

KAŻDY MOŻE BYĆ KOLPORTEREM !!!

Delta tańsza o 25 %

Kupując 150 egzemplarzy *Delty* płacisz tylko 1.500,- zł za numer.
Przesyłając pod adresem redakcji dowód wpłaty
wielokrotności sumy 225 tysięcy złotych
otrzymasz tyleż paczek po 150 egzemplarzy
najbliższego numeru *Delty*.

Nasze konto:

PBK VIII OM W-wa 370028-4170

Uniwersytet Warszawski, redakcja miesięcznika *Delta*

„Delta”

matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Edukacji Narodowej

Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga
dr Lidia Goettig – z-ca red. nacz.
mgr Maria Kapuścińska
mgr Krystyna Kordos – sekr. red.
dr hab. Marek Kordos – red. nacz.
dr Paweł Krawczyk
dr Tomasz Kwast
mgr Anna Rudnik
dr Jerzy Ryll
Katarsyna Słomka
mgr Joanna Udalska

Ilustrowała Maria Brykalska-Karłowska

Adres Redakcji

Centrum Informatyczne UW
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa
tel. 20-03-81 wew. 841

Wydawca:

Uniwersytet Warszawski
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa

Nakład 18 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.,
2,50 ark. druk.,
papier offsetowy V kl. 70 g.
Wydrukowano
w Zakładach Graficznych
RSW „Prasa-Książka-Ruch”
w Warszawie, ul. Srebrna 18

Skład systemem TeX
wykonała redakcja.

Charakterystyka Eulera
jest niezmiennikiem
topologicznym
mgr Danuta Ciesielska
i mgr Sławomir Cynk str. 1

Zadanie z XXX
Międzynarodowej Olimpiady
Matematycznej str. 3

Zadania str. 3

Komputer, papierowe kulki
i fraktale
dr Paweł Krawczyk str. 4

Korespondencyjny Klub
Fizyków str. 7

Mała Delta str. 8

Patrz w niebo str. 9

Tożsamości Eulera
mgr Jarosław Górnicki str.10

Grawitacyjne laboratoria
doc. dr Tadeusz Jarzębowski str.12

Klub 44 str.14

Drobizgi str.16

Kącik Prac Uczniowskich str.17

Komitet Redakcyjny

dr Maciej Bryński
dr Bogdan Cichocki
dr Antoni L. Dawidowicz
dr Alicja Derkowska
doc.dr Jan A. Gaj
doc.dr Bolesław Gleichgewicht
prof.dr Tomasz Hofmokr – v-przewodniczący
doc.dr Tadeusz Jarzębowski
doc.dr Marcin Kubiak
mgr Andrzej Makowski
dr Zbigniew Plochocki
dr Jan Rempala
prof.dr Konrad Rudnicki
prof.dr Grzegorz SitarSKI
prof.dr Józef I. Smak
prof.dr Kazimierz Stępień
prof.dr Mieczysław Subotowicz
doc.dr Andrzej Szymacha
doc.dr Aniela Wolska
prof.dr Andrzej Woszczyk
prof.dr Wojciech Żakowski –
przewodniczący

WARUNKI PRENUMERATY

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na I kwartał 1991 r. wynosi 5 700,- zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmuje:
 - oddziały RSW właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora
 - odbioru zamówionych egzemplarzy dokonuje prenumerator w wyznaczonych punktach sprzedaży lub w inny, uzgodniony sposób,
 - urzędy pocztowe i listonosze – od prenumeratorów z terenów wiejskich lub innych miejscowości, w których nie ma oddziałów RSW, a w miastach tylko od osób niepełnosprawnych – poczta zapewnia dostawę zamówionych egzemplarzy pod wskazany adres pod warunkiem uiszczenia dodatkowej opłaty za każdy doręczany egzemplarz – opłata wynosi 250,- zł od egzemplarza,
 - Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział W-wa 370044-1195-139-11 – tylko od prenumeratorów zlecających dostawę za granicę.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
 - na kraj – do 20 XI na I kwartał roku następnego
do 20 II na II kwartał
do 20 V na III kwartał
do 20 VIII na IV kwartał
 - na zagranicę – do 31 X na I kwartał
oraz do 1 dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarza zł 2 000,-

Charakterystyka Eulera jest niezmiennikiem topologicznym

mgr Danuta CIESIELSKA i mgr Sławomir CYNK

Większość Czytelników spotkała się już zapewne z następującą definicją:

Figury geometryczne A i B nazywamy *homeomorficznymi*, jeżeli istnieje odwzorowanie $f: A \rightarrow B$, takie, że

- (i) f jest ciągle,
- (ii) f jest wzajemnie jednoznaczne,
- (iii) odwzorowanie odwrotne do f jest ciągle.

Odwzorowanie f mające własności (i) – (iii) nazywamy *homeomorfizmem*.

Najprostsze przykłady figur homeomorficznych to takie figury geometryczne, z których jedną można przekształcić na drugą za pomocą wyginania i rociągania, ale bez rozrywania i sklejania. Na rysunku 1 przedstawiamy trzy przykłady tego rodzaju: brzeg kwadratu i okrąg, kwadrat i koło oraz pobocznica walca i powierzchnię boczną sześcianu.

W podobny sposób można wykazać, że powierzchnia sześcianu jest homeomorficzna ze sferą; wystarczy w tym celu wykonać sześcian z elastycznego materiału, a następnie napompować (podobnie jak piłkę).

Nie wszystkie przykłady są jednak tak proste. Można udowodnić, że okrąg jest homeomorficzny z węzłem szwanym koniczynką (rys. 2). Tymczasem aby przekształcić węzeł na okrąg (czyli rozwiązać węzeł), należy najpierw go rozciąć, następnie rozplątać i na końcu skleić z powrotem.

Oczywiście, aby wykazać, że dwie figury są homeomorficzne, wystarczy wskazać przykład homeomorfizmu między nimi (tak jak to przed chwilą robiliśmy). Znacznie trudniej jest dowieść, że dwie figury homeomorficznymi nie są. Jednym ze sposobów postępowania w tej sytuacji jest znalezienie jakiejś cechy, która jest jednakowa dla dowolnych dwóch figur homeomorficznych, ale różna dla figur przes nas badanych. Własność jednakową dla dowolnych dwóch figur homeomorficznych nazywamy *niezmiennikiem topologicznym*.

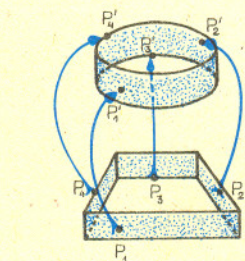
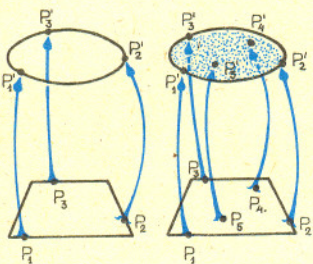
Prześledźmy opisany wyżej sposób postępowania na kilku przykładach; poznamy przy okazji kilka prostych niezmienników topologicznych.

Punkt i prosta. Ponieważ każdy homeomorfizm jest bijekcją, więc dowolne dwie figury homeomorficzne mają tyle samo elementów (liczba elementów figury geometrycznej jest niezmiennikiem topologicznym). Ale zbiór złożony z jednego punktu ma jeden element, a prosta ma ich nieskończenie wiele – figury te nie są więc homeomorficzne.

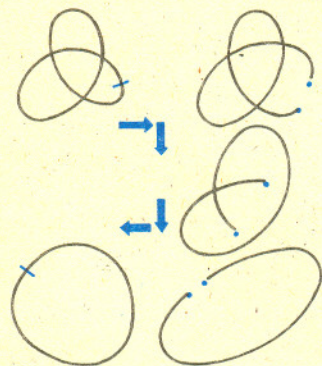
Prosta i dwie proste równoległe. Prosta jest figurą geometryczną złożoną z jednego „kawałka”, natomiast dwie proste równoległe to figura złożona z dwóch „kawałków”. „Kawałki”, z których zbudowana jest figura geometryczna, noszą nazwę *składowych spójnych*; figury mające tylko jedną składową spójną (składające się z jednego „kawałka”) – nazwę *figur spójnych*. Można wykazać, że homeomorfizm przekształca składowe spójne na składowe spójne, a zatem figury homeomorficzne mają tyle samo składowych spójnych (liczba składowych spójnych jest niezmiennikiem topologicznym). Ale, jak zauważyliśmy przed chwilą, prosta jest figurą spójną, a druga badana figura ma dwie składowe. Oznacza to, że figury te nie są homeomorficzne.

Obydwa poznane do tej pory niezmienniki są wprawdzie bardzo proste, ale ich skuteczność jest niewielka; żaden z nich nie pomoże nam np. w wykazaniu, że odcinek nie jest homeomorficzny z brzegiem kwadratu. Aby więc wykazać, że te dwie figury rzeczywiście nie są homeomorficzne, musimy użyć nowego niezmiennika topologicznego. Okazuje się, że doskonale do tego celu nadaje się charakterystyka Eulera. Charakterystykę Eulera definiujemy dla dowolnej figury geometrycznej będącej sumą mnogościową skończonej liczby punktów, odcinków oraz wielokątów wypukłych (figury, mające opisaną własność, będziemy nazywać *wielościanami*). Charakterystyką Eulera wielościanu P nazywamy liczbę całkowitą $\chi(P) = W - K + S$, gdzie W oznacza liczbę wierzchołków, K – krawędzi, a S ścian wielościanu P .

Homeomorfizm (z gr.):
homeo – jednakowy, podobny;
morphé – kształt.



Rys. 1



Rys. 2

O charakterystyce Eulera pisaliśmy już w *Delcie 10/1989*.

Charakterystykę Eulera można również definiować dla figur znacznie bardziej skomplikowanych niż wielościany topologiczne. Definicja taka wymaga jednak użycia skomplikowanych metod topologicznych i traci geometryczny charakter.

Dla lepszej ilustracji obliczmy charakterystykę Eulera kilku wielościanów (rys. 3).

Dla nas najważniejsze jest to, że charakterystyka Eulera jest niezmiennikiem topologicznym, czyli że zachodzi twierdzenie:

Twierdzenie 1. Jeżeli wielościany P i Q są homeomorficzne, to $\chi(P) = \chi(Q)$.

Korzystając z tego twierdzenia możemy łatwo dowiedzieć, że odcinek nie jest homeomorficzny z brzegiem kwadratu. Wystarczy w tym celu przypomnieć sobie, że charakterystyka Eulera odcinka jest równa 1, a brzegu kwadratu - 0 (rys. 3). W podobny sposób możemy wykazać, że kwadrat nie jest homeomorficzny z brzegiem sześcianu.

Co prawda, charakterystykę Eulera zdefiniowaliśmy jedynie dla „wielościanów”, czyli dla bardzo wąskiej klasy figur geometrycznych, jednak dzięki twierdzeniu 1 można jej używać przy badaniu znacznie bardziej skomplikowanych figur. Będziemy przy tym wykorzystywać następującą własność relacji „bycia figurami homeomorficznymi” (zwaną przechodnością):

Jeżeli figura A jest homeomorficzna z figurą B , a B jest homeomorficzna z figurą C , to również A jest homeomorficzna z C .

Niech teraz W będzie dowolną figurą homeomorficzną z pewnym wielościanem (figury o tej własności nazywać będziemy *wielościanami topologicznymi*). Dowolne dwa wielościany P_1 i P_2 homeomorficzne z W są (na mocy własności przechodności) homeomorficzne między sobą, a zatem mają równe charakterystyki Eulera (twierdzenie 1). Możemy więc przyjąć następującą definicję:

Charakterystyką Eulera wielościanu topologicznego nazywamy charakterystykę Eulera dowolnego wielościanu z nim homeomorficznego.

Dla lepszej ilustracji obliczmy charakterystykę Eulera kilku prostych wielościanów topologicznych:

Okrąg. Jak już zauważyliśmy, okrąg jest homeomorficzny z brzegiem kwadratu, więc jego charakterystyka Eulera jest równa 0.

Koło. Jest homeomorficzne z kwadratem, zatem jego charakterystyka Eulera jest równa 1.

Sfera. Jest homeomorficzna z brzegiem sześcianu, zatem $\chi = 2$.

Pobocznica walca. Podobnie jak dla powierzchni bocznej sześcianu: $\chi = 0$.

Wstęga Möbiusa. Z rysunku 4 wynika, że $\chi = 0$.

W podobny sposób można obliczać charakterystykę Eulera coraz bardziej skomplikowanych wielościanów topologicznych. Dla nas najważniejsze jest to, że z własności przechodności relacji „bycia figurami homeomorficznymi” oraz z twierdzenia 1 wynika, że również taka „uogólniona” charakterystyka Eulera jest niezmiennikiem topologicznym, czyli że zachodzi następujące twierdzenie:

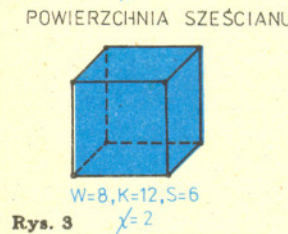
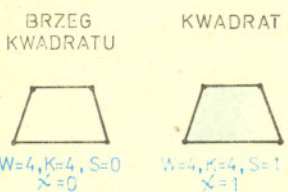
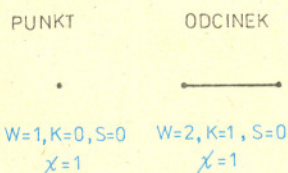
Twierdzenie 2. Jeżeli wielościany topologiczne P i Q są homeomorficzne, to $\chi(P) = \chi(Q)$.

Korzystając z tego twierdzenia i wcześniejszych obliczeń możemy stwierdzić, że okrąg nie jest homeomorficzny z odcinkiem oraz że sfera nie jest homeomorficzna z kołem.

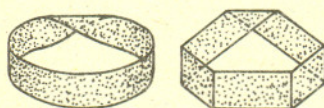
Warto jednak w tym miejscu zwrócić uwagę na to, że dwie figury geometryczne mogą mieć równe charakterystyki Eulera, a mimo to nie być homeomorficzne. Na przykład zarówno wstęga Möbiusa, jak i pobocznica walca mają charakterystykę Eulera równą 0, a mimo to nie są homeomorficzne. Dowód tego faktu jest prosty i wymaga użycia kolejnego niezmiennika topologicznego, zwanego jednostronnością powierzchni. Pobocznica walca ma dwie strony, gdyż można ją pomalować dwoma różnymi kolorami, jak na rysunku 5, a wstęga Möbiusa tej własności nie ma (jest powierzchnią jednostronną).

