

KAŻDY MOŻE BYĆ KOLPORTEREM !!!

Delta tańsza o 25 %

Kupując 150 egzemplarzy *Delty* płacisz tylko 1.500,- zł za numer. Przesyłając pod adresem redakcji dowód wpłaty wielokrotności sumy 225 tysięcy złotych otrzymasz tyleż paczek po 150 egzemplarzy najbliższego numeru *Delty*.

Nasze konto:

PBK VIII OM W-wa 370028-4170

Uniwersytet Warszawski, redakcja miesięcznika *Delta*

SPIS TREŚCI

NUMERU 8(195)

Jak długo trwa doba?

dr Tomasz Kwast str. 1

Rozmaitości str. 8 i 9
str. 6 i 11
str. 4 i 13
str. 2 i 15

Tablice opracował

dr Zbigniew Marciniak

Jeszcze o klimacie, ozonie,
atmosferze, itp.

dr hab. Jan Kalinowski str. 3

Zadania str. 5

Korespondencyjny Klub
Fizyków str. 5

Patrz w niebo str. 7

Elementarny dowód
nierówności Erdösa-Mordella
mgr Jarosław Górnicki str. 7

Mała Delta str.10

Klub 44 M str.12

Klub 44 F str.14

Skacząc po stożkowych
Krzysztof Oleszkiewicz str.16

W następnym numerze:

Neptun - bliźniak Jowisza

Aby wygodnie korzystać z tablic poświęconych rozmaitościom, należy rozpiąć i usunąć zszywki egzemplarza.

„Delta”

matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Edukacji Narodowej

Komitet Redakcyjny

dr Maciej Bryński
dr Bogdan Cichocki
dr Antoni L. Dawidowicz
dr Alicja Derkowska
doc.dr Jan A. Gaj
doc.dr Bolesław Gleichgewicht
prof.dr Tomasz Hofmoki - v-przewodniczący
doc.dr Tadeusz Jarzębowski
doc.dr Marcin Kubiak
mgr Andrzej Mąkowski
dr Zbigniew Plochocki
dr Jan Rempala
prof.dr Konrad Rudnicki
prof.dr Grzegorz Sitarski
prof.dr Józef I. Smak
prof.dr Kazimierz Stępień
prof.dr Mieczysław Subotowicz
doc.dr Andrzej Szymacha
doc.dr Aniela Wolska
prof.dr Andrzej Woszczyk
prof.dr Wojciech Żakowski -
przewodniczący

WARUNKI PRENUMERATY

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na IV kwartał 1990 r. wynosi 5 700,- zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą - koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumeratę.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
 - oddziały RSW właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora
 - odbioru zamówionych egzemplarzy dokonuje prenumeratę w wyznaczonych punktach sprzedaży lub w inny, uzgodniony sposób,
 - urzędy pocztowe i listonosze - od prenumeratorów z terenów wiejskich lub innych miejscowości, w których nie ma oddziałów RSW, a w miastach tylko od osób niepełnosprawnych - poczta zapewnia dostawę zamówionych egzemplarzy pod wskazany adres pod warunkiem uiszczenia dodatkowej opłaty za każdy doręczany egzemplarz - opłata wynosi 250,- zł od egzemplarza,
 - Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział W-wa 370044-1195-139-11 - tylko od prenumeratorów zlecających dostawę za granicę.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
 - na kraj - do 20 XI na I kwartał roku następnego
do 20 II na II kwartał
do 20 V na III kwartał
do 20 VIII na IV kwartał
 - na zagranicę - do 31 X na I kwartał
oraz do 1 dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarza zł 2 000,-

Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga
dr Lidia Goettig - z-ca red. nacz.
mgr Maria Kapuścińska
mgr Krystyna Kordos - sekr. red.
dr hab. Marek Kordos - red. nacz.
dr Paweł Krawczyk
dr Tomasz Kwast
mgr Anna Rudnik
dr Jerzy Ryll
Katarzyna Słomka
mgr Joanna Udalska

Adres Redakcji

Centrum Informatyczne UW
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa
tel. 20-03-81 wew. 841

Wydawca:

Uniwersytet Warszawski
Krakowskie Przedmieście 26/28
00-927 Warszawa

Nakład 18 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.,
2,50 ark. druk.,
papier offsetowy V kl. 70 g.

Wydrukowano
w Zakładach Graficznych
RSW „Prasa-Książka-Ruch”
w Warszawie, ul. Srebrna 16
Nr zam.

Skład systemem TeX
wykonała redakcja.



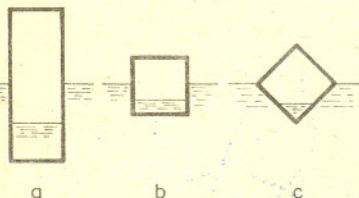
Jak długo trwa doba?

Dr Tomasz KWAST

Rozwiązanie zadania F 288.

W położeniu równowagi odcinek łączący środek masy ze środkiem wyporu musi być pionowy.

W przeciwnym wypadku nie znikalby moment siły wyporu i siły ciężkości. W grę wchodzi więc trzy możliwe sytuacje:



przy czym, ponieważ średnia gęstość rury jest równa połowie gęstości wody, rura jest zawsze zanurzona do połowy swojej objętości. Wynika stąd również, że masa pustej rury równa jest masie zawartej w niej wody. Zatem środek masy układu leży zawsze w połowie odcinka łączącego środek rury ze środkiem masy wody. Z drugiej strony, środek wyporu pokrywa się z geometrycznym środkiem zanurzonej części rury. Oznaczając przez H długość rury znajdujemy odległość między środkiem masy a środkiem wyporu dla przypadków a), b) i c):

$$z_a = \frac{1}{4}H - \frac{3}{16}H = 0,0625H,$$

$$z_b = \frac{1}{4}l - \frac{3}{16}l = 0,0625l,$$

$$z_c = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{2}}l - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3} \right] l \approx 0,0488l.$$

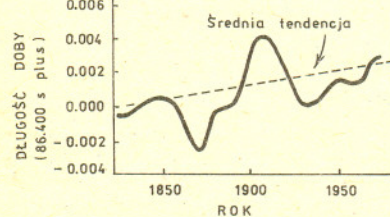
We wszystkich trzech przypadkach środek masy leży powyżej środka wyporu. Czy oznacza to, że układ nie ma położenia równowagi trwałej? Nie. Energia potencjalna układu wynosi Mgz i jest najmniejsza w przypadku c), który realizuje tym samym położenie równowagi trwałej.

Nie od dziś wiadomo, że Ziemia jest dość marnym zegarem, inaczej mówiąc – obraca się niejednostajnie. Zostało to stwierdzone w wyniku porównania czasu mierzonego obrotem Ziemi i mierzonego za pomocą zegarów atomowych, zachowujących z natury rzeczy swój jednostajny chód z ogromną dokładnością. Po co więc zajmować się dalej tak niedoskonałym zegarem ziemskim? Otóż – po pierwsze – niejednostajność obrotu Ziemi może być interesująca po prostu jako zjawisko przyrodnicze. Po drugie – zegar atomowy, jako twór techniki, ma prawo być zawodny i by mieć doń pełne zaufanie, należy go od czasu do czasu porównać z innym zegarem – Ziemią, nie tak dokładnym, za to niezawodnym. Umożliwił to laser i technika kosmiczna.

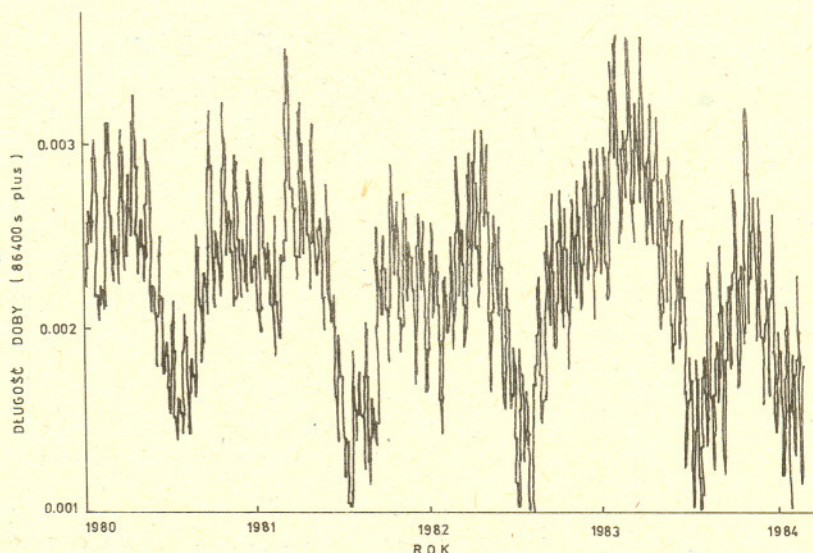
Mianowicie: radzieckie automatyczne sondy i amerykańskie wyprawy załogowe zostawiły na Księżycu kilka tzw. odbłyśników, tj. układów przyzmatycznych, które z minimalnymi stratami odbijają każdy promień światła w kierunku, z którego ten promień przyszedł. Z Ziemi za pomocą lasera połączony z teleskopem wysyła się bardzo krótkie impulsy światła ku tym odbłyśnikom, a następnie mierzy się czas ich przelotu na drodze Ziemia – Księżyc – Ziemia. Tak wyznacza się odległość Księżycy od Ziemi. Ponieważ czas przelotu impulsu świetlnego można mierzyć z dokładnością rzędu 10^{-10} s, odległość wyznacza się z dokładnością do ułamka metra, a więc – prawdę mówiąc – mierzy się w ten sposób odległość konkretnego odbłyśnika od konkretnego lasera w ściśle określonej chwili.

Można też odbłyśnik wykorzystać inaczej. Gdyby zawiesić go gdzieś daleko „nieruchomo” w przestrzeni, to za pomocą nieruchomego względem Ziemi teleskopu z laserem można by było precyzyjnie określić czas trwania jednego obrotu Ziemi. Byłby nim czas między kolejnymi odbiciami promienia laserowego. Jest to, oczywiście, eksperyment fikcyjny, a najlepsze, co dało się dotychczas zrobić, to właśnie umieszczenie odbłyśników na Księżycu (lub bliżej, na sztucznych satelitach, np. na satelicie Lageos, od: Laser Geodynamics Satellite). Czas między dwoma kolejnymi odbiciami od tego samego odbłyśnika nie jest wtedy dobą, ale jej czas trwania można obliczyć. Tego rodzaju obserwacje, dzięki swojej fantastycznej dokładności, umożliwiają w rezultacie jednoczesne wyznaczenie długości doby, położenia biegunów ziemskich, dokładne poznanie orbity Księżycy itd.

