

# oerld

$h=6.63 \cdot 10^{-34}$  J·s  $\pi=3,141593$

CENA ZŁ 2000,-

**NR 9 (196) 1990**

PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550

POPULARNY MIESIĘCZNIK MATEMATYCZNO-FIZYCZNO-ASTRONOMICZNY





KAŻDY MOŻE BYĆ KOLPORTEREM !!!

*Delta* tańsza o 25 %

Kupując 150 egzemplarzy *Delt*y płacisz tylko 1.500,- zł za numer. Przesyłając pod adresem redakcji dowód wpłaty wielokrotności sumy 225 tysięcy złotych otrzymasz tyleż paczek po 150 egzemplarzy najbliższego numeru *Delt*y.

## SPIS TREŚCI

### NUMERU 9(196)

|   |        |
|---|--------|
| Układ stabilizujący figury<br><i>doc. dr Stanisław Fudali</i> | str. 1 |
| Zadanie z XX<br>Międzynarodowej Olimpiady<br>Fizycznej        | str. 4 |
| Neptun<br><i>dr Tomasz Kwast</i>                              | str. 6 |
| Mała Delta  | str. 8 |
| Korespondencyjny Klub<br>Fizyków                              | str. 9 |
| Schody do matematyki  | str.10 |
| Patrz w niebo   | str.11 |
| Ile lat ma Ziemia?<br><i>dr Lidia Goettig</i>                 | str.12 |
| Klub 44   | str.14 |
| Zadania   | str.15 |
| Drobiazgi   | str.16 |
| Zapiski z przestrzeni<br>Riemanna                             | str.17 |

Nasze konto:

PBK VIII OM W-wa 370028-4170

Uniwersytet Warszawski, redakcja miesięcznika *Delta*

„Delta”  
matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego, Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
Towarzystwa Astronomicznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Edukacji Narodowej

Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga  
dr Lidia Goettig – z-ca red. nac.  
mgr Maria Kapuścińska  
mgr Krystyna Kordos – sekr. red.  
dr hab. Marek Kordos – red. nac.  
dr Paweł Krawczyk  
dr Tomasz Kwast  
mgr Anna Rudnik  
dr Jerzy Ryll  
Katarzyna Słomka  
mgr Joanna Udalska

Ilustrowała Maria Brykalska-Karlowska

Adres Redakcji

Centrum Informatyczne UW  
Krakowskie Przedmieście 26/28  
00-927 Warszawa  
tel. 20-03-81 wew. 841

Wydawca:

Uniwersytet Warszawski  
Krakowskie Przedmieście 26/28  
00-927 Warszawa

Nakład 18 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.,  
2,50 ark. druk.,  
papier offsetowy V kl. 70 g.  
Wydrukowano  
w Zakładach Graficznych  
RSW „Prasa-Książka-Ruch”  
w Warszawie, ul. Srebrna 16

Skład systemem TeX  
wykonała redakcja.

#### WARUNKI PRENUMERATY

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na I kwartał 1991 r. wynosi 5 700,- zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
  - oddziały RSW właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora
  - odbioru zamówionych egzemplarzy dokonuje prenumerator w wyznaczonych punktach sprzedaży lub w inny, uzgodniony sposób,
  - urzędy pocztowe i listonosze – od prenumeratorów z terenów wiejskich lub innych miejscowości, w których nie ma oddziałów RSW, a w miastach tylko od osób niepełnosprawnych – poczta zapewnia dostawę zamówionych egzemplarzy pod wskazany adres pod warunkiem uiszczenia dodatkowej opłaty za każdy doręczany egzemplarz – opłata wynosi 250,- zł od egzemplarza,
  - Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział W-wa 370044-1195-139-11 – tylko od prenumeratorów zlecających dostawę za granicę.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
  - na kraj – do 20 XI na I kwartał roku następnego  
do 20 II na II kwartał  
do 20 V na III kwartał  
do 20 VIII na IV kwartał
  - na zagranicę – do 31 X na I kwartał  
oraz do 1 dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarsa si 2 000,-

**W następnym numerze:**

**Komputer, fraktale i papierowe kulki**

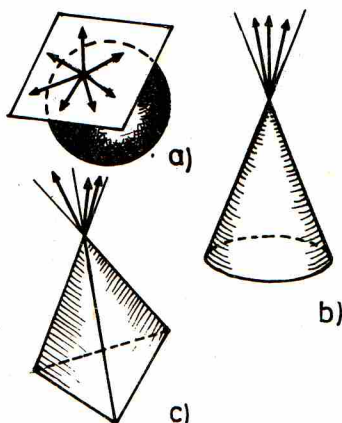
# Układ stabilizujący figury

Doc. dr Stanisław FUDALI

Pytanie, o którym jest mowa w tym artykule, da się sformułować w postaci problemu doświadczalnego: iloma szpilkami wbitymi w płaszczyznę można unieruchomić leżącą na niej płaską figurę i gdzie należy je wbijać – zakładamy przy tym, że przez figurę szpilek wbijać nie można (np. dlatego, że jest wykonana ze stalowej blachy). Pewne spostrzeżenia nasuwają się od razu – szpilki trzeba wbijać tuż przy brzegu figury. Dla podania pełnej i pewnej odpowiedzi na to pytanie należy je matematycznie sprecyzować.

Figura wypukła to taka figura, która wraz z dwoma punktami zawiera cały łączący je odcinek.

Można rozważać podobne sytuacje w przestrzeni.



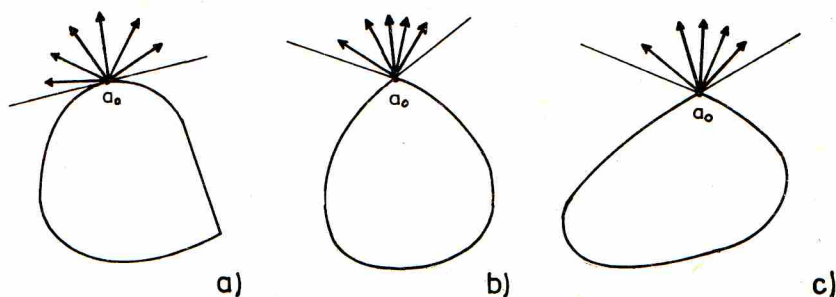
Rys. 2. Tutaj stożek nieprzesuwalności jest rzeczywiście stożkiem – stąd wywodzi się właśnie nazwa tego obszaru; gdy punkt  $a_0$  jest punktem regularnym brzegu figury  $Q$ , to stożek nieprzesuwalności w tym punkcie jest półprzestrzenią (rys. 2a).

Punkt regularny to taki punkt, w którym figura ma określoną styczną – na płaszczyźnie prosta, a w przestrzeni płaszczyznę.

Na płaszczyźnie rozpatrywać będziemy figury wypukłe (i tylko dla nich rozwiążemy postawiony problem). Umówimy się też, że wolno nam je tylko przesuwac równolegle w dowolnym kierunku (a nie wolno np. obracać). Przesunięcie równoległe będziemy tu rozumieć „w sposób mechaniczny”, tzn. brać pod uwagę będziemy nie tylko położenie początkowe i końcowe (jak to się na ogół czyni w geometrii), lecz także wszystkie położenia pośrednie między tymi dwoma.

Wbijanie szpilki to wybór jakiegoś punktu płaszczyzny, przez który figurze nie wolno się przesuwac (użyty wyżej zwrot „tuż przy brzegu” matematyzuje się w ten sposób, że rozpatrujemy figury bez brzegu, a szpilkę wbijamy w któryś z punktów brzegu).

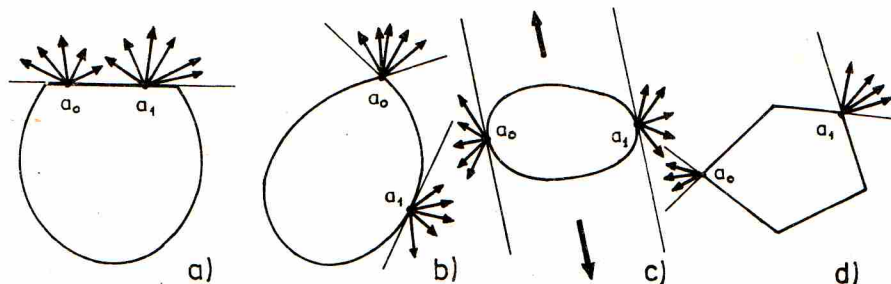
Weźmy zatem jakąś figurę wypukłą, oznaczmy ją  $Q$ , i wbijmy szpilkę tuż przy jej brzegu w punkt  $a_0$ . Szpilka ta uniemożliwi przesuwanie figury  $Q$  w pewnych kierunkach. Kierunki, w których wbita szpilka nie pozwala przesuwac figury  $Q$ , wypełniają pewien obszar. Będziemy go nazywać **stożkiem nieprzesuwalności** figury  $Q$  w punkcie  $a_0$ .



Rys. 1

Jest to suma tych półprostych wychodzących z punktu  $a_0$ , których przedłużenia do prostej przechodzą przez punkty wewnętrzne figury  $Q$  (nie trudno zauważyć, że stożek nieprzesuwalności jest zbiorem, do którego należy dokładnie jeden punkt brzegowy, mianowicie  $a_0$ , będący równocześnie punktem brzegowym figury  $Q$ ). Od razu spostrzegamy, że stożek nieprzesuwalności figury  $Q$  w punkcie  $a_0$  jest wnętrzem kąta wypukłego wraz z wierzchołkiem i staje się półpłaszczyzną, gdy punkt  $a_0$  jest regularny (rys. 1a).

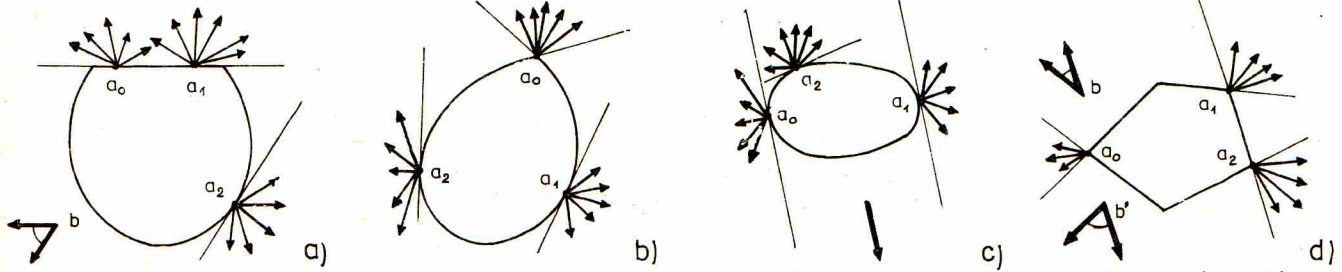
Wbijmy teraz drugą szpilkę w punkcie  $a_1$  ( $a_0 \neq a_1$ ), także tuż przy brzegu figury  $Q$ .



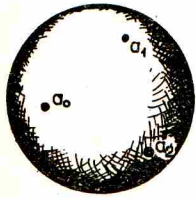
Rys. 3

Stożki nieprzesuwalności w punktach  $a_0$  i  $a_1$  mogą się pokrywać (rys. 3a), ale niekoniecznie; mogą być różne i mieć tylko niepustą część wspólną (rys. 3b) albo nawet pustą (rys. 3c,d). Zrozumiałe jest, że za pomocą dwóch szpilek możemy bardziej, niż za pomocą jednej, ograniczyć możliwość przesuwania figury  $Q$ , a nawet **bardzo** ograniczyć tę możliwość, co widać na rysunku 3c, gdzie możliwe jest przesuwanie figury  $Q$  tylko w jednym kierunku (na rysunku zaznaczonym grubą strzałką).

Wbijając trzecią szpilkę w punkt  $a_2$ , różny od  $a_0$  i  $a_1$ , i też tuż przy brzegu figury  $Q$ , otrzymamy trzeci stożek nieprzesuwalności figury  $Q$ .



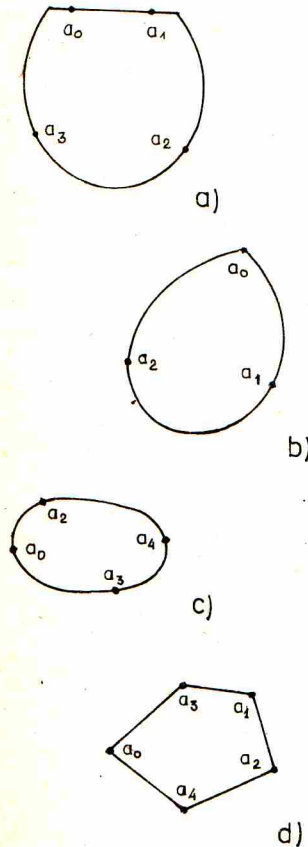
Rys. 4



Rys. 5. W przypadku figury trójwymiarowej żadne trzy „szpilki” nie mogą jej ustabilizować, tzn. nie może powstać sytuacja taka, jak na rysunku 4b.

Może się zdarzyć, że wbite trzy szpilki unieruchomią całkowicie figurę  $Q$  (rys. 4b), tzn. uniemożliwią przesuwanie jej w **każdym** kierunku, ale niekoniecznie stać się tak musi; na rysunkach 4a i 4d widać, że  $Q$  można przesuwac w każdym kierunku między kierunkami strzałek zaczepionych w punkcie  $b$ ; na rysunku 4c taki kierunek jest tylko jeden. W przypadku sytuacji takiej, jak na rysunku 4b, powiadaemy, że  $Q$  została **ustabilizowana** trzema punktami  $a_0, a_1, a_2$  (a nie trzema szpilkami), a zbiór tych punktów nazywamy **układem stabilizującym** figury  $Q$ .