Niestety, często się zdarza, że badając coraz bardziej skomplikowane figury musimy używać coraz subtelniejszych niezmienników. Ciekawych niezmienników topologicznych dostarcza jeden z działów matematyki - topologia algebraiczna.

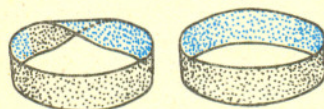
Dlaczego więc zajmujemy się charakterystyką Eulera, zamiast poszukać jakiegoś lepszego niezmiennika topologicznego? Powody są dwa. Po pierwsze - jest ona wyjątkowo prostym niezmiennikiem topologicznym. A po drugie - mimo ujawnionej wady jest stosunkowo skuteczna - w szczególności umożliwia pełną klasyfikację dwustronnych powierzchni bez brzegu.



Rys. 3



Rys. 4 $W=10, K=15, S=5$
 $\chi=0$



Rys. 5

O innych niezmiennikach można przeczytać w artykule K. Ciesielskiego i Z. Pogody „Topologia algebraiczna - niezwykle połączenie dziedziny” (Problemy 12/1988).

Bardzo łatwe, jeśli się już zobaczy

Zadanie jest takie:

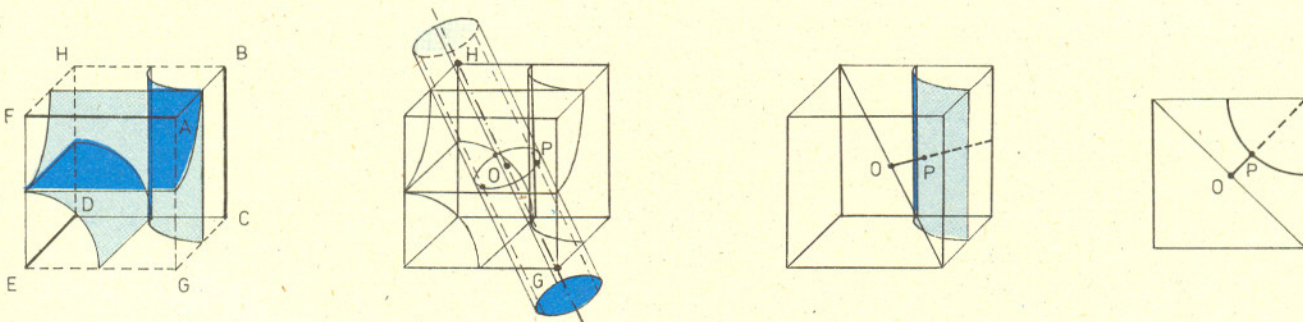
Jaki jest największy promień r walca, który zmieści się w otworze, powstałym pomiędzy trzema, parami stycznymi, walcami o promieniu R , mającymi osie o kierunkach parami prostopadłych.

Jak to widać na okładce (i na rysunku poniżej), takie trzy jednakowe walce wyznaczają w naturalny sposób pewien sześcian. Oznaczmy mianowicie przez AB , CD , i EF najkrótsze, a więc przechodzące przez punkty styczności, odcinki łączące osie walców. Z tego, że najkrótszy odcinek łączący proste skośne jest do nich obu prostopadły oraz z założonej prostopadłości kierunków osi wynika, iż łamana zamknięta $ABCDEF$ ma wszystkie kąty proste i co trzecie jej odcinki są równoległe. Zatem składające się na nią fragmenty osi walców – odcinki BC , DE i FA – są tej samej długości co odcinki łączące osie. Wszystkie mają długość $2R$. Gdy to spostrzeżemy, wyobrażenie sobie „brakujących” wierzchołków G i H sześcianu jest już kwestią chwili.

Zwróćmy uwagę na to, co „dzieje się” w sześcianie. Otóż sześcian, wraz z mieszczącymi się w nim fragmentami walców, ma oś obrotową – jest nią jego przekątna GH .

Jeśli obrócimy sześcian względem tej prostej o 120° , punkt A przejdzie na C , C na E , E na A i podobnie B na D , D na F i F na B . Cała więc figura (sześcian i walce) nałoży się na siebie i, gdybyśmy nie oznaczyli punktów literami, nie moglibyśmy jej odróżnić przed i po obrocie. Wynika stąd, że wszystkie walce są tak samo odległe od prostej GH . Oznaczmy najbliższy GH punkt jednego z walców przez P . Jeśli będziemy go obracali wokół GH , zatoczy on okrąg leżący w płaszczyźnie prostopadłej do GH , styczny do wszystkich walców. Zatem walec o osi GH i promieniu równym promieniowi tego okręgu jest poszukiwanym walcem o największym promieniu.

Oto uzasadnienie. Ponieważ wszystkie punkty styczności leżą w jednej płaszczyźnie, więc największa kulka, jaka przejdzie przez otwór między danymi walcami, ma ten sam promień co okrąg przechodzący przez punkty styczności. Ale przez każdy z poszukiwanych walców da się przesunąć kulka o równym mu promieniu. Zatem walec nie może mieć większego promienia niż okrąg przechodzący przez punkty styczności. Pozostaje jeszcze znalezienie tego promienia. W tym celu wystarczy nam zwrócenie uwagi tylko na jeden walec w sześcianie i zrutowanie tej figury na płaszczyznę prostopadłą do osi tego walca. Rachunki tak proste, że wstyd je przytaczać, dają wynik $r = R(\sqrt{2} - 1)$.



Zadanie zaczerpnąłem ze zbiorku И.Ф. Шарыгин, Задачи по геометрии, Стереометрия, Библиотечка „Квант”, 31, „Наука”, 1984.

M.K.



Zadania

Redaguje mgr Michał WOJCIECHOWSKI

M 577. Czy $\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$ może być liczbą całkowitą dla $1 \leq m < n$?

Rozwiązanie na str. 6

M 578. Udowodnić, że:

- a) liczby postaci $2^{2^k} + 1$ są parami względnie pierwsze,
- b) liczb pierwszych mniejszych od n jest więcej niż $\log_2 \log_2 n$.

Rozwiązanie na str. 7

M 579. Przypuśćmy, że wielomian P nie ma pierwiastków rzeczywistych. Wykazać, że wielomian $Q(x) = P(x) + \frac{P''(x)}{2!} + \frac{P^{(4)}(x)}{4!} + \dots$ też nie ma pierwiastków rzeczywistych.

Rozwiązanie na str. 12

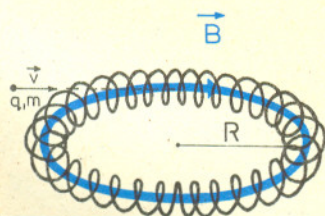
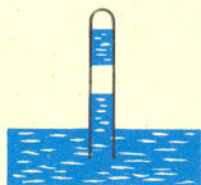
Redaguje dr Krzysztof CHARCHUŁA

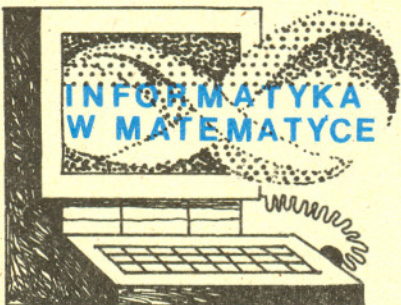
F 292. Słup cieczy w rurce barometru przedzielony jest niewielką ilością powietrza tworzącego przerwę, której długość w temperaturze $t_0 = 0^\circ\text{C}$ wynosi $l_0 = 10$ cm. Znaleźć rozmiar przerwy w temperaturze $t = 20^\circ\text{C}$.

Rozwiązanie na str. 11

F 293. Cząstki plazmy o ładunku q i masie m zostają wstrzyknięte do wnętrza toroidalnej cewki o dużym średnim promieniu R . Cewka wytwarza wewnątrz pole magnetyczne lokalnie jednorodne o indukcji \vec{B} , skierowane prostopadłe do przekroju poprzecznego cewki (rysunek). Prędkość początkowa cząstek plazmy \vec{v} jest niewielka i skierowana wzdłuż kierunku pola \vec{B} . Przyjmując (dowód jest trudny), iż cząstki plazmy będą krążyć po okręgu o promieniu bliskim R , wykazać, że jednocześnie będą unoszone w kierunku prostopadłym do płaszczyzny torusa. Znaleźć tę prędkość unoszenia.

Rozwiązanie na str. 10





dr Paweł KRAWCZYK

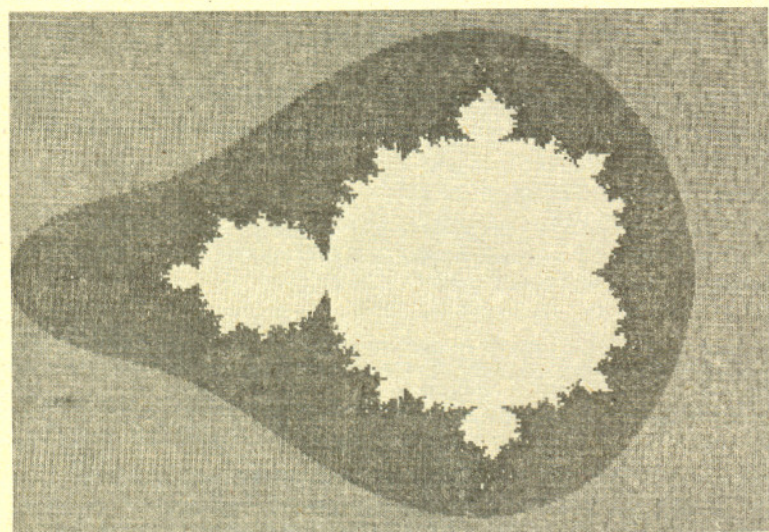
Pojęcie fraktali przeżywa w ostatnich latach niebywałą popularność. Czytelnicy *Delty* mieli możliwość spotkania się z nim już kilkakrotnie (patrz w szczególności *Delta 2/1986*). Artykuły o fraktalach są z reguły bogato ilustrowane rysunkami wygenerowanymi przez komputer. Nic w tym dziwnego, gdyż w rysunkach fraktali kryje się swoiste piękno. I tak, dzięki matematyce wyższej komputer może stać się artystą.

Poniższy program rysuje na ekranie komputera zbiór Julii dla wielomianu $w(x) = \lambda x(1-x)$. Najlepsze efekty uzyskuje się podając, w odpowiedzi na pytania stawiane przez program, wartości λ o module rzędu 1, a czynnik skali równy 3 lub 4.

```
10 REM "Program wyświetla zbiór Julii"
20 RANDOMIZE TIMER: KEY OFF: SCREEN 0: LOCATE 1,1
30 INPUT "Podaj lambda (Re(L),Im(L))": :LX,LY
40 X=.50001: Y=0
50 S=LX+LX+LY+LY: LX=4+LX/S: LY=4+LY/S
60 INPUT "Podaj czynnik skali: ":SC
70 CX=160:CY=100: SC=2+CX/SC
80 SCREEN 1:COLOR 9,0
90 FOR IX=1 TO 10: GOSUB 140: NEXT IX
100 PSET (INT(SC+(X-.5)+CX),INT(ABS((CY-SC+Y)))):3
110 GOSUB 140
120 ON KEY(1) GOSUB 130: KEY(1) ON: GOTO 100
130 END
140 TX=X: TY=Y: X=TX+LX-TY+LY: Y=TX+LY+TY+LX
150 X=1-X: T=Y: S=SQR(X+X+Y+Y): Y=SQR((S-X)/2): X=SQR((X+S)/2)
160 IF T<0 THEN X=-X
170 IF RND<.5 THEN X=-X: Y=-Y
180 X=(1-X)/2: Y=Y/2
190 RETURN
```

Poniższy program rysuje na ekranie komputera zbiór Mandelbrota. Znaczenie parametrów, o które program pyta użytkownika, zostało wyjaśnione w tekście głównym.

```
10 REM "Program wyświetla zbiór Mandelbrota"
20 KEY OFF: CLS: SCREEN 0: LOCATE 1,1
30 CX=160: CY=100
40 INPUT "Podaj liczbę iteracji (zero oznacza koniec)": : LIMX
50 IF LIMX=0 THEN GOTO 260
60 INPUT "Kiedy zmieniać kolor (n1, n2, n3)? ": NC1%, NC2%, NC3%
70 INPUT "Podaj X-start (>= -2), X-stop (<= 1)": : X0, X1
80 INPUT "Podaj Y-max (<= 1.5)": : YM
90 DX=(X1-X0)/2/(CX-2,0001): DY=YM/(CY-1,0001)
100 SCREEN 1: COLOR 0,0
110 FOR IX=2 TO 2+CX-3
120 X=(IX-2)+DX+X0
130 FOR JX=1 TO CY-1
140 Y=(1-JX)+DY+YM: COUNTX=1: ZR=X: ZI=Y
150 WHILE (COUNTX<LIMX)
160 ZR1=ZR: ZR=ZR1*ZR1-ZI*ZI+X: ZI=2*ZR1*ZI+Y
170 IF ((ZR+ZR+ZI+ZI)>4) GOTO 200
180 COUNTX=COUNTX+1
190 WEND
200 IF COUNTX<NC1% THEN COL=1 ELSE IF COUNTX<NC2% THEN COL=2 ELSE IF COUNTX<NC3% THEN COL=3 ELSE COL=0
210 PSET (IX,JX),COL: PSET (IX,2+CY-2-JX),COL
220 NEXT JX: NEXT IX
230 DEF SEG=&HB800: BSAVE "MANDGET",&STR*(LIMX),0,&H4000: DEF SEG
240 ON KEY(1) GOSUB 20
250 KEY(1) ON: GOTO 240
260 SCREEN 0: WIDTH 80
270 END
```



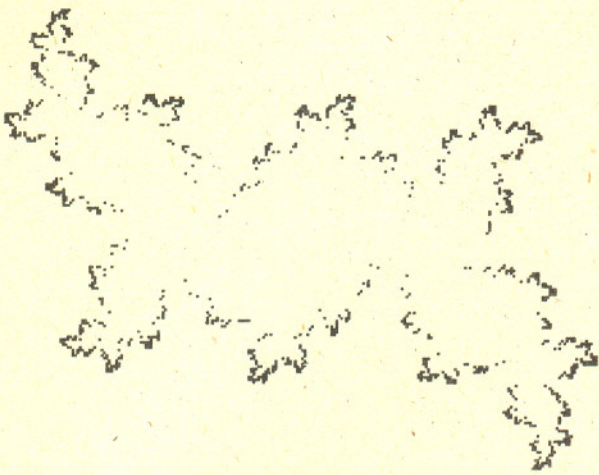
Rys. 1. Wynik działania drugiego programu dla 35 iteracji, $(n_1, n_2, n_3) = (3, 8, 35)$. Zakresy osi: pozioma: $[-2; 1]$, pionowa: $[-1, 27; 1, 27]$.