W ten sposób długość doby wyznacza się obecnie z dokładnością do 0,1 ms. Przykładowe wyniki są przedstawione na rysunkach. Analiza takich danych pozwala na wyróżnienie rozmaitych „składowych” zmian długości doby. Jedne z nich, jak np. systematyczny wzrost długości doby czy wahania miesięczne, są naturalne i wynikają z rozpraszania energii ruchu obrotowego Ziemi przez pływy oraz z oddziaływania Księżycy. Inne jednak, np. słynny 14-miesięczny okres Chandlera, nie znalazły do dziś wytłumaczenia.

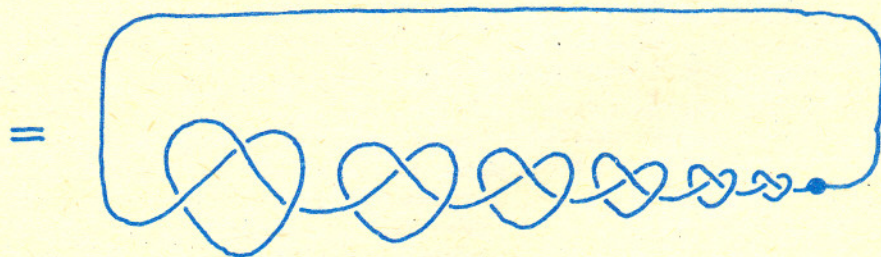
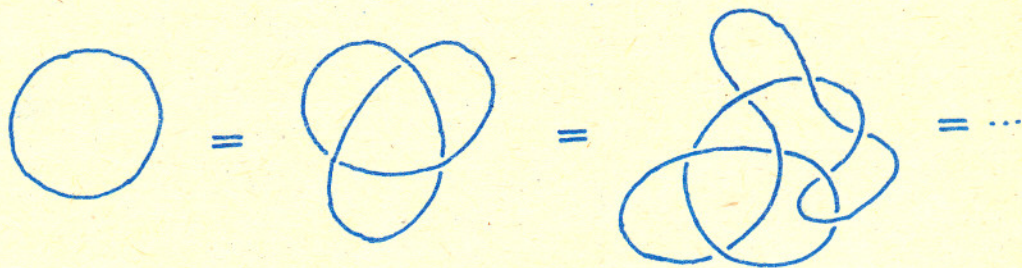


Rys. 1. Wielkoskalowe zmiany długości doby.

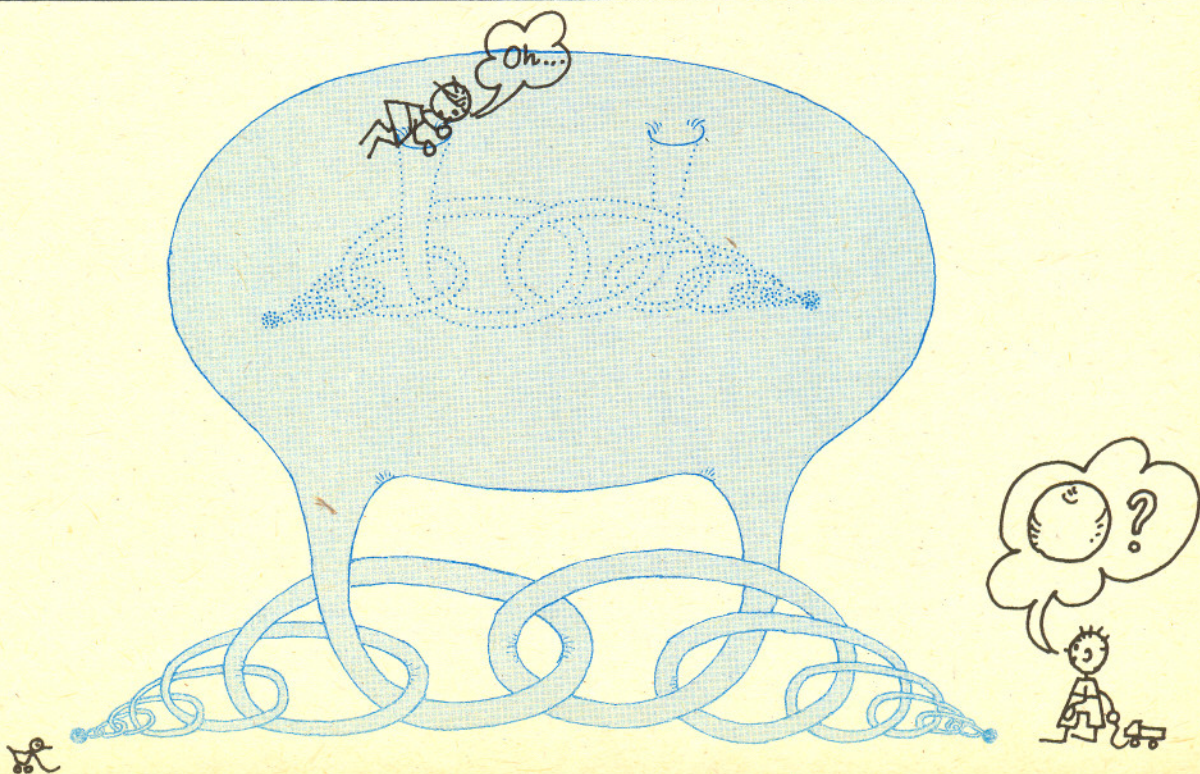
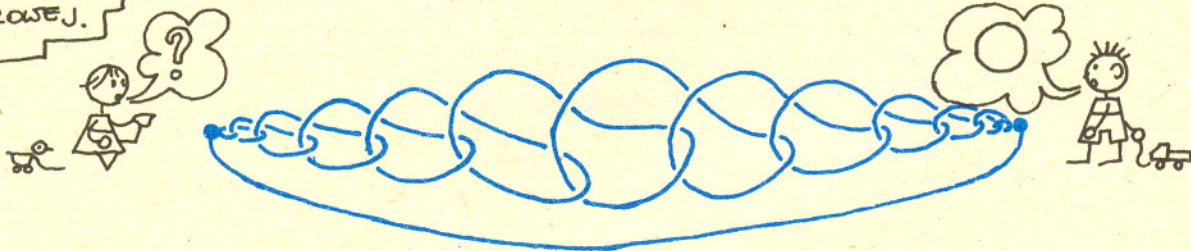


Rys. 2. Pomiary długości doby wykonane w Jet Propulsion Laboratory wykazują regularne zmiany z okresem rzędu dwóch tygodni.

POŁOŻENIE ROZMAIT

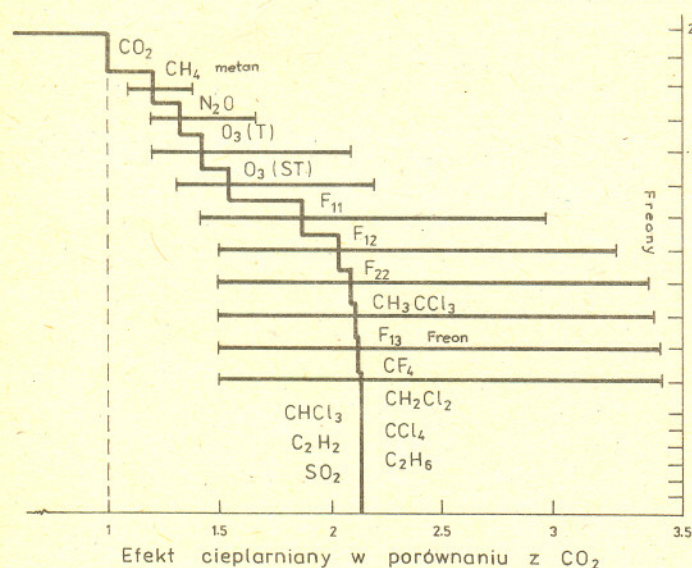


TE OKRĘGI SĄ
RÓŻNIE POŁOŻONE
W PRZESTRZENI
3-WYMIAROWEJ.



Dr hab. Jan KALINOWSKI

Działalność człowieka ma coraz większy wpływ na przyrodę. Ocenia się, że do biosfery dostają się olbrzymie ilości metali ciężkich (dane w tysiącach ton na rok): As - 120, Cd - 30, Cu - 2150, Hg - 11, Mo - 110, Ni - 470, Pb - 1160, Sb - 72, Se - 79, V - 71, Zn - 2340. Całkowita toksyczność tych metali jest większa niż całkowita toksyczność wszystkich odpadów organicznych i radioaktywnych produkowanych rocznie, biorąc za wskaźnik ilość wody potrzebnej do ich rozcieńczenia, aby osiągnąć standard wody pitnej. Olbrzymi wzrost zawartości metali toksycznych w powietrzu, wodzie i glebie i przenikanie ich do pożywienia niesie ze sobą trudne do oceny zagrożenie zdrowia naszego i przyszłych generacji.



Nie tylko nad Antarktydą, ale również w atmosferze arktycznej zaobserwowano zanik ozonu w okresie marca - kwietnia każdego roku. Sądzi się, że jest to wynik produkcji bromoformu przez glony (np. *Ascophyllum nodosum*) w ilości około 10^4 ton/rok. Tyle samo bromoformu produkuje przemysł.

Metan, podobnie jak CO_2 , odgrywa dużą rolę w tzw. efekcie cieplarnianym. Wzrost ich zawartości w atmosferze (o 150 % dla metanu i 23 % dla CO_2 od 1800 r.) oraz innych gazów wpływających na bilans energetyczny promieniowania ciepłego przyczynił się zapewne do wzrostu średniej temperatury o $0,5^\circ\text{C}$ od 1860 r. Prawdopodobnie dalszy wzrost koncentracji tych gazów spowoduje wzrost temperatury o $1,5^\circ\text{C}$ w ciągu najbliższych 40 lat, o ile inne mechanizmy obniżające wzrost temperatury (np. chmury) nie będą efektywniejsze. Załączona ilustracja pokazuje wpływ różnych gazów (w porównaniu z CO_2) na efekt cieplarniany.

Modele klimatu ziemskiego przewidują szybsze ogrzewanie tundry kanadyjskiej i syberyjskiej niż reszty globu ziemskiego. Stopienie wiecznej zmarzliny może spowodować uwolnienie olbrzymiej ilości metanu w niej zamrożonego. Metan jest bardzo istotny dla efektu cieplarnianego, a zmarzlina - olbrzymią pułapką metanu wytwarzanego przez organizmy torfowisk i bagien tundry. Uwolnienie metanu może przyspieszyć globalne ocieplenie.