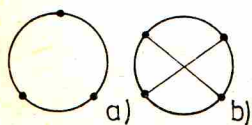
Nietrudno zauważyć na podstawie rysunków 4a,c,d, że wbicie czwartej szpilki tuż przy brzegu figury  $Q$  nie zawsze powoduje ustabilizowanie tej figury. Wbijając gdziekolwiek na łuku  $a_0a_1a_2$  (rys. 4a) niczego w zakresie „przesuwalności” figury  $Q$  nie zmienimy; można ją będzie nadal przesuwać w każdym kierunku między kierunkami wskazanymi obok rysunku (i wzdłuż tych kierunków też). Podobnie wygląda sprawa z figurą przedstawioną na rysunku 4c, gdy czwartą szpilkę wbijemy gdziekolwiek na łuku  $a_0a_1a_2$  – nie uniemożliwi ona przesunięcia we wskazanym kierunku. Taki sam rezultat będzie, gdy czwartą szpilkę wbijemy w odcinek  $a_1a_2$  figury przedstawionej na rysunku 4d, ale gdy wbijemy ją w którymś punkcie łamanej  $a_0a_1$  nie zawierającej  $a_2$  (lub łamanej  $a_0a_2$  nie zawierającej  $a_1$ ), to uniemożliwi ona przesunięcia w pewnych kierunkach, choć wraz z  $a_0, a_1, a_2$  nie będzie stanowił układu stabilizującego tej figury. Można jednak bez trudu spostrzec, że w przypadku figury przedstawionej na rysunku 4a lub 4c (wraz z zaznaczonymi tam szpilkami zagradzającymi przesunięcia) można wskazać taki punkt  $a_3$  „tuż przy brzegu” tej figury, że wraz z poprzednimi punktami  $a_0, a_1, a_2$  tworzy on układ stabilizujący (porównaj z rysunkiem 6). Dla figury z rysunku 4d można znaleźć takie punkty  $a_3$  i  $a_4$ , które wraz z zaznaczonymi  $a_0, a_1, a_2$  dają układ stabilizujący tej figury (rys. 6d). Położenie tych punktów na rysunku 6 jest jednym z wielu możliwych.



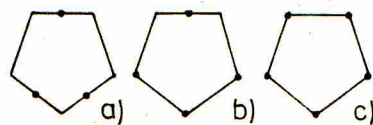
Rys. 6

Okazuje się przeto, że wystarczy mieć dostateczną liczbę szpilek, aby ustabilizować dowolnie wybraną figurę na płaszczyźnie (i w przestrzeni też). W sytuacjach przedstawionych na rysunku 6 liczba punktów stabilizujących jest równa 3, 4 i 5 w zależności od kształtu figury i rozmieszczenia tych punktów na jej brzegu (mówiliśmy, że „tuż przy brzegu”). Zauważmy jednak, że w przypadku figury przedstawionej na rysunku 6a jeden z punktów  $a_0$  lub  $a_1$  jest nieistotny dla jej stabilizacji – usunięcie któregoś z nich (przy pozostawieniu drugiego) nie umożliwi przesunięcia figury w żadnym kierunku. Powiemy zatem o układzie **wszystkich** punktów  $a_0, a_1, a_2, a_3$ , zaznaczonych na rysunku 6a, że jest on układem stabilizującym figury  $Q$ , ale nie układem istotnym. Natomiast układ punktów  $a_0, a_1, a_2, a_3$  na rysunku 6c jest istotnym układem stabilizującym figury  $Q$  z tego rysunku – znaczy to, że po usunięciu z tego układu jakiegokolwiek punktu znajdzie się kierunek, w którym bez przeszkód będzie można przesunąć figurę  $Q$ . Inaczej mówiąc, układ stabilizujący  $A$  jest **istotnym układem stabilizującym** figury  $Q$ , jeżeli usunięcie z niego jakiegokolwiek punktu sprawia, że przestaje on być układem stabilizującym tę figurę.

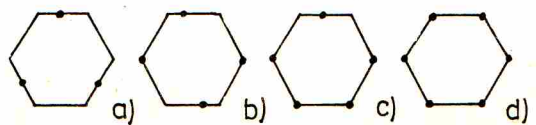
Dla koła można wskazać dwa istotne układy stabilizujące, różniące się liczbą punktów (i, oczywiście, rozmieszczeniem ich na okręgu); widzimy je na rysunku 7. Dla pięciokąta foremnego istotny układ stabilizujący może się składać z 3, 4 lub 5 punktów (rys. 8), a dla sześciokąta o równoległych przeciwległych bokach – z 3, 4, 5 lub 6 punktów (rys. 9).



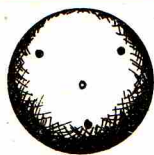
Rys. 7



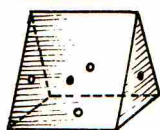
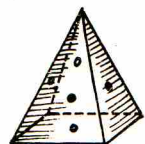
Rys. 8



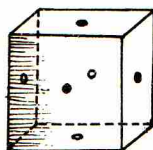
Rys. 9



4 punkty

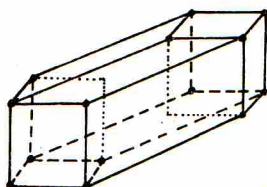


5 punktów

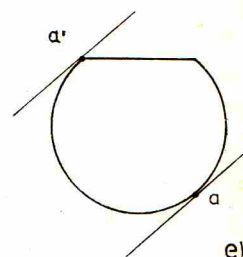
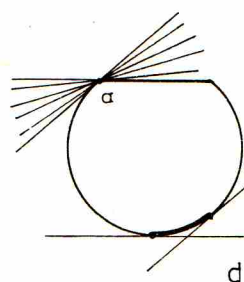
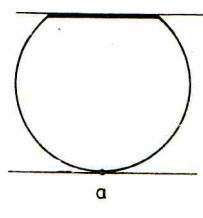
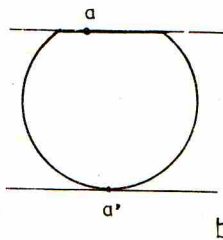
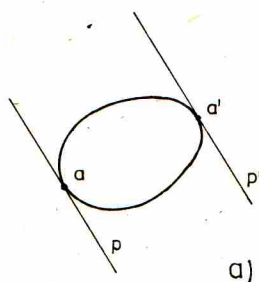


6 punktów

Rys. 10. Dla figur trójwymiarowych tak klarownego spostrzeżenia nie ma. Istnieją bowiem figury trójwymiarowe, których minimalne układy stabilizujące mają 4, 5 lub 6 punktów. Natomiast istotne układy stabilizujące figur trójwymiarowych mogą mieć od 4 do 14 punktów.



Rys. 11. Figura, dla której istnieje czternastopunktowy istotny układ stabilizujący; punkty układu umieszczone są w wierzchołkach tej figury.



Rys. 13

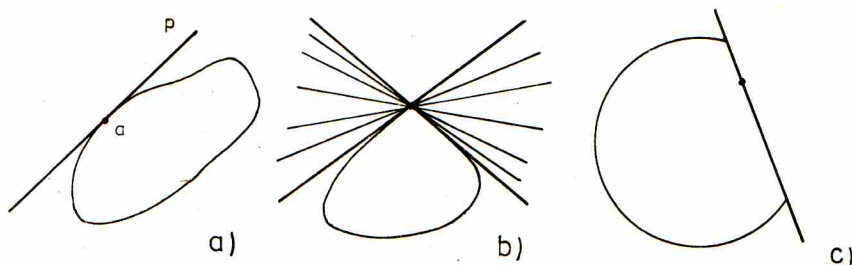
Maksymalna liczba punktów w istotnym układzie stabilizującym figury płaskiej wynosi sześć; ma to miejsce dla sześciokąta o równoległych przeciwległych bokach – i tylko dla niego (dowód w [2]).

Istotny układ stabilizujący figury  $Q$  nazwiemy **minimalnym**, jeżeli składa się on z możliwie najmniejszej liczby punktów. Wszystkie układy stabilizujące przedstawione na rysunkach 7, 8 i 9 są istotne, ale minimalne są tylko te, które składają się z trzech punktów. Powstaje więc naturalne pytanie o najmniejszą liczbę punktów w minimalnym układzie stabilizującym – czyżby dla figur płaskich liczbą tą było 3? Odpowiedź na to daje

**Spostrzeżenie** (L. Fejes Tóth, [1]). *Dla dowolnej figury płaskiej, różnej od równoległoboku, istnieje minimalny układ stabilizujący składający się z trzech punktów, a dla równoległoboku taki układ też istnieje i składa się z czterech punktów.*

Skoro każdą figurę płaską, różną od równoległoboku, można ustabilizować trzema punktami, to od razu chce się wiedzieć, jak powinny być rozmieszczone owe 3 punkty stabilizujące, bo Spostrzeżenie Fejes Tótha tego nie orzeka.

Aby odpowiedzieć na to pytanie, trzeba wprowadzić pewne pojęcia. Rozważmy wypukłą figurę  $Q$  z niepustym wnętrzem i weźmy punkt  $a$  z jej brzegu, a następnie poprowadźmy przez ten punkt prostą  $P$ , której żaden punkt nie należy do wnętrza figury  $Q$ . Inaczej mówiąc,  $P$  zawiera tylko punkty brzegu figury  $Q$ , a cała  $Q$  leży po jednej stronie  $P$ . Prostą  $P$  nazywa się **podpierającą** figury  $Q$  w punkcie  $a$ .



Rys. 12

Jeżeli punkt  $a$  jest regularny, to  $P$  pokrywa się ze styczną w tym punkcie; jeżeli natomiast  $a$  nie jest regularny (jest np. wierzchołkiem), to prosta podpierająca w takim punkcie nie jest wyznaczona jednoznacznie (rys. 12b).

Weźmy teraz pod uwagę prostą  $P'$  podpierającą figurę  $Q$ , która jest równoległa do  $P$ , ale od niej różna. Każdy punkt należący do  $P'$  i do brzegu  $Q$  nazywamy **quasi-antypodycznym** względem punktu  $a$ ; w przypadku, gdy jest tylko jeden taki punkt, to nazywamy go wprost **antypodycznym** do  $a$ .

Na rysunkach 13a,b,e widzimy punkty antypodyczne. Warto zwrócić uwagę, że punkty quasi-antypodyczne na rysunkach 13c,d wypełniają pewien łuk brzegu figury.

Teraz już można odpowiedzieć na postawione pytanie o rozmieszczenie punktów minimalnego układu stabilizującego płaskiej figury wypukłej różnej od równoległoboku; wobec Spostrzeżenia Fejes Tótha w takim układzie są trzy punkty. Otóż pierwszy z nich, oznaczmy go  $a_0$ , możemy wybrać zupełnie dowolnie, ale drugi,  $a_1$ , trzeba wybrać tak, aby wyznaczony przezeń stożek nieprzesuwalności figury nie pokrywał się z takim stożkiem wyznaczonym przez  $a_0$ . Trzeci punkt układu minimalnego nie może być punktem quasi-antypodycznym ani do  $a_0$ , ani do  $a_1$  i nie może należeć do łuku przechodzącego przez  $a_0$  i  $a_1$ , zawartego w brzegu figury  $Q$  między punktami quasi-antypodycznymi do  $a_0$  i  $a_1$  (dowód w [3]). Dla równoległoboku minimalny układ stabilizujący, zgodnie ze Spostrzeżeniem, jest czteroelementowy; wnętrze każdego boku zawiera dokładnie jeden punkt takiego układu.

**Literatura cytowana:**

- [1] Fejes Tóth L., *On primitive polyhedra*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 13(1962), 379-382.
- [2] Fudali S., *Six-point primitive fixing system in a plane*, Demonstratio Math. 19(1986), no 2, 341-348.
- [3] Fudali S., *Fixing system and homothetic covering*, Acta Math. Hung. 50(3-4)(1987), 203-225.

Dla figur trójwymiarowych rozmieszczenie punktów minimalnego układu stabilizującego jest zagadnieniem otwartym. Lukę tę mogą wypełnić Czytelnicy przysyłając do redakcji swoje pomysły z ich uzasadnieniem, dopisując na kopercie: *Układ stabilizujący* – wszystkie nadesłane listy przeczytam i prześlę swoją opinię.

Zwrócić tu trzeba uwagę na fakt, że w przestrzeni trójwymiarowej będziemy mieli do czynienia z figurami, których minimalny układ stabilizujący jest czteroelementowy, a także z figurami, dla których ten układ jest pięcio- i sześćoelementowy, przy czym nie jest pewne, czy do tych ostatnich należą tylko równoległościany i nie jest jasne, dla jakich figur minimalny układ stabilizujący składa się z pięciu punktów.

Jako drugi temat dla Czytelników proponuję znalezienie w przestrzeni trójwymiarowej takich figur, których istotny układ stabilizujący jest co najwyżej trzynasto-, dwunasto-, ..., siedmioelementowy (figury, dla których taki układ jest co najwyżej sześćo-, pięcio- i czteroelementowy, pokazane są na rysunku 10, a figura z czternastoelementowym układem – na rysunku 11) i zbadanie, czy dla figury, dla której istnieje co najwyżej  $s$ -elementowy istotny układ stabilizujący ( $s \in \{5, 6, \dots, 14\}$ ) istnieje też układ  $(s - j)$ -elementowy dla  $j \in \{1, 2, \dots, s - 4\}$ . Dla kuli, na przykład, tak jest: istnieje sześciopunktowy istotny układ stabilizujący z punktami umieszczonymi w końcach trzech wzajemnie prostopadłych średnic, pięciopunktowy z trzema punktami na równiku i po jednym na każdym biegunie oraz czteropunktowy z punktami umieszczonymi w wierzchołkach czworościanu wpisanego w tę kulę (rzecz jasna, nie dowolnego – prawda?), ale czy dla innych figur jest tak również? I czy dla figur płaskich też tak jest?

Tematyka zaproponowana w artykule St. Fudalego może być, oczywiście, wykorzystana w pracach nadsyłanych na nasz Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki.



**Przedstawiamy:**

**Zadanie z XX Międzynarodowej Olimpiady Fizycznej**

| t [°C] | p <sub>i</sub> /p <sub>0</sub> |         |
|--------|--------------------------------|---------|
|        | i = A                          | i = B   |
| 40     | 0,284                          | 0,07278 |
| 90     | 1,476                          | 0,6918  |

Dane są dwie nie mieszające się ciecz A i B. Prężności par nasyconych p<sub>i</sub> (i = A lub B) tych cieczy spełniają zależność:

$$\ln(p_i/p_0) = \frac{a_i}{T} + b_i \quad (i = A \text{ lub } B),$$

gdzie p<sub>0</sub> oznacza ciśnienie normalne, T jest temperaturą bezwzględną pary, a a<sub>i</sub> i b<sub>i</sub> są pewnymi stałymi zależnymi od cieczy.

Wartości stosunku p<sub>i</sub>/p<sub>0</sub> dla cieczy A i B w temperaturach 40°C i 90°C są podane w tabelce.

I Wyznacz temperaturę wrzenia cieczy A i cieczy B pod ciśnieniem p<sub>0</sub>.