Warto sobie zdawać sprawę z tego, że pełne uwidocznienie piękna fraktali wymaga, niestety, bardzo drogiego sprzętu. Konieczny jest do tego komputer wyposażony w kolorowy monitor wysokiej rozdzielczości i charakteryzujący się dużą prędkością obliczeń. Zamiast dowodu proponuję porównanie barwnej fotografii z okładki *Delty 2/1986* z jednokolorowymi figurami wewnątrz tegoż numeru. Nie chodzi tu zresztą wyłącznie o doznania estetyczne. Duża moc obliczeniowa potrzebna jest szczególnie wtedy, gdy chcemy badać jedną z charakterystycznych cech wielu znanych fraktali – samopodobieństwo, czyli powtarzanie się takich samych struktur we wszystkich możliwych skalach.

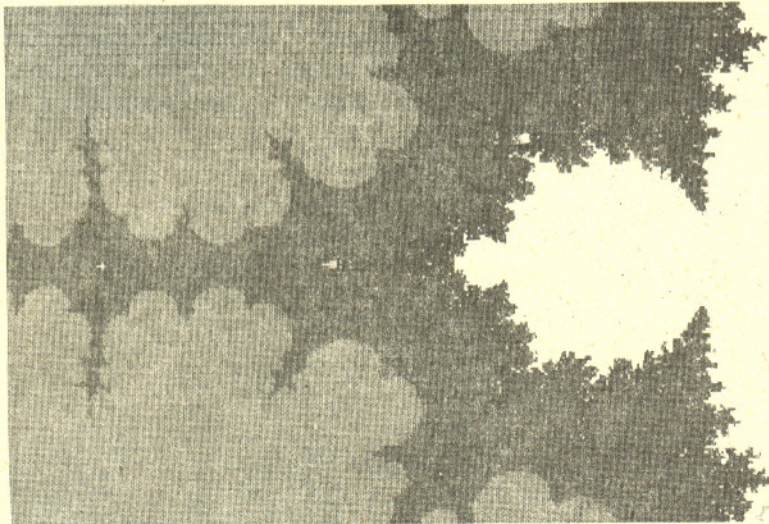
Ci z Czytelników, którzy mają dostęp do komputera osobistego, mogą łatwo przekonać się o słuszności powyższych uwag eksperymentując z dwoma programami, których tekst zamieszczono obok. Programy te zostały napisane w języku BASIC przystosowanym do komputera IBM PC/XT z kolorowym monitorem i kartą graficzną CGA (Czytelnicy dysponujący innym komputerem z łatwością zaadaptują je do swoich potrzeb). Pierwszy z programów rysuje zbiory Julii dla wielomianu $w(z) = \lambda z(1-z)$, drugi – nieco bardziej skomplikowany – zbiór Mandelbrota „powiększenie jego fragmentu. Drugi program dojrze ilustruje technikę stosowaną do otrzymywania efektownych, kolorowych rysunków fraktali. Jak wiadomo, zbiór Mandelbrota jest zbiorem liczb zespolonych λ , dla których ciąg

$$(1) \quad w_{k+1} = w_k^2 + \lambda, \quad w_0 = 0,$$

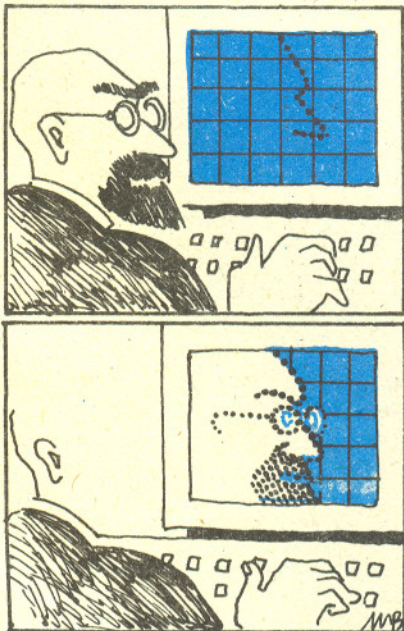
jest ograniczony. W programie warunku tego nie możemy, oczywiście, sprawdzić. W zamian za to sprawdzamy, czy po pewnej skończonej liczbie iteracji moduł w_k nie przekracza 2 (można udowodnić, że jeśli dla pewnego n zachodzi $|w_n| > 2$, to ciąg (1) jest rozbieżny). Na ekranie monitora zaznaczamy różnymi kolorami punkty, dla których $|w_n|$ przekracza 2 przy różnych wartościach n : $n < n_1$, $n_1 \leq n < n_2$ i $n_2 \leq n < n_3$, a jeszcze innym kolorem punkty, których nie możemy wykluczyć po n_3 iteracjach. Wynik takiego działania jest niezwykle efektowny. Niestety, ograniczenia techniczne nie pozwalają nam na jego zaprezentowanie w kolorze. Rysunek 1, będący kopią ekranu, w której różne odcienie szarości reprezentują różne kolory, odbiega daleko pod względem estetycznym od oryginału. Nawet jednak taka kopia wyróżnia się na tle rysunku 2 przedstawiającego wynik pierwszego programu (który, w gruncie rzeczy, wykorzystuje grafikę monochromatyczną).



Rys. 2. Wynik działania pierwszego programu dla $\lambda = -0,5 - i$. Czynniki skali wybrano równy 3.



Rys. 3. Powiększenie „głowy żuka” z rysunku 1. W programie drugim wybrano następujące wartości parametrów: 105 iteracji, $(n_1, n_2, n_3) = (20, 40, 105)$, α pozioma: $[-1, 46; -1, 36]$, α pionowa: $[-0, 0365; 0, 0365]$. Widoczne są już efekty skończonej dokładności obliczeń.



A jak jest z mocą obliczeniową komputera IBM PC? Do wygenerowania rysunku zbioru Julii za pomocą pierwszego programu wystarczy uruchomić go pod interpreterem języka BASIC i poczekać kilka minut. Na rysunek zbioru Mandelbrota trzeba jednak przy takiej metodzie czekać nieznośnie długo. Dlatego też rysunek 1 wykonano za pomocą skompilowanej wersji drugiego programu (co skraca czas wykonania około dziesięciokrotnie). Aby wygenerować rysunek 3 przedstawiający powiększenie „głowy żuka” (ok. 35 razy) z rysunku 1, nawet skompilowany program musi działać przez kilkadziesiąt minut. Przy większych powiększeniach czas działania programu jeszcze się wydłuża, tym bardziej że trzeba zwiększyć dokładność obliczeń. Jest jasne, że tysiąckrotne powiększenie znajduje się poza zasięgiem możliwości (chyba że przepiszemy program na język efektywniejszy niż BASIC, np. C; pozwala to zwiększyć wydajność o czynnik rzędu 10).

Ekran monitora czy też podłączona do komputera drukarka nie są jedynymi miejscami, w których występują fraktale. Przeciwnie, wiele argumentów wskazuje na to, że są one powszechne w otaczającym nas świecie. Krajobraz pasma górskiego, układ gałęzi drzew, kształt plamy atramentu na bibule – modelami matematycznymi wszystkich tych obiektów mogą być właśnie fraktale (patrz *Delta* 10/1989). Niektórzy entuzjaści uważają wręcz, że nie ma właściwie żadnej klasy zjawisk, w której opisie nie ujawniałyby się w jakiś sposób struktury charakterystyczne dla tych dziwnych twórców geometrycznych. Jeśli tak miałyby być naprawdę, moglibyśmy zostawić komputerowe studia fraktali posiadaczom najlepszego sprzętu, a sami zająć się badaniem fraktali fizycznie występujących w świecie.

Wdzięczny i szeroko dostępny obiekt takich badań został zaproponowany przez M.A.F. Gomesa (*Am. J. Phys.* 55 (1987) 649) w postaci zwykłych kulek wykonanych z dobrze pomiętego papieru.

Na pierwszy rzut oka opis w języku fraktali jest tu bardzo adekwatny – rzeczywisty kształt papieru tworzącego kulkę jest niezmiernie skomplikowany i w znacznym stopniu wykazuje podobieństwo w różnych skalach. Zastanówmy się, czy hipotezę o fraktalnej geometrii papierowych kulek można zweryfikować doświadczalnie. W tym celu zauważmy, że gdyby nasze kulki były wykonane z „porządnego” materiału o ciągłym rozkładzie masy i stałej gęstości ρ , ich masa wyrażałaby się wzorem

$$(2) \quad M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho,$$

gdzie R jest promieniem kulki. Jeśli natomiast mielibyśmy do czynienia z dwuwymiarowym odpowiednikiem kulki, czyli kołem o promieniu R , wzór przybrałby postać:

$$(3) \quad M = \pi R^2 \rho$$

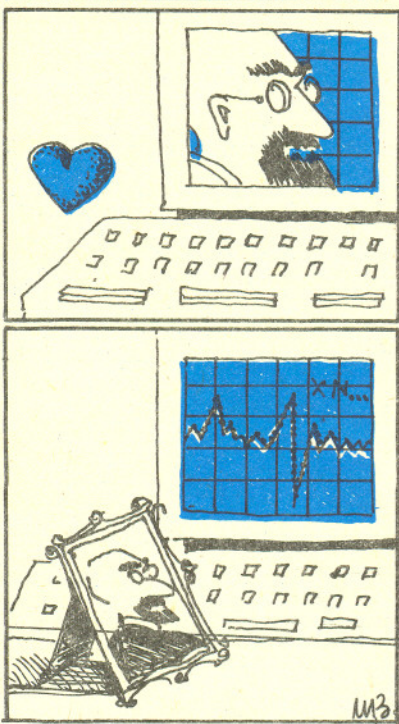
(tym razem ρ powinno mieć interpretację gęstości powierzchniowej), by wreszcie dla kuli jednowymiarowej, czyli odcinka o długości $2R$, stać się

$$(4) \quad M = 2R \rho.$$

Wszystkie te wzory możemy zebrać w jeden, jeżeli wprowadzimy do nich wymiar d kuli. Można wówczas napisać, że

$$(5) \quad R = k \cdot M^{1/d},$$

przy czym wiadomo, że współczynnik k jest proporcjonalny do $(1/\rho)^{1/d}$. Tak otrzymany związek można już uogólnić na przypadek geometrii fraktalnej. W tym wypadku d staje się wymiarem fraktalnym i może przyjmować dowolną wartość rzeczywistą. Jakiej wartości d możemy spodziewać się dla naszych papierowych kulek?



Jest oczywiste, że d nie może być większe niż wymiar pełnej kuli, czyli 3. Z drugiej strony, tak naprawdę kulki wykonane są z kartki papieru, której wymiar wynosi 2 (odpowiada to wymiarowi topologicznemu fraktala). A zatem

$$(6) \quad 2 \leq d \leq 3.$$

To już wszystko, co można powiedzieć o wymiarze fraktalnym papierowej kulki bez uciekania się do założeń modelowych, np. o rzeczywistym kształcie przyjmowanym przez kartkę. Określenie d musi więc być kwestią doświadczenia. Proponuję, aby Czytelnik wykonał takie doświadczenie. Może ono przebiegać następująco: Należy najpierw przygotować zestaw kawałków papieru o różnych, lecz znanych masach. Jest to wymóg dość kłopotliwy ze względu na lekkość papieru i związaną z tym trudność w jego ważeniu. Istnieje jednak prosty sposób, by sobie poradzić. Wystarczy wziąć dwie identyczne „kartki” papieru (np. dwie kartki tej samej gazety, z grubszą podobnie sadrukowane), po czym jedną z nich przeciąć na dwie połowy. Jedną z połówek jeszcze raz przeciąć na pół itd., itd. Jeśli masę najmniejszego z tak utworzonych kawałków przyjąć za jednostkę, to dostaniemy ciąg $n + 1$ kawałków o masach 2^{-i} ($i = 0, 1, \dots, n$). Oczywiście, ten zbiór można rozszerzyć. Wystarczy wziąć jeszcze jedną kartkę i podzielić ją w innym stosunku.

Po uporaniu się z problemami pomiaru masy musimy sporządzić kulki. Trzeba przy tym zadbać, by kulki sporządzać w zbliżony sposób, a więc np., by pomic każdą kawałek papieru w równym stopniu, żeby ścisnąć kulki z jednakową siłą, itp. Teras wystarczy już zwykła linijka, aby zmierzyć średnice kulek, i kalkulator, aby dla każdej kulki obliczyć parę $(\log M, \log R)$. Oznaczmy następnie na papierze milimetrowym lub nawet na kratkowanej kartce wszystkie punkty odpowiadające tak utworzonym parom. Pojawia się pytanie: jak ułożą się nasze punkty? To proste, odpowie ktoś, ponieważ równanie (5) można przepisać w postaci:

$$(7) \quad \log R = \log k + \frac{1}{d} \cdot \log M,$$

a więc – jeśli nasza hipoteza o fraktalnym charakterze kulek jest prawdziwa – wszystkie punkty będą leżeć na prostej o równaniu $y = \frac{1}{d}x + \log k$. Niestety, wniosek ten jest błędny i byłoby bardzo dziwne, gdyby punkty doświadczalne rzeczywiście były współliniowe. Musimy bowiem pamiętać, że w przebiegu każdego, a więc i naszego, doświadczenia działa ogromna liczba czynników zakłócających pomiar. Przykładowo, mimo najlepszych chęci nie jesteśmy w stanie zapewnić identycznych warunków formowania kulek; kulki nie są również idealne – pomiar ich promienia zależy trochę od orientacji kulki i linijki. Czynnikiem tego typu nie jesteśmy w stanie kontrolować, a ich wpływ uwzględniamy zakładając, że powodują one przypadkowy rozrzut wartości mierzonej wokół wartości rzeczywistej. A zatem, wynik Twojego, Czytelniku, doświadczenia wyglądać będzie zapewne podobnie do wykresu z rysunku 4. Widać, że punkty doświadczalne leżą w pobliżu pewnej prostej, ale jak znaleźć jej równanie? Odpowiedź nosi nazwę metody najmniejszych kwadratów. Rozważmy zespół n pomiarów pewnych wielkości x i y , które związane są liniową zależnością $y = ax + b$ (w naszym przypadku $x = \log M$, $y = \log R$). Utwórzmy sumę S kwadratów różnic wielkości y : bezpośrednio mierzonej w i -tym pomiarze, $y = y_i$, oraz wynikającej z i -tego pomiaru wielkości x , $y = ax_i + b$:

$$(8) \quad S = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2.$$

„Właściwą” prostą jest ta, dla której S przyjmuje wartość minimalną, a więc znikają pochodne cząstkowe liczone względem współczynników a i b :