W spekulacjach na temat efektu cieplarnianego nie jest do końca wyjaśniona rola chmur. Chmury pokrywają około połowy Ziemi. Ich efekt jest dwójaki. Z jednej strony odbijają promieniowanie słoneczne, z drugiej - utrudniają emisję energii cieplejszych warstw powietrza i ziemi pod nimi. Wstępne pomiary przeprowadzone przez dwa satelity ERBE (Earth Radiation Budget Experiment) wskazują, że istotniejsze jest odbijanie energii słonecznej. W kwietniu 1985 r. chmury zredukowały przychodzące promieniowanie słoneczne (1340 W/m^2) o $44,5 \text{ W/m}^2$ redukując emisję energii cieplnej Ziemi o $31,3 \text{ W/m}^2$. Daje to netto zmniejszenie ogrzewania Ziemi o $13,2 \text{ W/m}^2$. Dla kontrastu - obecne modele matematyczne zmian klimatu przewidują, że podwojenie zawartości CO_2 spowoduje podwyższenie temperatury o $2,8^\circ\text{C}$ do $5,2^\circ\text{C}$, a więc wzrost promieniowania ciepłego Ziemi o 4 W/m^2 .

Dymy wywołane pożarami mogą mieć istotny wpływ na klimat. Ich znaczenie dla klimatu jest dyskutowane w kontekście tzw. zimy jądrowej, mogącej powstać w wyniku wybuchu wojny jądrowej. O ich roli mogą świadczyć obserwacje przeprowadzone w 1987 r. w północnej Kalifornii. Na skutek olbrzymich pożarów lasów dymy spowiły niektóre doliny w górach na ponad 3 tygodnie. Średnia dzienna temperatura była tam niższa od normalnej o ponad 15°C przez pierwszy tydzień i o 5°C przez 3 tygodnie. Obniżenie temperatury powietrza przy powierzchni Ziemi spowodowało odwrócenie rozkładu temperatury w powietrzu, co przyczyniło się do utrzymania dymów. Zaszło więc typowe dodatnie sprzężenie zwrotne: koncentracja dymów \rightarrow niższa temperatura \rightarrow koncentracja dymów.



Rozwiązanie zadania M 572.

Jeśli f lub g jest stały, to teza jest oczywista. Załóżmy więc, że żaden z nich nie jest stały. Mnożąc ewentualnie jeden lub dwa wielomiany przez -1 możemy założyć, że dla pewnego x_0 oba wielomiany są rosnące na zbiorze $\{x : x > x_0\}$. Istnieje takie $y_1 > x_0$, że $f(y_1) = a \in \mathbb{Z}$ i $g(y_1) = b \in \mathbb{Z}$. Niech teraz y_2 będzie najmniejszą liczbą, większą od y_1 taką, że $f(y_2) \in \mathbb{Z}$. Wówczas $f(y_2) = a + 1$ oraz $g(y_2) = b + 1$. Istotnie, w przeciwnym razie mielibyśmy np. $f(y_2) > a + 1$ i z twierdzenia Darboux (funkcja ciąga przyjmuje wartości pośrednie) otrzymalibyśmy istnienie takiego x , że $y_1 < x < y_2$ oraz $f(x) = a + 1$, co przeczy wyborowi y_2 . W ten sposób możemy znaleźć dowolnie długi ciąg punktów y_1, y_2, \dots, y_k taki, że $f(y_i) = a + i - 1$, $g(y_i) = b + i - 1$ dla $i = 1, 2, \dots, k$. Stąd wielomian $f - g$ jest stały na dowolnie liczonym zbiorze, więc w ogóle jest stały.

NOWE ROZMAITOŚCI ZE STARYMI

KALENDARZ MAJSTERKONCZA 1990

15

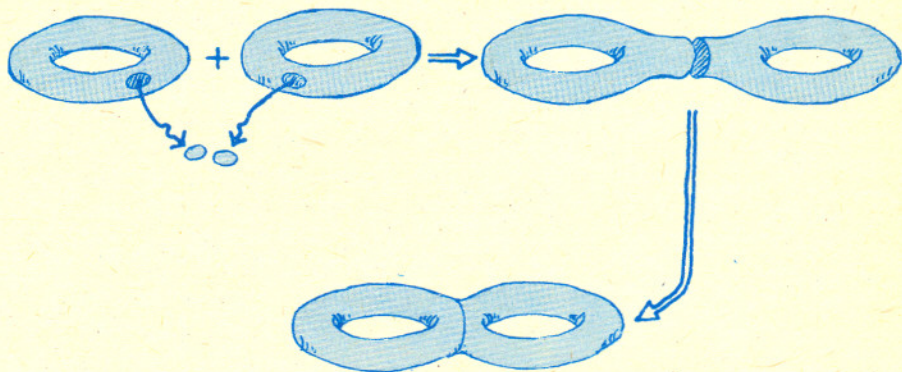
STYCZEŃ

Poniedziałek

Arnolda
Domostawa
Izydora
Makarego
Pawła

SUMA SPÓJNA

WEŹ Dwie ROZMAITOŚCI, W KAŻ-
DEJ WYTNIJ DZIURKĘ I ZLEP
JE BRZEGAMI.



KALENDARZ MAJSTERKONCZA 1990

16

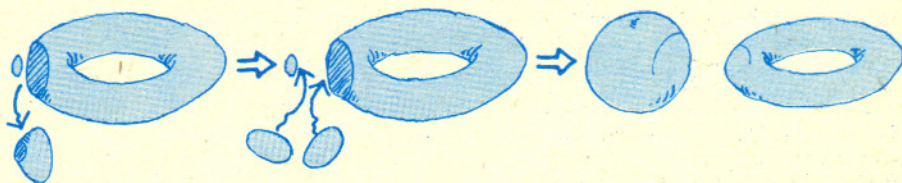
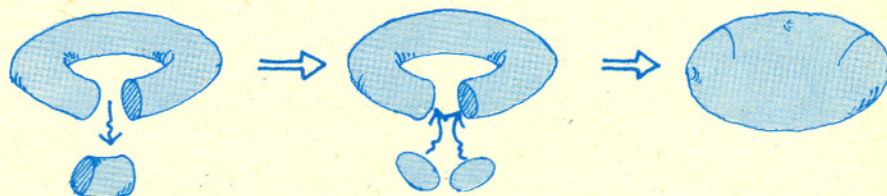
STYCZEŃ

Wtorek

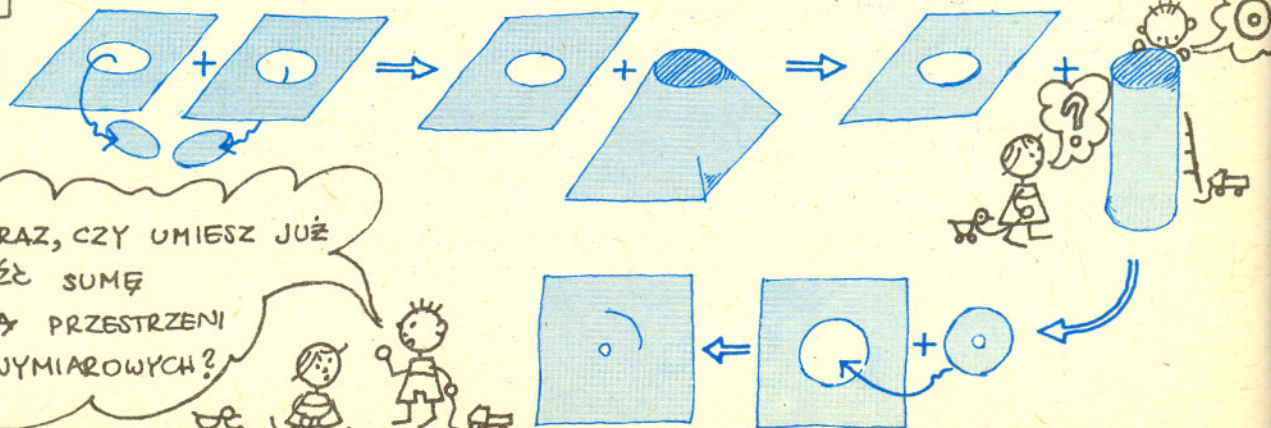
Marcelego
Waldemara
Włodzimierza

CHIRURGIA

WEŹ ROZMAITOŚĆ. ZANURZ W
NIEJ UŁALBC, PO CZYM GO WYT-
NIJ. POWSTAŁE DZIURY ZALEP
ZA POMOCĄ DWÓCH DYSKÓW.



SUMA SPÓJNA
DWÓCH
PŁASZCZYZN



A TERAZ, CZY UMIESZ JUŻ
ZNALEŹĆ SUMĘ
SPÓJNA PRZESTRZENI
3-WYMIAROWYCH?



KORESPONDENCYJNY KLUB FIZYKÓW

Drodzy Członkowie i Sympatycy Klubu!

Przypominamy, że co miesiąc przyznajemy nagrodę książkową dla autora najciekawiej opracowanego rozwiązania postawionych zagadnień.

Dzisiejsza propozycja doświadczenia dotyczy problemu bardzo ważnego dla taterników:

Badanie tarcia liny o pręt

Potrzebne materiały:

1. Pręt, np. okówek, kij od szczotki, pręt metalowy (gładki).
2. Mocna nitka, cienki sznurek lub żyłka wędkarska.
3. Wiele ciężarków – identycznych przedmiotów, które dadzą się zawiesić na nitce, np. nakrętki, żabki do firan, spinacze biurowe.

Przygotowanie: Na jednym końcu nitki zawieszamy jeden ciężarek. Zamocowujemy pręt poziomo tak, aby się nie ruszał i owijamy dookoła niego obciążoną nitkę, a następnie obciążamy jej drugi koniec ciężarkami.

Pomiar: Ile potrzeba ciężarków, aby potrafiły wciągnąć do góry jeden ciężarek zawieszony na drugim końcu nitki? Pomiar wykonać dla różnej liczby zwojów nitki.

Wyniki przedstawić w formie tabeli oraz wykresu. Dokładnie opisać wykonane doświadczenie.

Analiza (o wiele trudniejsza niż doświadczenie; jeśli nie potrafisz, to się nie martw).

1. Wyraź słowami, co otrzymałeś. Czy wynik jest zaskakujący?
2. Zaproponuj wzór empiryczny opisujący otrzymaną zależność liczby ciężarków uruchamiających nitkę od liczby zwojów. Może tu pomóc znalezienie takich skal na osiach, aby punkty na wykresie układały się w prostą.
3. Spróbuj przewidzieć wyniki doświadczenia, znając współczynnik tarcia nitki o pręt (znajdź teoretyczny wzór opisujący badaną zależność).