II Ciecze A i B wiano do naczynia, w którym uległy one rozwarstwieniu w sposób pokazany na rysunku 1. Powierzchnię cieczy B pokryto cienką warstwą nielotnej cieczy C, nie mieszającej się z cieczami A i B, zapobiegającej swobodnemu parowaniu z górnej powierzchni cieczy B. Stosunek mas cząsteczkowych cieczy A i B (w fazie gazowej) wynosi

$$\gamma = \mu_A/\mu_B = 8.$$

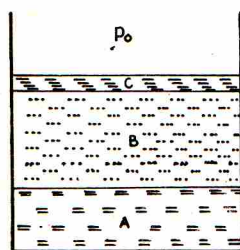
Masy cieczy A i B początkowo były równe i wynosiły m = 100 g. Wysokości słupów cieczy w naczyniu oraz gęstości cieczy są takie, że można przyjąć, iż ciśnienie w każdym punkcie naczynia praktycznie nie różni się od ciśnienia atmosferycznego równego ciśnieniu normalnemu p<sub>0</sub>.

Do układu cieczy w naczyniu powoli, w sposób jednostajny, dostarczamy ciepło. Okazuje się, że temperatura t cieczy zmienia się w czasie τ w sposób przedstawiony na rysunku 2.

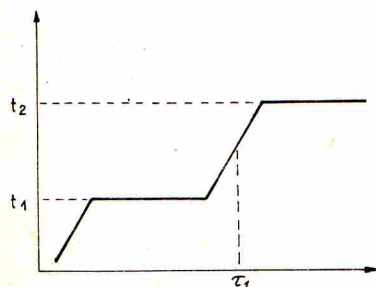
Wyznacz temperatury t<sub>1</sub> i t<sub>2</sub> odpowiadające poziomym odcinkom wykresu oraz masy cieczy A i B w chwili τ<sub>1</sub>.

**Uwaga:** Zakładamy, że pary cieczy:

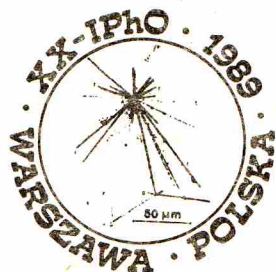
- 1) spełniają prawo Daltona głoszące, że ciśnienie mieszaniny gazów jest równe sumie ciśnień, jakie miałyby te gazy osobno;
- 2) aż do ciśnień odpowiadających odpowiednim ciśnieniom par nasyconych można traktować jako gazy doskonałe.



Rys. 1



Rys. 2



## Rozwiązanie

I Ciecz wrze wtedy, gdy jej ciśnienie pary nasyconej zrówna się z ciśnieniem zewnętrznym. W celu wyznaczenia temperatury wrzenia danej cieczy należy więc znaleźć taką temperaturę  $T_{bi}$ , przy której  $p_i/p_0 = 1$ . Wtedy  $\ln(p_i/p_0) = 0$ , a zatem

$$T_{bi} = -\frac{a_i}{b_i}.$$

Współczynniki  $a_i$  i  $b_i$  wyznaczamy na podstawie wzoru z treści zadania i danych liczbowych zawartych w tabelce, a mianowicie:

$$a_A \approx -3748,49 \text{ K}, \quad b_A \approx 10,711, \quad a_B \approx -5121,64 \text{ K}, \quad b_B \approx 13,735.$$

Stąd temperatury wrzenia cieczy wynoszą odpowiednio:

$$T_{bA} \approx 349,95 \text{ K} \approx 77^\circ\text{C}, \quad T_{bB} \approx 372,89 \text{ K} \approx 100^\circ\text{C}.$$

II Początkowa, nachylna część wykresu przedstawia ogrzewanie układu cieczy. Poziomy odcinek wykresu odpowiada stałej temperaturze, a więc sytuacji, gdy dostarczane ciepło zużywane jest na parowanie. Wobec istnienia warstewki nielotnej cieczy  $C$  nigdy nie zachodzi parowanie swobodne z górnej powierzchni cieczy  $B$ . Rozpatrzmy zatem parowanie z wnętrza cieczy.

Niech w cieczy  $A$  lub  $B$ , lub też na powierzchni rozdzielającej te cieczy powstanie, np. wskutek fluktuacji, pęcherzyk pary. Aby mógł się on wydostać na zewnątrz, ciśnienie w jego wnętrzu musi być równe ciśnieniu zewnętrznemu  $p_0$  (lub nieco je przewyższać), w przeciwnym razie pęcherzyk zaniknie.

Ciśnienie wewnątrz pęcherzyka powstałego w cieczy  $A$  lub  $B$  jest równe prężności pary nasyconej odpowiedniej cieczy. Natomiast ciśnienie wewnątrz pęcherzyka powstałego na powierzchni rozdzielającej cieczy  $A$  i  $B$  jest równe sumie prężności par nasyconych obu tych cieczy. Wobec tego w miarę ogrzewania najpierw będą osiągać w swym wnętrzu ciśnienie  $p_0$  te pęcherzyki, które powstają na powierzchni rozdzielającej obie cieczy. Temperatura  $t_1$  odpowiada więc swego rodzaju wspólnemu wrzeniu cieczy na powierzchni je rozdzielającej i jest ona niższa od temperatur wrzenia cieczy  $A$  i  $B$ .

Aby wyznaczyć wartość  $t_1$ , wystarczy stabelaryzować zależność sumy ciśnień par nasyconych cieczy  $A$  i  $B$  i stwierdzić, dla jakiej wartości temperatury osiąga ona ciśnienie  $p_0$ .

Ze wzoru podanego w treści zadania mamy:

$$\frac{p_A}{p_0} = \exp\left(\frac{a_A}{T} + b_A\right), \quad \frac{p_B}{p_0} = \exp\left(\frac{a_B}{T} + b_B\right).$$

$p_A + p_B$  osiąga wartość  $p_0$ , gdy

$$\frac{p_A}{p_0} + \frac{p_B}{p_0} = 1.$$

Tą drogą znajdujemy, że  $t_1 = 67^\circ\text{C}$  (z dokładnością do pełnych  $^\circ\text{C}$ ). Stąd ciśnienia par nasyconych cieczy  $A$  i  $B$  w każdym pęcherzyku powstającym na powierzchni rozdziału cieczy w temperaturze  $t_1 = 67^\circ\text{C}$  wynoszą:

$$p_A \approx 0,734p_0, \quad p_B \approx 0,267p_0, \quad (p_A + p_B = 1,001p_0 \approx p_0).$$

Ciśnienia te nie zmieniają się podczas ruchu pęcherzyka w górę poprzez ciecz  $B$ , bo zależą one jedynie od temperatury, która jest stała. Objętość pęcherzyków podczas ich ruchu przez ciecz  $B$  również nie może ulec zmianie bez naruszenia związku  $p_A + p_B \approx p_0$ . Zatem stosunek mas par obu cieczy w każdym pęcherzyku jest taki sam. Dzieje się tak dopóty, dopóki jedna z cieczy zupełnie nie zamieni się w parę. Od tego momentu temperatura układu zacznie wzrastać (drugi, nachylny odcinek wykresu), ale pozostałej cieczy nie będzie ubywać, zanim nie zacznie ona wrzeć (wyższy, poziomy odcinek wykresu). Temperatura  $t_2$  oznacza więc temperaturę wrzenia tej cieczy, która pozostanie w naczyniu.

Stosunek mas  $m_A/m_B$  par cieczy  $A$  i  $B$  w każdym pęcherzyku uchodzącym z cieczy w temperaturze  $t_1$  jest proporcjonalny do gęstości tych par  $\rho_A/\rho_B$ . Ze względu na założenie, że pary można traktować jako gazy doskonałe, stosunek ten jest równy stosunkowi iloczynów ciśnień par przez ich masy cząsteczkowe:

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{p_A}{\rho_B} = \frac{p_A \mu_A}{p_B \mu_B} = \frac{p_A}{p_B} \gamma.$$

$$\frac{m_A}{m_B} \approx 22,0.$$

Liczbowo:

Widać, że cieczy  $A$  ubywa 22 razy szybciej niż cieczy  $B$ . Wyparowaniu 100 g cieczy  $A$  w trakcie wspólnego wrzenia z cieczą  $B$  (na powierzchni rozgraniczającej) towarzyszy wyparowanie 4,5 g cieczy  $B$ . W chwili  $t_1$  w naczyniu jest więc 95,5 g cieczy  $B$ . Cieczy  $A$  nie ma już wtedy w naczyniu. Temperatura  $t_2$  jest więc temperaturą wrzenia cieczy  $B$  i wynosi  $100^\circ\text{C}$ .



Rozwiązanie zadania M 574. Niech  $a_n = \ln \dots \ln n$ . Aby wyrażenie  $a_n$  było

określone, musi być:  $\ln \dots \ln n > 0$ ,

stad  $\ln \dots \ln n > 1$ , a stad  $\ln \dots \ln n > e$

itd., aż w końcu  $n > e^{e^{\dots}}$ . Jest to

prawda dla  $n \leq 3$ . Natomiast dla  $n = 4$  mamy już  $4 < e^e$ . Dla większych  $n$

wykażemy indukcyjnie, że  $e^{e^{\dots}} > n$ .

Istotnie, ponieważ  $e^x \geq 1 + x$ , więc

$e^{e^{\dots}} \geq 1 + e^{e^{\dots}} > 1 + n$ . To dowodzi,

że określone są tylko  $a_1, a_2$  i  $a_3$ .

# Neptun

Dr Tomasz KWAST



Mamy wreszcie pierwsze opublikowane informacje o Neptunie uzyskane przez Voyagera 2 w czasie zbliżenia do planety 25 VIII 1989. Szczegóły będą ujawniane z pewnością jeszcze przez dłuższy czas w miarę opracowywania obserwacji, a na razie nasuwa się jeden generalny wniosek – chyba dla niejednego z nas zaskakujący – że ten położony na peryferiach Układu Słonecznego glob wcale nie jest całkiem martwy, jak można by oczekiwać na podstawie wyników obserwacji Urana. Przeciwnie, na Neptunie i Trytonie bardzo dużo się dzieje!

Przede wszystkim więc błękitny glob Neptuna (pierwsza strona okładki) bardziej przypomina Jowisza niż Urana. Chodzi o to, że w metanowej atmosferze Neptuna wyraźnie widać równoleżnikowe pasy powstające w wyniku działania przyspieszenia Coriolisa na przemieszczające się masy atmosferyczne. Przyczyną istnienia przyspieszenia Coriolisa jest, oczywiście, rotacja planety (jeden obrót w około 15 godzin), a przyczyną ruchów atmosfery (chodzi tu o konwekcję) – jej grzanie od dołu, podobnie jak na Jowiszu. Zaobserwowano również dwa wielkie wiry atmosferyczne. Większy z nich, nazywany Wielką Ciemną Plamą, rozmiarami jest porównywalny z Ziemią i uderzająco przypomina (zwłaszcza na zdjęciach czarno-białych) Wielką Czerwoną Plamę na Jowiszu. Wokół Wielkiej Ciemnej Plamy, chociaż nie tylko, skupiają się białe metanowe obłoki unoszące się 50 km ponad średnią powierzchnią gęstej atmosfery Neptuna.

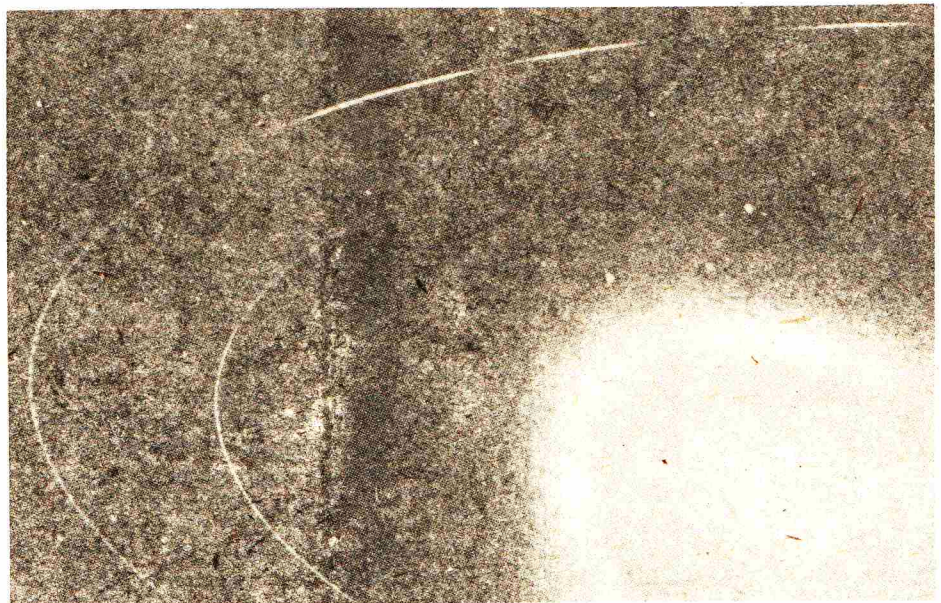
Voyager 2 już przed zbliżeniem do planety rejestrował silne impulsy promieniowania radiowego emitowanego przez naladowane cząstki przelatujące przez magnetosferę Neptuna. Dlatego zaskoczeniem stał się wynik bezpośredniego pomiaru natężenia pola magnetycznego – okazało się ono wyraźnie słabsze niż oczekiwano właśnie na podstawie dotychczasowych obserwacji. Stwierdzono ponadto, że oś pola magnetycznego jest nachylona pod kątem około 50° do osi rotacji planety i nie przechodzi przez jej środek.

