczywającym elektronie. Z tego powodu ten proces nosi nazwę odwrotnego procesu Comptona. W tym przypadku związek między energią fotonu przed ( $\omega$ ) i po zderzeniu ( $\omega'$ ) i energią początkową elektronu  $E$  jest następujący

$$(**) \quad \frac{\omega'}{E} \cong 1 - \frac{m^2 c^4}{m^2 c^4 + 4\omega E}$$

Zauważmy, że foton po rozproszeniu może się stać bardziej energetyczny kosztem energii elektronu. Tym razem najbardziej prawdopodobna konfiguracja końcowa, powstająca w wyniku zderzenia fotonu i elektronu, odpowiada zamianie pędów elektronu i fotonu – znów jak dla zderzenia kul bilardowych. Dla skrajnie dużych energii elektronu w stanie końcowym mielibyśmy niskoenergetyczny elektron poruszający się z pędem równym początkowemu pędowi fotonu i skrajnie energetyczny foton o pędzie równym początkowemu pędowi elektronu.

Ostatnio zaproponowano, aby wykorzystywać tego typu procesy do „produkcji” fotonów o dużych energiach. Pomysł polega na zderzeniu elektronów o energiach  $E = 1 \text{ TeV}$  ( $1 \text{ TeV} = 10^3 \text{ GeV}$ ) ze światłem laserowym, czyli fotonami o energiach  $\omega = 1,7 \text{ eV}$ . Fotony w wyniku takiego zderzenia mogą uzyskać energię w przybliżeniu równą  $1 \text{ TeV}$ ! I to z dużym prawdopodobieństwem!

Zauważmy, że następuje tu przyrost energii fotonu od  $1 \text{ eV}$  do  $1 \text{ TeV}$ , czyli o czynnik  $10^{12}$  (12 rzędów wielkości). Pojawia się pytanie, czy możliwe jest nadanie elektronom takiej ogromnej energii początkowej. Wydaje się, że jest to w zasięgu naszych możliwości. Już obecnie dysponuje

się wiązkami elektronów o energiach  $50 \text{ GeV}$ , planuje się uzyskanie energii około  $100 \text{ GeV}$  w najbliższej przyszłości. Dla tych całkiem realnych wartości energii elektronów odwrotny proces Comptona na fotonach z lasera o energiach  $\omega \approx 2 \text{ eV}$  dawałby fotony o energiach  $\omega'$  w przybliżeniu równych połowie wyjściowej energii elektronów, to znaczy odpowiednio około  $25$  lub  $50 \text{ GeV}$ . Ciekawe, że pozostała część energii zderzenia jest tu „zamrożona” w postaci masy spoczynkowej elektronu. Gdy  $E \approx 1 \text{ TeV}$ , jak już wspominaliśmy, foton może odebrać elektronowi prawie całą energię,  $\omega' \cong E$ . Oznacza to, że dopiero dla takiej energii elektronu (przy ustalonej wartości  $\omega = 1,7 \text{ eV}$ ) możemy konsekwentnie zaniedbać masę spoczynkową elektronu i uzyskać stosunek  $\omega'$  do  $E$  bliski  $1$ , zgodnie ze wzorem (\*\*). Oczywiście, decydujące o powodzeniu tej metody jest duże prawdopodobieństwo „zamiany” energii między elektronem i fotonem.

Metoda ta, choć w zasadzie bardzo efektywna, na razie nie może być stosowana ze względu na zbyt małe gęstości fotonów w wiązce światła laserowego. Nie wydaje się jednak, aby nie dało się tej trudności przewyciężyć w przyszłości.

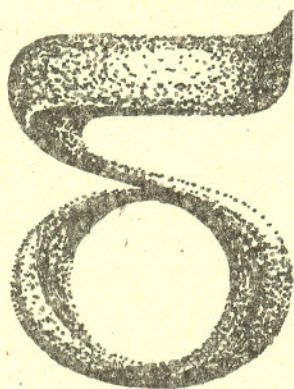
Trwają również badania nad wykorzystaniem kryształów do produkcji energetycznych fotonów. Doświadczenia z rozpraszaniem energetycznych elektronów o energiach do około  $200 \text{ GeV}$  na kryształach pokazały, że taki proces również może być efektywnym źródłem wiązek fotonów o dużych energiach. Oprócz innych efektów występuje tu również odwrotny proces Comptona. Zastosowanie kryształów w fizyce wysokich energii to nowa, szybko rozwijająca się i fascynująca dziedzina badań podstawowych.

Obecnie największe energie fotonów, zastosowane w praktyce do badania oddziaływań mikroświata, wynoszą około  $100 \text{ GeV}$ . Uzyskano je w wyniku promieniowania hamowania lub rozpadów energetycznych cząstek. W doświadczeniu przeprowadzonym w 1984 roku w ośrodku CERN fotony o takich właśnie energiach zderzały się z tarczą protonową, co prowadziło do obfitej produkcji cząstek wtórnych. W świetle teorii oddziaływań silnych związane to jest z oddziaływaniem fotonów ze składnikami protonu – kwarkami. Zaobserwowano również interesujące przypadki z fotonem w stanie końcowym, które interpretuje się jako wynik rozpraszania Comptona na kwarkach.

W najbliższym czasie przeprowadzone zostanie doświadczenie w ośrodku DESY w Hamburgu, w którym będzie można obserwować coś w rodzaju odwrotnego procesu Comptona na kwarkach. Energia fotonów pochodzących z promieniowania hamowania szybkich elektronów wynosić będzie średnio  $10 \text{ GeV}$ , natomiast kwarki (pochodzące z protonów poruszających się z energiami  $820 \text{ GeV}$ ) średnio będą miały energie znacznie większe ( $\approx 250 \text{ GeV}$ ).

Na zakończenie kilka słów o danych kosmicznych dotyczących fotonów o skrajnie wysokich energiach  $10^{14}$ – $10^{16} \text{ eV}$ , czyli  $100$ – $1000 \text{ TeV}$ . Sądzi się, że to właśnie odwrotny proces Comptona jest źródłem fotonów o tak wielkich energiach. Obserwowane oddziaływanie tych fotonów jest jednak dość nietypowe, między innymi produkują one w atmosferze zbyt dużo mionów. Pojawiały się więc wątpliwości, czy są to aby na pewno fotony, a jeśli tak, to czy nasze wyobrażenia o nich i ich oddziaływaniach nie są fałszywe.





# mata delta

## Dwie szpilki i nitka

to przyrząd, za pomocą którego można narysować elipsę. Wystarczy końce nitki przywiązać do wbitych w stół (może lepiej wziąć jakąś podkładkę, np. kawałek grubej tektury czy dykty) szpilek i narysować to, co zakresli napinający nitkę ołówek. Elipsa jest zatem wyznaczona przez dwa punkty (nazywane ogniskami) i długość nitki.

Już z tego określenia wynika, że elipsa ma dwie osie symetrii. Każda bowiem symetria, która ma nałożyć elipsę na nią samą, musi nakładać ogniska na ogniska. A układ dwóch punktów ma dwie osie symetrii: prostą zawierającą te dwa punkty i symetralną tych punktów. Cięciwa elipsy zawarta w pierwszej z nich nazywa się dużą osią elipsy, a zawarta w drugiej – małą osią. Osie symetrii elipsy są prostopadłe (w ogóle jeśli figura ma dokładnie dwie osie symetrii, to muszą one być prostopadłe – dlaczego?). Elipsa ma więc środek symetrii – ich punkt przecięcia.

Punkty leżące na końcach osi elipsy nazywają się jej wierzchołkami. Sprawdźmy, jak daleko leżą od środka elipsy wierzchołki na dużej osi. Jeśli  $F_1$  i  $F_2$  są ogniskami elipsy,  $O$  – jej środkiem, a  $A_1$  i  $A_2$  wierzchołkami na dużej osi, to, oczywiście,  $OA_1 = OA_2$ . Oznaczmy długość tego odcinka przez  $a$ . Okazuje się, że  $2a$  to długość nitki. Istotnie, gdy rysujący elipsę ołówek znajdzie się w  $A_1$ , cała nitka będzie miała długość