Uwagi

1. Masa nitki powinna być zanedbywalnie mała w porównaniu z masą ciężarka (którą najwygodniej przyjąć za jednostkę).
2. Warto powtórzyć doświadczenie w różnych warunkach (używając różnych elementów).
3. Jakie czynniki wpływają na dokładność pomiaru?
4. Jeżeli dysponujesz wagą, zaproponuj i wykonaj inny wariant doświadczenia.

Wzór empiryczny jest to wzór opisujący zależność obserwowaną w doświadczeniu bez zrozumienia przyczyn, dla których zależność ta jest taka, a nie inna. Jest to po prostu wzór odgadnięty.

Redaguje doc. dr. Jan GAJ

Listy prosimy przysyłać pod adresem:
Korespondencyjny Klub Fizyków
Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego
ul. Hoża 69, 00-681 Warszawa.



Zadania

Redaguje mgr Michał WOJCIECHOWSKI

M 571. Na okręgu napisano $n \geq 5$ liczb tak, że suma każdych trzech kolejnych jest nie większa niż 3 oraz suma każdych pięciu kolejnych liczb jest nie większa niż 5. Wykazać, że suma wszystkich liczb przyjmuje wartość maksymalną wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie są równe 1.

Rozwiązanie na str. 7

M 572. Wielomiany f i g przyjmują wartości całkowite w tych samych punktach, tzn. $f(x) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow g(x) \in \mathbb{Z}$. Wykazać, że $f - g = \text{const}$ lub $f + g = \text{const}$.

Rozwiązanie na str. 3

M 573. Udowodnić, że w każdym czworoscianie istnieje taki wierzchołek, iż z krawędzi z niego wychodzących można zbudować trójkąt.

Rozwiązanie na str. 7

Redaguje dr Paweł KRAWCZYK

F 288. Długą rurę o przekroju kwadratu o boku $l = 10$ cm napełniono wodą do $1/4$ jej objętości. Średnia gęstość rury z wodą wynosi $\rho = 0,5 \text{ kg/dm}^3$. Rurę następnie włożono do dużego zbiornika wodnego. Zaniedbując grubość ścianek znaleźć położenie równowagi tego układu.

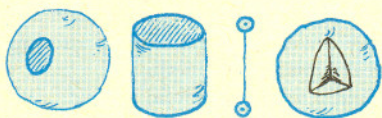
Rozwiązanie na str. 1

F 289. Niemal każdy zabawiał się kiedyś próbując utrzymać w pozycji pionowej pręt oparty na czubku palca. Jest to stosunkowo proste, gdy pręt ma długość l rzędu 1 m. Balansowanie prętem dziesięciometrowej długości należy już do trudnych sztuk cyrkowych. Paradoksalnie, równie trudno jest utrzymać w pozycji pionowej np. długopis. Dlaczego?

Rozwiązanie na str. 17

BORDYZM

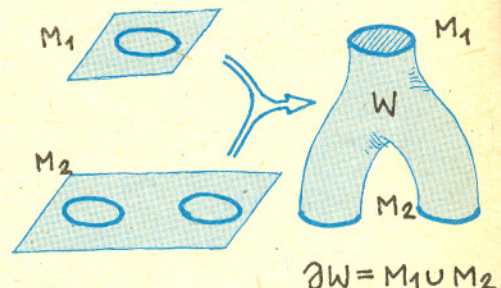
ROZMAIŁOŚCI M.



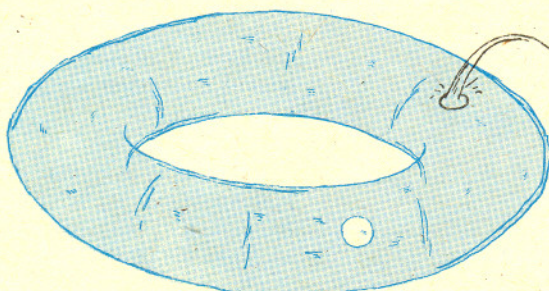
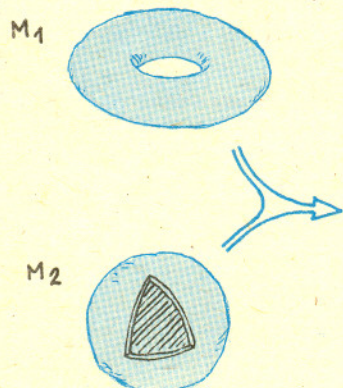
1 ICH BRZEGI ∂M



DWIE ROZMAIŁOŚCI ZŁĄCZONE M_1, M_2
SĄ BORDYCZNE (\sim),
JEŚLI TWORZĄ RAZEM BRZEG
TRZECIEJ ROZMAIŁOŚCI ZŁĄCZONEJ



$$\partial W = M_1 \cup M_2$$

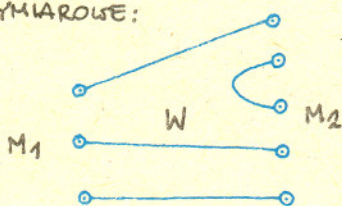


GDY NALEJĘ WODY
DO PEKNA, TO UTWORZY
ONA ROZMAIŁOŚĆ
3-WYMIAROWĄ, KTÓREJ
BRZEGIEM BĘDZIE
 $M_1 \cup M_2$

DWIE ROZMAIŁOŚCI 0-WYMIAROWE:

$$M_1 = \{0, 0, 0\}$$

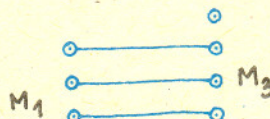
$$M_2 = \{0, 0, 0, 0, 0\}$$



SĄ BORDYCZNE.

$$M_1 \cup M_2 = \partial W$$

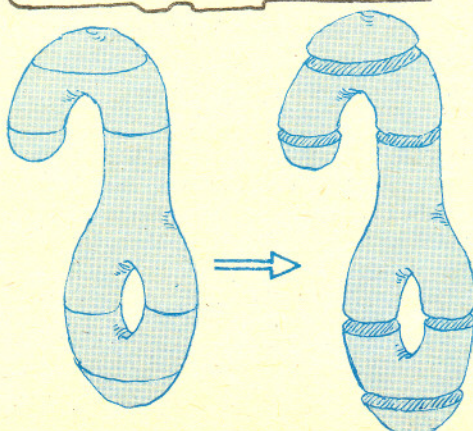
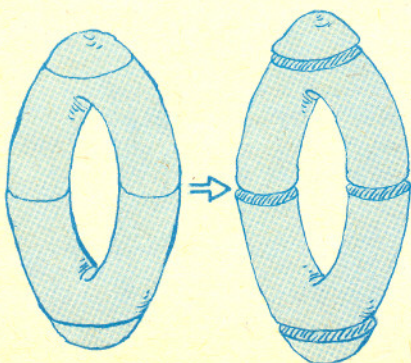
A CO Z
 M_1 I M_3 ?



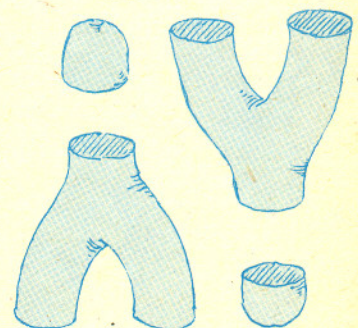
EUREKA!

KĄŻDY KIJ
MA 2 KOŃCE

BORDYZMY SĄ BARDZO UŻYTECZNE, BO POZWALAJĄ
Z GRUBSZA KLASYFIKOWAĆ ROZMAIŁOŚCI.
TEORIA MORSE'A POZWALA POCIAĆ KAŻDĄ ROZMAIŁOŚĆ
NA PROSTE KLOCKI.

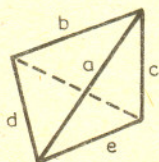


PROSTE KLOCKI...



..., Z KTÓRYCH ZBUDOWANE
SĄ WSZYSTKIE ORIENTOWALNE
ŚWIATY 2-WYMIAROWE

Rozwiązanie zadania M 578.
Przypuśćmy przeciwnie.



Niech a będzie najdłuższą krawędzią czworokąta. Wtedy $a + b > c$, $a + c > b$, więc $a \geq b + c$ (bo z założenia z odcinków a, b, c nie można zbudować trójkąta). Analogicznie $a > d + e$. Dodając stronami otrzymujemy $2a \geq (d + b) + (e + c)$, a stąd $a \geq d + b$ albo $a \geq e + c$, co w obu przypadkach daje sprzeczność.

Rozwiązanie zadania M 571.
Oznaczmy sumę wszystkich liczb przez S . Dodajmy wszystkie sumy trzech kolejnych liczb. Otrzymamy $3S$, bo każda liczba wchodziła w skład trzech trójek kolejnych liczb. Z drugiej strony dodaliśmy n składników nie większych od 3. Stąd $3S \leq 3n$ i jeśli $S = n$, to suma każdych trzech kolejnych liczb jest równa 3. Analogicznie, jeżeli $S = n$, to suma każdych pięciu kolejnych liczb jest równa 5. Wówczas suma każdych dwu kolejnych liczb jest równa 2 (bo suma dwu kolejnych liczb jest równa różnicy sum pewnych pięciu liczb i pewnych trzech kolejnych liczb). Ale skoro suma każdych trzech kolejnych liczb jest równa 3, a każdych dwu kolejnych 2, to każda liczba jest równa 1.

Podczas całkowitego zaćmienia Słońca staje się na krótko widoczna jego rzadka atmosfera – korona – na co dzień niedostrzegalna w oślepiającym blasku tarczy słonecznej. Jednak zaćmienia nie są na zawołanie, a wyprawa do miejsca, skąd będą widoczne, jest z reguły daleka i kosztowna. I tak potrzeba zrodziła wynalazek, koronograf (Bernard Lyot, 1930). W przyrządzie tym w ognisku obiektywu umieszcza się przesłonę, krążek o rozmiarach obrazu tarczy Słońca. Taki „sztuczny Księżyc” daje w efekcie sztuczne zaćmienie Słońca i dlatego za jego pomocą koronę słoneczną można obserwować w dowolnej porze dnia dowolnie długo.

Korzyść płynąca z wyeliminowania potężnego strumienia światła tarczy słonecznej dla każdego jest tu chyba widoczna. Mniej oczywiste jest, że podobną technikę stosuje się w przypadkach, gdzie w ogóle światła jest bardzo mało. Pisaliśmy już (artykuł M. Subotowicza, *Delta* 3/1989) o zaobserwowaniu pierścieni pyłowych wokół gwiazd (pierścienie te są prawdopodobnie prekursorami przyszłych układów planetarnych). Obraz gwiazdy przesłonięty małym krążkiem umożliwił „zobaczenie” w podczerwieni słabej poświaty owego pierścienia wokółgwiazdowego.