## FIZYCZNE NOWINKI

Redaguje dr hab. Andrzej HENNEL

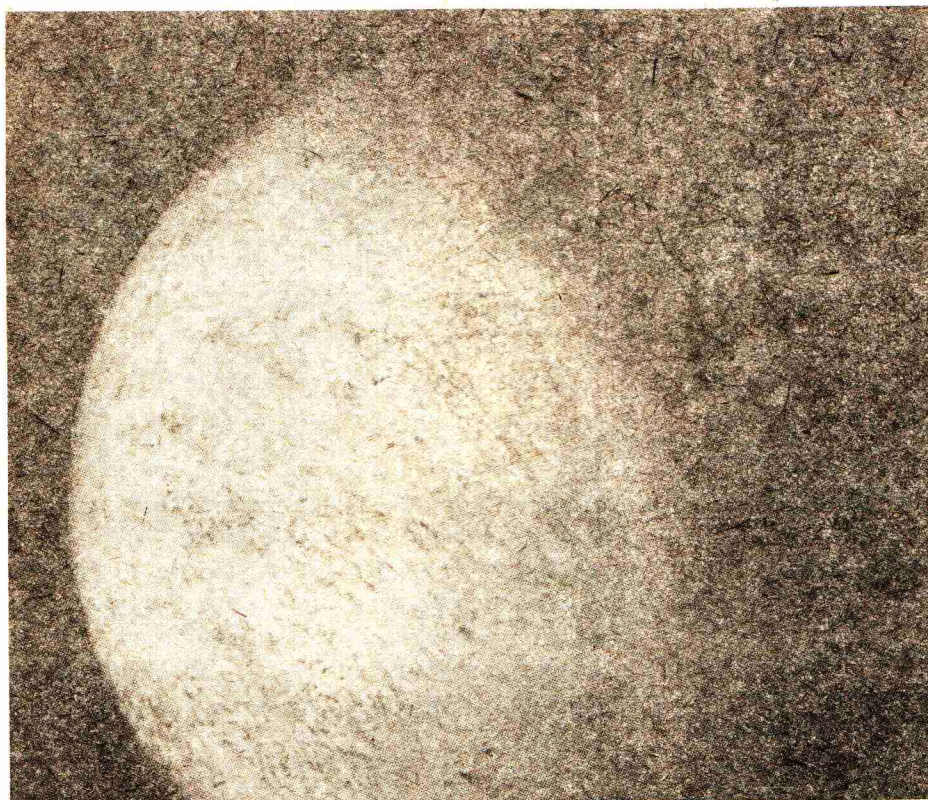
### TORUŃSKIE KWAZIKRYSTAŁY

Kwazikryształy czyli kryształy, w których występuje niedozwolona przez prawa klasycznej krystalografii pięciokrotna os symetrii dwukrotnie już były omawiane na łamach "Delfy" (8/1986 i 2/1988). Prezentowane rezultaty pochodziły jak dotąd z USA, Japonii, Chin i Europy Zachodniej. Jest mi bardzo miło, że tym razem mogę poinformować Czytelników "Delfy" o pierwszych polskich kwazikryształach. Zostały one otrzymane w Toruniu w Zakładzie Radiospektroskopii i Fizyki Węgla należącym do Instytutu Fizyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika. Prowadzone są tam prace nad otrzymywaniem cienkich warstw diamentu metodą epitaksji, czyli nakładania kolejnych warstw krystalicznych na różnego rodzaju podłoża takie jak krzem, molibden, brazyt i kwarc. Epitaksja prowadzona jest z fazy gazowej związków organicznych takich jak aceton, alkohol etylowy, metan, propan i butan. W zależności od warunków procesu otrzymywane były zarówno wysokiej jakości warstwy diamentu o grubości około 15–20 μm jak i drobne kryształki o rozmiarach kilkumikronowych, które okazały się być kwazikryształami zawierającymi pięciokrotną os symetrii. Jeden z nich przedstawia umieszczona poniżej fotografia. Są to, jak się wydaje pierwsze otrzymane kwazikryształy węgla. Przeprowadzone badania owych kwazikryształów między innymi przy użyciu promieni X wykazały, że można je nadal nazywać diamentami, gdyż lokalnie atomy węgla zachowują tetraedryczne uporządkowanie występujące w prawdziwych diamentach. Maksymalne rozmiary owych kwazidiamentów nie przekraczają 8–10 μm. Natomiast po przekroczeniu tych wymiarów zamiast kwazikryształów powstają już całkiem "normalne" kryształy diamentu.



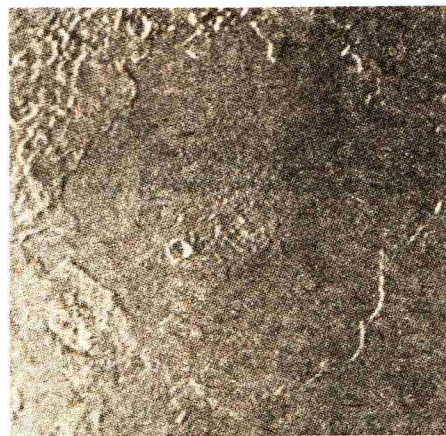
Obserwacje wykonane przez Voyagera 2 potwierdziły spodziewaną obecność pierścieni wokół Neptuna oraz ujawniły istnienie sześciu drobnych satelitów planety. Słabe i wąskie pierścienie – podobnie, jak bywało przy innych planetach – najlepiej były widoczne w pewnym stopniu „pod Słońce”, tzn. gdy sonda od planety już się oddalała. Dwa najjaśniejsze z nich mają promienie 53 000 i 63 000 km, a drugi z nich wyraźnie składa się z licznych zgęszczeń obiegających Neptuna po tej samej orbicie. Wszystkie pierścienie składają się z cząstek zasługujących raczej na nazwę pyłu niż bryłek.





Pomimo panującego w okolicach Neptuna mroku i związanych z tym problemów (*Delta 2/1990*) sonda szczęśliwie przekazała na Ziemię wręcz idealne obrazy powierzchni Trytona, największego satelity Neptuna (średnica Trytona wynosi 2 760 km), a ściślej mówiąc – jego południowych obszarów biegunowych i części równikowych – reszta była podczas spotkania w cieniu. Przy największym zbliżeniu można było rozróżnić szczegóły o rozmiarach rzędu 3 km.

Cała powierzchnia Trytona pokryta jest warstwą lodu wodnego, metanowego i azotowego wymieszanego w rozmaitym stopniu ze skałami. Widać przede wszystkim, że równikowy obszar satelity jest znacznie ciemniejszy niż czapa biegunowa. Pokryty jest on licznymi zagłębieniami, tak że całość przypomina skórę pomarańczy. Długie linie uskoku tworzą tu w przybliżeniu

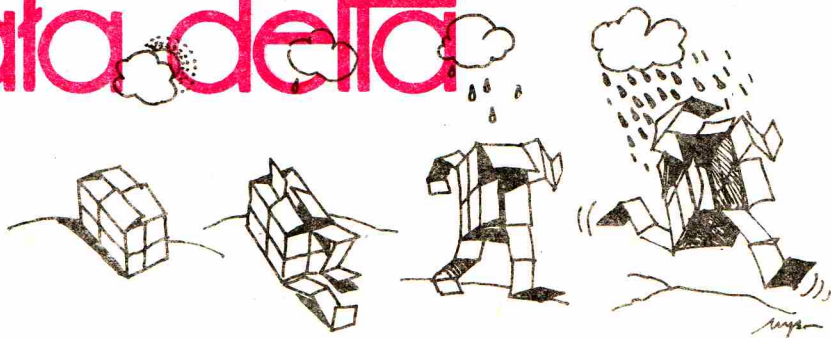
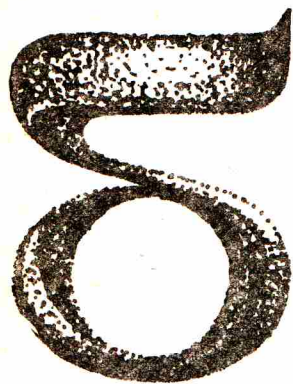


prostokątną sieć. Oślepiąco biała czapa polarna (odbijająca 90% światła) jest, oczywiście, też lodową pustynią, ale bynajmniej nie „martwą”. Zaobserwowano tu np. podwójne uskoki, między którymi przestrzeń została wypełniona lodem wypływającym z głębi gruntu. Widać zamrożone „jeziora” o niezwykle ostrych brzegach, z młodymi kraterami uderzeniowymi na powierzchni. Geolodzy dopatrzili się formacji dowodzących, że niektóre jeziora były kilkakrotnie wypełniane wodą, która następnie cofała się, zanim zdążyła zamarznąć.

W pobliżu południowego bieguna wykryto sieć ciemnych smug przypominających ślady zostawiane przez wiatr na powierzchni Marsa. Jednak atmosfera Trytona jest zbyt nikła, by mogła utworzyć takie ślady (ciśnienie rzędu  $10^{-5}$  atmosfery), dlatego przypuszcza się, że są to skutki wybuchów tamtejszych wulkanów, tyle że strzelających ciekłym i gazowym azotem zanieczyszczonym pyłem. Źródłem energii tych wulkanów mogłoby być światło słoneczne zdolne poprzez zewnętrzną skorupę ogrzać głębiej położony azot do temperatury powyżej punktu krzepnięcia. Materiał wulkaniczny wystrzelony z prędkością do 50 m/s byłby następnie przez rzadką atmosferę unoszony na kilkadziesiąt kilometrów dając owe charakterystyczne smugi.

Dalsze wiadomości o układzie Neptuna z pewnością są w drodze. Gdy trochę ich się uzbiera, prześlemy je Czytelnikom.



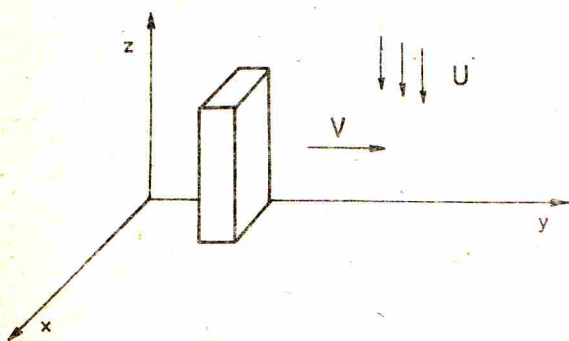


## Czy opłaca się biec w czasie deszczu?

Przypuśćmy, że na otwartym terenie zaskoczył Cię, Czytelniku, niespodziewany ulewny deszcz. Nie masz parasola, od najbliższego schronienia dzieli Cię spora odległość. Jak powinienesz pokonać tę odległość, by zostać możliwie mało zmoczonym?

Intuicja podpowiada nam, że najkorzystniej jest przebywać na deszczu możliwie jak najkrócej, a więc należy przebiec dystans dzielący od schronienia tak szybko, jak tylko potrafimy. Prawdopodobnie taka byłaby właśnie instynktowna reakcja każdego z nas, gdybyśmy znaleźli się w powyżej opisanej, nieprzyjemnej sytuacji. Gdy jednak zastanowimy się chwilę nad odpowiedzią na tytułowe pytanie, być może nasuną się nam wątpliwości: co prawda biegnąc skracamy czas przebywania na deszczu, ale jednocześnie zwiększamy naszą prędkość względem niego, a więc i liczbę kropli, która do nas dociera. Może więc istnieje jakaś optymalna prędkość biegu? Spróbujemy odpowiedzieć na to pytanie w sposób możliwie ścisły.

Zacznijmy od stworzenia uproszczonego modelu problemu (tak zwykle postępują fizycy, gdy próbują opisać świat), w którym moknącą osobę zastąpimy prostopadłościannem o krawędziach  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , poruszającym się ze stałą prędkością  $V$  w kierunku osi  $y$  tak, jak to przedstawia rysunek 1.



Rys. 1

Załóżmy też, że nie wieje wiatr, a więc krople deszczu padają pionowo w dół z prędkością  $u$ , przy czym (kolejne założenie!) deszcz jest jednorodny, tzn. liczba kropli deszczu na jednostkę objętości jest stała. Po takim uproszczeniu sobie życia łatwo już możemy obliczyć, że w czasie  $t$  spadnie na górną powierzchnię prostopadłościannu (lub na głowę i barki człowieka) deszcz zawarty w objętości

$$(1) \quad O_1 = utab.$$

Nie jest to jednak jedyne źródło moknięcia. W tym samym czasie  $t$  prostopadłościann „zderzy się” z kroplami deszczu zawartymi w objętości

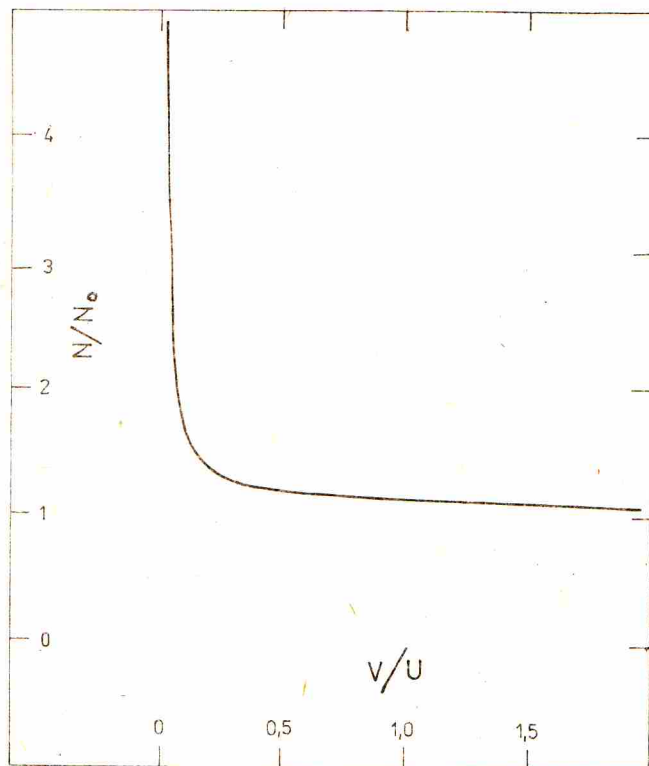
$$(2) \quad O_2 = Vtac.$$

Całkowita liczba kropli, które dotrą do prostopadłościannu w czasie  $t$  (a jest to świetna miara „poziomu zmoknięcia”), jest proporcjonalna do  $O_1 + O_2$ . Jeśli weźmiemy pod uwagę, że w naszym przypadku  $t = s/V$ , gdzie  $s$  jest odległością od schronienia, to ostatecznie dostaniemy na liczbę kropli, które dotarły do prostopadłościannu, następujące wyrażenie

$$(3) \quad N = N_0 \left( 1 + \frac{bu}{cV} \right).$$

Współczynnik  $N_0$  jest iloczynem wielu nie znanych czynników, ale jego znajomość nie jest istotna. Wzór (3) i tak mówi nam, że nasza intuicja była poprawna: ponieważ  $N$  jest malejącą funkcją prędkości biegu  $V$ , więc im szybciej biegnie moknąca osoba (reprezentowana przez prostopadłościann), tym mniej moknie.

A jednak wzór (3) kryje pewną niespodziankę, którą łatwo wykryć rysując wykres liczby kropli  $N$  w zależności od prędkości  $V$  (rysunek 2). Aby to zrobić, musimy znać wartość stosunku  $b/c$ . Nie jest to trudne. Dla typowych rozmiarów człowieka stosunek ten jest rzędu  $1/15$ . Stąd wniosek, że ze wzrostem  $V$  liczba kropli bardzo szybko osiąga wartość asymptotyczną  $N_0$ .



Rys. 2

Jak szybko? Biorąc pod uwagę, że prędkość opadów wynosi na ogół 9 m/s lub mniej, możemy odczytać z rysunku 2, że idąc szybkim krokiem (około 2 m/s) zmokniemy jedynie o około 15% więcej niż biegnąc z prędkością odpowiadającą rekordowi świata na 100 m (10 m/s). A zatem chyba jednak nie warto biec w czasie deszczu!