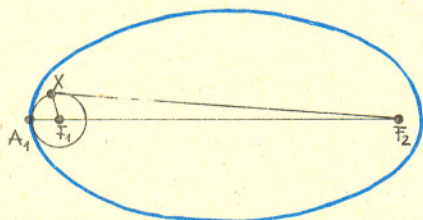
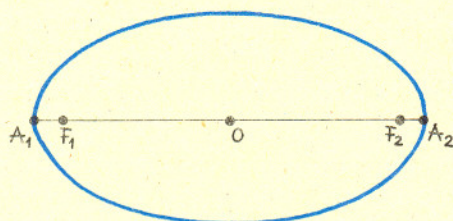
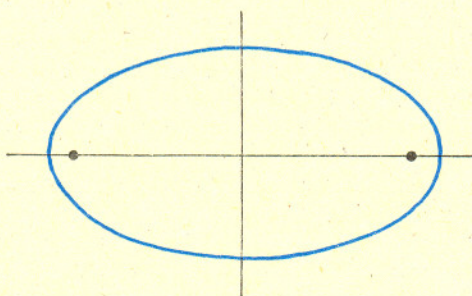
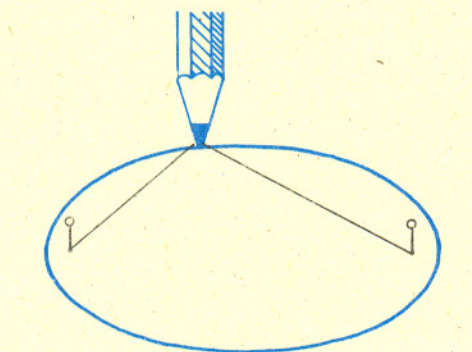
$$\begin{aligned} A_1F_1 + A_1F_2 &= A_1F_1 + A_1F_1 + F_1F_2 = \\ &= A_1F_1 + A_2F_2 + F_1F_2 = A_1F_1 + F_1F_2 + F_2A_2 = \\ &= A_1A_2 = 2 \cdot OA_1 \end{aligned}$$

( $A_1F_1 = A_2F_2$ , bo  $O$  jest środkiem symetrii). Nitka ma zatem długość taką, jak duża oś elipsy.

Wierzchołki dużej osi są punktami elipsy położonymi najbliżej ognisk. Rzeczywiście – narysujmy okrąg o środku  $F_1$  przechodzący przez  $A_1$ . Dowolny jego punkt  $X$  spełnia nierówność

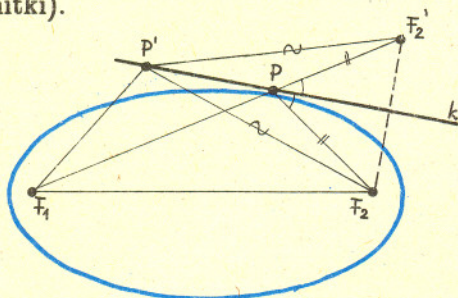
$$XF_1 + XF_2 = A_1F_1 + XF_2 < 2a,$$

bo  $XF_2$  jest krótszy od  $A_1F_2$ . Zatem punkt  $X$  leży wewnątrz elipsy.





Przez dowolny punkt elipsy można cyrklem i linijką poprowadzić do niej styczną i to nie wykorzystując wcale samej elipsy, a tylko jej ogniska i długość jej dużej osi (czyli długość nitki).



Narysujmy dwusieczną  $k$  kąta zewnętrznego trójkąta  $F_1PF_2$  przy wierzchołku  $P$ , gdzie  $P$  jest dowolnym punktem elipsy (sama elipsa nie musi wcale być narysowana) – to właśnie jest styczna do elipsy w punkcie  $P$  (dwusieczną kąta można, oczywiście, narysować cyrklem i linijką). Dlaczego jest to styczna? Narysujmy obraz symetryczny  $F_2'$  ogniska  $F_2$  względem  $k$ . Oczywiście,

$$F_1F_2' = F_1P + PF_2' = F_1P + PF_2 = 2a,$$

bo  $P$  leży na elipsie. Weźmy teraz dowolny inny punkt  $P'$  prostej  $k$ . Mamy

$$F_1P' + P'F_2 = F_1P' + P'F_2' > F_1F_2' = 2a,$$

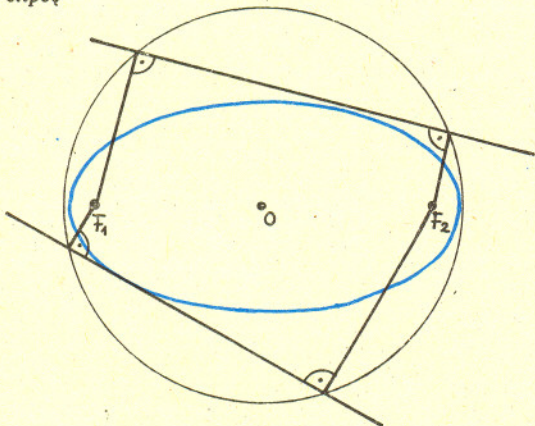
a więc punkt  $P'$  leży na zewnątrz elipsy.

Jak widać, dwa ogniska i długość dużej osi, czyli dwie szpilki i nitka, wystarczają do tego, by kreślić osie symetrii elipsy, jej wierzchołki (dwa znaleźliśmy – jak znaleźć, bez rysowania elipsy, dwa pozostałe?), a także styczne do elipsy.

Dalsze konstrukcje zechcą Czytelnicy obmyślić sami. Dobrze jednak, gdy najpierw udowodnią dwa proste twierdzenia (proste, bo ich dowód nie jest bardziej skomplikowany od podanych wyżej).

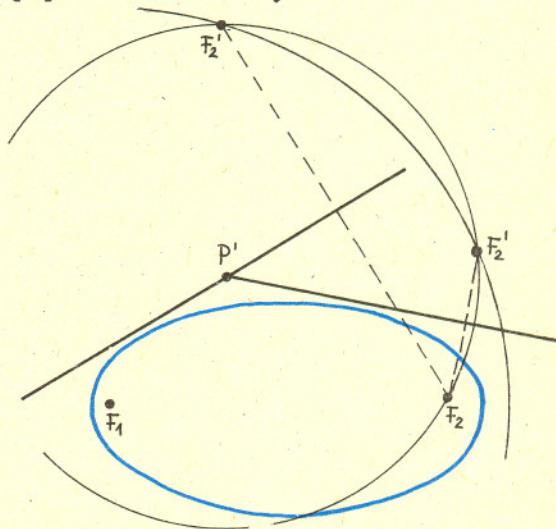
Pierwsze jest takie:

*Rzuty prostokątne ognisk na wszystkie styczne do elipsy leżą na jednym okręgu – jest to najmniejszy okrąg zawierający elipsę*



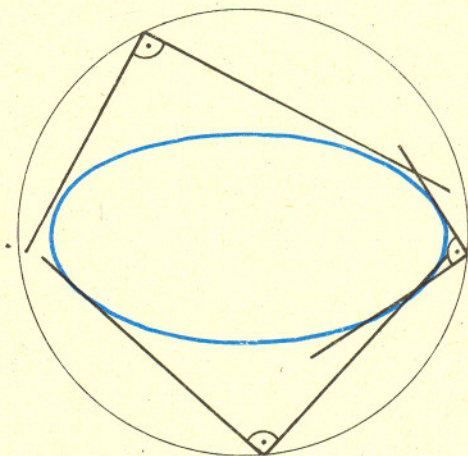
(w istocie dowód jest już prawie zrobiony, wystarczy na jednym z poprzednich rysunków dorysować jedną linię – ale na którym?).

Cyrkiel i linijka wystarczają również do wykreślenia stycznej do elipsy przechodzącej przez dowolny punkt  $P'$  leżący na zewnątrz elipsy. Obrane oznaczenie wskazuje, że skorzystamy z poprzedniego rozważania. I znów wcale nie będzie nam potrzebna sama elipsa, lecz tylko jej ogniska i długość dużej osi. Poszukamy mianowicie punktu  $F_2'$ . Wiemy już, że  $F_1F_2' = 2a$ , wiemy też, że  $P'F_2 = P'F_2'$ . Zatem wystarczy narysować okrąg o środku  $F_1$  i promieniu  $2a$  i okrąg o środku  $P'$  i promieniu  $P'F_2$ . Ich przecięcie to właśnie punkt  $F_2'$ , a przecięź styczna jest symetralną tego odcinka. A że otrzymaliśmy dwa punkty? Nic dziwnego – przecięź przez punkt na zewnątrz elipsy można do niej poprowadzić dwie styczne.



A oto drugie (tu już trzeba samemu):

*Punkty, z których widać elipsę pod kątem prostym, tworzą okrąg.*



Małą Deltę opracował Marek KORDOS



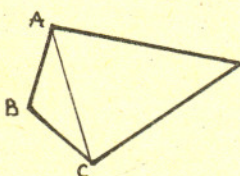
# Jak obliczyć momenty bezwładności bez całkowania

**Radostaw  
SZMYTKOWSKI**



**Rozwiązanie zadania M 581.**

Oznaczmy największą z odległości przez  $M$ , a najmniejszą przez  $m$ . W każdym czworokącie wypukłym istnieje kąt nieostry, np.  $|\angle ABC| \geq 90^\circ$ .