Ale metodę tę zastosowano też do obserwacji obiektów jeszcze słabszych, mianowicie kwazarów. Wszystko wskazuje na to, że kwazar to galaktyka z wyjątkowo jasnym jądrem, gdzie energia pochodzi z intensywnej akrecji materii na masywną czarną dziurę. Cały kwazar wskutek oddalenia jest zawsze obiektem bardzo słabym, ale jego jądro jest oślepiająco jasne w porównaniu z resztą galaktyki. Pomiar jasności kwazarów z użyciem różnych przesłon prowadził już kilka lat temu np. Gerry Neugebauer z zespołem – użyto 5-metrowego teleskopu palomarskiego. Obserwacje te również wykonywane były w podczerwieni. W tym przypadku chodziło już nawet nie o uzyskanie obrazów, lecz o zmierzenie, jaki wkład do jasności kwazara ma jego otoczek. W ten sposób uzyskano niezależny argument za tym, że kwazary istotnie mogą być galaktykami, aczkolwiek nie dało to żadnej informacji o strukturze (typie) galaktyki.

dr Tomasz KWAST

Elementarny dowód nierówności Erdösa–Mordella

Poniższy problem postawił Paul Erdős w 1935 roku (*American Mathematical Monthly, Problem 3740*): Jeżeli O jest dowolnym punktem wewnętrznym trójkąta ABC i P, Q, R są spodkami prostopadłych opuszczonych z punktu O odpowiednio na boki BC, CA, AB , to

$$OA + OB + OC \geq 2(OP + OQ + OR).$$

W dwa lata później pojawiło się jego uzasadnienie (L.J. Mordell). Obecnie znamy różne dowody tego faktu (patrz np. Д.О. Шклярский, Н.Н. Ченцов, И.М. Яглом, „Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум”, зад. 111(6) lub *Delta* 11/1988).

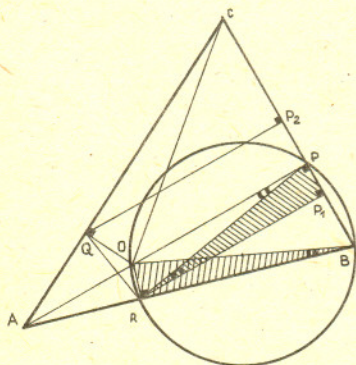
Oto dowód L. Bankoffa z 1958 roku metodą geometrii elementarnej (bez użycia trygonometrii).

Niech P_1 i P_2 będą spodkami prostopadłych opuszczonych z punktów R i Q na bok BC . Analogicznie definiujemy punkty Q_1 i Q_2 oraz R_1 i R_2 na pozostałych bokach. Ponieważ trójkąty PRP_1 i OBR są podobne (rys.), więc $P_1P = \frac{PR \cdot OR}{OB}$. Analogicznie $PP_2 = \frac{PQ \cdot OQ}{OC}$, $Q_1Q = \frac{PQ \cdot OP}{OC}$, $Q_2Q = \frac{RQ \cdot OR}{OA}$, $R_1R = \frac{RQ \cdot OQ}{OA}$, $RR_2 = \frac{RP \cdot OP}{OB}$. Wówczas

$$\begin{aligned} OA + OB + OC &\geq \\ &\geq OA \left(\frac{P_1P + PP_2}{RQ} \right) + OB \left(\frac{Q_1Q + QQ_2}{RP} \right) + OC \left(\frac{R_1R + RR_2}{PQ} \right) = \\ &= OP \left(\frac{RP \cdot OC}{PQ \cdot OB} + \frac{PQ \cdot OB}{RP \cdot OC} \right) + OQ \left(\frac{PQ \cdot OA}{RQ \cdot OC} + \frac{RQ \cdot OC}{PQ \cdot OA} \right) + \\ &+ OR \left(\frac{RP \cdot OA}{RQ \cdot OB} + \frac{RQ \cdot OB}{RP \cdot OA} \right) \geq 2(OP + OQ + OR), \end{aligned}$$

gdyż dla dowolnych dodatnich liczb p i q , $\frac{p}{q} + \frac{q}{p} \geq 2$.

Jarosław GÓRNICKI



POWIERZCHNIE DW

CISZA!

MATEMATYK BADA

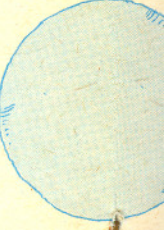
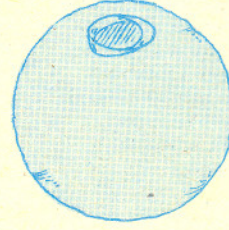
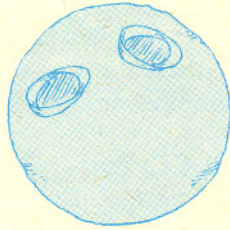
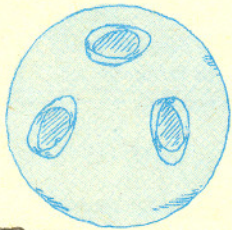
U MOJEGO SĄSIADA
ZEGARY CHODZĄ
JAK CHCĄ.

STRACIŁEM ORIENTACJĘ
?!

PANIE PROFESORZE,
OKAZAŁO SIĘ, ŻE
WALEC I WSTĘGA MÖBIUSA
SĄ RÓŻNE: WALEC
JEST POWIERZCHNIĄ
ORIENTOWALNĄ,
A WSTĘGA NIE.