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0.$$

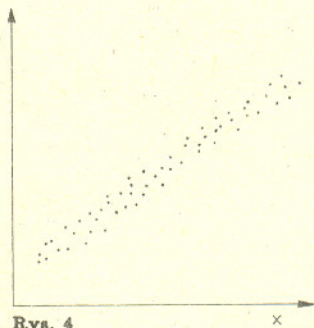
Czytelnik z łatwością może rozwiązać te równania i dostać następujący wynik

$$(10) \quad a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i - n \sum_{i=1}^n x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Można również ocenić, o ile tak wyznaczone wielkości a i b różnią się od ich wartości rzeczywistych. Okazuje się, że z prawdopodobieństwem około 67% moduł różnicy wyznaczonej i rzeczywistej wartości a wynosi co najwyżej

$$(11) \quad \Delta a = \sqrt{\left(\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2\right) \frac{n}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}},$$

$$\text{gdzie } \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - a \sum_{i=1}^n x_i y_i - b \sum_{i=1}^n y_i.$$



Rys. 4



Rozwiązanie zadania M 577. Jeżeli s i w są nieparzyste oraz $s < w$, to $2^\alpha \cdot s < 2^\alpha \cdot (s+1) < 2^\alpha \cdot w$ i $s+1$ jest parzysta. To pokazuje, że między dwiema liczbami, w których rozwinięcie na czynniki pierwsze 2 wchodzi z wykładnikiem α , zawsze znajdzie się liczba, w której rozwinięcie 2 wchodzi z wykładnikiem większym od α . Stąd wśród liczb $m, m+1, \dots, n-1, n$ jest dokładnie jedna liczba k , do której rozwinięcia liczba 2 wchodzi z maksymalnym wykładnikiem β . Oznaczmy przez W najmniejszą wspólną wielokrotność liczb od m do n . Mamy

$$\frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{W}{m} + \frac{W}{m+1} + \dots + \frac{W}{n}.$$

W rozwinięciu W liczba 2 wchodzi z wykładnikiem β , natomiast wszystkie liczby z licznika, oprócz $\frac{W}{k}$, są parzyste, stąd licznik jest nieparzysty, a mianownik parzysty. Zatem nie jest to liczba całkowita.



Analogiczna wielkość dla parametru b wynosi:

$$(12) \quad \Delta b = \sqrt{\left(\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2\right) \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}}$$

Wielkości Δa i Δb są dobrą miarą błędów mierzonych parametrów a i b . Piszemy na ogół

$$a = a_{\text{mierzone}} \pm \Delta a.$$

Używając powyższej metody możemy wyznaczyć wymiar fraktalny d i jego błąd. Hipoteza o fraktalnym charakterze kulek papierowych będzie uzasadniona, jeśli

$$\frac{\Delta d}{d} \ll 1.$$

Oczywiście, powyższe rozważania nie uwzględniają możliwych błędów systematycznych (np. mocniejszego ściskania dużych kulek niż małych). Aby zminimalizować tego typu efekty, można np. wykonać opisanego doświadczenie w grupie kilku osób. Należy jednak zadbać, aby wszyscy dysponowali takim samym rodzajem papieru. Okazuje się bowiem, że wymiar fraktalny d jest różny dla różnych rodzajów papieru. Czytelnik może się o tym sam przekonać i spróbować wyjaśnić tę zależność. A może istnieje korelacja między jakością i ilością informacji zawartej na papierze a jego wymiarem fraktalnym?

Rozwiązanie zadania M 578.

- a) Dowód wynika stąd, że jeżeli $2^{2^m} \equiv -1 \pmod{p}$, to $2^{2^{m+k}} = (2^{2^m})^{2^k} \equiv 1 \pmod{p}$.
 b) Z każdej z liczb postaci $2^{2^k} + 1$, mniejszej od n , weźmy po jednej liczbę pierwszej z jej rozkładu na czynniki. Z a) wynika, że te liczby pierwsze są parami różne, stąd liczb pierwszych mniejszych od n jest co najmniej tyle, ile liczb postaci $2^{2^k} + 1$ mniejszych od n .

Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego

KORESPONDENCYJNY KLUB FIZYKÓW

Drodzy Członkowie i Sympatycy Klubu!

Przypominamy, że co miesiąc przyznajemy nagrodę książkową dla autora najciekawiej opracowanego rozwiązania postawionych zagadnień.

Dzisiaj proponuję zbadanie obiektu fizycznego, który wygląda niesłychanie prosto, a dopiero w doświadczeniu objawia całe bogactwo swoich właściwości. Ale do rzeczy. Będą nam potrzebne następujące

Materiały i przyrządy

1. Pręt (lub rurka metalowa) cienki w stosunku do swojej długości.
2. Cienki sznurek lub nitka (w zależności od ciężaru pręta).
3. Młotek i dwa gwoździe oraz solidne podłoże, w które je wbijemy (np. zamocowana nieruchomo deska).
4. Nożyczki.
5. Stoper lub zegarek z sekundnikiem.

Zgromadziwszy je możemy przystąpić do następnego etapu przygotowań, którym jest **Konstrukcja obiektu fizycznego**

Będzie nim pręt zawieszony poziomo na nitkach jak na rysunku 1. Uwaga: jeden węzeł jest związany na poziomej nitce, która obejmuje pionową, a drugi odwrotnie. Pozwoli nam to zmieniać kształt zawieszenia regulując długość poziomego odcinka nitki (rys. 2). Gdyby węzły zbyt łatwo się rozluźniały, należy je wiązać podwójnie (zwłaszcza na poziomej nitce). Aby wyniki naszych doświadczeń były porównywalne, proponuję użyć pionowych odcinków nitki o długości dwukrotnie większej od długości pręta. Gwoździe wbijamy w odległości dokładnie równej długości pręta l . Wymiary otrzymanego obiektu podaje rysunek 3. Długość z z poziomej nitki możemy zmieniać w granicach od zera do l .

A teraz pora wyjaśnić, że przeprowadzimy

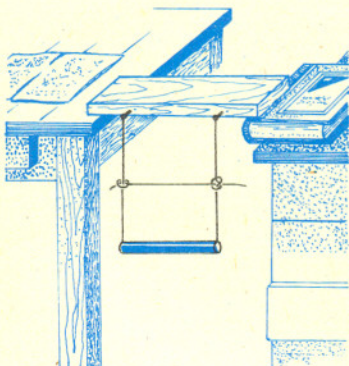
Badanie drgań pręta

Przez drgania będziemy rozumieć zarówno wahania wzdłuż i w poprzek pręta, jak i drgania skrętne wokół osi pionowej lub poziomej. Będziemy ograniczali się do drgań o **małej amplitudzie** (niewielkie wychylenia) i wykonamy **pomiary częstości różnych rodzajów drgań w zależności od długości z poziomego odcinka nitki**. Szczególnie interesująca będzie sytuacja, kiedy jakieś dwa drgania będą miały częstości równe lub bardzo bliskie. Wtedy pobudzając drganie stanowiące kombinację obu tych drgań będziemy obserwować ciekawe efekty – należy je opisać i w miarę możliwości wytłumaczyć. Osoby szczególnie ambitne (i kompetentne) może zainteresować

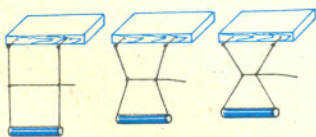
Próba opisu teoretycznego

Jest to zadanie nietatwe i nie należy się martwić, jeżeli się nie powiedzie. Niektóre z obserwowanych drgań mogą łatwiej dać się opisać niż inne. Oczywiście, otrzymawszy opis teoretyczny porównujemy przewidywaną przez ten opis zależność częstości drgań od z z wynikami doświadczalnymi. Powodzenia!

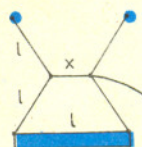
Redaguje doc. dr Jan GAJ



Rys. 1

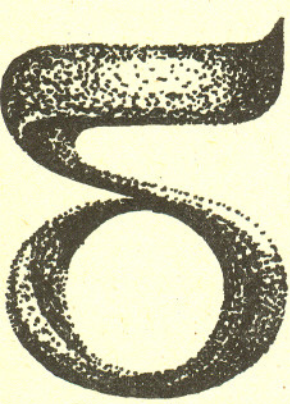


Rys. 2



Rys. 3

Listy prosimy przysyłać pod adresem:
 Korespondencyjny Klub Fizyków
 Wydział Fizyki Uniwersytetu
 Warszawskiego
 ul. Hoża 69, 00-681 Warszawa.



mata delta

Czerpać wodę sitem

Wyrażenia „czerpać wodę sitem” lub „łać wodę w sito” oznaczają w przenośni czynność bezcelową, zmarnowany wysiłek.

W naszej literaturze można znaleźć takie oto, może niezbyt fortunne, przykłady użycia tych przenośni:
Wł. Reymont: *mówić do kobiet rozumnie, to łać wodę w sito*;
A. Fredro: *chciej dziewczynę na swoje kopyto przerobić - to jest sitem wodę czerpać*.



A jednak... w jednym z poprzednich numerów *Delty* poznaliśmy już jeden ze sposobów na to, aby wodę w sicie przenieść: wystarczy ją przedtem zamrozić. Ale i w stanie ciekłym można wodę również nosić w sicie! Nie wierzycie? – sprawdźcie sami. Potrzebne będzie metalowe sitko i trochę roztopionej parafiny (kawałek świeczki). Zanurczcie sito w parafinie i strząśnijcie jej nadmiar, tak by pozostały otworki (te zasklepięte można przekłuć szpilką). Do takiego sitka można teraz powoli nalewać wodę i nie będzie ona wyciekać.

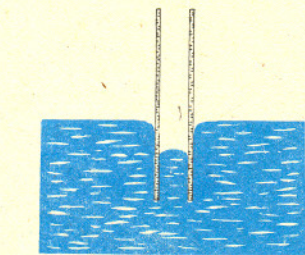
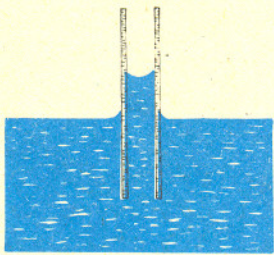
Aby wytłumaczyć tę „sztuczkę” – zacznijmy od przypomnienia, że między cząsteczkami cieczy działają siły Van der Waalsa. Są to siły typu elektromagnetycznego, o zasięgu rzędu 10^{-9} m, które powodują, iż cząsteczki cieczy się przyciągają (choć nie mogą się do siebie zbliżyć dowolnie blisko, bowiem dla odległości rzędu promienia atomu czy cząsteczki siły te stają się odpychające). To właśnie siły Van der Waalsa powodują, iż cząsteczki cieczy znajdujące się na jej powierzchni w warstwie o grubości $\sim 10^{-9}$ m wciągane są do wnętrza cieczy. Jest to źródłem napięcia powierzchniowego, które zależy od rodzaju cieczy i jej temperatury, jak również od ośrodka gazowego, w którym ciecz się znajduje.

Dla przykładu napięcie powierzchniowe wody w powietrzu wynosi:

temperatura	napięcie powierzchniowe
20°C	$72,75 \cdot 10^{-3}$ N/m
100°C	$58,9 \cdot 10^{-3}$ N/m

Doświadczenie pokazuje, że w miarę wzrostu temperatury napięcie powierzchniowe maleje, by stać się równe zero w temperaturze krytycznej, czyli wtedy, gdy zanika różnica między cieczą a parą nasyconą.

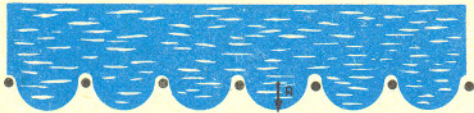
Żeby zrozumieć zachowanie się wody w sitku, trzeba jeszcze rozważyć, co dzieje się na granicy ciecz – naczynie, w naszym przypadku – na granicy woda – parafina. Tu z kolei siły działające pomiędzy cząsteczkami cieczy i ciała stałego wywołują zjawisko przylegania. Za miarę przylegania cieczy do ciała stałego można przyjąć pracę potrzebną na oderwanie cieczy od ciała stałego na jednostkowej powierzchni. Okazuje się, że dla pewnych kombinacji ciecz – ciało stałe energetycznie korzystniejsze może być zmniejszenie powierzchni stykania się cieczy z ciałem stałym, a za to zwiększenie powierzchni swobodnej ciała stałego. W ten sposób zachowuje się właśnie woda w zetknięciu z parafiną. Mówimy, że woda nie zwilża parafiny. To zaś, czy ciecz zwilża, czy nie zwilża danego ciała stałego, decyduje o kształcie powierzchni cieczy w pobliżu ścianki naczynia, a więc o kształcie menisku. Dla cieczy niezwilżających menisk jest wypukły, dla zwilżających – wklęsły. Jeśli zaś powierzchnia cieczy jest zakrzywiona, to ciśnienie pod taką powierzchnią jest inne niż pod powierzchnią płaską. Pod wypukłym meniskiem powstaje pewne dodatkowe ciśnienie (pod wklęsłym – ciśnienie jest mniejsze) równe $\Delta p = \frac{2\sigma}{R}$, gdzie σ jest napięciem powierzchniowym, a R – promieniem krzywizny menisku (dla powierzchni płaskiej $R = \infty$). Można to doświadczalnie sprawdzić, zanurzając w naczyniu z wodą wąską (włoskowatą) rurkę szklaną otwartą z obu stron (rys. 1a). Woda zwilża szkło, a więc podnosi się w rurce wyżej niż w naczyniu, tak by słup wody mógł zrównoważyć powstały niedomiar ciśnienia. Jeśli rurkę przed zanurzeniem w naczyniu wytłuszcimy lub wyparafinujemy (rys. 1b), to woda w rurce opadnie poniżej poziomu wody w naczyniu (tym razem woda nie zwilża rurki).



Rys 1a. Ciecz zwilża rurkę.

Rys 1b. Ciecz nie zwilża rurki.

A więc już wiadomo, dlaczego w parafinowanym sitku można nosić wodę? Podstawową rolę odgrywa tu fakt, iż woda nie zwilża parafiny. Powstały w oczkach sitka menisk jest więc wypukły (rys. 2) i wiąże się z wytworzeniem ciśnienia skierowanego ku górze, które może zrównoważyć ciśnienie słupa wody znajdującego się ponad nim, w sitku. Z warunku równowagi ciśnień obliczymy, ile wody można nabrać do sitka.