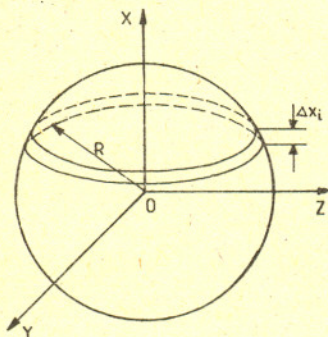


Stąd na mocy twierdzenia kosinusów

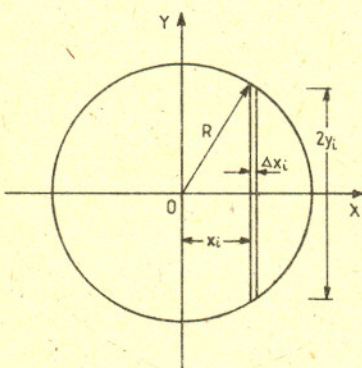
$$M^2 \geq AC^2 \geq AB^2 + BC^2 \geq m^2 + m^2 = 2m^2,$$

co daje

$$\frac{M}{m} \geq \sqrt{2}.$$



Rys. 1. Sposób podziału kuli i powłoki sferycznej na cienkie plasterki o grubości  $\Delta x_i$  i masie  $\Delta m_i$  każdy.



Rys. 2. W przypadku kuli i powłoki sferycznej rysunek przedstawia rzut rysunku 1 na płaszczyznę  $XY$ . W przypadku cienkiego dysku rysunek pokazuje sposób podziału dysku na cienkie płyty.

Znalezienie momentu bezwładności dowolnej bryły względem wybranej osi sprowadza się zazwyczaj do obliczenia całki oznaczonej. W szczególnych przypadkach brył o wysokiej symetrii znane są również metody pozwalające na obliczanie momentów bezwładności względem osi głównych w sposób elementarny, bez korzystania z rachunku różniczkowego lub całkowego. W zadaniu F 47 (*Delta* 11/1977) zaprezentowano prostą metodę znalezienia momentu bezwładności jednorodnej kuli względem osi przechodzącej przez jej środek. Nie jest to jedyna metoda – i poniżej przedstawimy inny sposób obliczenia momentu bezwładności kuli, a także cienkiego dysku i powłoki sferycznej.

Zanim jednak przystąpimy do zapoznania Czytelnika z tą metodą, przypomnijmy dwa twierdzenia, z których będziemy korzystali w trakcie obliczeń.

1. Twierdzenie o osiach równoległych (twierdzenie Steinera). Moment bezwładności  $I_A$  ciała o masie  $M$  względem dowolnej osi  $A$  jest równy

$$I_A = I_O + M \cdot d^2,$$

gdzie  $I_O$  jest momentem bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy ciała i równoległej do  $A$ , natomiast  $d$  jest odległością między tymi osiami.

2. Twierdzenie o osiach prostopadłych. Niech  $I_X$  i  $I_Y$  oznaczają momenty bezwładności cienkiej, płaskiej płyty o dowolnym kształcie względem dwóch wzajemnie prostopadłych osi  $OX$  i  $OY$  leżących w płaszczyźnie płyty. Moment bezwładności  $I_Z$  płyty względem osi  $OZ$  prostopadłej do  $OX$  i  $OY$  i przechodzącej przez ich punkt przecięcia  $O$  jest równy

$$I_Z = I_X + I_Y.$$

Z twierdzenia 2 wynika, że moment bezwładności cienkiego pierścienia o masie  $m$  i promieniu  $r$  względem osi leżącej w jego płaszczyźnie i przechodzącej przez środek masy jest równy

$$I_X = \frac{1}{2} \cdot I_Z = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2.$$

Proponujemy Czytelnikowi, aby pokazał, korzystając jedynie z twierdzenia 1, że moment bezwładności cienkiego pręta o masie  $m$  i długości  $l$  względem osi przechodzącej przez środek masy i prostopadłej do osi pręta jest równy

$$I = \frac{1}{12} \cdot m \cdot l^2.$$

Weźmy teraz cienki dysk, powłokę sferyczną oraz kulę i podzielmy którąkolwiek z tych brył na cienkie plasterki o grubości  $\Delta x_i$ ; każdy, prostopadle do osi  $OX$ . Sposób dokonania takiego podziału dla powłoki sferycznej i dla kuli przedstawiono na rysunku 1. Z rysunku 2 wynika, że moment bezwładności takiego plasterka względem osi  $OX$  jest równy

$$\Delta I_{x_i} = \beta \cdot \Delta m_i \cdot y_i^2,$$

gdzie  $\beta$  jest stałą bezwymiarową zależną od rodzaju bryły,  $\Delta m_i$  jest masą  $i$ -tego plasterka, natomiast  $y_i$  jest odległością pokazaną na rysunku 2. Dla powłoki sferycznej i dla kuli słuszność powyższego wzoru wynika z symetrii obrotowej obu tych brył. Na mocy twierdzenia 1 otrzymujemy, że moment bezwładności tego samego plasterka względem osi  $OY$  jest równy

$$\Delta I_{y_i} = \alpha \cdot \Delta m_i \cdot y_i^2 + \Delta m_i \cdot x_i^2,$$

gdzie  $\alpha$  jest stałą bezwymiarową, a  $x_i$  jest odległością plasterka od płaszczyzny  $YZ$ .

Moment bezwładności całej bryły względem osi  $OX$  i  $OY$  są równe odpowiednio  $I_x = \sum_i \Delta I_{x_i}$  oraz  $I_y = \sum_i \Delta I_{y_i}$ .

Z symetrii obrotowej każdej z trzech rozpatrywanych brył względem osi  $OZ$  wynika, że  $I_x = I_y$ , a więc

$$(1) \quad I_x = \sum_i \beta \cdot \Delta m_i \cdot y_i^2 = \sum_i (\alpha \cdot \Delta m_i \cdot y_i^2 + \Delta m_i \cdot x_i^2) = I_y.$$

Korzystając ze związku

$$(2) \quad x_i^2 + y_i^2 = R^2 \quad (= \text{const.}),$$

gdzie  $R$  jest promieniem pokazanym na rysunku 2, otrzymamy

$$(3) \quad (1 + \beta - \alpha) \cdot \sum_i \Delta m_i \cdot y_i^2 = \sum_i \Delta m_i \cdot R^2 = m \cdot R^2,$$

gdzie  $m$  oznacza masę całej bryły. Stąd ostatecznie

$$(4) \quad I_x = I_y = \beta \cdot \sum_i \Delta m_i \cdot y_i^2 = \frac{\beta}{1 + \beta - \alpha} \cdot m \cdot R^2.$$

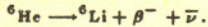


## FIZYCZNE NOWINKI

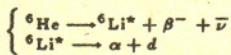
### Neutronowe halo a emisja opóźnionych deuteronów

Od paru lat wiadomo, że niektóre lekkie jądra o nadmiarze neutronów, jak np.  ${}^6\text{He}$  (2 protony, 4 neutrony),  ${}^8\text{He}$  czy  ${}^{11}\text{Li}$  mają nadspodziewanie duże jak na posiadaną liczbę nukleonów rozmiary. Wygląda to tak, jakby zewnętrzne neutrony w tych jądrach tworzyły coś w rodzaju aureoli (po angielsku halo znaczy aureola), co można wytłumaczyć niską energią wiązania tych neutronów.

Dotychczas uważano, że rozpad jądra  ${}^6\text{He}$  polega w 100% na jednokrotnym rozpadsie  $\beta^-$  do stanu podstawowego  ${}^6\text{Li}$ :



Jednakże istnienie aureoli neutronowej nasunęło pomysł eksperymentu mającego na celu obserwację bardzo rzadkich rozpadów  ${}^6\text{He}$  polegających na rozpadsie  $\beta^-$  do stanów niezwiązanych deuteronu i cząstki  $\alpha$ :



W tym scenariuszu jeden z neutronów tworzących halo podlega rozpadowi  $\beta^-$  stając się protonem, a wiążąc się z drugim neutronem tworzy deuteron. Ponieważ wszystko to zachodzi na peryferiach jądra, deuteronowi może udać się opuścić pole przyciągania jądrowego. Eksperymentalnie takie egzotyczne rozpady objawiałyby się emisją opóźnionych deuteronów. Rozpad  $\beta^-$  rzadsony jest bowiem oddziaływaniem słabym, jest więc procesem wolnym ( $\sim 10^{-1}$  s); emisja deuteronu rzadsona jest oddziaływaniem silnym, czas jest więc bardzo krótki ( $\sim 10^{-21}$  s). Jednakże całkowity półokres rozpadu wyznaczony jest przez wolniejszą składową, a stąd wynika opóźnienie emisji deuteronów.

Główną przeszkodą ograniczającą możliwości badań jąder bardzo neutrono-nadmiarowych, a więc bardzo odległych od ścieżki stabilności, są trudności w otrzymaniu odpowiednich intensywności wiązek tych jąder. Ma to zasadnicze znaczenie przy badaniach procesów bardzo mało prawdopodobnych.