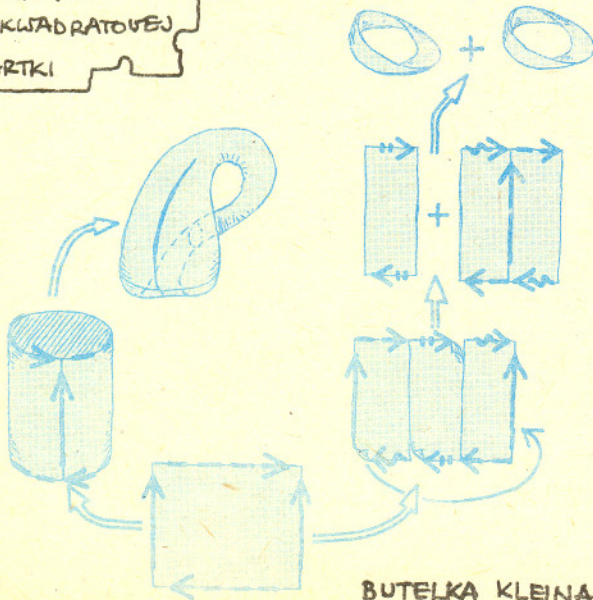
WSTĘGA MÖBIUSA
US. PAT. NO
2784834

POWIERZCHNIE ZWARTYCH

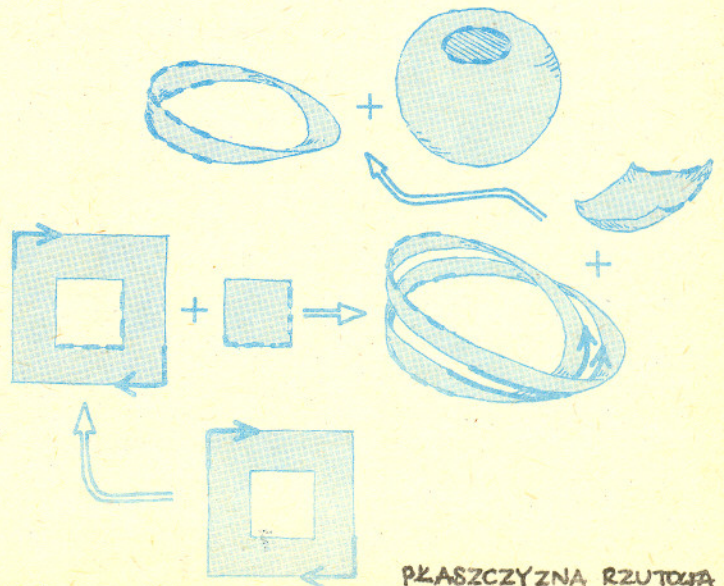


A TAK SOBIE
MOŻESZ SKLEIĆ
MODELE POWIERZCHNI
ZWARTYCH
Z KWADRATOWEJ
KARTKI

EFERY Z DZURKAMI ZALEPIONYMI WSTĘGAMI MÖBIUSA



BUTELKA KLEINA



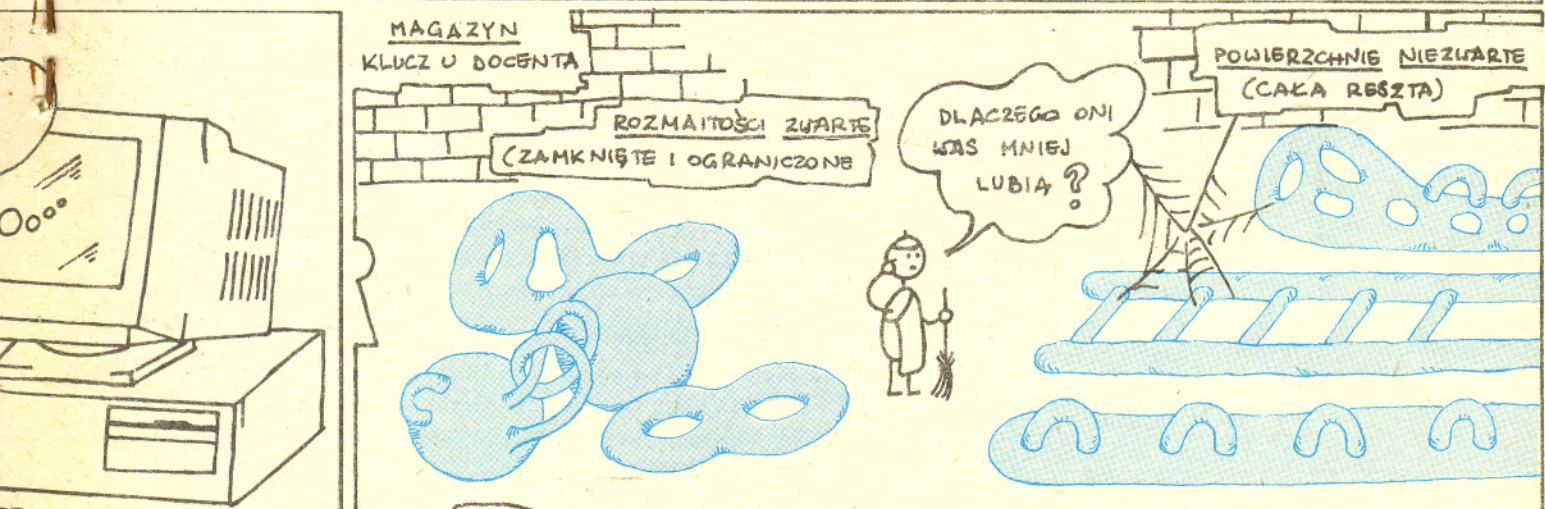
PLASZCZYZNA RZUTOWA

WYMIAROWOŚĆ

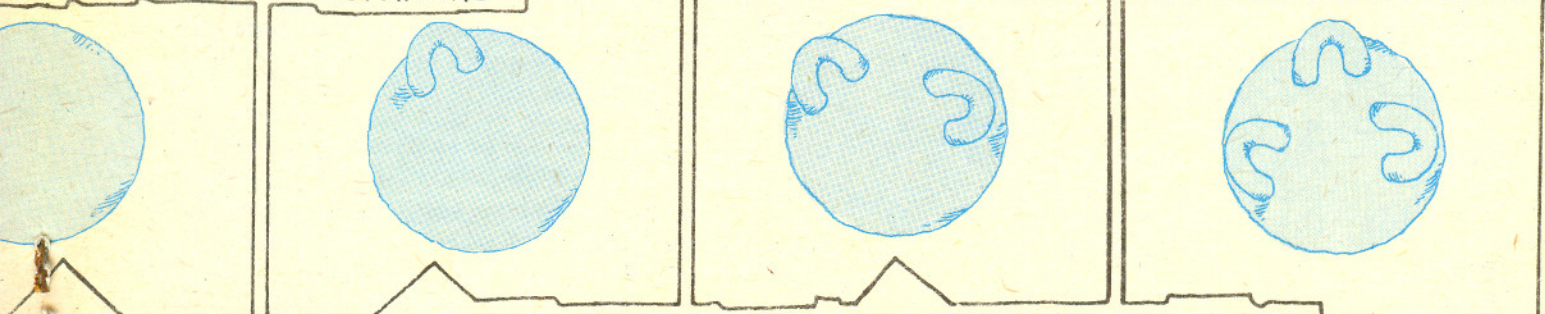
alias

rys. Krzysztof BIESAGA

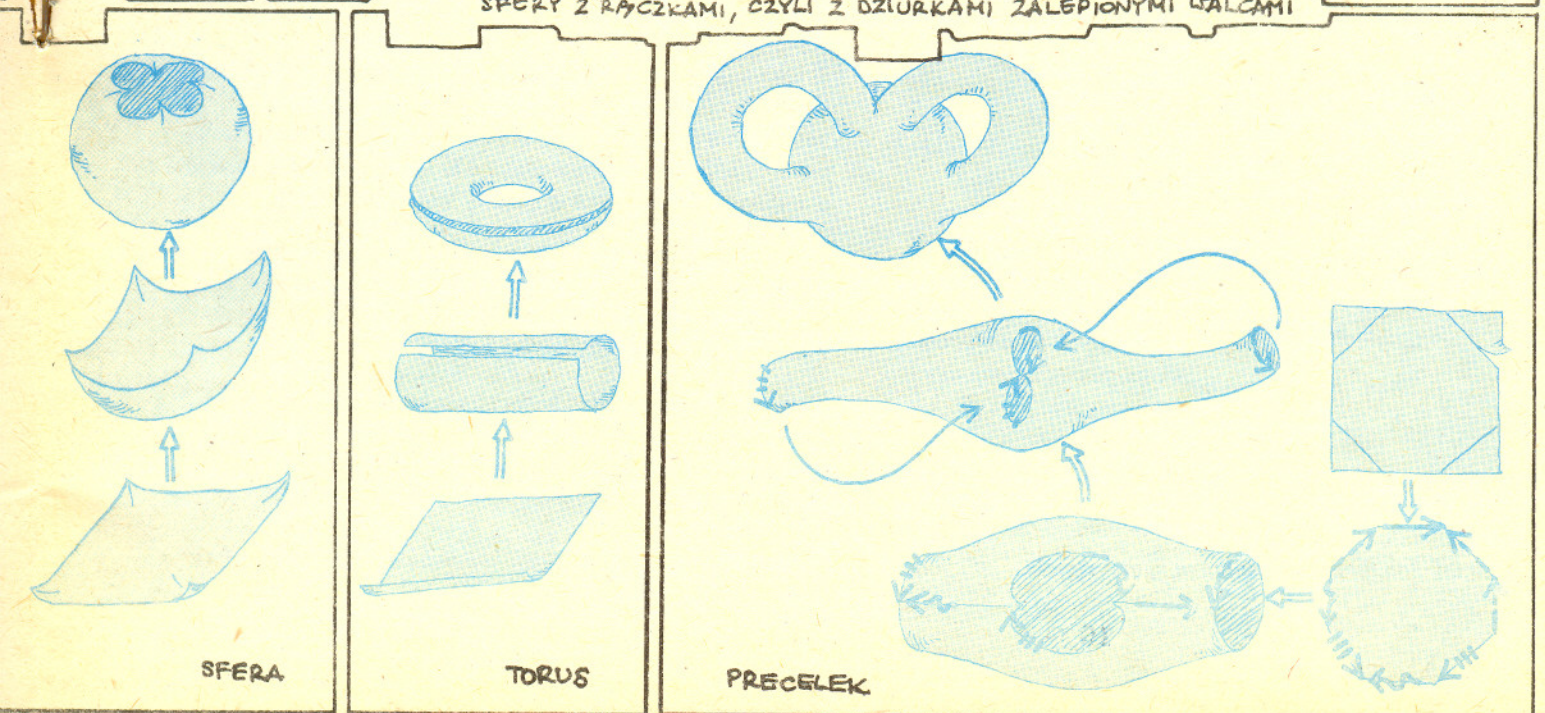
DWUWYMIAROWE



ZWARTE MOŻNA SKLASYFIKOWAĆ



SPERY Z RĄCZKAMI, CZYLI Z DZIURKAMI ZALEPIONYMI WALCAMI





Mała delta

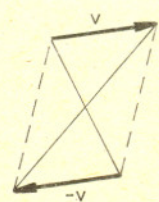
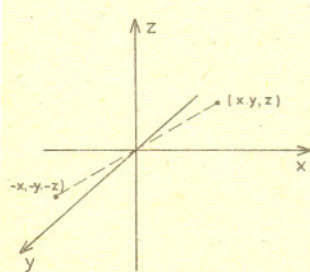
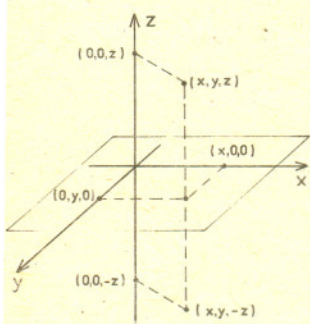
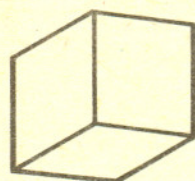
Odbłyśnik

Jak z lusterek zbudować odbłyśnik, czyli takie urządzenie, które każdy padający na nie promień światła odeśle z powrotem?

Pierwsza, prawdziwa zresztą, odpowiedź brzmi – nie da się. Zamiast ją uzasadniać, spróbujmy zastanowić się nad układem lusterek, który ma tę własność, że każdy odbity przez ten układ promień będzie równoległy do promienia padającego. Jest to „prawie idealny odbłyśnik”, bo gdy układ jest mały, promień odbity jest przez całą swą drogę bardzo bliski promieniowi padającemu.

Konstrukcja „prawie idealnego odbłyśnika” (PIO) może być taka: zestawiamy trzy lusterka w ten sposób, by każde dwa z nich były prostopadłe. Dlaczego taki układ jest PIO? Dlatego, że złożenie trzech symetrii płaszczyznowych jest symetrią środkową.

Uzasadnić to można np. za pomocą układu współrzędnych związanych z lusterkami – osiami układu niech będą krawędzie styku lusterek. Odbicie w każdej z płaszczyzn układu (w każdym lusterku) zmienia znak jednej ze współrzędnych, pozostawiając dwie pozostałe bez zmian. Zatem trzy odbicia (niezależnie od tego, w jakiej kolejności je wykonamy) przeprowadzą dowolny punkt na punkt położony symetrycznie względem początku układu współrzędnych (czyli rogu naszego zestawu lusterek). A symetria środkowa przeprowadza każdy wektor na wektor przeciwny (tak na prostej, jak na płaszczyźnie czy w przestrzeni), czyli na wektor o tym samym kierunku, ale przeciwnym zwrocie.



Powstaje pytanie, czy zaprojektowany przez nas PIO to jedyna możliwa taka konstrukcja. W całej ogólności odpowiedź na to pytanie jest negatywna. Jeśli lusterek jest więcej (a musi ich być nieparzysta liczba – dlaczego?), to można też je ustawić w PIO. Tyle że każdy układ nieparzystej liczby lusterek może być zastąpiony przez dający identyczny wynik układ trzech – dlaczego? (fakt ten jest nazywany w geometrii twierdzeniem o redukcji).

Dołożmy więc do naszego pytania dodatkowy warunek – lusterka mają być trzy (że jedno nie wystarczy, wie każdy, kto używał lustra). Czy wtedy nasza konstrukcja PIO jest jedyną możliwą?

Odpowiedź jest pozytywna. Wystarczy w przypadku, gdy dwa spośród lusterek nie są prostopadłe, wskazać promień, dla którego promień odbity będzie nierównoległy. Nazwijmy te dwa nie prostopadłe lusterka l_1 i l_2 (a trzecie l_3).

Gdy $l_1 \parallel l_2$, to odbity w nich (w każdym raz) promień będzie miał i kierunek, i zwrot taki sam, jak promień padający (dlaczego?). W tej sytuacji, aby go odwrócić, l_3 musiałoby być do niego prostopadłe. Żeby więc odwracać wszystkie promienie, musiałoby być prostopadłe do każdego z nich, a takich lusterek (płaszczyzn) nie ma.