Ten zaskakujący wniosek dotyczy, oczywiście, sytuacji, gdy nie ma wiatru i deszcz pada pionowo. Co zmieni się w przedstawionej analizie, gdy prędkości wiatru nie możemy zaniedbać? Może Czytelnik sam spróbuje odpowiedzieć na to pytanie. Dla zachęty dodam, że gdy wiatr wieje w plecy, odpowiednio zmodyfikowany wzór (3) przewiduje istnienie prędkości optymalnej, przy której stopień zmoknięcia jest najmniejszy.

Na zakończenie jeszcze tylko jedna uwaga. Może wydawać się dziwne, że nasz instykt podpowiada zachowanie, które nie jest zachowaniem najlepszym. Cóż, wiąże się to z tym, że rzeczywistość jest znacznie bardziej skomplikowana niż nasz bardzo przecież uproszczony model. Zaniedbaliśmy możliwość niejednorodności w prędkości deszczu, zawirowań, tego, że człowiek może się pochylić w kierunku deszczu, aby zmniejszyć powierzchnię wystawioną na moknięcie i wiele innych efektów. Wszystkie te komplikacje powodują, że w ogólnym przypadku otrzymany wynik przestaje być ważny i uciekając jak najszybciej przed deszczem realizujemy najkorzystniejszą życiowo strategię. Nie zmienia to, oczywiście, wniosku, że w prostych przypadkach nasz model jest poprawny.

Małą Deltę opracował Paweł KRAWCZYK

(na podstawie A. De Angelis,  
*Eur. J. Phys.* 8(1987), 201)

Listy prosimy przysyłać pod adresem:  
Korespondencyjny Klub Fizyków  
Wydział Fizyki Uniwersytetu  
Warszawskiego  
ul. Hoża 69, 00-681 Warszawa.

Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego

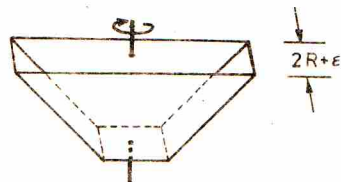
## KOESPONDENCYJNY KLUB FIZYKÓW

*Drodzy Członkowie i Sympatycy Klubu!*

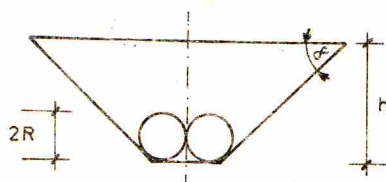
*Przypominamy, że co miesiąc przyznajemy nagrodę książkową dla autora najciekawiej opracowanego rozwiązania postawionych zagadnień.*

Dzisiejsza propozycja nie dotyczy doświadczeń, ale jest zbiorem problemów teoretycznych związanych z pewnym obiektem fizycznym. Problemy są uszeregowane według stopnia trudności: od pierwszego – łatwego do trzeciego – dla koneserów. Ale przejdźmy do rzeczy:

Rozważmy pudełko w kształcie graniastosłupa o podstawie trapezu równoramiennego, w którym znajdują się dwie kule o średnicy  $2R$  nieznacznie mniejszej od grubości pudełka (wysokości graniastosłupa). Pudełko może obracać się wokół pionowej osi jak na rysunku.



Wygląd zewnętrzny pustego pudełka.



Przekrój pudełka z kulami.

**Problem 1.** Napędzamy puste pudełko wprawiając je w ruch obrotowy o stałej prędkości kątowej  $\omega_0$ . Co się stanie z kulą umieszczoną na skośnej części dna pudełka w odległości  $r$  od osi obrotu?

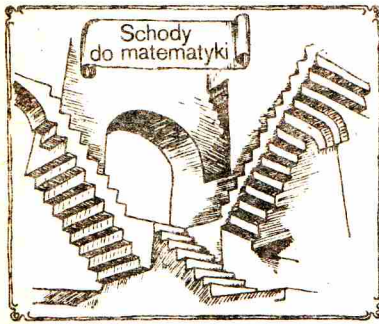
**Problem 2.** Napędzamy pudełko z leżącymi na jego dnie kulami wprawiając je w ruch obrotowy o prędkości kątowej  $\omega$  rosnącej powoli od zera do wartości  $\omega_m$ , a następnie powoli obniżamy  $\omega$  do zera. Podać zależność momentu pędu  $L$ , momentu bezwładności  $I$  i energii  $E$  ruchu obrotowego układu w zależności od  $\omega$ . Czy otrzymamy jednoznaczną zależność? Przedyskutować wynik w zależności od  $\omega_m$ .

**Problem 3.** Zakładamy, że układ jest zamocowany w sposób umożliwiający obrót bez tarcia. Przykładamy mały moment siły powodując rozpędzenie układu do prędkości kątowej  $\omega_m$ , a następnie zmieniamy znak momentu siły i utrzymujemy go aż do zatrzymania układu. Znaleźć  $\omega$ ,  $L$ ,  $I$ ,  $E$  w zależności od czasu. Czy zależności  $L$ ,  $I$ ,  $E$  od  $\omega$  są takie same jak w problemie 2? Czy wystąpi histereza?

Pudełko ma moment bezwładności  $I_0$  i wysokość  $h$ , kąt ostry przy podstawie trapezu wynosi  $\alpha$ , a masa każdej z kul jest równa  $m$ .

Redaguje doc. dr Jan GAJ

## Placki ziemniaczane



Nietrudno przepołowić nożem okrągły placek ziemniaczany: wystarczy przeciąć go przez środek (rys. 1). *Wystarczy, ale i trzeba*: linia prosta dzieli koło na dwie części o równych polach wtedy i tylko wtedy, gdy przechodzi przez jego środek.

Równie łatwo jest podzielić na dwie równe części kwadrat i można to zrobić na wiele (*nieskończenie* wiele) sposobów i tak jak dla koła, każde cięcie musi przechodzić przez środek. Jak jest dla trójkąta równobocznego? Trudno by było przedstawić opisowo położenie linii prostej dzielącej na połowy nieregularny obszar, taki – jak na przykład – na rysunku 2. Możemy tylko udowodnić *twierdzenie egzystencjalne*:

**Twierdzenie I.** Jeżeli  $A$  jest obszarem na płaszczyźnie, to istnieje linia prosta dzieląca  $A$  na dwie części o równych polach.

„Dowód”. Wykorzystamy znaną z analizy matematycznej **własność Darboux** funkcji ciągłej: jeżeli  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją ciągłą, taką że  $f(a) < 0$ , a  $f(b) > 0$ , to istnieje wewnątrz przedziału  $[a, b]$  taka liczba  $c$ , że  $f(c) = 0$ . Wyrażona tu własność ujmuje bodajże najbardziej istotny aspekt pojęcia ciągłości: linie ciągłe nie mogą przenikać wzajemnie przez siebie nie przecinając się.

Rozpatrzmy więc obszar  $A$  (rys. 2), wybierzmy dowolnie kierunek  $\vec{w}$  i patrzmy, co się dzieje, gdy pewną prostą  $l$  przesuwamy równoległe w kierunku  $\vec{w}$ . Określimy funkcję, której wartością jest różnica pól części, na które  $l$  rozcina  $A$ . Gdy  $l$  jest całkowicie „pod”  $A$ , czyli jedna z części jest pusta, wartość funkcji jest dodatnia, dla drugiego położenia – ujemna. Zatem gdzieś „w środku” musi być równa zero, tj. obie części mają równe pola.

Do tego fragmentu tekstu można odnieść kilka uwag. Dlaczego słowo „dowód” wziąłem w cudzysłów? Ponieważ nie jest to ścisły dowód, a właściwie tylko jego pomysł. Używamy też pojęcia pola w niedostatecznie precyzyjny sposób. W nie do końca jasny sposób określiliśmy funkcję i korzystaliśmy z jej ciągłości nawet bez prób uzasadnienia. Nie wiadomo, dla jakich obszarów nasze twierdzenie jest stosowalne (czy naprawdę rozumowanie jest dobre dla każdego?). No, ale tak pracuje każdy matematyk i chyba każdy intelektualista: najpierw pomysł, potem staranne przetworzenie go i dopracowanie szczegółów. Wpadnięcie na pomysł wymaga intuicji i wiedzy, opracowanie go – wiedzy, techniki i rzetelności.

Drugą uwagą, którą warto zrobić, jest to, że udowodniliśmy właściwie twierdzenie mocniejsze niż I, a mianowicie:

**Twierdzenie II.** Jeżeli  $A$  jest obszarem na płaszczyźnie, to istnieje linia prosta dzieląca  $A$  na dwie części o równych polach. Prosta ta może mieć dowolny, przedtem obrany kierunek.

Kolisty placek można też podzielić na cztery równe ćwiartki (rys. 3). Matematycznie własność ta to, oczywiście,

**Twierdzenie III.** Dowolny obszar na płaszczyźnie można podzielić na cztery części o równych polach dwiema prostymi prostopadłymi.

Dowód (równie ścisły, jak i poprzedni). Wybierzmy prostą  $l_\alpha$  połowiącą obszar i tworzącą z ustaloną osią kąt  $\alpha \in [0^\circ, 90^\circ]$ . Podzielmy  $A$  na dwie połowy inaczej, za pomocą prostej prostopadłej do  $l_\alpha$ . Mamy (rys. 3)

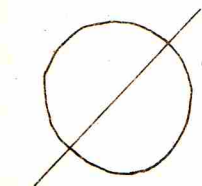
$$A_1 + A_2 = A_3 + A_4 \quad \text{oraz} \quad A_1 + A_4 = A_2 + A_3.$$

Określamy funkcję  $f : [0^\circ, 90^\circ] \rightarrow \mathbb{R}$  wzorem  $f(\alpha) = A_1(\alpha) - A_2(\alpha)$ . Ponieważ na obu końcach przedziału określoności ma ona przeciwne znaki, więc (znów nie dyskutujemy, *dlaczego jest ciągła*) gdzieś wewnątrz się zeruje. Dla pewnego kąta  $\alpha_0$  mamy więc  $A_1(\alpha_0) = A_2(\alpha_0)$ , zatem wszystkie cztery części mają równe pola. Możemy jednym cięciem podzielić na dwie równe części dwa okrągłe placki: ciąć należy, oczywiście, wzdłuż prostej łączącej dwa środki. Do zrealizowania takiego podziału placki nie muszą być kolisty:

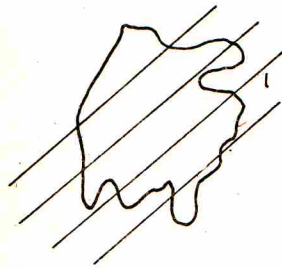
**Twierdzenie IV.** Dla dowolnych dwóch obszarów na płaszczyźnie istnieje prosta przecinająca je na dwie części o równych polach.

Dowód... pozostawiamy Czytelnikom.

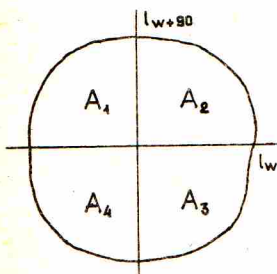
Sami przejdziemy do trzeciego wymiaru, ale przedtem przekonajmy się, że twierdzenie IV nie jest prawdziwe dla trzech płaskich obszarów – nie znajdziemy takiej linii dla trzech kół, których środki nie leżą na jednej prostej.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

**Twierdzenie V.** Dowolne trzy bryły w przestrzeni trójwymiarowej da się przeciąć płaszczyzną tak, by wszystkie trzy podzieliły się na części o równych objętościach.

Bywa to nazywane *twierdzeniem o kanapkach*: „zawsze można bułkę z masłem i szynką przekroić płaskim cięciem tak, by przepołowić bułkę, masło i szynkę”; cytując tu *Kalejdoskop Matematyczny* Hugona Steinhausa. I tę własność da się wyprowadzić z twierdzenia o wartości średniej. Możemy wypracować sobie inne podejście do takich zagadnień rozcinań. Przy dzieleniu bułki z masłem i szynką jeden stopień swobody potrzebny jest do ustawienia noża tak, by przeciąć na pół bułkę, drugi – masło, trzeci – szynkę. Właśnie ta liczba stopni swobody decyduje o tym, ile obszarów możemy przepołowić „za jednym zamachem”, a to, czy cięcia będą płaskie jest sprawą drugorzędną. Linia prosta na płaszczyźnie ma takie dwa „stopnie swobody”, powiedzmy, nachylenie do danej osi i punkt przecięcia z nią, płaszczyzna w przestrzeni – 3, para prostych prostopadłych na płaszczyźnie – też 3. Trzy stopnie swobody ma też okrąg: dwie współrzędne środka i promień. Dlatego też powinno być prawdziwe następujące

**Twierdzenie VI.** Dla dowolnych trzech obszarów płaskich istnieje okrąg przecinający je na części o równych polach.

Jest tak w istocie – dowodu znów nie podamy. Proponujemy zastanowić się nad nim oraz nad innymi, ciekawymi Twierdzeniami o Połowieniu, na przykład za pomocą parabol na płaszczyźnie, sfer i par płaszczyzn w przestrzeni i za pomocą... czego się tylko da.

dr Michał SZUREK

## Patrz w niebo



Obecność w przeszłości wody na Marsie nie ulega wątpliwości – ślady pozostawione przez nią są uderzające. Na zdjęciach wykonanych przez sondy wyraźnie widać liczne koryta dawnych rzek i obszary pokryte rzecznymi osadami. Zarazem wiadomo, że powierzchnia Marsa jest pustynią. Gdzie więc podziiała się ta woda? Na podstawie pomiarów wilgotności atmosfery, wykonanych przez Vikingi, ocenia się, że cała woda atmosferyczna mogłaby pokryć powierzchnię planety warstwą grubości 10  $\mu\text{m}$ . Nawet gdyby dodać do tego wodę zawartą w czapach polarnych, to i tak byłoby jej za mało w stosunku do ocen dokonanych na podstawie widocznej rzeźby terenu. Według wszelkiego prawdopodobieństwa woda marsyjska znajduje się obecnie głęboko wewnątrz gruntu.

Uderzeniowe kratery rozsiane po całej powierzchni Marsa dowodzą, że planeta – podobnie jak Księżyc – zresztą inne planety też, tylko na Księżycu najwyraźniej to widać – wkrótce po uformowaniu się podlegała silnemu bombardowaniu przez ciała meteorowe. W wyniku tego grunt został pokruszony prawdopodobnie do głębokości kilku kilometrów i tak stał się zdolny wchłonać stosunkowo dużą ilość wody.

Zauważmy, że na Marsie jest w zasadzie tak zimno, że niemal w każdej sytuacji woda na powierzchni planety powinna zamarznąć. Jednak w najcieplejszych okresach roku i w okolicach równika może panować temperatura w pobliżu zera stopni Celsjusza, a wtedy woda, zwłaszcza wzbogacona w rozpuszczalne sole, może przez dłuższy czas znajdować się w stanie ciekłym, a zatem może wsiąkać w grunt. Potwierdzeniem tego są wyraźne sezonowe zmiany zdolności odbijania fal radarowych przez grunt marsyjski, jako że współczynnik odbicia fal jest dość czułą miarą wilgotności gruntu.