Za pomocą separatora masy ISOLDE w CERNie udało się uzyskać rekordowo duże intensywności wiązki  ${}^6\text{He}$  – rzędu  $10^7$  jąder na sekundę. Jądra  ${}^6\text{He}$  osadzane były na cienkiej folii węglowej. Detektory cząstek naładowanych umieszczone po przeciwnych stronach folii zarejestrowały odpowiednio cząstki  $\alpha$  i deuterony w koincydencji, tak jak to wynika z zasady zachowania energii i pędu (rozpad w spoczynku, a więc w przeciwnych kierunkach). Prawdopodobieństwo rozpadu  $\beta^-$ , po którym następuje emisja deuteronu, zostało wyznaczone na  $10^{-6}$ . Oznacza to, że na milion rozpadów  $\beta^-$  do stanu podstawowego  ${}^6\text{Li}$  zdarza się jeden rozpad  $\beta^-$ , po którym możliwa jest jeszcze emisja deuteronu. Tak więc przewidywania teoretyczne nowej egzotycznej drogi rozpadu znalazły potwierdzenie doświadczalne. Planowane są poszukiwania podobnego typu rozpadów w innych neutrono-nadmiarowych jądrach, takich jak  ${}^{11}\text{Li}$ ,  ${}^{14}\text{Be}$ ,  ${}^{17}\text{B}$ .

Warto odnotować, że w pracach tych bierze udział fizyk z Uniwersytetu Warszawskiego, dr hab. W. Kurcwick.

Lidia GOETTIG

Wstawiając do wzoru (4) odpowiednie wartości  $\alpha$  i  $\beta$  otrzymamy momenty bezwładności rozpatrywanych trzech brył.

(a) Dla cienkiego dysku otrzymany plasterek jest prętem o długości  $l = 2y_i$ , a więc  $\alpha = 0$  i  $\beta = 1/3$ . Korzystając z twierdzenia 2 ( $I_x = I_y$ ) dostajemy

$$I_x = 2 \cdot I_x = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2.$$

(b) W przypadku powłoki sferycznej otrzymany przekrój jest cienkim pierścieniem, czyli  $\beta = 1$  oraz, na mocy twierdzenia 2,  $\alpha = \beta/2 = 1/2$ , a stąd

$$I_x = I_x = \frac{2}{3} \cdot m \cdot R^2.$$

(c) Dla kuli plasterek jest cienkim dyskiem. Z (a) otrzymujemy  $\beta = 1/2$ , a korzystając jeszcze raz z twierdzenia 2 mamy  $\alpha = \beta/2 = 1/4$ , skąd wynika, że

$$I_x = I_x = \frac{5}{8} \cdot m \cdot R^2.$$

A może ktoś z Czytelników znajdzie jeszcze inną metodę obliczania momentów bezwładności powyższych brył bez całkowania? Jeżeli tak, czekamy na informacje.

## Patrz w niebo

Kilkakrotnie w dziejach astronomii zachodziła konieczność powiększenia (i to znacznego) skali odległości – inaczej mówiąc, bywało, że nagle pewne obserwacje zmuszały do uznania, że Wszechświat jest większy, niż nam się dotychczas zdawało. Konsekwencje takiej rewolucji można sobie łatwo wyobrazić.

Ale bywało i odwrotnie. Niedawno np. pojawiły się argumenty za tym, że nasza Galaktyka jest trochę mniejsza niż myślimy. Rozmiarów Galaktyki nie można wyznaczyć metodą paralaks trygonometrycznych, do tych odległości rozmiary orbity ziemskiej są zbyt małe. Daje się mierzyć paralaksę (tj. kąt, pod którym z badanej gwiazdy byłoby widać promień ziemskiej orbity) nie mniejszą od  $0,01''$ , a zatem w tym sensie „uczciwie” wyznacza się odległości nie większe niż 100 pc. Dla obiektów bardziej odległych stosuje się wiele różnych metod, wśród nich metodę wykorzystującą znane skądinąd prawo rotacji Galaktyki, czyli zależność prędkości obiegowej gwiazd wokół centrum Galaktyki od odległości od tego centrum. W metodzie tej mierzy się ruch własny obiektu (przesunięcie na niebie w jednostce czasu) oraz prędkość radialną. Pojedynczy obiekt może mieć prędkość znacznie odbiegającą od średniej w jego okolicy Galaktyki, dlatego mierzy się ruchy własne i prędkości radialne wielu obiektów, co do których jest uzasadnione przypuszczenie, że leżą blisko siebie, prędkości te uśrednia się i tak – przy przyjętym z góry prawie rotacji Galaktyki – wyznacza się albo ich odległość od Słońca, albo ich odległość od centrum Galaktyki, albo też sprawdza się ogólną spójność całego modelu Galaktyki. Znaczący to, że w ten sposób można też sprawdzić, czy do nowych obserwacji pasuje np. odległość Słońca od jądra Galaktyki albo wspomniane prawo rotacji.

Grupa amerykańskich astronomów zastosowała kilka lat temu tę metodę do około 20 maserowych radioźródeł położonych w odległości (prawdopodobnie) kilkuset parseków od jądra Galaktyki. Obiekty te to gazowo-pyłowe obłoki wielkości, powiedzmy, Układu Słonecznego, otaczające jasne gwiazdy i promieniujące z wielką mocą w bardzo wąskich liniach odpowiadających emisji przez proste cząsteczki, jak np. wody, tlenku krzemu czy hydroksylu. Amerykańscy astronomowie za pomocą techniki interferometrii wielkobazowej wyznaczyli ruchy własne maserów w radioźródle *Sagittarius B2* Północny z dokładnością do kilkudziesięciu mikrosekund łuku na rok. Wraz z pomiarami prędkości radialnych pozwoliło to na wyznaczenie ich pełnej prędkości w Galaktyce. Okazało się, że spójność modelu Galaktyki byłaby zachowana, gdyby odległość Słońca od jej jądra wynosiła 7 kpc. Jest to nieznacznie, ale wyraźnie mniej niż najczęściej spotykana w tradycyjnych podręcznikach wartość 10 kpc lub nawet 8,6 kpc, rekomendowana przez Kongres Międzynarodowej Unii Astronomicznej z 1985 roku.

Nie ma jasności co do przyczyn tego wyniku. Nie to jednak jest najważniejsze, gdyż nie burzy on wszystkich naszych dotychczasowych poglądów na budowę Galaktyki, a ponadto z pewnością z biegiem czasu zagadka się wyjaśni i wzbogacimy się tym samym o jeszcze jedną informację. Na razie jednak warto zdać sobie sprawę z tego, że ciekawych i zaskakujących faktów można doszukać się w tak, zdawałoby się, nieciekawym zagadnieniu jak wyznaczenie odległości Słońca od centrum Galaktyki po raz nie wiadomo który z rzędu.

dr Tomasz KWAST



## KOESPONDENCYJNY KLUB FIZYKÓW

*Drodzy Członkowie i Sympatycy Klubu!*

*Przypominamy, że co miesiąc przyznajemy nagrodę książkową dla autora najciekawiej opracowanego rozwiązania postawionych zagadnień.*

Dzisiejsze zadanie ma postać doświadczenia, z pozoru niezwykle prostego. Będzie to bowiem

### Mieszanie barw

Wykonując je starannie, będziemy mogli zobaczyć barwę oczyma fizyka, to znaczy przekonamy się, że światło barwne jest wektorem. Skonstruujemy układ współrzędnych, w którym ten wektor będziemy opisywali za pomocą liczb. Jak łatwo się domyślić, światło bezbarwne (białe lub neutralnie szare) będzie wektorem zerowym. Sporządzimy wykres barwności, na którym różnym barwom będą odpowiadały punkty na płaszczyźnie. Aby to wszystko wykonać, potrzebne są pewne

### Przygotowania techniczne

Postaramy się o:

1. Kawałek tektury.
  2. Grubą, mocną nitkę.
  3. Dobry klej.
  4. Nożyczki i grubą igłę (np. nóżka cyrkla).
- Do późniejszych pomiarów przyda nam się też kątomierz.