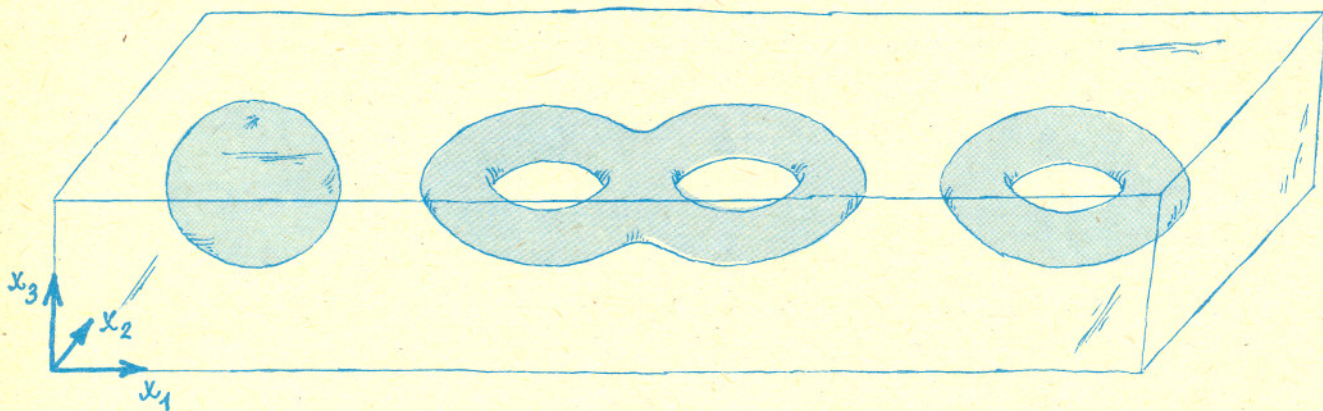
Z kolei, gdy płaszczyzna l_1 przecina płaszczyznę l_2 , promień równoległy do krawędzi przecięcia tych płaszczyzn może być odwrócony tylko przez lusterko l_3 prostopadłe do tej krawędzi. Ale lusterko to nie odwróci promieni odbijających się od l_1 i l_2 (dlaczego?).

Czy wykazaliśmy więc, że nasz PIO jest jedynym możliwym? Otóż, nie. Wykazaliśmy tylko, że jest to jedyny możliwy PIO z płaskich lusterek. A co będzie z lusterkami o innym kształcie?

Tak się jednak składa, że produkowane PIO, zarówno te, z których złożone są światelka odblaskowe, jak i te na Księżycu, są takie, jak opisaliśmy (tyle że z pryzmatów).

ZANURZANIE ROZMAITOŚCI

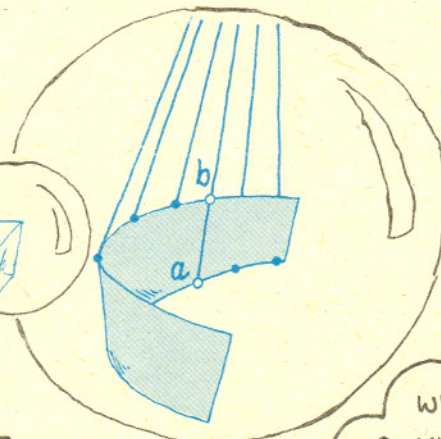
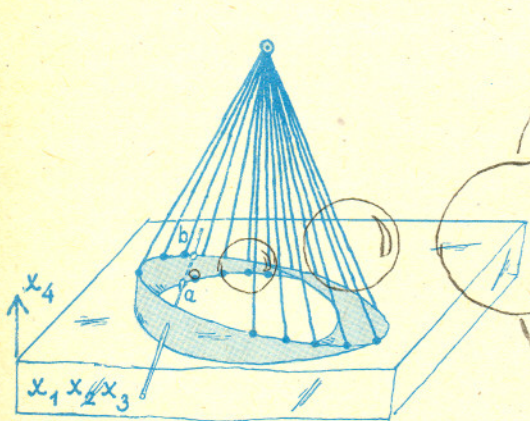
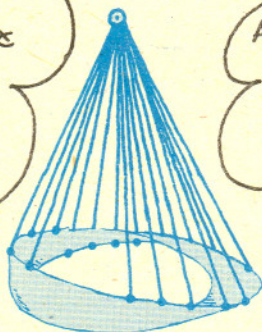
SFERA, PRECEL I TORUS MAJĄ ZANURZENIA W PRZESTRZENI 3-WYMIAROWA.



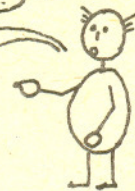
DLA PŁASZCZYZNY RZUTOWEJ, BUTELKI KLEINA I OGÓLNIJ SFER Z WLEPIONYMI WSTĘGAMI MÖBIUSA JEST ZBYT CIASNO W PRZESTRZENI 3-WYMIAROWEJ.

NIE MA SPOSOBU, ŻEBY POŁĄCZYĆ W NASZEJ PRZESTRZENI PUNKT \circ ROZKĄCZNYMI ODCINKAMI Z KAŻDYM PUNKTEM BRZEGU WSTĘGI

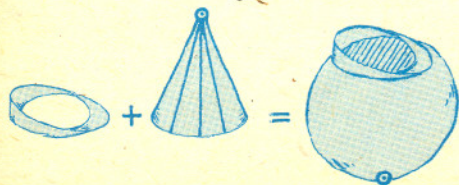
ALE MOŻNA TO BEZ TRUDU ZROBIĆ W PRZESTRZENI 4-WYMIAROWEJ



GDYBY DWA Z TAKIYCH ODCINKÓW GDZIEŚ SIĘ SPOTKAŁY, TO BYŁOBY TAK.



ALE PROSTA ab NIE WYCHODZI POZA PODPRZESTRZEŃ 3-WYMIAROWĄ, WIĘC PUNKT \circ NIE MOŻE NA NIEJ LEŻEĆ!



Skrót regulaminu

Každy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 7/1990.

Termin nadsyłania rozwiązań:

30 XI 1990

Zadania z matematyki nr 207, 208

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

207. Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają zależność

$$\frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy} + \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz} + \frac{z^2 + x^2 - y^2}{2zx} = 1.$$

Dowieść, że dwa spośród ułamków będących składnikami lewej strony powyższej równości mają wartość 1 (a pozostały -1).

208. Rozważmy ciąg funkcji (f_n) określonych na przedziale $(0; \pi)$ wzorem rekurencyjnym: $f_1(x) = \sin x$, $f_{n+1}(x) = (\sin x)^{f_n(x)}$. Dla każdej liczby naturalnej n obliczyć granicę prawostronną funkcji f_n w punkcie 0.

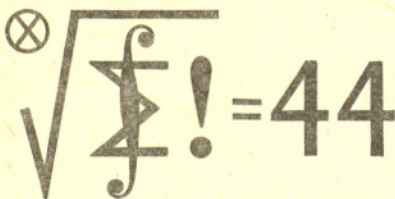
Zadanie 208 zaproponował pan Krzysztof Zapisek z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/1990

Przypominamy treść zadań:

199. Przez dowolny punkt P wysokości CM trójkąta równoramiennego ABC ($|AC| = |BC|$) prowadzimy półprostą AP^{\rightarrow} ; przecina ona okrąg Ω opisany na trójkącie ABC w punkcie D . Przy jakim położeniu punktu P okrąg Γ styczny do odcinków PD, PB i łuku BD okręgu Ω ma maksymalną średnicę?

200. Mamy sześcian zbudowany z n^3 kostek. Na ile sposobów można go rozebrać zdejmując po jednym klocku? (Wolno za każdym razem zdjąć dowolny klocek, na którym nie stoi żaden inny.) Dla jakiego n znaleziona wartość przekroczy trylion?



199. Przyjmijmy oznaczenia: $|CM| = h$, $|MP| = x$; O, r - środek i promień okręgu Ω ; Q, y - środek i promień okręgu Γ . Prosta PQ połowi kąt BPD . Jest więc równoległa do AB , wobec czego trójkąty PQM i PQB mają równe pola:

(1) $|PQ| \cdot x = |PB| \cdot y$.

Rozważając trójkąty prostokątne OPQ, PMB, OMB dostajemy zależności

(2) $|PQ|^2 = |OQ|^2 - |OP|^2 = (r - y)^2 - |r + x - h|^2$,

(3) $|PB|^2 = |MP|^2 + |OB|^2 - |OM|^2 = x^2 + r^2 - |h - r|^2$.

Podnosząc (1) stronami do kwadratu i podstawiając (2), (3) otrzymujemy po przekształceniach równanie kwadratowe względem y

$$ay^2 + by + c = 0$$

o współczynnikach

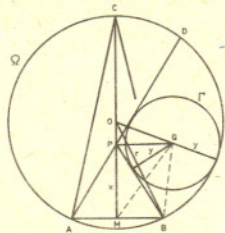
$$a = (2r - h)h, \quad b = 2rx^2, \quad c = x^2(h - x)(h - x - 2r).$$

Dodatnim pierwiastkiem tego równania jest liczba

(4) $y = x(h - x)/h$

(drugi pierwiastek jest ujemny, bo $a > 0 > c$). Znaleziona wartość (4) osiąga maksimum, gdy $x = \frac{1}{2}h$, czyli gdy P jest środkiem odcinka CM .

(Warto zauważyć, że wzór (4) ma następującą interpretację: średnica okręgu Γ jest średnią harmoniczną długości odcinków, na które punkt P dzieli wysokość CM .)



200. Sześcian tworzy n^2 kolumn („słupków”), po n klocków w każdej. Ponumerujemy te kolumny liczbami od 1 do n^2 . Każdy kolejny ruch jest wyznaczony przez podanie numeru kolumny. Sposobów rozebrania sześcianu jest więc tyle, ile ciągów długości n^3 o wyrazach ze zbioru $\{1, \dots, n^2\}$, w których każdy symbol (od 1 do n^2) występuje n -krotnie. Oznaczmy liczbę tych ciągów przez $f(n)$.