Głęboko pod powierzchnią planety woda najprawdopodobniej znajduje się w stanie ciekłym wskutek ciepła wywołującego się przy rozpadzie radioaktywnych pierwiastków zawartych w skałach skorupy. Woda ta niekiedy przebija się lub przynajmniej przebijała się na powierzchnię, o czym świadczą ślady w postaci dolin rzecznych pochodzących jakby z wielkich powodzi. Również niektóre kratery wyglądają jakby powstały przy upadku meteoroidu w gęste błoto, a nie na twardy grunt.

Nie ma jeszcze, oczywiście, pełnej jasności co do ilości, stanu fizycznego i rozkładu wody w marsyjskim gruncie. Jako dalszy etap badań przewiduje się zainstalowanie na Marsie sieci sejsmografów. Umożliwiłaby ona z biegiem czasu odtworzenie globalnej struktury wnętrza Marsa, a tym samym przyczyniłaby się do rozstrzygnięcia zagadki marsyjskiej wody. Tego rodzaju eksperyment planowany jest na połowę lat 90.

dr Tomasz KWAST

# Ile lat ma Ziemia?

Dr Lidia GOETTIG



Na pytanie, kiedy powstał otaczający ich świat, ludzie starali się odpowiedzieć od początków swych dziejów. Dopiero jednak metoda datowania promieniotwórczego, rozwinięta w tym stuleciu, umożliwiła wyznaczenie wieku Ziemi na drodze doświadczalnej z dokładnością do paru procent.

Pierwsze teorie kosmologiczne utożsamiały narodziny Ziemi z powstaniem Wszechświata, a pierwsze oceny wieku Ziemi, choć zupełnie fałszywe, były podawane z ogromną dokładnością. Na przykład Majowie wierzyli, że Wszechświat, który miał według nich cyklicznie powstawać i ulegać zagładzie, został ostatnio odtworzony na nowo w roku 3114 p.n.e. W pierwszym wieku naszej ery w Chinach przyjmowano, że okres trwania Wszechświata wynosi 23 639 040 lat. Największą jednak dokładnością poszczycić się mógł w połowie siedemnastego wieku arcybiskup Ussher, który na podstawie Biblii wykonał obliczenia, z których wynikało, że akt stworzenia Wszechświata miał miejsce 26 października roku 4004 p.n.e. o godz. 9 rano w Mezopotamii.

Michał W. Łomonosow (połowa XVIII w.) był jednym z pierwszych, którzy wskazali na to, iż Ziemia mogła powstać niezależnie od reszty świata i oszacował wiek Ziemi na kilkaset tysięcy lat. W roku 1779 hrabia de Buffon próbował wyznaczyć wiek Ziemi na drodze doświadczalnej. Badając na małym modelu tempo ochładzania się Ziemi od pierwotnego stanu gorącego stwierdził, iż Ziemia liczy sobie około 75 tysięcy lat. W tym czasie przeważał jednak powszechnie pogląd, iż Ziemia jest znacznie starsza. Średniowieczne teorie katastroficzne ustąpiły bowiem miejsca skrajnemu uniformitarianizmowi, według którego tempo zmian i rola czynników przyrodniczych nie ulegały nigdy zmianie w przeszłości i są takie jak w chwili obecnej. Prowadziło to do uznania wieczności Ziemi. Stanowisko takie prezentowali w geologii m.in. James Hutton i Charles Lyell. Na podstawie analizy skał i gleby, w których zaczęto wyróżniać regularne warstwy, próbowali oni szacować czas trwania różnych okresów geologicznych, ale nie znajdowali, jak pisał Hutton w swojej książce *Theory of the Earth (Teoria Ziemi, 1795 r)*, „ani śladów początku, ani zapowiedzi końca”.

Tezę o wieczności Ziemi odrzucił stanowczo fizyk z Glasgow William Thomson (późniejszy lord Kelvin) i w roku 1862 opublikował wyniki swoich obliczeń wieku Ziemi. Uważał on, jak i wielu innych fizyków jemu współczesnych, że na początku Ziemia była w stanie ciekłym, następnie powierzchnia jej ostygła i utwardziła się, ale rdzeń ciągle jeszcze pozostaje gorący. Thomson obliczył więc, jak długo Ziemia musiała stygnąć, aby osiągnąć stan obecny. Założył on, że jedynym źródłem ciepła (poza niewielkim wkładem od grzania Słońca) było ściskanie grawitacyjne, a promieniowanie prowadziło do utraty ciepła. W rezultacie ocenił wiek Ziemi na 20–40 mln lat, w każdym bądź razie mniej niż 100 mln lat.

Wyniki Thomsona zaszokowały biologów i geologów. Nie mogli się oni pogodzić z tak znacznym ograniczeniem dotychczasowej skali czasu. Charles Darwin uważał, że złożone organizmy wymagały o wiele więcej niż 40 mln lat, aby osiągnąć obecny stan ewolucyjny. Ale również i inne próby rachunkowego oszacowania wieku Ziemi podjęte w tym czasie potwierdzały wynik Kelvina. Ocenę 100 mln lat otrzymali: amerykański astronom Simon Newcomb i fizyk niemiecki Herman von Helmholtz na podstawie obliczeń czasu potrzebnego na to, aby obłok pyłu międzygwiazdowego skurczył się grawitacyjnie do rozmiarów Słońca. George M. Darwin (syn Charlesa), astronom z Cambridge, otrzymał wyniki zgodne z oceną Kelvina rozważając z kolei efekty działania tarcia przyplływowego.

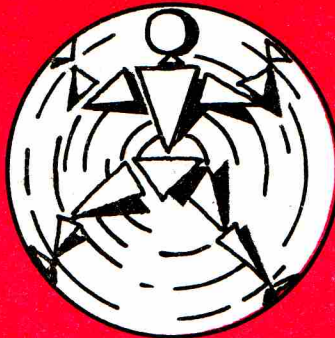
Z czasem geolodzy zaczęli się więc przekonywać do tych wyników znajdując nawet dla nich potwierdzenie doświadczalne. W roku 1868 Archibald Geikie, geolog szkocki, na podstawie badania tempa erozji wywnioskował, iż Ziemia nie ma więcej niż 100 mln lat. W roku 1899 John Joly z Uniwersytetu w Dublinie zaproponował nową technikę geologiczną wyznaczania wieku Ziemi na podstawie stopnia zasolenia oceanów. Założył on mianowicie, że zasolenie wynika w całości z rozpuszczenia mineralnych osadów i że może ono tylko rosnąć z upływem czasu. Również i z tych badań wynikała ocena podobna: 80–90 mln lat. Tak więc, pod koniec dziewiętnastego wieku ugruntował się pogląd oparty zarówno na wynikach badań teoretycznych, jak i doświadczalnych, iż Ziemia powstała jakieś 100 mln lat wcześniej.

Następne słowo miało już należeć do fizyki jądrowej. Ten nowy dział fizyki narodził się w 1896 r. razem z odkryciem promieniotwórczości przez A. Henriego Becquerela. Konsekwencje tego odkrycia dla geologii były ogromne. Po pierwsze, kiedy w roku 1903 George Darwin i John Joly doszli do wniosku, że promieniotwórczość jest częściowo przynajmniej odpowiedzialna za ciepło Ziemi, stało się jasne, że wyniki obliczeń Kelvina, który pominął ten efekt, muszą być zaniżone. Po drugie, odkrycie to już wkrótce zrewolucjonizowało eksperymentalne techniki geologiczne oznaczania wieku skał. W ciągu kilku pierwszych lat naszego stulecia uświadomiono sobie, że obecność produktów rozpadu promieniotwórczego w skale świadczyć może o jej wieku.



## Rozwiązanie zadania M 575.

Najprostsza metoda konstrukcji wynika z następującego spostrzeżenia: oznaczmy przez  $S$  obrót o  $60^\circ$  wokół punktu  $p$ . Jeżeli teraz okręgi  $S(O_1)$  i  $O_2$  (lub  $S^{-1}(O_1)$  i  $O_2$ ) przecinają się w pewnym punkcie  $d$ , to trójkąt  $pd$ , gdzie  $c = S^{-1}(d)$  (lub  $c = S^{-1}(S^{-1}(d))$ ) jest równoboczny. Istotnie  $|pd| = |pc|$  oraz  $\angle dpc = 60^\circ$ . Stąd, aby zbudować trójkąt, należy znaleźć obraz jednego z okręgów przy obrocie wokół punktu  $p$  o  $60^\circ$  lub o  $-60^\circ$ .



Metoda promieniotwórczego datowania skał ma zasadniczą przewagę nad wszystkimi innymi metodami, a mianowicie można śmiało przyjąć, że prawdopodobieństwa rozpadów jądrowych nie zależą od warunków, które panowały na Ziemi w różnych stadiach jej rozwoju. Takie podejście nie ma uzasadnienia w przypadku metody opartej np. o pomiary zasolenia, gdzie wyniki zależą silnie od przyjętych założeń co do temperatury, opadów itp. Technika radioaktywnego datowania skał zapoczątkowali Ernest Rutherford i radiochemik Bertram B. Boltwood. W 1904 r. Rutherford zaproponował metodę opartą na badaniu zawartości helu (cząstki  $\alpha$  emitowane w rozpadzie) w minerałach.

W 1905 r. Boltwood opracował metodę opartą na pomiarze stosunku ilości uranu do ołowiu (który jest produktem rozpadu uranu) i ocenił wiek posiadanych próbek na 92 do 570 mln lat. Wyniki te były obarczone poważnym błędem, wynikającym m.in. z wtedy jeszcze słabej znajomości czasu rozpadu uranu. Zasada metody promieniotwórczego datowania jest bardzo prosta. Przypuśćmy, że mamy początkowo w próbce pewną (nieznaną) liczbę  $N_0$  jąder izotopu promieniotwórczego, rozpadającego się z emisją jakiegoś promieniowania (może to być  $\alpha$ ,  $\beta$  lub  $\gamma$ ). Mamy więc przemianę jąder wyjściowych w jądra – produkty przemiany, przy czym niech średni czas życia jąder wyjściowych wynosi  $\tau$  (jest nam znany). Wynika stąd, że po czasie  $t$  pozostanie w próbce  $N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$  jąder wyjściowych i utworzy się  $N' = N_0 - N$  jąder – produktów. Badając stosunek liczby jąder wyjściowych do produkowanych w danej próbce możemy więc określić wiek próbki, a mianowicie:  $t = \tau \ln(1 + N'/N)$ . Założyliśmy tutaj, że mamy do czynienia z najprostszym przypadkiem schematu rozpadu; tak w istocie wygląda rozpad jąder  $^{87}\text{Rb}$ , ale inne izotopy promieniotwórcze, stosowane do oznaczania wieku, mają bardziej skomplikowane schematy rozpadu. Przedstawia to tabela.

| Jądro    | Schemat rozpadu  | Średni czas życia [ $10^9$ lat] |
|----------|--|---------------------------------|
| rubid 87 | $^{87}\text{Rb} \rightarrow ^{87}\text{Sr} + \beta$  | 71,8                            |
| potas 40 | $^{40}\text{K} \rightarrow ^{40}\text{Ar}$ (wychwyt elektronu)<br>$\rightarrow ^{40}\text{Ca} + \beta$ | 17,0<br>2,12                    |
| tor 232  | $^{232}\text{Th} \rightarrow ^{208}\text{Pb} + 6\alpha + 4\beta$                                       | 20,05                           |
| uran 235 | $^{235}\text{U} \rightarrow ^{207}\text{Pb} + 7\alpha + 4\beta$  | 1,02                            |
| uran 238 | $^{238}\text{U} \rightarrow ^{206}\text{Pb} + 8\alpha + 6\beta$  | 6,49                            |

Choć zasada prosta, w praktyce pojawiają się jednak problemy. Po pierwsze, ilości izotopów promieniotwórczych i ich produktów są zwykle bardzo małe – rzędu 0,0001%, z wyjątkiem rud uranowych. Pomiary tak małych ilości wymagają więc ogromnych dokładności. Wymagana jest też dokładna znajomość średnich czasów życia. Ale krytycznym czynnikiem wpływającym na dokładność wyniku jest możliwość, iż dany izotop (wyjściowy bądź będący produktem rozpadu) może być dostarczony lub usunięty ze skały w jakiś inny niż wynikający z rozpadu sposób. Na przykład ołów w skałach może pochodzić nie tylko z rozpadu uranu czy toru, ale mógł znajdować się w próbce od samego początku. Z kolei argon, będąc gazem, może uchodzić ze skały, jeśli zostanie ona dostatecznie podgrzana, tak więc wiek wyznaczony na podstawie stosunku potas–argon w rzeczywistości określa czas, jaki upłynął od ostatniego podgrzania skały.

Wiek najstarszych skał znalezionych na Ziemi oznaczono na około 3800 mln lat, przy czym, co ciekawe, znajdują się one w pobliżu środków kontynentów, a im dalej od środka, tym skały są młodsze. Rezultat powyższy określa dolną granicę wieku skorupy ziemskiej, ale niekoniecznie wyznacza moment narodzin Ziemi. Na podstawie badań meteorytów (zakładając, że miały one wspólny z Ziemią początek) oszacowano czas narodzin pierwotnej Ziemi na około 4600 mln lat temu. Wyniki datowania próbek głębey Księżyca wskazują, iż wiek Układu Słonecznego jest „nieco” dłuższy i wynosi około 4700 mln lat.

Na zakończenie warto sobie uświadomić skalę czasu. A więc, wyobraźmy sobie zamiast naszej Ziemi, liczącej 4600 mln lat, osobnika, który właśnie skończył 46 lat (to prostsze!) i w czasie przyjęcia urodzinowego sięga pamięcią wstecz. Okazuje się, że miał lat 11, gdy pojawiły się pierwsze żyjące organizmy – prymitywne bakterie. Pierwsze złożone organizmy powstały dopiero przed 8 laty. Dinozaury nadeszły około 2 lata temu i panowały przez półtora roku. Półtora tygodnia temu mały czelkoksształtne przekształciły się w małpopodobnych ludzi, a jeszcze przed godziną obszar Europy Płn. i Wielkich Jezior w Ameryce Płn. pokrywały ostatnie lądolody. Mniej więcej trzy kwadransy upłynęły od chwili, gdy człowiek podjął pierwsze próby uprawy ziemi, a pół godziny temu narodziła się cywilizacja Sumerów w Mezopotamii. Rewolucja przemysłowa rozpoczęła się zaledwie przed minutą. Jeszcze 40 s temu Kelvin przekonywał jubilatą, iż ten liczy sobie tylko 1 rok, ale już od 21 s wszyscy są zgodni, że to jednak 46 urodziny. A więc wszystkiego najlepszego i STU LAT!