Rys. 2. Menisk wody w parafinowanym sitku.

Jeśli oznaczymy: h – wysokość wody w sitku, ρ – gęstość wody, g – przyspieszenie grawitacyjne, to otrzymujemy:

$$\frac{2\sigma}{R} = \rho gh, \quad \text{stad} \quad h = \frac{2\sigma}{R\rho g}.$$

Przyjmując, że promień menisku jest równy połowie średnicy oczek i jest rzędu 0,5 mm, mamy:

$$h \cong 3 \text{ cm}.$$

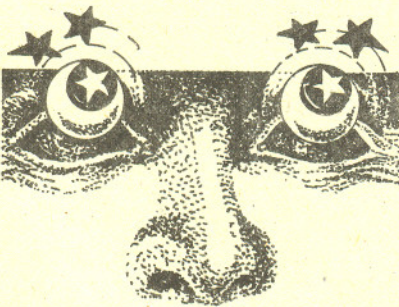
A teraz sami spróbujcie zaobserwować i wytłumaczyć inne, zabawne efekty sił przylegania i napięcia powierzchniowego:

- lekkie ciała pływające na powierzchni cieczy w niewielkiej odległości „przyciągają się”, jeśli oba są zwilżane lub niezwilżane przez ciecz. Jeśli jedno jest zwilżane, a drugie – nie, to „przyciąganie” nie występuje;
- kropla wody w stożkowej rurce szklanej porusza się ku węższemu końcowi rurki, natomiast kropla rtęci – ku szerszemu.

Małą Deltę przygotowali

Krzysztof CHARCHUŁA i Lidia GOETTIG

Patrz w niebo



Przeglądając katalog gwiazd o największym ruchu własnym (tj. najszybciej przemieszczających się po niebie) można znaleźć dwie gwiazdy dziewiątej wielkości położone o 1° na wschód od ν Wagi, które dzieli odległość kątowna $5'$ i które razem wędrują po niebie z prędkością $3,67$ na rok. Ich symbole według rozmaitych katalogów są następujące: Washington 5583 i 5584, albo GC 20393 i 20394, albo SAO 159066 i 159067. Gwiazdy te (podkarły typu K0) w zasadzie nie wyróżniałyby się niczym wyjątkowym, gdyby nie fakt, że od początku (a skatalogowano je pierwszy raz w 1847 r.) były trudności z wyznaczeniem ich paralaksy (odległości). Mianowicie na podstawie zdjęć wykonanych na początku obecnego wieku za pomocą długoogniskowych refraktorów różne obserwatoria otrzywały wartość paralaksy w granicach od $0,029$ do $0,048$. W gruncie rzeczy rozbieżności te nie powinny dziwić, ponieważ mierzona paralaksa okazała się – jak widać – mała. Dziwne jednak było, że jak na gwiazdy o tak dużym ruchu własnym są one tak odległe. Około roku 1970 nowsze pomiary potwierdziły rezultaty z początku wieku – paralaksa została wyznaczona na $0,030 \pm 0,006$, a więc odległość owej pary gwiazd jest rzędu 30 pc.

Ale to jeszcze nic. Otóż pomiar prędkości radialnej tych gwiazd (na podstawie zjawiska Dopplera) wykazał, że oddalają się one od Słońca z prędkością 300 km/s, co w zestawieniu z ich ruchem własnym i odległością daje pełną prędkość 650 ± 80 km/s względem Słońca! Tak szybkich gwiazd nie powinno być w ogóle, gdyż nawet po uwzględnieniu ruchu Słońca w Galaktyce okazuje się, że dwie gwiazdy w Wadze mają względem Galaktyki prędkość 470 km/s, podczas gdy do ucieczki z Galaktyki wystarczy 320 km/s.

Nasuwa się zatem przypuszczenie, że są to gwiazdy przybyłe spoza naszej Galaktyki, a wtedy chciałoby się wiedzieć: skąd? Na podstawie istniejących już danych można odtworzyć wstecz trasę tych dwu osobliwych gwiazd, ale przy mniej lub bardziej jawnym założeniu, że nie została ona zakłócona przez oddziaływanie ze strony poszczególnych gwiazd naszej Galaktyki. Ponieważ nie ma na to gwarancji, wynikiem nie jest punkt, lecz cały obszar na niebie, skąd wędrujące gwiazdy mogły przylecieć – rozciąga się on od Cefeusza do Lutni. Prawdopodobnie z którejś tam położonych galaktyk przybyło tych dwoje wędrowców.

dr Tomasz KWAST

Podstawowe własności funkcji ζ , w tym hipotezę Riemanna, przedstawił E.T. Whittaker, G.N. Watson w *Kursie analizy współczesnej* cz.II, PWN 1968.

Osiągnięcia Leonharda Eulera (1707 – 1783) w matematyce są tak wielkie, że trudno jest wskazać najważniejsze z nich. Przyjrzyjmy się kilku tożsamościom.

W teorii liczb ważną rolę odgrywa funkcja, zwana obecnie funkcją „deta” Riemanna

$$(1) \quad \zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}.$$

Rozważmy ją dla $1 < s$. Wówczas szereg po prawej stronie (1) jest zbieżny, co wynika z oszacowania

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} < 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \int_{k-1}^k \frac{1}{x^s} dx = \frac{s}{s-1}.$$

Zaskakujący związek funkcji ζ z wszystkimi liczbami pierwszymi $p_1 < p_2 < \dots$ odkrył Euler (1737r.) w postaci równości

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - \frac{1}{p_k^s})}.$$

Równość ta stanowi podstawę analitycznej teorii liczb. Aby ją sprawdzić, zauważmy, że po prawej stronie (2) występuje iloczyn sum ciągów geometrycznych

$$1 + \frac{1}{p_k^s} + \frac{1}{p_k^{2s}} + \frac{1}{p_k^{3s}} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad s > 1.$$

Ponieważ występujące tu szeregi geometryczne o wyrazach dodatnich są zbieżne (ich sumy są skończone), więc możemy je mnożyć wyraz po wyrazie. Otrzymamy wtedy

$$(3) \quad \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - \frac{1}{p_k^s})} = \sum \frac{1}{(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \dots p_m^{\alpha_m})^s},$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie możliwe różne kombinacje wykładników $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, $m = 1, 2, \dots$. Wobec jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze, szereg po prawej stronie równości (3) jest identyczny z szeregiem (1), co dowodzi poprawności wzoru (2).

Z równości (2) wynika również, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

Zajmiemy się teraz wyznaczeniem wartości funkcji

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

W latach 1728 – 1729 obliczono ją z dokładnością do 0,01 (Ch. Goldbach, D. Bernoulli), zaś w 1730 r. James Stirling podał wartość tej sumy z ośmioma dokładnymi znakami dziesiętnymi. Dopiero Euler (1735 r.) obliczył kolejno, że

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\zeta(4) = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90},$$

aż do wartości $\zeta(12)$.

Oto elementarne uzasadnienie równości

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Punktem wyjścia będzie nierówność

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \text{prawdziwa dla} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Z niej łatwo otrzymujemy

$$\operatorname{ctg}^2 x < \frac{1}{x^2} < 1 + \operatorname{ctg}^2 x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

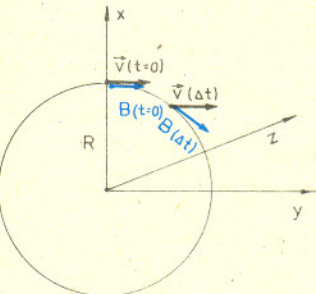
Jeżeli nierówności te wypiszemy dla liczb $x_k = \frac{k\pi}{2m+1}$, $k = 1, 2, \dots, m$, a następnie dodamy je stronami, to otrzymamy

$$\sum_{k=1}^m \operatorname{ctg}^2 \frac{k\pi}{2m+1} < \frac{(2m+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} < m + \sum_{k=1}^m \operatorname{ctg}^2 \frac{k\pi}{2m+1}.$$



Rozwiązanie zadania F 298.

W stałym jednorodnym polu magnetycznym ruch cząstki naładowanej jest złożeniem ruchu po okręgu prostopadłym do kierunku pola \vec{B} , zachodzącego z częstością cyklotronową $\omega = qB/m$ oraz ruchu prostoliniowego ze stałą prędkością (składowa równoległa do wektora \vec{B}). Mimo że w chwili początkowej nie mamy jeszcze ruchu cyklotronowego (nie ma składowej prędkości prostopadłej do \vec{B} , siła Lorentza również wynosi zero), to ruch ten pojawi się już po nieskończenie krótkim czasie Δt (patrz rysunek), pojawi się również siła Lorentza.



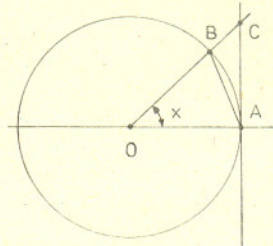
Można pokazać (patrz margines na stronie 12), że jeśli prędkość $v \ll \omega R$, to cząstki poruszają się będą po orbicie, która wynika ze złożenia ruchu po okręgu o promieniu bardzo bliskim R i ruchu cyklotronowego z częstością ω wokół linii pola \vec{B} (po okręgu o promieniu $v^2/(\omega^2 R) \ll R$). Ale to nie wszystko. Jeśli cząstki poruszają się po okręgu o średnim promieniu R , to musi wystąpić siła dośrodkowa utrzymująca je na tej orbicie kołowej. Jest to składowa radialna siły Lorentza. Daje ją składowa prędkości v_s , ponieważ \vec{B} ma kierunek styczny do okręgu. Stąd:

$$\frac{mv^2}{R} = Bv_s q, \quad \text{czyli} \quad v_s = \frac{mv^2}{qRB}.$$

Jest to właśnie średnia prędkość unoszenia plazmy w kierunku osi z , poza płaszczyznę torusa.

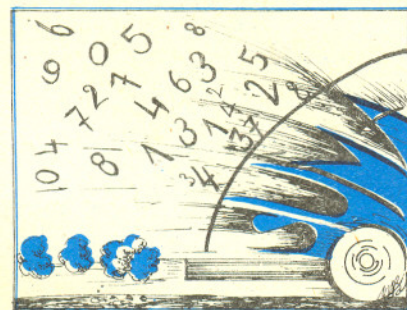


Gdybyśmy chcieli wykorzystać ten wzór do obliczenia wartości π z dużą dokładnością, warto zastosować „Przyspieszenie (sumowania)” przedstawione w *Delcie* 9/1988.



Rozwiązanie zadania F 393. Ciśnienie w przerwie z powietrzem równie jest ciężarowi słupa cieczy nad przerwą podzielonemu przez powierzchnię przekroju rurki. Przy zmianie temperatury zmieni się zarówno wysokość słupa cieczy, jak i jego gęstość, ale masa i ciężar pozostaną takie same. Ponieważ rozszerzalność cieplną rurki można zaniedbać (wobec rozszerzalności cieczy), więc ciśnienie w przerwie pozostanie bez zmian. Stosując do powietrza równanie stanu gazu doskonałego ($pV \sim T$) znajdujemy, że stosunek objętości zajmowanych przez powietrze w różnych temperaturach jest równy stosunkowi tych temperatur. Zatem

$$l = l_0 \cdot \frac{T}{T_0} = 10,7 \text{ cm.}$$



Liczby Bernoulliego to liczby wymierne wyznaczone przez J. Bernoulliego w 1713 r. Ich wartości początkowe są następujące:

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = B_5 = B_7 = \dots = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, \dots$$

Liczba $\zeta(3)$ jest niewymierna (Apéry, 1978).

Ponieważ

$$\sum_{k=1}^m \operatorname{ctg}^2 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{m(2m-1)}{3}$$

(dowód tej równości podamy w dalszej części), więc

$$\frac{m(2m-1)}{3} < \frac{(2m+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} < m + \frac{m(2m-1)}{3} = \frac{m(2m+2)}{3},$$

skąd

$$\frac{\pi^2}{6} \left(1 - \frac{1}{2m+1}\right) \left(1 - \frac{2}{2m+1}\right) < \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{6} \left(1 - \frac{1}{2m+1}\right) \left(1 + \frac{1}{2m+1}\right).$$

Przechodząc teraz z $m \rightarrow +\infty$ otrzymujemy oczekiwaną równość

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Pozostały nam do uzasadnienia dwa fakty.

1. Dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$ mamy $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

Dowód. W kole o promieniu $r > 0$ rozpatrzmy kąt ostry o mierze łukowej x , cięciwę AB i styczną AC do okręgu w punkcie A (rysunek). Wówczas

$$|\Delta OAB| < \text{pole wycinka kołowego } AOB < |\Delta OAC|,$$

czyli

$$\frac{1}{2} r^2 \sin x < \frac{1}{2} r^2 x < \frac{1}{2} r^2 \operatorname{tg} x,$$

skąd otrzymujemy tezę.

$$2. \sum_{k=1}^m \operatorname{ctg}^2 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{m(2m-1)}{3}.$$

Dowód. Korzystając ze wzoru de Moivre'a i wzoru Newtona mamy

$$\begin{aligned} \cos n\varphi + i \sin n\varphi &= (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \\ &= \sin^n \varphi (\operatorname{ctg} \varphi + i)^n = \sin^n \varphi \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k \operatorname{ctg}^{n-k} \varphi. \end{aligned}$$

Porównując części urojone tych liczb dostajemy

$$\sin n\varphi = \sin^n \varphi \left(\binom{n}{1} \operatorname{ctg}^{n-1} \varphi - \binom{n}{3} \operatorname{ctg}^{n-3} \varphi + \binom{n}{5} \operatorname{ctg}^{n-5} \varphi - \dots \right).$$

Niech $n = 2m + 1$, wówczas powyższa równość przyjmuje postać

$$\sin(2m+1)\varphi = \sin^{2m+1} \varphi \cdot P_m(\operatorname{ctg}^2 \varphi),$$

gdzie P_m jest wielomianem stopnia m postaci

$$(4) \quad P_m(x) = \binom{2m+1}{1} x^m - \binom{2m+1}{3} x^{m-1} + \binom{2m+1}{5} x^{m-2} - \dots$$

Zauważmy, że dla $\varphi_k = \frac{k\pi}{2m+1}$, $k = 1, 2, \dots, m$, $\sin(2m+1)\varphi_k = 0$, $\sin \varphi_k \neq 0$, więc wielomian P_m ma m różnych pierwiastków

$$x_k = \operatorname{ctg}^2 \frac{k\pi}{2m+1}, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

W związku z tym ma miejsce równość

$$(5) \quad P_m(x) = A \left(x - \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2m+1}\right) \left(x - \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{2m+1}\right) \dots \left(x - \operatorname{ctg}^2 \frac{m\pi}{2m+1}\right).$$

Porównując współczynniki stojące przy wyrażeniach x^m i x^{m-1} w równościach (4) i (5) z łatwością stwierdzamy, że

$$A = \binom{2m+1}{1},$$

$$\binom{2m+1}{3} = A \left(\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2m+1} + \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{2m+1} + \dots + \operatorname{ctg}^2 \frac{m\pi}{2m+1} \right),$$

skąd otrzymujemy poszukiwaną równość.