Wykonanie krążka do mieszania barw nie nastarczy trudności temu, kto w dzieciństwie kręcił guzik na nitce. Trzeba w tym celu wyciąć z tektury (można to zrobić wycinając naklejony na tekturę rysunek 1) trzy krążki według rysunku 1, a następnie skleić je współśrodkowo mocnym klejem (rys. 2), wykonać w nich zaznaczone otwory i przewlec przez nie nitkę według rysunku 3. Długa nitka służy do uruchamiania krążka, a nitka obiegająca krążek po wielokroć będzie zabezpieczała barwny papier przed odpadnięciem. Przeprowadzamy próbę uruchomienia krążka pociągając i zluźniając na przemian trzymaną w rękach długą nitkę (wcześniej należy krążek na niej zakręcić, aby się zwinęła – rys. 4). Teraz trzeba wyciąć krążki barwne, przycinając je tak, aby można było je zakładać na krążek tekturowy. Przy pewnej staranności powinno się udać założyć nawet trzy krążki barwne naraz zachodzące na siebie tak, aby ich kolory widoczne były na powierzchni krążka tekturowego, a nitka obiegająca krążek zabezpieczała je przed odpadnięciem (rys. 5). Trzeba je zakładać na krążek po kolei, a następnie obracając jeden względem drugiego powstrzymać je częściowo jeden pod drugi. A teraz uwaga – właściwe doświadczenie, czyli

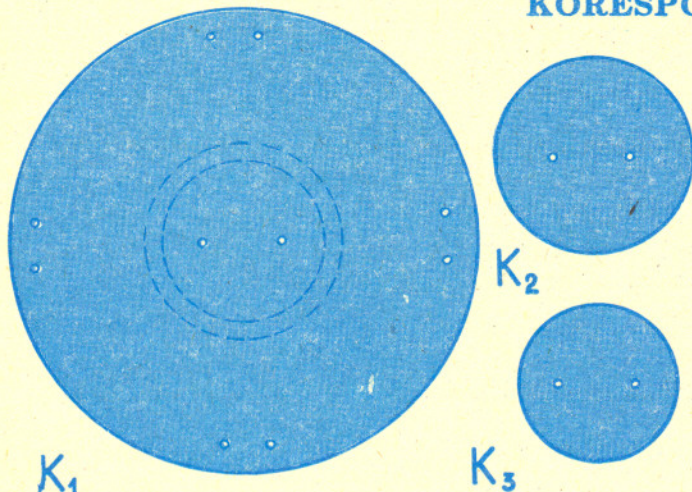
### Dobieramy kombinacje kolorów

Zaczynamy od trzech barw, które wybierzemy jako podstawowe: zielonej, niebieskiej i czerwonej (przednia okładka). Tak dobieramy proporcje widocznych części poszczególnych krążków barwnych, aby otrzymać po zmieszaniu (kręcąc całością) wrażenie bezbarwnej, neutralnie szarej powierzchni. Zapisujemy, jaką część pełnego kąta zajmowała przy tym każda z barw (można zmierzyć kątomierzem). Oczywiście, suma trzech tak wyznaczonych kątów wyniesie  $360^\circ$ . Udało się? Wyznaczone trzy kąty pozwolą nam wyznaczyć położenie punktu bezbarwnego na wykresie barwności. Tymczasem spróbujmy zająć się pozostałymi trzema krążkami z przedniej okładki. Do każdego z nich dobieramy dwie spośród trzech barw podstawowych tak, aby po zmieszaniu otrzymać neutralną szarość. Które dwie to umożliwi – trzeba zgadnąć lub ustalić metodą prób i błędów. W ten sposób sporządzimy tabelę, w której dla różnych trójek kolorów zapiszemy kąty dające zniesienie wrażenia barwy po zmieszaniu. A teraz analiza otrzymanych wyników, czyli

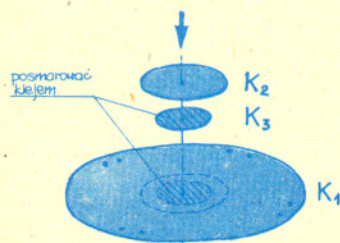
### Sporządzamy wykres barwności

Musimy w tym celu ustalić zasadę rozmieszczania na wykresie punktów odpowiadających mieszaninom kolorów. Najprościej jest z dwoma kolorami. Punkt  $M$  oznaczający mieszaninę kolorów  $A$  i  $B$ , którym na tarczy odpowiadały kąty  $\alpha$  i  $\beta$  będzie leżał na odcinku łączącym punkty  $A$  i  $B$ , w odległościach odwrotnie proporcjonalnych do wkładów kolorów  $A$  i  $B$  w mieszaninę, czyli do kątów  $\alpha$  i  $\beta$  (rys. 6)

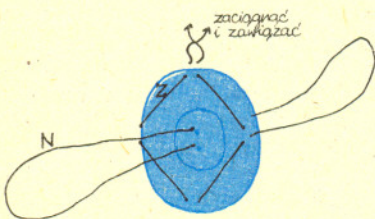
$$|MA| : |MB| = \beta : \alpha.$$



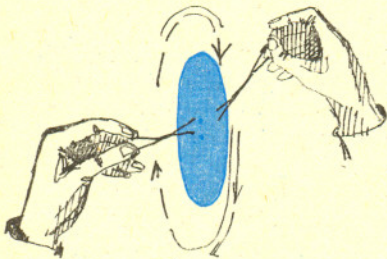
Rys. 1. Wzór krążków tekturowych do wycięcia.



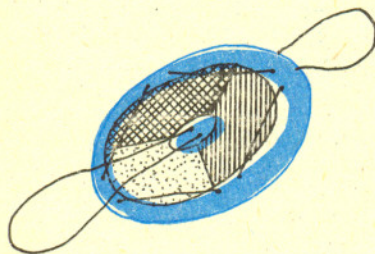
Rys. 2. Sklejanie krążków tekturowych.



Rys. 3. Nitka napędzająca  $N$  i zabezpieczająca  $Z$ .



Rys. 4



Rys. 5



Jeżeli chcemy do tego domieszać kolor  $C$  w ilości określonej przez kąt  $\gamma$ , stosujemy ponownie tę samą zasadę mieszając mieszaninę  $M$  (kąt  $\alpha + \beta$ ) z barwą  $C$  (kąt  $\gamma$ ). Wynikiem jest punkt  $O$  (rys. 7)

$$|MO| : |OC| = \gamma : (\alpha + \beta).$$

Zgodnie z tą zasadą przystępujemy do sporządzania wykresu. Zaczynamy od zaznaczenia na arkuszu papieru trzech punktów oznaczających trzy barwy podstawowe. Umieszczamy je w zasadzie dowolnie, starając się jednak, aby utworzony trójkąt nie był rozwartokątny. Następnie opisaną powyżej metodą wyznaczamy położenie punktu bezbarwnego korzystając z zapisanych w tabeli kątów określających bezbarwną mieszaninę trzech kolorów podstawowych.

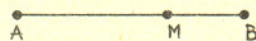
A teraz przechodzimy do ostatniej trudności: Na wykresie barwności wyznaczamy położenie punktów reprezentujących barwy krążków: pomarańczową, fioletową i żółtą. Jak? Myślę, że po przeczytaniu powyższego opisu nie powinno to być zbyt trudne.

Oczekujemy na wyniki Czytelników – tabele oraz wykresy barwności. Najlepsze nagrodzimy.

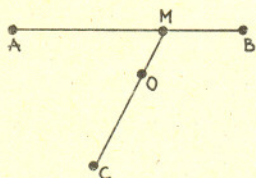
Redaguje doc. dr Jan GAJ

Listy prosimy przysyłać pod adresem:

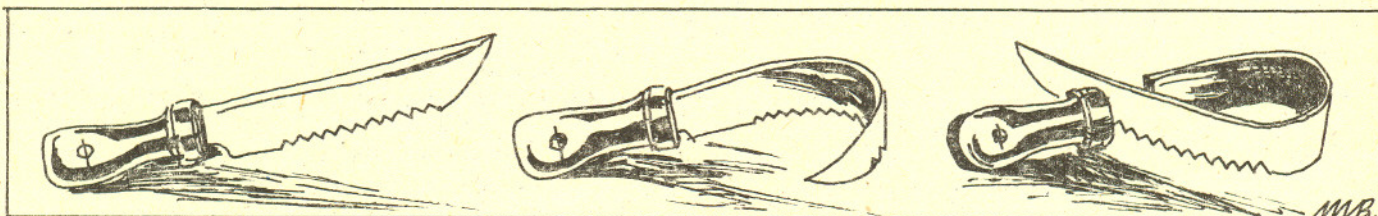
Korespondencyjny Klub Fizyków, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego  
ul. Hoża 69, 00-681 Warszawa.



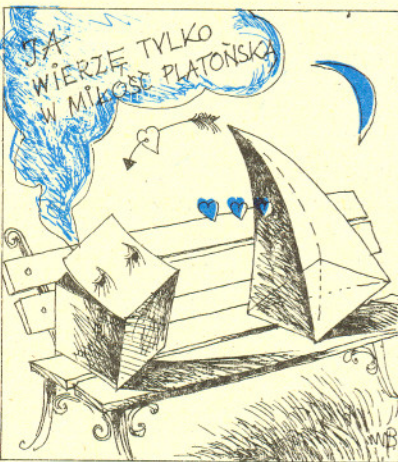
Rys. 6



Rys. 7



## Jak uogólnić twierdzenie Freudenthala – van der Waerdena



Wielościany wypukłe, których ściany są jednakowymi wielokątami foremnymi i których naroża są jednakowe, nazywa się bryłami platońskimi i jest ich z (dokładnością do rozmiarów) pięć.