**Rozwiązanie zadania M 576.**  
Niech  $A$  będzie podzbiorem zbioru  $\{1, \dots, 10\}$ . Wówczas przez  $r(A)$  oznaczamy resztę z dzielenia liczby  $\sum_{i \in A} a_i$  przez 1023. Liczby  $r(A)$  mogą przyjmować wartości tylko ze zbioru  $\{0, \dots, 1022\}$ , natomiast jest ich tyle, ile podzbiorów zbioru dziesięcioelementowego, czyli  $2^{10} = 1024$ . Stąd, dla pewnych różnych zbiorów  $A$  i  $B$ ,  $r(A) = r(B)$ . Zdefiniujmy  $\epsilon_i = 1$  dla  $i \in A \setminus B$ ,  $\epsilon_i = -1$  dla  $i \in B \setminus A$  oraz  $\epsilon_i = 0$  dla pozostałych  $i$ . Wtedy  $\sum_{i=1}^{10} \epsilon_i a_i = \sum_{i \in A} a_i - \sum_{i \in B} a_i$  jest podzielna przez 1023. (Wszystkie  $\epsilon_i$  nie mogą być równe 0, bo co najwyżej jeden spośród zbiorów  $A, B$  jest pusty, a  $A \neq B$ .)

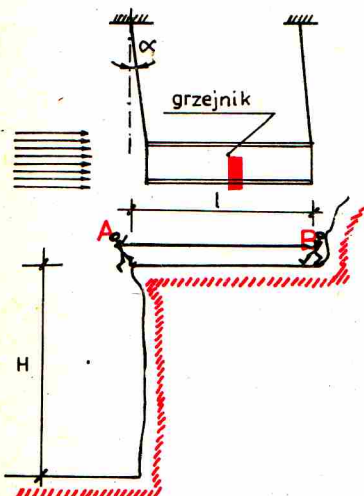
### Skrót regulaminu

Každy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 3$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 7/1990.

Termin nadsyłania rozwiązań:  
31 XII 1990

### Zadania z fizyki nr 107, 108

Redaguje dr Andrzej NADOLNY



**107.** Lekki cylinder wykonany z materiału izolującego ciepłnie jest zawieszony na dwóch nitkach jak na rysunku. Na wewnętrznej powierzchni cylindra w połowie jego długości znajduje się grzejnik elektryczny w kształcie pierścienia. Umieszczenie cylindra w laminarnym strumieniu powietrza skierowanym wzdłuż jego osi powoduje odchylenie się nici zawieszenia od pionu o pewien kąt  $\alpha$ . Czy włączenie zasilania grzejnika będzie miało wpływ na ten kąt, a jeśli tak, to jaki?

**108.** Dwaj taternicy znajdują się na poziomym, płaskim tarasie nad przepaścią o wysokości  $H = 14$  m. W pewnej chwili taternik A spada w przepaść. Jego kolega B, stojący w odległości  $l = 7$  m od krawędzi, trzyma linę asekuracyjną, do której przywiązany jest spadający. Jak powinien on postępować, aby zminimalizować prędkość upadku towarzysza na dno przepaści i samemu nie spaść? Może on trzymać się liny kruczowo bądź też dowolnie regulować siłę jej wypuszczenia. Przyjąć, że tarcie liny o próg skalny jest zaniedbywalne, natomiast współczynnik tarcia taternika B o podłoże wynoszą: 0,5 dla tarcia kinetycznego i 0,7 dla tarcia statycznego. Masy taterników A i B wynoszą odpowiednio  $m_A = 100$  kg,  $m_B = 70$  kg. Wytrzymałość liny, którą można uznać za nierozciągliwą, jest równa 2000 N. Obliczyć przybliżoną prędkość upadku taternika A w najbardziej korzystnym przypadku.

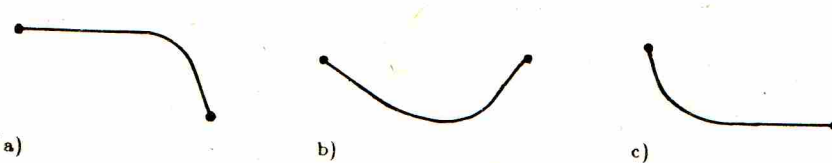
### Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/1990

#### Przypominamy treść zadań:

**99.** Między dwoma punktami o ustalonej różnicy wysokości i odległości poziomej budujemy tor bobslejowy. Podać - jakościowo - kształty toru, dla których osiągnane byłyby: a) maksymalna prędkość końcowa, b) maksymalna prędkość średnia, c) minimalny czas przejazdu.

**100.** Oszacować maksymalny możliwy zasięg samolotu odrzutowego, lecącego z prędkością 800 km/h, na podstawie następujących danych: stosunek siły nośnej (wytworzonej przez skrzydła) do siły oporu powietrza - 5, energia spalania paliwa -  $4 \cdot 10^7$  J/kg, stosunek masy powietrza do masy paliwa w wyrzucanych gazach spalinowych - 50. Inne, niezbędne dane należy przyjąć samemu.

**99.** Poszukiwane kształty torów dla przypadków a, b, c przedstawia rysunek.



**100.** Wprowadźmy oznaczenia:  $M$  - masa własna samolotu,  $m_p$  - masa początkowa paliwa,  $v$  - prędkość samolotu,  $c_{sp}$  - energia spalania paliwa,  $g = 10$  m/s<sup>2</sup> - przyspieszenie ziemskie. Przyjmując średni ciężar samolotu  $Q = (M + m_p)/2$ g, obliczamy w sposób przybliżony pracę użyteczną, jaką wykonują silniki samolotu na dystansie  $s$ :

$$L = 0,2Qs = 0,2(M + m_p/2)gs.$$

Z drugiej strony, przyjmując sprawność silników równą  $\eta$ , mamy przy całkowitym zużyciu paliwa:

$$L = \eta c_{sp} m_p.$$

Przy założeniu, że  $m_p = M$  uzyskujemy

$$s = (10/3)(\eta c_{sp}/g).$$

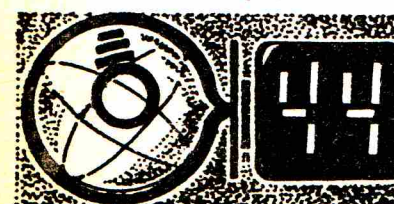
Podstawiając  $\eta = 0,8$  (maksymalna możliwa sprawność silnika cieplnego dla temperatur  $T_1 = 1250$  K,  $T_2 = 250$  K), otrzymujemy  $s = 10^4$  km.

W rozwiązaniu pominieliśmy energię unoszoną przez gazy spalinowe: przy prędkości gazów zbliżonej do prędkości dźwięku ich energia wynosi zaledwie 1% energii spalania paliwa.

### Czołowka ligi zadaniowej Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 91 ( $WT=2,43$ ) i 92 ( $WT=1,23$ )  
z numeru 8/1989

|                   |               |          |
|-------------------|---------------|----------|
| Aleksander Surma  | - Myszków     | 43,85pkt |
| Wojciech Pelsert  | - Wrocław     | 35,32pkt |
| Flotr Bała        | - Toruń       | 35,27pkt |
| Andrzej Borowski  | - Aleksandrów |          |
|                   | Kujawski      | 34,01pkt |
| Przemysław Gworys | - Częstochowa | 32,88pkt |
| Mariusz Bogacz    | - Pińczów     | 30,70pkt |
| Jacek Stelmach    | - Zabrze      | 29,44pkt |
| Marek Karaf       | - Tarnów      | 29,30pkt |
| Adam Sikorski     | - Lublin      | 26,96pkt |
| Leszek Motyka     | - Kraków      | 19,18pkt |





po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 193 (WT=1,40), 194 (WT=4,00),  
195 (WT=2,80), 196 (WT=2,14)  
z numerów 8 i 9/1989

|                       |               |          |
|-----------------------|---------------|----------|
| Kazimierz Serbla      | - Sanok       | 43,36pkt |
| Adam Czornik          | - Bytom       | 42,49pkt |
| Jerzy Janowicz        | - Bolesławiec | 41,95pkt |
| Krzysztof Zawistawski | - Warszawa    | 41,45pkt |
| Dariusz Rybacki       | - Kraśnik     | 40,18pkt |

Dziękujemy nielicznym uczestnikom,  
którzy - nie straszeni potężnym saburzeniem  
regularności „cyklu zadaniowego” (i *Delta*  
w ogóle), spowodowanym przeciętą przez  
niekontrolowane tytuloty - zdecydowali się  
prysłać rozwiązania zadań z „sierpniowego”  
i „wrześniowego” numeru.

I my - nie straszeni nielenormalnością sytuacji,  
nie wiedząc, jakie niepodstanki przysysłość  
gotuje - zdecydowali jesteśmy kontynuować  
sabawę tak długo, jak się da.

## Zadania z matematyki nr 209, 210

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

**209.** Czy istnieje w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej zbiór domknięty, którego część wspólna z dowolną płaszczyzną jest zbiorem skończonym, niepustym?

**210.** Niech  $m, n \geq 1$  będą liczbami naturalnymi. Oznaczmy ich największy wspólny dzielnik przez  $d$ .

(a) Udowodnić, że jeśli iloraz  $m/d$  jest liczbą nieparzystą, to liczby  $u = 2^m - 1$  i  $v = 2^n + 1$  są względnie pierwsze.

(b) Obliczyć największy wspólny dzielnik liczb  $u$  i  $v$ , gdy  $m/d$  jest liczbą parzystą.

Zadanie 210 zaproponował pan Jan Ciach z Ostrowca Świętokrzyskiego, jako naturalną kontynuację zadania 190 (*Delta* 4/1989).

## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/1990

Przypominamy treść zadań:

**201.** Znaleźć maksimum objętości czworokątów mających pięć krawędzi długości nie większej niż 1.

**202.** Dowiedź, że  $\sum (x_k/x_{k+1}) \leq \sum (x_k/x_{k+1})^2$  dla dowolnych  $x_1, \dots, x_n > 0$  (sumowanie po  $k$  od 1 do  $n$ ;  $x_{n+1} := x_1$ ).

**201.** Niech  $CD$  będzie tą krawędzią czworokąta  $ABCD$  (z rozważanej klasy), na której długość nie nakłada się ograniczeń. Przy ustalonym położeniu wierzchołków  $A, B, C$  objętość  $V_{ABCD}$  będzie maksymalna, gdy wierzchołek  $D$  będzie leżał możliwie najdalej od płaszczyzny  $ABC$  - czyli gdy  $ABD$  będzie trójkątem równoramiennym,  $|AD| = |BD| = 1$ , leżącym w płaszczyźnie prostopadłej do  $ABC$ . A wówczas

$$3V_{ABCD} = S_{ABC} \cdot \sqrt{1 - (x/2)^2}.$$

Przy ustalonej długości  $|AB| = x \in (0; 1)$ , maksymalna wartość pola  $S_{ABC}$  (osiągana dla trójkąta równoramiennego,  $|AC| = |BC| = 1$ ) wynosi  $(x/2)\sqrt{1 - (x/2)^2}$ . Zatem (przy ustalonym  $x$ )

$$V_{ABCD} \leq (x/6) (1 - (x/2)^2) =: V(x)$$

(równość dla  $|AC| = |BC| = |AD| = |BD| = 1$ , pł.  $ABC \perp$  pł.  $ABD$ ).

Gdy  $x$  przebiega przedział  $(0; 1)$ , funkcja  $x \mapsto V(x)$  rośnie. Tak więc szukane maksimum (osiągane, gdy także krawędź  $AB$  ma długość 1) wynosi  $V(1) = \frac{1}{8}$ .

**202.** Oznaczając  $x_k/x_{k+1} = a_k$  mamy  $a_1 \cdot \dots \cdot a_n = 1$ , skąd  $a_1 + \dots + a_n \geq n$  (średnia arytmetyczna i geometryczna). Zatem na mocy nierówności Cauchy'ego-Schwarza

$$\begin{aligned} (\sum a_k)^2 &= (\sum 1 \cdot a_k)^2 \leq (\sum 1) (\sum a_k^2) = \\ &= n \sum a_k^2 \leq (\sum a_k) (\sum a_k^2). \end{aligned}$$

i wobec tego

$$\sum a_k \leq \sum a_k^2.$$



## Zadania

Redaguje mgr Michał WOJCIECHOWSKI

**M 574.** Dla jakich liczb naturalnych  $n$  wyrażenie  $\underbrace{\ln \ln \dots \ln}_n$  jest określone?

Rozwiązanie na str. 5

**M 575.** Dane są okręgi  $O_1$  i  $O_2$  oraz punkt  $p$ . Skonstruować trójkąt równoboczny, którego jednym wierzchołkiem jest punkt  $p$ , drugi należy do okręgu  $O_1$ , a trzeci do  $O_2$ .  
Rozwiązanie na str. 12

**M 576.** Danych jest dziesięć liczb całkowitych  $a_1, \dots, a_{10}$ . Udowodnić, że istnieją liczby  $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$ ,  $i = 1, \dots, 10$  nie wszystkie równe zero, takie, że liczba  $\sum_{i=1}^{10} \varepsilon_i a_i$  jest podzielna przez 1023.

Rozwiązanie na str. 13

Redaguje dr Krzysztof CHARCHUŁA

**F 290.** Dwa identyczne elektromagnetyczne impulsy prostokątne o amplitudzie pola elektrycznego  $V$  biegną naprzeciw siebie po idealnej linii transmisyjnej. Energia każdego impulsu wynosi  $E \sim V^2$ . Gdy impulsy spotkają się, powstanie pojedynczy impuls o amplitudzie  $2V$ . Czy to, że amplituda impulsu podwoiła się, oznacza, iż energia wzrosła do  $4E$ ?

Rozwiązanie na str. 17

**F 291.** Spotkało się dwóch żeglarzy i każdy z nich utrzymuje, że jego łódź jest szybsza. Aby rozwiązać spór, postanowili urządzać regaty na pobliskiej rzece na dystansie od mostu do mostu, zgodnie z jej biegiem. W umówionym dniu nie wiał nawet najmniejszy wiatr. Pomimo to żeglarze postanowili ścigać się i obydwie łodzie zaczęły dryfować unoszone prądem rzeki. W pewnym momencie jeden z żeglarzy postawił żagle, a drugi nie zdecydował się na to do końca regat. Czy wyścig miał zwycięzcę? Jeśli tak, to który z żeglarzy wygrał?