W roku 1740 Euler podał także zależność

$$\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} |B_{2n}|, \quad n = 1, 2, \dots,$$

gdzie B_{2n} są liczbami Bernoulliego. Nie udało się jednak obliczyć analogicznie $\zeta(2n+1)$ i do tej pory „natura arytmetyczna” tych sum jest jeszcze nie znana.

Rozwiązanie zadania M 579. Mamy ze wzoru Taylora

$$P(x+h) = P(x) + \frac{P'(x)}{1!}h + \frac{P''(x)}{2!}h^2 + \frac{P'''(x)}{3!}h^3 + \dots$$

Stąd otrzymujemy

$$Q(x) = \frac{P(x+1) + P(x-1)}{2}$$

a więc jeżeli P jest stałe dodatni (ujemny), to i Q też jest dodatni (ujemny).

doc. dr Tadeusz JARZĘBOWSKI

Dzieje nauki obfitują w przykłady powstawania wielu pięknych teorii, które nie sprawdziły się i ich autorów pokrywał z czasem cień zapomnienia. Z twórcą teorii względności, Albertem Einsteinem, jest inaczej; jego nazwisko słyszymy nieustannie – w miarę upływu lat nawet coraz częściej. Nowe fakty potwierdzają genialność myśli tego znakomitego teoretyka.

Einstein, jak wiadomo, opracował dwie teorie określane nazwą: teoria względności. Najpierw, w roku 1905, opublikowana została tzw. teoria szczególna, a dziesięć lat później teoria ogólna (zwana też teorią grawitacji). Założenia tej pierwszej zostały w pełni zweryfikowane doświadczalnie jeszcze za życia twórcy. Było to względnie łatwe w realizacji. Szczególna teoria względności opisuje bowiem zjawiska fizyczne, gdy w grę wchodzi duże prędkości. W jej równaniach pojawia się charakterystyczny czynnik

$$\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2},$$

który jest wyraźnie różny od jedności tylko wówczas, gdy prędkość ciała v zbliża się do prędkości światła c .

Aby sprawdzić słuszność teorii szczególnej, trzeba zatem dysponować cząstkami o dużych prędkościach. Wszelkich możliwości w tym zakresie dostarczają znane od dobrych pięćdziesięciu lat różnego rodzaju akceleratory cząstek, takie jak cyklotron, betatron czy synchrotron. Prowadzone za pomocą akceleratorów badania „postawiły kropkę nad i”: Einstein miał rację.

Co się natomiast tyczy ogólnej teorii względności, czyli teorii grawitacji, to sprawa eksperymentalnej weryfikacji nie wygląda już tak prosto. W myśl tej teorii tym, co wpływa na modyfikację pojęć fizycznych, jest masa ciała, jego pole grawitacyjne. Takim charakterystycznym czynnikiem, pojawiającym się w równaniach ogólnej teorii względności, jest wyrażenie

$$\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right),$$

gdzie M oznacza masę ciała, r – odległość od jego środka, G – stałą grawitacji.

Skoro istotną rolę odgrywa tu pole grawitacyjne, to odpowiednim „laboratorium” do weryfikacji teorii byłoby sąsiedztwo ciała o dużej masie. No, a z tym już trudniej. Masa naszej planety jest niewielka i wpływ jej pola grawitacyjnego na przewidywane przez teorię Einsteina zjawiska jest znikomy. Założenia teorii szczególnej można było sprawdzić na powierzchni Ziemi, ale odpowiednich laboratoriów do badania ogólnej teorii względności musimy szukać już raczej poza Ziemią.

Masa Słońca jest ponad trzysta tysięcy razy większa od masy Ziemi. Do niedawna ono właśnie stanowiło to jedyne „laboratorium grawitacyjne”. W zasięgu oddziaływania pola grawitacyjnego Słońca starano się zaobserwować zjawiska przewidziane przez teorię. Wymienić tu w pierwszym rzędzie należy znany fakt obracania się osi orbity Merkurego (tzn. obrót perihelium). Wykorzystując zaćmienie Słońca z roku 1919 udało się też zaobserwować zmianę kierunku promieni świetlnych przechodzących w pobliżu tarczy Słońca.

Nasza gwiazda dzienna jest jednak mniej przydatna w charakterze laboratorium grawitacyjnego, gdy chodzi np. o inne zjawisko przewidziane przez teorię – mianowicie wpływ pola grawitacyjnego na tempo upływu czasu. Odpowiednią zależność opisuje tu równanie

$$dt = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dr.$$

Należy to rozumieć w ten sposób, że jeżeli dr jest jednostką czasu odmierzaną przez zegar na Ziemi, to dt określa odpowiednie odstępy czasu odmierzane przez ten zegar umieszczony na powierzchni masywniejszego ciała o masie M . Mamy, oczywiście, $dt > dr$. Liczbowo wygląda to tak, że gdybyśmy umieścili zegar na Słońcu, to późniłby się on w stosunku do ziemskiego o ponad jedną sekundę na tydzień.

Komentarz do rozwiązania zadania F 293. Można skorzystać z zasady zachowania energii (pole magnetyczne nie wykonuje pracy, więc wartość prędkości cząstki pozostaje stała):

$$(1) \quad v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \text{const} = v^2$$

(współrzędne biegunowe w płaszczyźnie x, y).

Składowa z momentu pędu względem środka torusa jest zachowana:

$$(2) \quad mv_\phi r = \text{const} = m\omega R,$$

składowa z równania ruchu:

$$m\dot{v}_z = r q B$$

daje po scałkowaniu:

$$(3) \quad v_z = \omega(r - R).$$

Podstawiając (2) i (3) do (1) oraz oznaczając $r - R = \xi$ mamy:

$$\xi^2 + \frac{R^2 v^2}{(R + \xi)^2} + \omega^2 \xi^2 = v^2.$$

Rozwijając drugi wyraz lewej strony z dokładnością do członów kwadratowych w ξ ($\xi \ll R$) w szereg Taylora i różniczkując otrzymane równanie dostajemy na ξ równanie przesuniętego oscylatora harmonicznego. Stąd rozwiązanie:

$$\xi = \frac{v^2}{R\omega^2} (1 - \cos \omega t).$$

Widać, że $\xi/R \ll 1$.

Z (3) otrzymujemy:

$$v_z = \frac{v^2}{R\omega} (1 - \cos \omega t),$$

czyli:

$$z = \frac{v^2}{R\omega} t - \frac{v^2}{R\omega^2} \sin \omega t,$$

tak jak z prostych rozważań poprzednich.

Zrozumieć najprostsze

Mechanika kwantowa od dawna dostarcza precyzyjnego opisu zachowania się pojedynczych atomów. Zastosowanie mechaniki kwantowej do opisu dynamiki reakcji chemicznych – oddziaływań przynajmniej trzech atomów i wymiany jednego lub kilku atomów – jest znacznie bardziej skomplikowane. Zrozumienie nawet najprostszej reakcji chemicznej, jak wymiana atomu wodoru, wymaga pokonania wielu problemów teoretycznych i doświadczalnych. Wreszcie, po ponad 60 latach od powstania mechaniki kwantowej, udało się uzyskać poprawny opis najprostszej możliwej reakcji chemicznej: wymiany jednego atomu wodoru w reakcji $H + H_2 \rightarrow H_2 + H$. Dla osoby spoza „brandy” może to wydawać się niewielkim osiągnięciem, ale wśród chemików kwantowych wywołało to duże poruszenie.

Do osiągnięcia sukcesu przyczynili się zarówno teoretycy, jak i doświadczalnicy. Od strony teoretycznej kłopoty polegają na konieczności rozwiązania kwantomechanicznych równań ruchu trzech poruszających się względem siebie atomów. Główna trudność polega na poprawnym doborze warunków brzegowych, tzn. matematycznego opisu układu atomów przed i po reakcji. W ubiegłym roku dwie grupy badawcze: z Uniwersytetu Kalifornijskiego w Berkeley, kierowana przez W. Millera i z Uniwersytetu Stanowego Minnesoty w Minneapolis, kierowana przez D. Truhlara, rozwiązały wreszcie ten problem. Otrzymały teoretyczny opis nie tylko całkowitego prawdopodobieństwa zajścia tej reakcji, ale też różnych, subtelnych szczegółów, jak np. prawdopodobieństwa zalesienia po reakcji molekule H_2 w określonym rotacyjnym i wibracyjnym stanie kwantowym. Od strony doświadczalnej problemy polegały głównie na:

- (a) uzyskaniu wiązki atomów wodoru na tyle energetycznych, aby pokonać odpychanie elektryczne molekule H_2 ,
- (b) identyfikacji stanu kwantowego produktów reakcji.

Również i te kłopoty zostały pokonane w ubiegłym roku. Grupa doświadczalna z Uniwersytetu w Stanford, kierowana przez Richarda Zare, pokazała, że reakcja wymiany atomu wodoru przebiega tak, jak to przewidzieli teoretycy. Tak naprawdę w swoim doświadczeniu Zare badał reakcję z deuterem $D + H_2 \rightarrow HD + H$. Zamiana jednego atomu wodoru na deuteron nie ma praktycznie wpływu na rachunki teoretyczne, natomiast w doświadczeniu pozwala na łatwiejsze sidentyfikowanie produktów końcowych reakcji. Zare używał lasera do rozbicia molekule D_2 uzyskując atom deuteru dostatecznie energetyczny do zajścia reakcji z H_2 . Po reakcji ten sam laser jonizował molekulę DH , co pozwalało na jej wykrycie i analizę za pomocą spektrometru masowego.

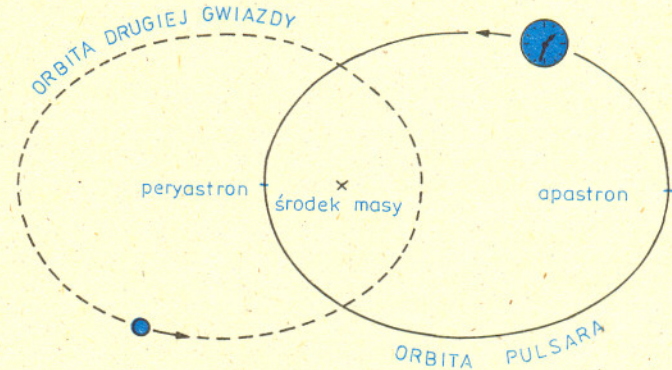
W granicach błędów doświadczalnych wyniki pomiarów potwierdzają obliczenia teoretyczne. Okazuje się, że smierzone całkowite prawdopodobieństwo zajścia tej reakcji jest też całkiem zgodne z wynikami półklasycznego przybliżenia, w którym efekty kwantowe w stanach początkowych i końcowych nie zostały wzięte pod uwagę. Jednak do zrozumienia subtelnych efektów potrzebny jest kwantomechaniczny opis tego procesu.

Jak podkreśla Zare, na poziomie molekularnym świat jest różnicą kwantowy, nie klasyczny.

Opracował Jan KALINOWSKI na podstawie Science z 26 stycznia 1990 r.

Jak to wykryć? Żadnego ziemskiego zegara na Słońcu, oczywiście, nie umieścimy. Ale wiemy, że wzorcem jednostki czasu jest częstotliwość emitowanego przez atomy promieniowania. Skoro na Słońcu jest silniejsze pole grawitacyjne, to w myśl teorii Einsteina emitowane tam promieniowanie powinno mieć nieco niższą częstotliwość niż emitowane przez taki sam atom na powierzchni Ziemi. Różnice te są jednak znikomo małe i praktycznie niemierzalne. Wpływ pola grawitacyjnego Słońca na chód zegara jest bardzo trudny do wykrycia.

I oto kilkanaście lat temu, w roku 1974, za pomocą potężnego, 300-metrowego radioteleskopu w Arecibo, odkryto inne laboratorium grawitacyjne, bez porównania doskonalsze od naszej gwiazdy dziennej. Na imię mu PSR 1913+16. Znajduje się ono na niebie w gwiazdozbiórce Orła, trochę powyżej Altaire, ale bardzo, bardzo daleko, około miliard razy dalej niż Słońce. Odbierane dziś od niego sygnały radiowe wyemitowane zostały jakieś piętnaście tysięcy lat temu.



Tym laboratorium są krążące bardzo blisko siebie dwie gwiazdy neutronowe, z których jedna jest pulsarem, emitującym impulsy w odstępach 0,059 sekundy. Okres obiegu tych gwiazd wynosi niecałe 8 godzin. Orbits są mocno eliptyczne (mimośród wynosi 0,62); ich wzajemna odległość zmienia się od poniżej miliona do ponad trzech milionów kilometrów. I w tym tkwi właśnie istota rzeczy. Zmiana odległości do gwiazdy towarzyszącej to przecież różnica w oddziaływaniu jej pola grawitacyjnego. A pulsar to zegar – wprawdzie zegar mechaniczny, nie atomowy, ale bardzo dokładny. Mamy tu zatem urządzenie do pomiaru czasu, które znajduje się w zmieniającym się okresowo polu grawitacyjnym. Czyż nie wspaniałe laboratorium do badania wpływu grawitacji na długość jednostki czasu!

Ten niezwykle układ dwóch gwiazd neutronowych pozwolił na zaobserwowanie i innych zjawisk przewidzianych przez teorię. Na przykład wspomniany już obrót perihelium, który w przypadku Merkurego wynosi zaledwie około pół sekundy na rok, tutaj następuje w tempie ponad czterech stopni na rok!

W pobliżu dużych mas czasoprzestrzeń ulega zakrzywieniu – tak głosi teoria. Konsekwencją tego powinno być m.in. opóźnienie w nadchodzeniu promieniowania elektromagnetycznego. Efekt ten udało się już wykryć w przypadku fal radarowych przebiegających w pobliżu Słońca. Otóż zjawisko to obserwuje się też i w tym układzie podwójnym, gdy emitowane przez pulsar sygnały przebiegają w pobliżu drugiej gwiazdy neutronowej.