Jeśli opuścimy warunek, by wielokąty foremne były jednakowe – otrzymujemy tzw. bryły archimedesowe. Jest ich 13 plus dwie nieskończone serie, przy czym jeden z tej trzynastki występuje w dwóch postaciach. Gdyby ktoś nie umiał ich odszukać – polecamy np. *Deltę* 12/1975 (o tych dwóch postaciach – w *Delcie* 2/1977).

Jeśli z kolei opuścimy warunek, by naroża były jednakowe (pozostawiając warunek jednakowości ścian) – otrzymamy wielościany równoforemnościenne. Jest ich 10. Fakt ten nie jest już taki oczywisty i łatwy w uzyskaniu jak poprzednie. Dwa z nich to sześciąt i dwunastościan foremny (a więc bryły platońskie). To, że pozostałych (mają one ściany będące trójkątami równobocznymi) jest akurat 8 (w tym trzy platońskie), orzeka twierdzenie Freudenthala – van der Waerdena. Już sam fakt, że są to nazwiska nie byle jakich matematyków, świadczy, iż nie jest to twierdzenie banalne (informacje o nim można znaleźć w *Delcie* 12/1975, a dość przystępny dowód – w *Delcie* 4/1984).

Banalne czy niebanalne – można spróbować dorobić do niego dalszy ciąg. Ile mianowicie jest wielościanów wypukłych mających ściany będące wielokątami foremnymi tylko dwóch rodzajów (np. trójkąty i czworokąty, trójkąty i pięciokąty, czworokąty i sześciokąty itd.)? Wśród wielościanów archimedesowych jest ich 10 plus dwie nieskończone serie. Serie te to graniastosłupy (dwa  $n$ -kąty i  $n$  kwadratów) i antygraniastosłupy (dwa  $n$ -kąty i  $2n$  trójkątów równobocznych). Żeby poprzednie pytanie miało sens, należy więc je poprawić: ile jest niearchimedesowych wielościanów wypukłych mających ściany będące wielokątami foremnymi dwóch rodzajów? A przecież można słowo „dwóch” zastąpić słowem „trzech”.

I tak dalej. Chociaż dalej robi się już naprawdę trudno – nie ma żadnego wielościanu archimedesowego o czterech i więcej rodzajach ścian. A czy są takie wielościany wypukłe o ścianach foremnych?

Opracował M. K.

**Rozwiązanie zadania F 294.**  
Oznaczmy przez  $x$  długość doby na Merkurym (mierzoną w dobach ziemskich). W czasie jednej ziemskiej doby Merkury obróci się wokół swojej osi o kąt  $360^\circ/59$  i jednocześnie przesunie się po swojej orbicie (w tę samą stronę) o kąt  $360^\circ/88$ . Różnica  $360^\circ/59 - 360^\circ/88$  określa kąt obrotu Merkurego względem Słońca w tym samym czasie. A zatem czas trwania doby merkuryskiej możemy znaleźć z zależności

$$\frac{360^\circ}{59} - \frac{360^\circ}{88} = \frac{360^\circ}{x}$$

skąd

$$x \approx 179.$$

P.S. Oczywiście, są niearchimedesowe wielościany wypukłe o ścianach foremnych dwóch rodzajów – np. ostrosłup czworokątny i ostrosłup pięciokątny.





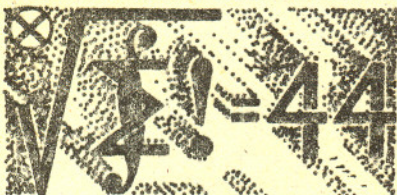


## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 7/1990

Przypominamy treść zadań:

206. Trójkąt  $ABC$  jest wpisany w okrąg  $\Omega$ .  $AK, BL, CM$  są trzema równoległymi cięciwami okręgu  $\Omega$ . Punkty  $P, Q, R$  są odpowiednio rzutami prostokątnymi punktów  $K, L, M$  na proste  $BC, CA, AB$ . Dowiedz, że:

- (a) proste  $KP, LQ, MR$  przecinają się w punkcie leżącym na  $\Omega$ ;  
 (b) punkty  $P, Q, R$  leżą na prostej równoległej do trzech danych cięciw.  
 205. Wyznaczyć najmniejszy wykładnik naturalny  $n \geq 2$ , dla którego zapis dziesiętny liczby  $44^n$  rozpoczyna się i kończy grupą cyfr 44.



Czołówka ligi zadaniowej  
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 197 (WT=2,50) i 198 (WT=1,84)  
z numeru 10/1989

Adam Czornik	- Bytom	43,59pkt.
Kazimierz Serbin	- Sanok	43,36pkt.
Andrzej Krzysztofowicz	- Gdańsk	43,17pkt.
Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	41,95pkt.
Krzysztof Zawisławski	- Warszawa	41,45pkt.
Henryk Kornacki	- Augustów	41,29pkt.
Dariusz Rybacki	- Kraśnik	40,18pkt.

205. Użyjemy języka liczb zespolonych. Zakładamy, że  $\Omega$  jest okręgiem jednostkowym na płaszczyźnie zespolonej, punkty  $A, B, C$  są reprezentowane przez liczby zespolone  $a, b, c$  o module 1, a wspólny kierunek rozważanych cięciw jest „pionowy” (równoległy do osi urojonej). Punkty  $K, L, M$  są wówczas reprezentowane (odpowiednio) przez liczby  $\bar{a} = 1/a, \bar{b} = 1/b, \bar{c} = 1/c$

Niech  $z$  będzie liczbą reprezentującą punkt  $R$ . Punkt ten leży na prostej  $AB$ , a odcinek  $MR$  jest do niej prostopadły. Istnieją więc liczby rzeczywiste  $t, s$ , takie, że

$$(1) \quad z = a + t(b - a) \quad \text{oraz} \quad z = \frac{1}{c} + is(b - a).$$

Przez przyrównanie prawych stron otrzymujemy równość

$$t - is = \frac{\frac{1}{c} - a}{b - a}.$$

Oznaczając liczbę  $t - is$  przez  $w$  mamy więc

$$t = \operatorname{Re} w = \frac{1}{2}(w + \bar{w}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{1}{c} - a}{b - a} + \frac{c - \frac{1}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{1}{c} - a}{b - a} + \frac{b - abc}{b - a} \right),$$

co po podstawieniu do pierwszej równości (1) daje

$$(2) \quad z = \frac{1}{2} \left( a + b + \frac{1}{c} - abc \right).$$

Niech  $X$  będzie punktem reprezentowanym przez liczbę  $-abc$ ; oczywiście,  $X \in \Omega$ . Wykażemy, że punkt ten leży na prostej  $MR$ . Wystarczy w tym celu sprawdzić, że wektory  $\overrightarrow{XM}$  i  $\overrightarrow{XR}$  (reprezentowane odpowiednio przez liczby zespolone  $(1/c) + abc$  oraz  $z + abc$ ) są równoległe, czyli że iloraz tych liczb jest liczbą rzeczywistą. Zgodnie z (2) mamy

$$(3) \quad \frac{z + abc}{\frac{1}{c} + abc} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a + b + \frac{1}{c} + abc}{\frac{1}{c} + abc} = \frac{1}{2}(1 + v),$$

gdzie

$$v = \frac{a + b}{\frac{1}{c} + abc} = \frac{(a + b)/ab}{(\frac{1}{c} + abc)/ab} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{abc} + c} = \bar{v}.$$

Zatem istotnie iloraz (3) jest liczbą rzeczywistą, czyli  $X$  jest punktem prostej  $MR$ . W określeniu punktu  $X$  (jako wyznaczonego przez liczbę  $-abc$ ) żadna ze zmiennych nie jest wyróżniona. Zatem  $X$  leży także na prostych  $KP$  i  $LQ$ . To dowodzi tezy (a). Dla dowodu (b) zauważmy, że z (2) wynika równość

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (a + b + c - abc).$$

To wyrażenie jest niezmiennicze względem permutacji symboli  $a, b, c$ . Zastępując  $z$  przez liczbę reprezentującą punkt  $P$  lub punkt  $Q$  otrzymalibyśmy tę samą wartość części rzeczywistej. To znaczy, że punkty  $P, Q, R$  leżą na jednej prostej „pionowej”.

206. Najpierw sprawdzamy, że

$$44^n \begin{cases} \equiv 44 \pmod{100} & \text{dla } n = 11 \\ \not\equiv 44 \pmod{100} & \text{dla } n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. \end{cases}$$

Stąd wniosek, że w ciągu  $(44^n)$  liczby o jednakowej dwucyfrowej końcówce występują cyklicznie, z okresem 10. W szczególności końcówkę ...44 otrzymujemy (tylko) dla wykładników postaci  $n = 10k + 1$ .