Rozwiązanie na str. 17

# DROBIAZGI

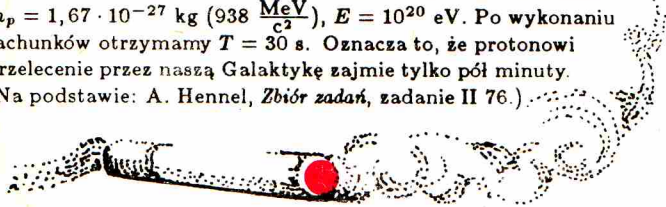
Jeśli na jednym stereoskopowym obrazku jakaś płaszczyzna jest biała, a na drugim – czarna, to przy zlianiu się obrazków wyda się ona nam błyszcząca, nawet jeśli obrazki są wykonane na matowym papierze. Wyjaśnić to można następująco. Powierzchnia błyszcząca odbija światło w określonym kierunku. Dlatego, gdy spoglądamy na błyszczący przedmiot, do jednego oka wpada zwykle więcej światła odbitego od tego przedmiotu niż do drugiego. Przyczyna widzenia błyszczącej płaszczyzny tkwi w niejednakowej jasności obrazów oglądanych lewym i prawym okiem. Warunki takie zachodzą przy stereoskopowym zlewaniu się powierzchni białej z czarną.



Badania próbek wody pobranych na otwartym oceanie pokazują, że próbki te zawierają niezwykle dużo wirusów – do 250 000 na  $\text{mm}^3$ . Jest to około miliona razy więcej niż dotychczas szacowano. Większość obserwowanych wirusów to bakteriofagi. Z uwagi na ogromną liczbę mogą one stanowić istotny czynnik ekologii oceanicznego planktonu i wpływać poprzez ten ostatni nawet na ziemski klimat.



Wśród cząstek promieniowania kosmicznego docierającego do Ziemi spotyka się czasem protony o energiach  $10^{20}$  eV, czyli rzędu kilku dziesiątych (1 J =  $1,6 \cdot 10^{19}$  eV). Gdyby udało się nam odebrać protonowi całą tę energię, to moglibyśmy podnieść na wysokość 1 m półlitrowy kubek wody. Wspomniany proton ma prędkość bardzo bliską prędkości światła i efekty relatywistyczne są niezwykle silne. Spróbujmy oszacować czas, w którym przeleci on naszą Galaktykę, czyli  $10^5$  lat świetlnych. W układzie związanym z Ziemią będzie on lecieć niewiele ponad  $10^5$  lat. W układzie własnym, tzn. poruszającym się wraz z protonem, upłynie natomiast  $T = \frac{m_p c^2}{E} \cdot 10^5$  lat, gdzie  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg ( $938 \frac{\text{MeV}}{c^2}$ ),  $E = 10^{20}$  eV. Po wykonaniu rachunków otrzymamy  $T = 30$  s. Oznacza to, że protonowi przeleciecie przez naszą Galaktykę zajmie tylko pół minuty. (Na podstawie: A. Hennel, *Zbiór zadań*, zadanie II 76.)



Widzieliście zapewne zapalony papieros leżący na popielniczce. Dlaczego dym wychodzący przez ustnik opada w dół, a z drugiego końca unosi się do góry? Cząstki dymu są cięższe od powietrza. Dym wychodzący przez ustnik opada więc w dół. Nad żarzącym się końcem papierosa wytwarza się unoszący prąd ciepłego powietrza, który pociąga za sobą cząstki dymu.



Różnymi drogami przyroda dochodzi do zdumiewająco podobnych efektów – oczy głowonogów (np. ośmiornicy) wyglądają zupełnie tak samo jak oczy kregowców (np. człowieka). Jest to tym dziwniejsze, że drogi ewolucyjne kregowców i głowonogów spotykają się dopiero na poziomie jamochłonów (np. stulbia). A na dodatek również morfologicznie oczy te są zupełnie różne – powstały jako wyspecjalizowanie różnych tkanek.

W bieżącym roku przypada maksimum 11-letniego cyklu aktywności słonecznej. Wiele obserwacji wskazuje na to, że poziom aktywności będzie rekordowo wysoki. Jako przykład kłopotów, jakie fakt ten może wywołać, niech posłużą skutki gigantycznej erupcji, jaka miała miejsce na Słońcu trzynastego marca 1989 r. Gdy dwa dni później wyrzucona w tej erupcji materia słoneczna dotarła do Ziemi, nastąpiły gwałtowne zmiany ziemskiego pola magnetycznego, które z kolei wyindukowały w kanadyjskiej sieci elektrycznej na tyle duży prąd, że z powodów bezpieczeństwa zamknięto jego dopływ w całej prowincji Quebec. Inne zanotowane efekty wybuchu z trzynastego marca to zmiany kierunku wskazywanego przez kompas, dochodzące do  $8^\circ$ , spowolnienie satelity Solar Maximum Mission tak, że promień jego orbity zmniejszył się o 1 km, awaria komputera amerykańskiego promu kosmicznego, problemy z czujnikami magnetycznymi używanymi do kontroli głowic wiertni naftowych oraz z elektronicznymi systemami kontroli sygnalizacji kolejowej używanymi w niektórych krajach, a także ogromna zorza polarna, widziana niezwykle daleko na południu, nawet na Jamajce.



Umieszczone w wierzchołkach  $A_1$ ,  $A_2$  i  $A_3$  trójkąta masy  $m_1$ ,  $m_2$  i  $m_3$  wyznaczają dokładnie jeden jego punkt  $P$  – środek ciężkości obciążonego trójkąta. Jeżeli będziemy zmieniać masy, to możemy jako środek ciężkości otrzymać każdy punkt wewnątrz trójkąta. Łatwo też zauważyć, że zmieniając wszystkie masy proporcjonalnie nie zmieniamy środka ciężkości. Trudniej spostrzec, że jeśli masy  $m_1$ ,  $m_2$  i  $m_3$  wyznaczają środek  $P$ , to pola trójkątów  $A_2 A_3 P$ ,  $A_3 A_1 P$  i  $A_1 A_2 P$  są proporcjonalne do tych mas.



Amerkańscy naukowcy wojskowi pracujący w programie „wojen gwiazdnych” uzyskali ciągłą wiązkę (o czasie trwania 1 s) spójnego światła widzialnego o rekordowo wysokiej mocy 650–700 W. Użyli oni do tego celu lasera pracującego w zakresie podczerwieni i zmienili częstość produkowanej przez niego wiązki, przepuszczając ją przez kryształ jodku litu. Światło widzialne ma z militarnego punktu widzenia dużą przewagę nad promieniowaniem podczerwonym, gdyż jest słabiej pochłanianie przez atmosferę, a także dlatego, że jego działanie jest bardziej destrukcyjne.



W Watsonville w Kalifornii zbudowano Bugvac – odkurzacz do zbierania owadów z plantacji truskawek. Owady wciągane jest do Bugvaca z prędkością powyżej 50 km/h, gdzie giną po zderzeniu się z odpowiednio ustawioną płytką (tak jak muchy na szybie pędzącego samochodu), a następnie są wyrzucane z powrotem na pole. Bugvac pozwala wyeliminować chemiczne środki owadobójcze.



Słońce obiega centrum Galaktyki z prędkością około 250 km/s. Rekordową, dwa razy większą prędkość obiegową gwiazd zaobserwowano u galaktyki UGC 12591. Jest to galaktyka o typie pośrednim między soczewkowatymi SO a spiralnymi Sa, ustawiona do nas niemal dokładnie krawędzią. Obserwacje radiowe na wodorowej fali 21 cm wykonane 300-metrowym radioteleskopem w Arecibo (Puerto Rico) oprócz tej rekordowej prędkości 500 km/s pozwoliły ustalić całą krzywą rotacji galaktyki (zależność prędkości obiegowej od odległości od centrum galaktyki). Wynika z niej, że galaktyka ta ma masę  $2 \times 10^{12}$  mas Słońca, czyli o rząd wielkości większą niż nasza.



**Rozwiązanie zadania F 290.**  
Energia każdego pojedynczego impulsu dzieli się równo między pole elektryczne i magnetyczne. Po nałożeniu się impulsów, płynące w linii transmisyjnej prądy (a zatem i pola magnetyczne), stwarzają z impulsami składowymi, znoszą się i zostaje jedynie wkład elektryczny, który daje energię  $2E$ .

## Zapiski z przestrzeni Riemanna

(okiem korespondenta PAP)

Przestrzeń Riemanna nie rozczarowuje nawet wytrwałych badaczy. Jechaliśmy pociągiem. Za oknami skalisty, pofalowany teren. Jakieś ruiny, resztki starych kultur. Niemal wszędzie na pół zatarte deserie podobne do misternych siateczek. Zapytałem, co to? To dawni królowie wytyczali układ współrzędnych, żeby ściągać podatki. Po każdej rewolucji układ współrzędnych się zmieniał, lecz jego rola zostawała ta sama. Układy współrzędnych stały się nienawistnym symbolem feudalnego wyzysku, którego skutki widoczne są do dzisiaj!...

Jakoż kraj był biedny. Wyjaśniono mi, że stosunkowo niedawno dotarła tu cywilizacja. Pojęcia matematyczne przywiezione zostały dopiero przez białego człowieka. A i to interpretuje się je swoiście. Niektórym twierdzeniom oddaje się dotąd hołd na sposób pogański. Do niedawna czczono też ich dowody ofiarami z ludzi. Prawne gatunki tensorów były i pozostaną tajemnicą kapłanów. Ogół obawia się ich zaobornie i oddaje im cześć niczym fetyszom, bicząc się i padając na kolana. Niezda i niedoobowój rzucają się w oczy. Śmiertelność stuletnich starców jest znacznie wyższa niż niemowląt w Polsce. Ostatnio, co prawda, wiele pod tym względem zaczyna się zmieniać, w czym wielka zasługa polskich specjalistów. Rychło miałem okazję sam to stwierdzić, gdyż w pewnej chwili z mijanych zarośli wypadła grupa tubylców. Krzycząc: ubka, ubka!... i napinając śmiało cieciewy łeb Langensów (z ubłona sztucznej polskiej produkcji) obrzucili nasz pociąg chmurą wektorów o zatrutych końcach. Wyniósł, że się przestraszyłem. Ale mój sąsiad uśmiechnął się tylko. - Atakować pędzący pociąg z tak ubogim aparatem pojęciowym! - rzekł. I machnął ręką...

Wkrótce wjechaliśmy w obszar żywiejszy i mogłem się przyjrzeć tamtejszej roślinności. Mijałymi wysokopienne tensorzy zwane kontrawariantnymi, a także liczne tensorzy karłowate, o łacińskich wskaźnikach szelężących na wietrze. Był to maj, miesiąc, w którym kwitną spinory. Powstają przy tym osobliwe hybrydy zwane spina-tensorami, które najczęściej rosną w cieniu i na niedostępnych bagnach. Ich rozmnażanie jest bardzo słabo zbadane. Niektóre odmiany są tak trujące, iż owad zwany „muszką studującą”, który zlatuje z daleka zmecony ich skomplikowanym wyglądem, pada martwy w promieniu kilku metrów. Na jesień wszystkie wskaźniki opadają pokrywając ziemię grubą warstwą. Wraz z szesnastymi matkami zrywają się zamiecie wskaźnikowe niebezpieczne dla nieostrożnych śmiechów. (Wielu bezimiennych badaczy zostało całkowicie przysypanych. Ich resztki leżą pod kurhankami wskaźników.)

Spinory dzielimy w zasadzie na dzikie i uprawne. Do tych ostatnich zaliczają się nieduże, przygruntowe spinory o tłustych łacińskich wskaźnikach A, B, C, ... Miałem okazję oglądać dosyć typową plantację, gdzie uderzyły mnie kontrasty społeczne. Uboga ludność pilnuje dniem i nocą pola spinorowego, odpędzając ptactwo, aby nie wydziobywało wskaźników. Ale ptaki nie są tu jedyną kłeską. Widziałem pole tensorów ze wskaźnikami objęzonymi doszczętnie przez szarańczę: został właściwie las kikutów. Gdy nadchodzi spinorobranie, spinory zrywa się i obdziera ze wskaźników, które zabierają bogacze. I podczas gdy zajadają oni tłustą zupę wskaźnikową, wieśniak musi się żywić odwarem z pozostałej naci.

Pora jednak, abym wspomniał o wizycie w stolicy, słynnym Schwartzchildopolis... Oczywiście, obejrzałem przestawne ruiny osobliwości Schwartzchilda z trzeciej połowy XIX wieku! Była tam niegdyś czarna dziura: w tej chwili jest jeszcze czarniejsza, gdyż horyzont osobliwości zalepiły całkowicie sadze z pobliskiej fabryki sztucznej fasolki szparagowej, wystawionej w ramach umowy z Pagartem. Odwiedziłem w niej wybitnego polskiego specjalistę. - Czy nie nudzi się panu wśród tych ruin, osobliwości i plantacji? - spytałem. - Czasami - odparł - doskwiera tęsknota za placem Konstytucji!... Ale z drugiej strony, ta kultura! No i praca! - dodał przytupując od niechęcia butem z najdelikatniejszej powierzchni Riemanna, zszywanej na brzegach przez autentycznego chłopca pariszczyźnianego. - Pracujemy tu nad problemem podstawowym, rozwijając teorię tensora o nieskończonej liczbie wskaźników. - To rzekłszy, pokazał mi arkusz nieskazitelnego papieru, na którym obliczenia ciągnęły się długimi rzędami. - Trzymam studentów do pielienia błędów - wyjaśnił. - Robią na tym świetne magisteria!... Odwiedziłem następnie polskich inżynierów w terenie. Jest ciężko, a nawet bardzo ciężko! - stwierdzili - ale uczymy ich pewnych elementów gospodarki planowej... Karczujemy Christoffle i sadzimy kartofle. Postawiliśmy im tamę, na wypadek gdyby popłynęła rzeka. To nasza legitymacja do XXI wieku. -

Schwarzschildopolis, N. Rok 1989.

Bogdan MIELNIK



**Rozwiązanie zadania F 291.**  
Odpowiedź wynika z zasady względności ruchu. Wybierzmy jako układ odniesienia układ spoczywający względem wody w rzece. W układzie tym spoczywają również dryfujące łodzie, ale wieje niewielki wiatr. Ponieważ prawa fizyki są takie same we wszystkich układach inercjalnych, więc wiatr ten można wykorzystać. A zatem, żeglując na wiatr (tj. płynąc „halsem”) łódź z postawionymi żaglami pierwsza dotrze do mety. Wynik ten nie zależy od tego, która z łodzi miała lepszą konstrukcję.