Wreszcie, obiegające wokół siebie ciała powinny emitować tzw. fale grawitacyjne. W wyniku emisji tych fal układ traci energię, a zatem składniki układu powinny zbliżać się do siebie, a ich okres orbitalnego obiegu powinien maleć. To też zostało zaobserwowane – i jest to fakt dość znamienity, gdyż mamy tu tym samym pośrednie potwierdzenie istnienia fal grawitacyjnych.

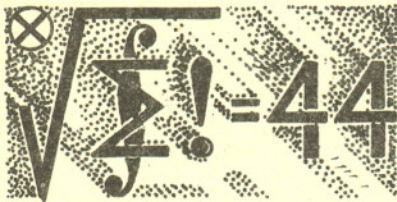
Omawiany tu układ będzie miał przypuszczalnie konkurenta. W roku 1987 odkryto bowiem inny układ podwójny, któremu na imię PSR 0021-72A. Dotychczasowe dane wskazywałyby, iż jest to gwiazda neutronowa (pulsar o okresie rotacji 0,0045 sekundy) obiegająca białego karła w ciągu 32 minut. Otóż jeżeli ten model się potwierdzi, to wynikałoby z niego, iż w tym układzie zjawiska relatywistyczne powinny ujawnić się w większej jeszcze skali. Mogłoby to zatem być jeszcze doskonalsze laboratorium grawitacyjne.

W następnych artykułach poświęconych tej tematyce omawiać będziemy wspomniane tu zjawiska, tj. zjawiska, które ogólna teoria względności przewiduje i które obecnie tak pięknie ujawniają się.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 7/1990.

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 I 1991



Zadania z matematyki nr 211, 212

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

211. Na płaszczyźnie dane są dwie półproste o wspólnym początku P (nie zawarte w jednej prostej) oraz koło zawierające punkt P w swoim wnętrzu. Wyznaczyć konstrukcyjnie (cyrklem i linią) trójkąt o minimalnym obwodzie mający dwa boki zawarte w danych półprostych, a trzeci bok styczny do danego koła.

212. Znaleźć ogólną postać funkcji wymiernej F (jednej zmiennej rzeczywistej), nie równej tożsamościowo zeru, spełniającej równanie

$$F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$$

dla wszystkich x , dla których obie strony mają sens liczbowy. (Należy podać warunki konieczne i dostateczne, jakie powinny spełniać wielomiany będące licznikiem i mianownikiem nieskracalnego ułamka P/Q przedstawiającego funkcję F .)

Zadanie 212 zaproponował pan Józef Banaś z Rzeszowa.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 6/1990

Przypominamy treść zadań:

- 208. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną n , dla której istnieje 1990 różnych liczb naturalnych $\leq n$, takich, że żadna z nich nie jest dwukrotnością innej.
- 204. Wykazać zbieżność i znaleźć granicę ciągu $a_n = n^n (n!e - [n!e])^n$.

203. Niech n będzie dowolną liczbą naturalną i niech A będzie podzbiorem zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, takim, że

$$(1) \quad x \in A \implies 2x \notin A.$$

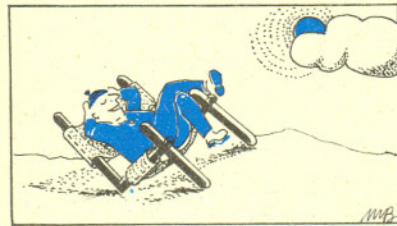
Dla dowolnej liczby nieparzystej q rozważmy ciąg

$$(2) \quad q, 2q, 4q, 8q, \dots$$

Z każdej pary kolejnych wyrazów tego ciągu tylko jeden może należeć do A . Zatem w klasie zbiorów $A \subset \{1, \dots, n\}$ o własności (1) maksymalną liczbę elementów ma zbiór A_{max} , który z każdego ciągu (2) wybiera dokładnie co drugi wyraz, od najmniejszego poczynając. Zbiór ten składa się z wszystkich liczb naturalnych $\leq n$ postaci $4^k q$ (q nieparzyste). Dla ustalonych k i q jest w zbiorze $\{1, \dots, n\}$ dokładnie $[(4^{-k}n + 1)/2]$ liczb tej postaci. Liczba elementów zbioru A_{max} wynosi więc

$$F(n) = \sum_{k=0}^m [(4^{-k}n + 1)/2], \quad \text{gdzie } 4^m \leq n < 4^{m+1}.$$

Z bezpośredniego rachunku mamy: $F(2986) = 1989$, $F(2987) = 1990$. Wynika stąd, że najmniejszą liczbą n , dla której istnieje w zbiorze $\{1, \dots, n\}$ podzbiór 1990-elementowy o własności (1), jest 2987.



204. Korzystamy z przedstawienia $e = s_n + r_n$, gdzie

$$s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Reszta r_n spełnia oszacowania:

$$(3) \quad r_n > \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} = \frac{n+3}{(n+2)!}$$

oraz

$$(4) \quad r_n < \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots\right) = \frac{1}{n \cdot n!}.$$

W wyrażeniu $n!e = n!s_n + n!r_n$ pierwszy składnik jest

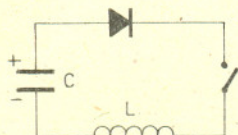
liczbą całkowitą, a drugi - liczbą z przedziału $(0; 1)$. Wobec tego $n!e - [n!e] = n!r_n$, czyli

$$a_n = (n \cdot n!r_n)^n.$$

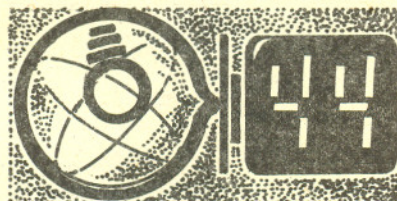
Z nierówności (4) wynika teraz, że $a_n < 1$, natomiast z (3) i z nierówności Bernoulliego dostajemy:

$$a_n > \left(\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}\right)^n = \left(1 - \frac{2}{n^2 + 3n + 2}\right)^n > 1 - \frac{2n}{n^2 + 3n + 2}.$$

Zatem, na mocy twierdzenia o trzech ciągach, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.



Rys. 1

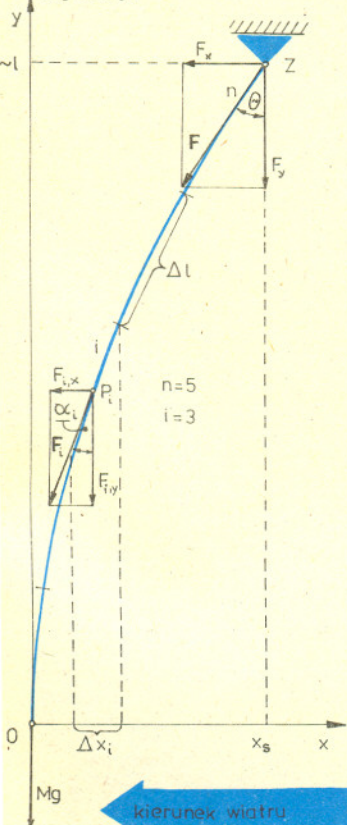


Czołówka ligi zadaniowej Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 93 (WT=2,41), 94 (WT=2,80), 95 (WT=2,93) i 96 (WT=2,35) z numerów 9/1989 i 10/1989

Aleksander Surma	- Myszków	45,06pkt
Andrzej Borowski	- Aleksandrów Kujawski	39,92pkt
Adam Sikorski	- Lublin	36,64pkt
Wojciech Peisert	- Wrocław	35,32pkt
Piotr Bala	- Toruń	35,27pkt
Przemysław Gworys	- Częstochowa	33,59pkt
Mariusz Bogacz	- Piłciszów	31,91pkt
Marek Karaf	- Tarnów	29,30pkt
Łepek Motyka	- Kraków	26,63pkt

Pan Surma po raz drugi przekroczył 44 punkty.



Rys. 2

n	5	20	50	500
$x_s(10^{-2}l)$	8,849	8,840	8,839	8,839

109. Dany jest obwód, jak na rysunku 1, złożony z idealnych elementów: diody, kondensatora o pojemności C , cewki o indukcyjności L oraz wyłącznika. W chwili początkowej między okładkami kondensatora panuje napięcie U_0 (górna okładka naładowana dodatnio). Znaleźć napięcie na kondensatorze oraz natężenie prądu płynącego w obwodzie po upływie czasu t od zamknięcia wyłącznika.

110. Kula A o promieniu r spada na unieruchomioną kulę B o promieniu R i wielokrotnie się od niej odbija. W chwili początkowej środek kuli A znajduje się na wysokości $h \gg R + r$ nad środkiem kuli B i w odległości $\epsilon \ll R + r$ od prostej pionowej przechodzącej przez środek tej kuli. Znaleźć (metodą analityczną lub numeryczną) przybliżony wzór opisujący współrzędną poziomą środka kuli A w chwili k -tego odbicia w zależności od liczby k i współrzędnej początkowej ϵ . Odbicia należy traktować jako idealnie sprężyste, opór powietrza i obrót kuli A zaniedbać.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 6/1990

Przypominamy treść zadań:

101. Izolowana kula metalowa o promieniu 1 cm jest bombardowana przez szeroki strumień elektronów o energii 1000 eV. Po pewnym czasie zostaje osiągnięty stan równowagi. Jakie są w tym stanie: potencjał kuli, zgromadzony na niej ładunek oraz natężenie pola elektrycznego przy powierzchni kuli?

102. Jednorodna, wiotka lina o długości l i masie m , z zawieszonym na jej dolnym końcu obciążnikiem o masie $M = 5m$, zwisa swobodnie, zaczepiona swym górnym końcem. Wiejący poziomo ze stałą prędkością wiatr działa na linę siłą równą co do wartości ciężarowi liny, podczas gdy siła wiatru działająca na obciążnik jest zaniedbywalna w porównaniu z jego ciężarem. Jaki kąt tworzy lina z kierunkiem pionowym w punkcie jej zaczepienia? Obliczyć w sposób przybliżony metodami numerycznymi odchylenie obciążnika od pionu.

101. W stanie równowagi (nasyceń) ładunek kuli jest stały i nowe elektrony nie docierają do niej dzięki odpychaniu elektrostatycznemu. Potencjał kuli V musi zatem być równy energii elektronu dzielonej przez jego ładunek, czyli $V = 1000 V$. Ładunek zgromadzony na kuli wynosi $Q = CV$, gdzie $C = 4\pi\epsilon_0 R$ jest pojemnością kuli o promieniu R (ϵ_0 - przenikalność elektryczna próżni), czyli $Q = 4\pi\epsilon_0 RV$. Natężenie pola przy powierzchni kuli, określone wzorem

$$E = Q/(4\pi\epsilon_0 R^2),$$

wynosi zatem $E = V/R$.

102. Kierunek liny w punkcie zaczepienia Z pokrywa się z kierunkiem wypadkowej siły F działania liny na zaczep (rys. 2). Składowa pionowa tej siły $F_y = -(m + M)g = -6mg$ (g - przyspieszenie ziemskie), składowa pozioma (siła działania wiatru równa ciężarowi liny) $F_x = -mg$. Kąt Θ między kierunkiem siły wypadkowej a pionem wynosi więc $\Theta = \arctg(F_x/F_y) = \arctg(1/6) = 9,5^\circ$.

Aby obliczyć odchylenie dolnego końca liny od linii pionowej przechodzącej przez punkt zaczepienia, podzielimy linę na n odcinków o jednakowej długości $\Delta l = l/n$. Traktując te odcinki jako prostoliniowe przyjmujemy, że kierunek każdego odcinka pokrywa się z kierunkiem siły działającej w połowie jego długości ze strony dolnej części liny.

Niech i będzie numerem kolejnego odcinka licząc od dolnego końca liny (umieszczonego w początku układu współrzędnych). Środek tego odcinka oznaczamy przez P_i , omawianą wyżej siłę - przez \vec{F}_i . Składowa pozioma siły \vec{F}_i jest równa całkowitej sile wiatru działającej na linę poniżej punktu P_i :

$$F_{i,x} = F_x(i - 1/2)/n = -(i - 1/2)mg/n$$

(wobec niewielkiego odchylenia liny od pionu można przyjąć, że siła wiatru działająca na odcinek liny jest proporcjonalna do długości tego odcinka).

Składowa pionowa równa jest sumie ciężaru dolnego odcinka liny i obciążnika:

$$F_{i,y} = -Mg - (i - 1/2)mg/n = -(5mg + (i - 1/2)mg/n).$$

Kąt α_i nachylenia odcinka względem pionu spełnia równanie

$$\tg \alpha_i = F_{i,x}/F_{i,y} = (i - 1/2)/(5n + i - 1/2).$$

Rzut poziomy tego odcinka wynosi $\Delta x_i = \Delta l \sin \alpha_i$. Wobec tego, że $\alpha_i < \Theta < 10^\circ$, przyjmujemy $\Delta x_i = \Delta l \tg \alpha_i$. Stąd

$$\Delta x_i = (l/n)(i - 1/2)/(5n + i - 1/2).$$

Poszukiwane odchylenie od pionu obliczamy jako

$$x_s = \sum_{i=1}^n \Delta x_i.$$

Wyniki otrzymane dla różnych wartości n podane są w tabeli obok.

Dla uzyskania poprawnego wyniku wystarczy więc bardzo niewielkie n . Tym bardziej, że ze względu na przyjęte założenia upraszczające nie ma sensu podawanie końcowego wyniku z dokładnością większą od dwóch miejsc znaczących. Odpowiedź brzmi więc: $x_s = 0,088 l$. Dokładniejsze sposoby rozwiązywania problemu dają również taki wynik.

drobiazgi

Historia wielkich odkryć bywa czasem gorzka. Niektóre pierwszeństwa zostają przyznane dopiero w wyniku procesów sądowych. Laser gazowy został wynaleziony w roku 1957 przez Gordona Goulda, studenta Uniwersytetu Columbia. To właśnie Gould jako pierwszy zaproponował nazwę „laser”, ale kiedy złożył w roku 1959 podanie o patent, zostało ono odrzucone, ponieważ Townes i Shawlow otrzymali już w tym czasie patenty na „masery optyczne”. Dopiero w roku 1987 Gould uzyskał zadośćuczynienie prawne. Również dopiero w ostatnich latach sąd przyznał pierwszeństwo odkrycia Johnowi Atanasoffowi, fizykowi-teoretykowi z Uniwersytetu Stanowego Iowa, który zaprojektował i zbudował pierwszy na świecie elektroniczny komputer. Miało to miejsce w latach 1937 i 1942.