Poszukujemy więc najmniejszej naturalnej wartości  $k \geq 1$ , dla której istnieje wykładnik naturalny  $m$ , taki, że

$$44 \cdot 10^m < 44^{10k+1} < 45 \cdot 10^m.$$

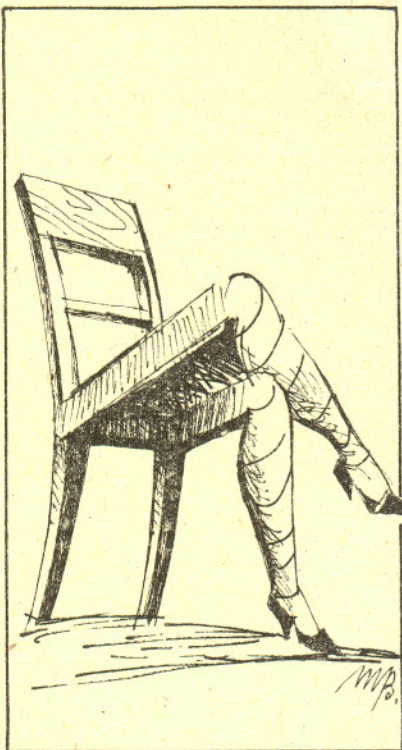
W języku logarytmów dziesiętnych jest to równoważne warunkowi, by mantysa liczby  $k\alpha$  należała do przedziału  $(0; \delta)$ , gdzie  $\alpha = 10 \log 44$ ,  $\delta = \log(45/44)$ . Korzystając z oszacowań

$$16,4345 < \alpha < 16,43453, \quad 0,009 < \delta < 0,01$$

stwierdzamy (wystarczy do tego zwykły kalkulator kieszonkowy), że minimalną wartością  $k$ , spełniającą ten warunek, jest  $k = 145$ :

$$2383 < 145\alpha < 2383,007.$$

Wobec tego szukanym wykładnikiem jest  $n = 1451$ .





# DRIBIAZGI

P.A.M. Diracowi, jednemu ze współtwórców mechaniki kwantowej i laureatowi Nagrody Nobla, przypisuje się, że twierdził on w pewnym momencie, iż proton jest antycząstką elektronu. Jest to o tyle dziwne, że masy protonu i elektronu są drastycznie różne, podczas gdy teoria Diraca przewidywała, że muszą być one równe. A oto, jak wyjaśniał tę niekonsekwencję sam Dirac. W okresie, gdy ukazała się jego praca o antycząstkach, Dirac uczęszczał regularnie na seminarium, którego innym uczestnikiem był Piotr Kapica (również późniejszy noblista). Kapica co tydzień zadreślał Diraca pytaniami, gdzie jest antycząstka elektronu, aż ten któregoś dnia odpowiedział dla świętego spokoju: to jest proton. Cóż, jak widać, gdy jest się światowej sławy autorytetem naukowym, trzeba liczyć się z każdym słowem.

W 1670 r. gołym okiem widziana była gwiazda nowa, skatalogowana obecnie jako gwiazda zmienna CK Vul (Lisa). Jednak dopiero kilka lat temu grupa amerykańskich astronomów zdołała zaobserwować pozostałość po rozblysku sprzed trzystu lat – słabą mgławicę wokół tej gwiazdy promieniującą głównie w linii wodorowej H $\alpha$ .

Nie byłoby w tym nic niezwykłego, gdyby nie fakt, że CK Vul okazała się najślabszą ze znanych dotychczas nowych – mamy tu na myśli jasność gwiazdy między wybuchami. Bowiem gwiazda tego typu to układ podwójny, w którym jeden ze składników, biały karzeł, pobiera od swego towarzysza materię tak długo, aż na powierzchni białego karła nastąpi wybuch termojądrowy. Zjawisko to, rozblysk nowej, powtarza się z okresem od 1 000 do 100 000 lat. Otóż jasność CK Vul (między wybuchami) jest rzędu 1/100 jasności Słońca, podczas gdy u większości znanych obiektów wynosi około 1 jasności Słońca. Może mieć to niebagatelne znaczenie. Mianowicie, jeżeli CK Vul nie jest gwiazdą zbyt osobliwą, może to oznaczać, że wielu innych gwiazd tego typu po prostu nie widzimy. Inaczej mówiąc, gęstość przestrzenna nowych jest prawdopodobnie znacznie niedoceniana, a to powinno zostać uwzględnione w teorii ewolucji gwiazd.

Zdolność akomodacyjna sprawnego oka ludzkiego wynosi około 15 dioptrii. Jest to bardzo mało w porównaniu np. z kormoranem (do 50 dioptrii), ale bardzo dużo w zestawieniu np. z sową (4, a u niektórych tylko 2 dioptrie).

Opierając się na pomiarach temperatury z lat 1856–1886, przeprowadzonych w różnych rejonach kuli ziemskiej, naukowcy z Massachusetts Institute of Technology (USA) wykazali, że klimat naszej planety podlega cyklicznym zmianom z okresem równym 22 lata, tj. podwojonemu okresowi cyklu aktywności słonecznej. Przy tym maksima aktywności słonecznej zbiegają się z ekstremami cyklu klimatycznego. Informację tę możemy wykorzystać do postawienia prognozy pogody. Bieżący rok – rok maksimum aktywności Słońca, powinien być stosunkowo chłodny(!). Najbliższa dekada przyniesie zaś niewielkie ocieplenie. Może warto sprzedać, póki co, sprzęt narciarski?

Energetyka jądrowa budzi na całym świecie wiele emocji. Jej przeciwnicy często powołują się na wzrost zachorowań na białaczkę i raka wśród ludności (w szczególności, wśród dzieci) zamieszkanej w pobliżu elektrowni jądrowych. Ostatnie badania, wykonane w Wielkiej Brytanii, wydają się temu przeczyć. Co prawda, śmiertelność z powodu białaczki jest w sąsiedztwie elektrowni atomowych wyższa od średniej, ale identyczny wynik otrzymano dla obszarów, które były tylko rozważane jako możliwe bądź przyszłe miejsca budowy takich elektrowni. Być może więc za wzrost zachorowań na białaczkę odpowiedzialny jest nieznan czynnik skorelowany z przyczynami, dla których wybrano badane rejony jako właściwe do lokalizacji elektrowni jądrowych.

Promieniowanie Słońca w decydujący sposób wpływa na ziemski klimat. Systematyczne zmiany promieniotwórczości nawet rzędu 0,5 % w ciągu 100 lat mogą spowodować drastyczną zmianę klimatu. Pomiar całkowitego promieniotwórczości Słońca przeprowadzone w okresie 5 lat (1980 – 1985) przez stację Solar Maximum Mission wskazują na stały spadek promieniotwórczości rzędu 0,0019 % na rok. Być może, że zaobserwowane zmiany są związane z cykliczną zmianą aktywności magnetycznej Słońca.

Ostatnie wyniki otrzymane w CERNie, tj. Europejskim Laboratorium Badań Jądrowych, w Genewie, wykazują, że liczba różnych typów neutrin wynosi trzy (patrz artykuł M. Górskiego). Liczba ta zgadza się znakomicie z przewidywaniami kosmologicznymi opartymi na teorii Wielkiego Wybuchu. Podstawą tych przewidywań jest obserwacja Hoyla i Taylera z 1964 roku, że ilość helu we Wszechświecie zależy silnie od stosunku liczb protonów i neutronów w okresie ewolucji, w którym przebiegała synteza jądrowa. W bardzo wczesnym etapie ewolucji Wszechświata oba rodzaje cząstek były równoliczne – znajdowały się w stanie równowagi cieplnej. Po upływie około 1 sekundy od Wielkiego Wybuchu temperatura spadła na tyle ( $\approx 10^{10}$  K), że równowaga cieplna między protonami i neutronami została naruszona i cięższych neutronów zaczęło ubywać. Proces ten trwał do chwili, gdy temperatura osiągnęła wartość równą energii wiązań jądrowych i możliwa stała się synteza helu. Moment rozpoczęcia syntezy helu i czas jej trwania zależy od tempa ekspansji Wszechświata, a ta – od średniej gęstości Wszechświata. I tu właśnie kluczowa staje się liczba neutrin – każdy ich rodzaj wnosi swój wkład do gęstości. Obserwacje wykazują, że hel stanowi około 1/4 masy cząstek przestrzeni międzygwiazdowej, co pozwoliło kosmologom obliczyć, że liczba neutrin wynosi prawdopodobnie 3, a z pewnością nie więcej niż 4.