Szwedzka firma Volvo zamierza wprowadzić w bieżącym roku do masowej produkcji hydrauliczne urządzenie o nazwie Cumulo, które przejmuje część energii kinetycznej pojazdu, traconej do tej pory bezpowrotnie przy hamowaniu, a następnie zwraca ją, gdy pojazd zaczyna przyspieszać. Jeżeli autobus z połową maksymalnej liczby pasażerów wyhamował od prędkości 45 km/h, to przechwycona energia jest na tyle duża, że Cumulo jest w stanie rozpedzić z powrotem ten autobus do prędkości 35 km/h. Dalszy wzrost prędkości następuje już konwencjonalnie – na skutek działania silnika. Ocenia się, że w komunikacji miejskiej Cumulo pozwoli zmniejszyć zużycie paliwa o 30 %.

Teoria kwantowa Bohra w oczach współczesnych mu fizyków: A. Einstein (1913) – *Jeśli tak jest, to oznacza to koniec fizyki jako nauki.*

H. Kramers (1920) – *Teoria kwantów przypomina inne zwycięstwa w nauce. Początkowo przez kilka miesięcy cieszy się nimi, a potem przez całe lata płacze.*

P. Epstein (1922) – *Prawa kwantowania w swej dzisiejszej postaci mają w pewnym stopniu charakter teologiczny, dla przyrodników zupełnie nie do przyjęcia. Wielu uczonych oburza się nawet na owe Bauern – Regeln (chłopskie prawa).*

H. Kramers, Ch. Holst (1923) – *Jesteśmy bardzo daleko od takiego opisanie mechanizmu atomowego, który pozwoliłby prześledzić na przykład wszystkie ruchy elektronu w atomie lub zrozumieć rolę stanu stacjonarnego [...]. Teorię kwantów można porównać z lekarstwem leczącym chorobę, lecz zabijającym chorego.*

W. Pauli (1925) – *Fizyka teraz znów znalazła się w ślepych zaułku, w każdym razie jest ona dla mnie zbyt trudna i wolałbym być komikiem filmowym lub czymś w tym rodzaju, byleby nie słyszeć nic więcej o fizyce.*

D.S. Roždewskij (1919) – *Cała metoda Bohra oparta jest na kwantowaniu – zupełnie ślepych, mało logicznych procesie myśli, na formalnej, jeśli tak można powiedzieć, intuicji.*

(Zaczerpnięte z książki L. Ponomariewa, *O kwantach* rzeczy ciekawe, tł. B. Bandomir, Nasza Księgarnia 1981.)

Około 44 000 burz i 8 milionów błyskawic szaleje dziennie nad powierzchnią Ziemi. Oszacowano, że w Stanach Zjednoczonych od pioruna ginie rocznie około 150 osób i wybucha około 10 000 pożarów lasów. Badania chmur burzowych wykazały, że przypominają one swą budową kanapkę złożoną z trzech warstw. Środek kanapki naładowany jest ujemnie i ma kształt płaskiego dysku rozciągającego się na parę lub więcej kilometrów, ale o grubości nie przekraczającej jednego kilometra. Obłożony jest on z góry większą, a z dołu mniejszą warstwą ładunku dodatniego. W czasie wyładowania natężenie pola elektrycznego może sięgać miliona woltów na metr, a przekazywany ładunek może wynosić 10^{20} elektronów.

Układ słoneczny skwantowany?

Daniel Titius w 1772 r. przedstawił tabelę odległości planet od Słońca w jednostkach równych 1/4 odległości Merkurego od Słońca:

Merkury	$4 = 4$
Wenus	$7 = 4 + 1 \cdot 3$
Ziemia	$10 = 4 + 2 \cdot 3$
Mars	$16 = 4 + 4 \cdot 3$
Jowisz	$52 = 4 + 16 \cdot 3$
Saturn	$100 = 4 + 32 \cdot 3$

Później doszedł

$$\text{Uran} \quad 196 = 4 + 64 \cdot 3.$$

A więc $R = 4 + 2^n \cdot 3$, $n = -\infty, 0, 1, 2, 4, 5$. Zastanawiający jest brak planety z $n = 3$ między Marsem i Jowiszem w odległości $28 = 4 + 8 \cdot 3$. W tym miejscu znajduje się pas asteroid.

Grupy przekształceń to właściwie wszystkie grupy. Już ponad sto lat temu Arthur Cayley udowodnił, że każda grupa ma identyczne własności algebraiczne z pewną grupą przekształceń.

Przestrzeń okołoziemską staje się coraz bardziej zaśmiecona. Obecnie okrąża Ziemię około 7000 starych satelitów, ostatnich członów rakiet itp., a liczba mniejszych obiektów może być nawet dziesięciokrotnie większa. Jak oceniają Peter Eichler i Dietrich Rex z Uniwersytetu w Brunzwicku (RFN) prawdopodobieństwo zderzenia pomiędzy orbitującymi odpadkami wynosi około 20 % na rok. Co więcej, z prawdopodobieństwem 3,7 % na rok może zajść zderzenie o charakterze katastroficznym, tj. takim, że weźmie w nim udział jeden z większych obiektów, a produkty zderzenia będą obdarzone na tyle dużą energią, by wejść w kolizję o równie gwałtownym przebiegu. Gdy gęstość kosmicznych odpadów przekroczy wartość krytyczną, zderzenie katastroficzne doprowadzić może do swoistej reakcji łańcuchowej, w wyniku której większość krążących obiektów uległaby rozbiciu. Powstały w ten sposób pas drobnych okruchów mogłoby bardzo podrożyć wystrzeliwanie nowych satelitów (poprzez konieczność wyposażania ich w niezbędne osłony) lub wręcz uniemożliwić podróże kosmiczne. Jeśli ilość odpadów na orbicie okołoziemskiej będzie rosła w dotychczasowym tempie, sytuacja taką nastąpi w ciągu najbliższych 20–50 lat.

W zasadzie istnieje obecnie teoria ramion spiralnych galaktyk, ale – jak można się spodziewać – nie tłumacząca rozmaitych zjawisk ujawniających się przy numerycznej symulacji ewolucji galaktyki. Np. symulacje wykazują z reguły szybkie powstawanie poprzeczki (przegrody), podczas gdy w rzeczywistości galaktyki przegrodzone stanowią tylko 20 % ogółu galaktyk spiralnych. Co więc przeszkadza powstawaniu poprzeczek? Niewykluczone, że są tego co najmniej trzy przyczyny: obecność masywnego jądra galaktycznego, obecność masywnego halo oraz duży rozrzut prędkości gwiazd w dysku galaktycznym. Sprawa nie jest jednak do końca jasna, ponieważ np. obecność masywnego halo oprócz niszczenia poprzeczek sprzyja też niszczeniu samych ramion spiralnych – tymczasem mnóstwo galaktyk (łącznie z naszą) to galaktyki spiralne i zarazem mające stosunkowo masywne halo.

w niektórych krajach prowadzi się intensywne badania nad możliwością wyhodowania (przy użyciu metod inżynierii genetycznej) bakterii zdolnych do tworzenia polimerów użytecznych w produkcji mas plastycznych bądź nawet będących rodzajami plastyków. Ze swej natury takie plastyki byłyby biodegenerowalne, nie prowadziłby więc do zanieczyszczenia środowiska (a przynajmniej nie w tym stopniu co zwykłe plastyki). Ich zasoby byłyby więc odnawialne, a produkcja nie zależałaby od dostaw ropy naftowej.

Rafał KAPELKO,
laureat srebrnego medalu KUPzM
w 1989 roku

W Delcie 2/1989 była przedstawiona propozycja rozwinięcia tytułowego tematu przy przyjęciu, że

pochodną ciągu (a_n) jest ciąg $(a_n^{(1)}) := a_{n+1} - a_n$.

Natychmiastową konsekwencją takiej definicji jest rekurencyjny wzór na k -tą pochodną ciągu

$$(a_n^{(k+1)}) = (a_n^{(k)})^{(1)}.$$

Spośród licznych przykładów umieszczonych w mojej pracy szczególnie interesujący jest ciąg geometryczny o ilorazie 2. Mamy bowiem $(a \cdot 2^{n-1})^{(1)} = a \cdot 2^n - a \cdot 2^{n-1} = a \cdot 2^{n-1}$. Oznacza to, że jeśli b_n jest ciągiem geometrycznym o ilorazie 2, to $b_n^{(1)} = b_n$, a więc ciąg ten zachowuje się analogicznie do funkcji e^x .

Można sprawdzić, że wzory na pochodną sumy i różnicy ciągów oraz iloczynu ciągu przez stałą są takie same, jak dla funkcji zmiennej rzeczywistej. Pozwala to na podanie bezpośredniego wzoru na k -tą pochodną ciągu

$$(1) \quad a_n^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a_{n+k-i} \cdot (-1)^i,$$

co sprawdza się indukcyjnie.

Natomiast inne są już wzory na pochodną iloczynu i ilorazu ciągów

$$(a_n \cdot b_n)^{(1)} = a_n^{(1)} \cdot b_n + a_n \cdot b_n^{(1)} + a_n^{(1)} \cdot b_n^{(1)},$$

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{(1)} = \frac{a_n^{(1)} \cdot b_n - a_n \cdot b_n^{(1)}}{b_n^2 + b_n \cdot b_n^{(1)}}.$$

Sprawdzenie np. pierwszego z nich jest następujące

$$(a_n \cdot b_n)^{(1)} = a_{n+1} \cdot b_{n+1} - a_n \cdot b_n =$$

$$= a_{n+1} \cdot b_{n+1} - a_{n+1} \cdot b_n + a_{n+1} \cdot b_n - a_n \cdot b_n =$$

$$= a_{n+1} \cdot b_n^{(1)} + a_n^{(1)} \cdot b_n = (a_n^{(1)} + a_n) \cdot b_n^{(1)} + a_n^{(1)} \cdot b_n =$$

$$= a_n^{(1)} \cdot b_n^{(1)} + a_n \cdot b_n^{(1)} + a_n^{(1)} \cdot b_n.$$

Konsekwencją przyjęcia podanej wyżej definicji pochodnej ciągu jest przyjęcie definicji:

ciągami pierwotnym ciągu (a_n) nazywamy taki ciąg $(\int a_n)$, że $(\int a_n)^{(1)} = a_n$,

co daje, po prostej indukcji,

$$(2) \quad \int a_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + C.$$

Okazuje się więc, że każdy ciąg można łatwo całkować.

Ponieważ inny jest wzór na pochodną iloczynu, więc inny jest też wzór na całkowanie przez części

$$(3) \quad a_n \cdot b_n = \int a_n^{(1)} \cdot b_n + \int a_n \cdot b_n^{(1)} + \int a_n^{(1)} \cdot b_n^{(1)}.$$

Jako przykład zastosowania tego wzoru obliczę $S_n^k = \sum_{i=1}^n i^k$.

Podstawiając we wzorze (3) $a_n = (n+1)^{k+1}$ i $b_n = 1$ otrzymujemy

$$(n+1)^{k+1} = \int \sum_{i=0}^k \binom{k+1}{i+1} (n+1)^{k-i},$$

gdzie pochodna ciągu a_n została obliczona przez zróżniczkowanie rozwinięcia wyrazu a_{n+1} w dwumian Newtona. Mamy więc, wobec wzoru (2),

$$(4) \quad (n+1)^{k+1} = \binom{k+1}{1} S_n^k + \binom{k+1}{2} S_n^{k-1} + \dots + \binom{k+1}{k+1} S_n^0 + C,$$

co pozwala obliczyć S_n^k rekurencyjnie za pomocą S_n^{k-1}, \dots, S_n^0 , gdyż podstawiając $n=1$ i $k=0$ stwierdzamy, że $C=1$.

Dalsze uproszczenie obliczania S_n^k można uzyskać, jeśli się zauważy, że

$$(5) \quad (k+1) \cdot S_n^k = n^{k+1} + A_1 \cdot n^k + \dots + A_k \cdot n,$$

gdzie współczynniki A_1, \dots, A_k nie zależą od n , zależą tylko od k . Wzór (5) uzyskuje się ze wzoru (4) indukcyjnie.

Zgodnie ze wzorem (5) mamy

$$(k+1) \cdot S_{n+1}^k = (n+1)^{k+1} + A_1(n+1)^k + \dots + A_k(n+1),$$

co po odjęciu (5) daje

$$(6) \quad (k+1)(n+1)^k = ((n+1)^{k+1} - n^{k+1}) + A_1((n+1)^k - n^k) + \dots + A_k((n+1) - n).$$

Z drugiej strony, zgodnie z dwumianem Newtona, mamy

$$(n+1)^m = n^m + \binom{m}{1} n^{m-1} + \dots + \binom{m}{m-1} n + 1.$$

Pozwala to obliczyć współczynniki występujące we wzorze

$$(6). \text{ Mamy wtedy, dla każdego } i = 1, 2, \dots, k$$

$$(k+1) \binom{k}{i} = \binom{k+1}{i+1} + A_1 \cdot \binom{k}{i} + A_2 \cdot \binom{k-1}{i-1} + \dots + A_i \binom{k-i+1}{1}.$$

Przenosząc wyrazy nie zawierające współczynników A_m na lewą stronę i dzieląc przez $\binom{k+1}{i+1}$ otrzymujemy dla dowolnego k

$$(7) \quad i = \binom{i+1}{1} B_1 + \binom{i+1}{2} B_2 + \dots + \binom{i+1}{i} B_i,$$

gdzie $B_i = A_i / \binom{k+1}{i+1}$. Jeśli ten rezultat połączymy ze wzorem (5), otrzymamy

$$(k+1) \sum_{i=1}^n i^k = n^{k+1} + \binom{k+1}{1} B_1 n^k +$$

$$+ \binom{k+1}{2} B_2 n^{k-1} + \dots + \binom{k+1}{k} B_k n,$$

gdzie współczynniki B_m dane są rekurencyjnie wzorem (7).

Przytoczony wzór na całkowanie ciągów przez części pozwala np. na obliczenie sum

$$1! \cdot 1 + 2! \cdot 2 + \dots + n! \cdot n,$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1),$$

albo takich sum funkcji trygonometrycznych, jak

$$\cos 0 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha,$$

$$\sin 0 + \sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha,$$

ale szczegółów ani wyników nie podaję, by nie paść przyjemności Czytelnikom.