Odnawialne źródła energii związane ze Słońcem, wiatrem czy spadkiem rzek nie są tak znowu mało popularne, jak by się mogło wydawać. Okazuje się, że w roku 1988 światowe zamówienia na budowę małych hydroelektrowni (o mocy mniejszej niż 10 MW każda) opiewały na sumaryczną moc 17 000 GW, podczas gdy zamówienia na budowę elektrowni jądrowych opiewały na zaledwie 3,6 GW. Pod koniec 1989 r. około 6 tys. rodzin w Hiszpanii i 15 tys. w USA czerpało energię elektryczną wyłącznie z baterii słonecznych. Około 5 mln Japończyków każdego dnia bierze prysznic lub kąpiel używając do tego wody podgrzanej energią słoneczną. Średnia cena ognia fotowoltaicznego spadła 14 razy w ciągu 13 lat, a te ostatnio skonstruowane w Kalifornii mają wydajność ponad 30 %. Na koniec warto wspomnieć o pasterzach w rejonie Sinkiang w Chinach, którzy noszą ze sobą składane stuwatowe wiatraki. Czy nas też to czeka?



dr Maciej GÓRSKI



## Rozwiązanie zadania M 580.

Istnieje co najwyżej jeden wielomian spełniający warunki zadania, bo gdyby istniały dwa różne, np.  $P$  i  $Q$ , to mielibyśmy nieszerowy wielomian  $P - Q$  stopnia nie większego od  $n$  mający  $n + 1$  pierwiastków. Niech

$$R(x) =$$

$$= x + \frac{1}{(n+1)!} (0-x)(1-x)\dots(n-x).$$

Ponieważ  $R(-1) = 0$ , więc na mocy twierdzenia Bezout  $R(x) = S(x)(x+1)$ , gdzie  $S(x)$  jest wielomianem stopnia  $n$ . Ale

$$S(k) = \frac{R(k)}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1}$$

dla  $k = 0, 1, \dots, n$ , stąd

$$S = P \text{ i } P(n+1) = \frac{n+1+(-1)^{n+1}}{n+2}.$$



## Rozwiązanie zadania M 582.

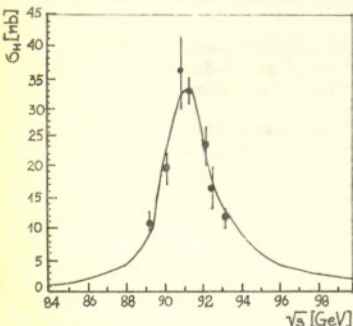
Wykażemy indukcyjnie, że po wykonaniu  $m$  operacji  $S$  otrzymamy układ samych jedynek. Dla  $n = 1$  jest to oczywiste. Zauważmy, że po dwukrotnym wykonaniu operacji  $S$  otrzymamy układ:

$$T(A) = S(S(A)) =$$

$$= (a_1 a_2^2 a_3, a_2 a_3^2 a_4, \dots, a_m a_1^2 a_2) =$$

$$= (a_1 a_3, a_2 a_4, \dots, a_m a_2),$$

w którym kolejne liczby stojące na miejscach nieparzystych równają się kolejnym liczbom układu  $S(a_1, a_3, \dots, a_{m-1}) = (a_1 a_3, \dots, a_{m-1} a_1)$  i analogicznie: kolejne liczby stojące na miejscach parzystych pokrywają się z kolejnymi liczbami układu  $S(a_2, a_4, \dots, a_m) = (a_2 a_4, \dots, a_m a_2)$ . Stąd wniosek (z założenia indukcyjnego), że po wykonaniu  $m/2$  operacji  $T$  otrzymamy zarówno na parzystych, jak i na nieparzystych miejscach jedynki.



Od połowy sierpnia 1989 roku w Europejskim Ośrodku Badań Jądrowych (CERN) w Genewie działa wielki akcelerator LEP (ang. Large Electron-Positron collider, czyli wielki akcelerator przeciwbieżnych wiązek elektronowej i pozytonowej), w którym badane są zderzenia elektronów i pozytonów o energiach około 45 GeV. Przy akceleratorze prowadzone są cztery eksperymenty, a w jednym z nich (zwanym DELPHI) biorą udział fizycy z Krakowa i Warszawy.

W zderzeniach  $e^+e^-$  w LEP-ie produkowane są obficie bozony pośredniczące oddziaływań słabych,  $Z^0$ , o masie 91 GeV. Cząstka  $Z^0$  żyje zaledwie około  $10^{-24}$  sekundy, więc bezpośredni pomiar jej czasu życia nie jest możliwy. Ale z zasady nieoznaczoności Heisenberga wiemy, że niepewności czasu odpowiada niepewność energii (a więc i masy) – dlatego w eksperymencie nie obserwuje się jednej określonej wartości masy, ale pewien jej rozkład. Szerokość  $\Gamma$  tego rozkładu jest miarą nieoznaczoności masy i dla cząstki  $Z^0$  wynosi około 2,5 GeV. Dokładny pomiar tej szerokości ma kapitalne znaczenie dla fizyki cząstek elementarnych.

Od kilkunastu lat fizycy sądzą, że podstawowymi składnikami materii są cząstki elementarne, zwane kwarkami i leptonami, zgrupowane w rodziny. Każda rodzina składa się z neutrina (cząstki bez ładunku i o małej lub nawet zerowej masie), z leptonu naładowanego oraz z dwóch kwarków o ładunkach  $-1/3$  i  $+2/3$ . Na razie znane są trzy takie rodziny:

I.	II.	III.
neutrino elektronowe $\nu_e$	neutrino mionowe $\nu_\mu$	neutrino taonowe $\nu_\tau$
elektron $e^-$	mion $\mu^-$	lepton tau $\tau$
kwark górny $u$	kwark powabny $c$	kwark top („szczytowy”) $t$
kwark dolny $d$	kwark dziwny $s$	kwark piękny $b$

W ostatniej rodzinie nie odkryto jeszcze jednego kwarka (top), przypuszczalnie z powodu jego zbyt dużej masy. Masy naładowanych członków każdej następnej rodziny są dużo większe niż w poprzedniej. Obecnie istniejąca teoria cząstek elementarnych nie wypowiada się na temat możliwej liczby rodzin, a badania doświadczalne nie pozwalają wykryć cząstek o zbyt dużej masie, gdyż wymagałoby to akceleratorów większych niż te, którymi dysponujemy. Jednak fakt, że znane do tej pory neutrina są bardzo lekkie, pozwala mieć nadzieję, że sytuacja ta powtórzy się i w dalszych rodzinach, gdyby takie istniały. Neutrina należące do tych rodzin mogłyby powstawać w rozpadach bozonu  $Z^0$ . Niestety, bezpośrednio ich wykrycie doświadczalne jest wykluczone ze względu na bardzo małe prawdopodobieństwo oddziaływania neutrin w detektorze. Ich istnienie wpłynęłoby jednak na czas życia, a zatem i na szerokość rozkładu masy  $Z^0$ . Jeżeli wyobrazimy sobie zbiornik wypełniony wodą, z pewną (nie znaną) liczbą otworów, to pomiar czasu opróżniania zbiornika może nam powiedzieć coś o liczbie otworów. Im więcej otworów, tym szybciej wycieka woda. W przypadku rozpadu bozonu  $Z^0$  (i, oczywiście, innych cząstek) czas życia jest tym krótszy, im większa jest liczba dostępnych kanałów rozpadu. A im krótszy jest czas życia, tym większa jest szerokość  $\Gamma$ . Należy więc ją zmierzyć, a wyniki porównać z przewidywaniami teorii dla trzech i większej liczby rodzin.

W eksperymentach prowadzonych w LEP-ie mierzono intensywność produkcji  $Z^0$  w zależności od energii zderzających się wiązek. Typowy przykład przypadku wyprodukowania, a następnie rozpadu  $Z^0$  na dwie silnie skolimowane grupy cząstek pokazano na rysunku z tylnej okładki. Szerokość wyznacza się przez dopasowanie do znanego wzoru teoretycznego zależności intensywności produkcji od dostępnej energii. Pozwala to ocenić liczbę lekkich (tj. o masie mniejszej niż połowa masy  $Z^0$ ) neutrin na  $3,12 \pm 0,16$ . Na rysunku obok pokazano mierzone wartości intensywności produkcji  $Z^0$  wraz z dopasowaną krzywą teoretyczną.

Możemy zatem z dużą dozą pewności stwierdzić, że pewien etap poznawania struktury materii mamy już za sobą. Jeżeli następna rodzina leptonowo-kwarkowa istnieje, to jej neutrina musiałyby być bardzo ciężkie ( $m_\nu > 45$  GeV), co wydaje się mało prawdopodobne. Do rozwiązania pozostało jednak jeszcze bardzo wiele problemów, które będą badane dalej w LEP-ie oraz w innych planowanych lub budowanych obecnie akceleratorach.