Miejsca zajęte przez symbol 1 (n miejsc) można ustalić na $\binom{n^3}{n}$ sposobów. Zostaje $n^3 - n$ miejsc; n spośród nich zajmuje symbol 2; można je wybrać na $\binom{n^3 - n}{n}$ sposobów. Kontynuując to rozumowanie dochodzimy do równości

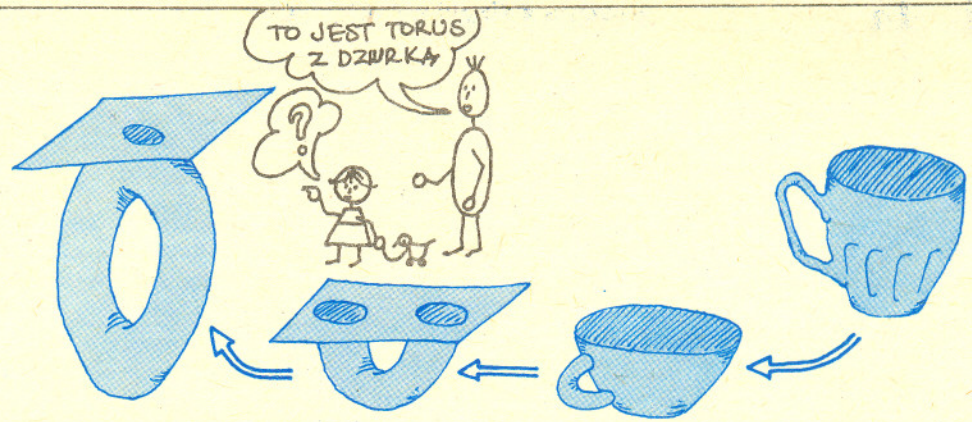
$$f(n) = \prod_{k=0}^{n^2-1} \binom{n^3 - kn}{n} = \left(\frac{1}{n!}\right)^{n^2} \prod_{k=0}^{n^2-1} \frac{(n^3 - kn)!}{(n^3 - (k+1)n)!} = (n^3)! (n!)^{-n^2}.$$

Już dla $n = 3$ mamy

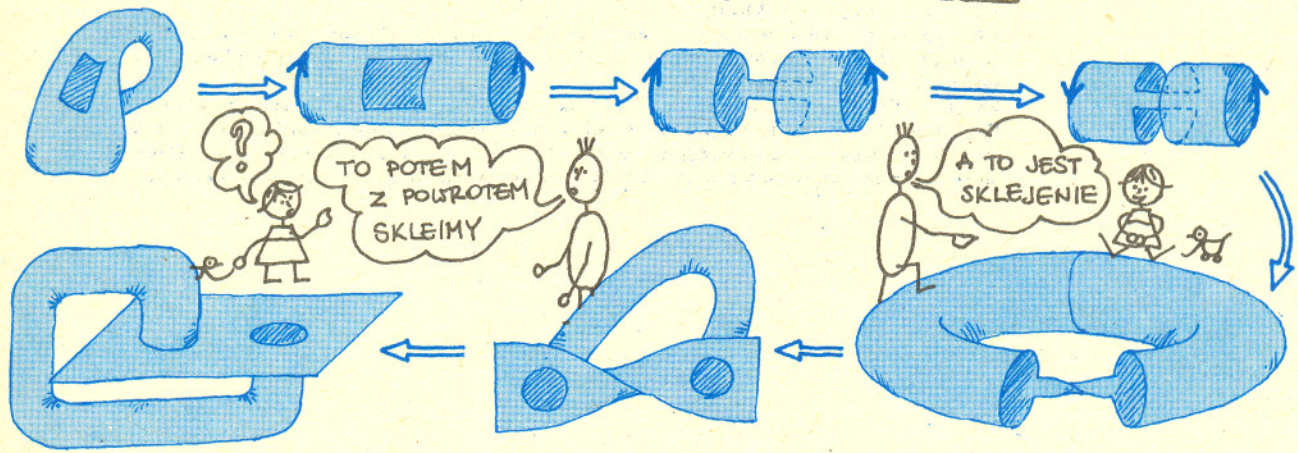
$$\begin{aligned} f(3) &= 27! \cdot 6^{-9} > \\ &> 27 \cdot 24^3 \cdot 21^3 \cdot 18^3 \cdot 15^3 \cdot 12^3 \cdot 9^3 \cdot (8!) \cdot 6^{-9} = \\ &= 3^{21} \cdot \left(\frac{8!}{2}\right)^3 \cdot (8!) \cdot 6^{-9} = 2^{-3} (8!)^4 (3^7 6^{-3})^3 > \\ &> 2^{-3} \cdot (4 \cdot 10^4)^4 \cdot 10^3 > 3 \cdot 10^{20}, \end{aligned}$$

a więc kilkaset trylionów.

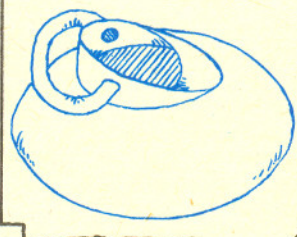
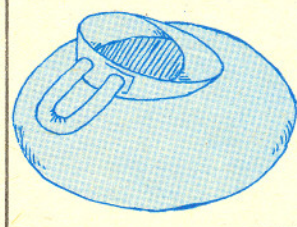
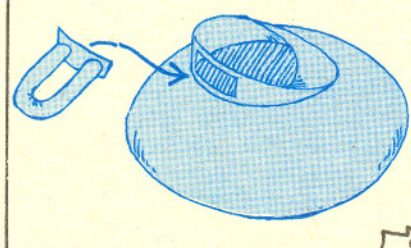
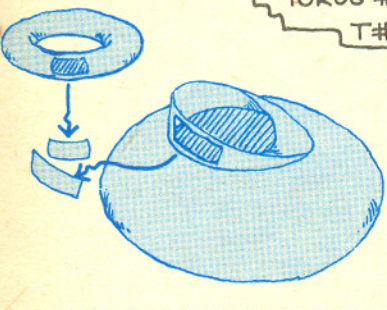
(Dla ciekawych: dokładna wartość $f(3) = 1\ 080\ 491\ 954\ 750\ 208\ 000\ 000$; dalsze przybliżone wartości: $f(4) = 1,04 \dots \cdot 10^{67}$, $f(5) = 1,97 \dots \cdot 10^{157}$.)



ROZMAITOSCI SA WŚRÓD NAS

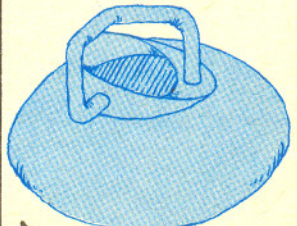
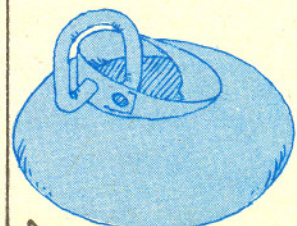
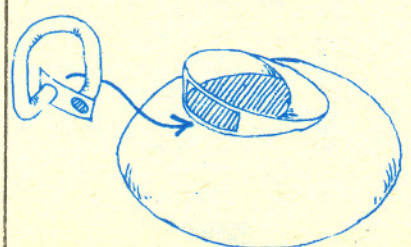
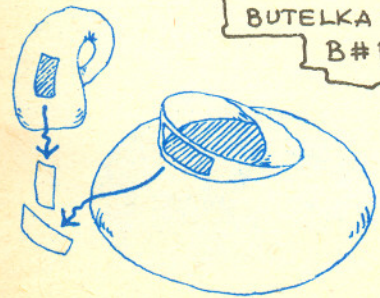


SUMA SPÓJNA:
TORUS # PŁ. RZUTOWA
 $T \# P$

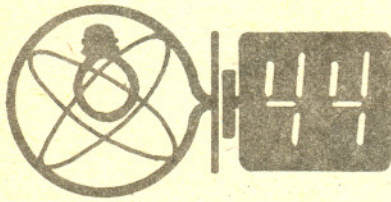


WYCHODZI DOKŁADNIE TO SAMO
 $T \# P = B \# P$, CHOCIAŻ $T \neq B$!

SUMA SPÓJNA:
BUTELKA KLEINA # PŁ. RZUTOWA
 $B \# P$



Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 1990



105. Statek o okresie własnym kołysania poprzecznego równym T płynie z prędkością v przez fale oceaniczne o długości d , poruszające się z prędkością u . Przy spełnieniu jakich warunków wystąpią cztery różne „wrażliwe kursy” statku, dla których działanie fal na statek będzie wzbudzało jego drgania własne? Kurs statku określony jest przez wektor v .

106. Jednorodny, wiotki, cienki, obdarzony masą sznurek lub łańcuszek o długości l , zawieszony na jednym końcu, może wykonywać drgania poprzeczne o różnych częstotliwościach, którym odpowiada różna liczba węzłów (jeden z nich występuje zawsze w punkcie zawieszenia). Częstotliwości takich małych drgań są proporcjonalne do $\sqrt{g/l}$ (g – przyspieszenie ziemskie). Obliczyć – w sposób numeryczny – pierwsze cztery częstotliwości małych drgań tego sznurka (tj. wyznaczyć bezwymiarowy współczynnik proporcjonalności), przyjmując, że poszczególne elementy sznurka drgają harmonicznym z tą samą częstotliwością, lecz z różnymi amplitudami. Zachęcamy do porównania otrzymanych wyników z danymi doświadczalnymi.

Rozwiązania zadań z numeru 4/1990

Przypominamy treść zadań:

97. Wyobraźmy sobie w miejscu Ziemi oraz Marsa planety składające się wyłącznie z wody (i nie posiadające księżyców). Jakie co najmniej powinny być średnice tych planet, aby mogły one istnieć w sposób trwały?

98. Po tańi lodowiska otoczonego owalną bandą (rys. obok), ślizga się krążek hokejowy. Krążek wystrzelony jest z punktu A pod kątem α względem osi lodowiska. Przy jakich wartościach kąta α krążek wróci do punktu startowego? Zakładamy, że banda ogranicza figurę złożoną z kwadratu i dwóch połówek koła oraz że odbicia krążka są doskonale sprężyste.

97. Głównym czynnikiem decydującym o trwałości wodnej planety jest ucieczka cząsteczek wody z otaczającej planetę warstwy pary wodnej (atmosfery) w przestrzeni kosmicznej. Problem ucieczki gazu atmosferycznego z planety był omawiany w rozwiązaniu zadania 66 (*Delta* nr 7/1988), skąd czerpiemy wzór na promień planety

$$r_0 = \sqrt{\frac{9RT}{8\pi G \rho \mu}}$$

(R – stała gazowa, T – temperatura, G – stała grawitacji, ρ – gęstość planety, μ – masa cząsteczkowa gazu atmosfery), przy którym średnia prędkość termiczna cząsteczek gazu jest równa prędkości ucieczki z planety. Atmosfera utrzymuje się na planecie w kosmicznej skali czasu, gdy promień planety $r > wr_0$, przy czym $w = 5$ (patrz omówienie rozwiązań zadania 66 w numerze 1/1989). W przypadku planety wodnej atmosfera odnawia się przez parowanie wody (ew. sublimację lodu), co prowadzi do ubytku substancji planety. Ponieważ względny ubytek masy planety jest znacznie mniejszy od względnego ubytku masy atmosfery, można (szacunkowo) przyjąć $w \cong 1$.

Temperatury na wodnych planetach powinny być zbliżone do panujących na Ziemi (~ 280 K) oraz Marsie (~ 230 K). Odpowiadające tym temperaturom wartości r wynoszą odpowiednio 840 km oraz 760 km, a więc minimalny promień jest rzędu 1000 km.

98. W związku z tym, że krążek ślizga się po lodzie z pewnym tarciem, a więc zasięg jego toru jest ograniczony, bierzemy pod uwagę jedynie niewielką liczbę odbić krążka od bandy.

Algorytm programu komputerowego, który znajdzie poszukiwane wartości kąta α , może wyglądać jak niżej: Dla kolejnych wartości kąta α : $\alpha_k = k\Delta\alpha$ ($k = 0, 1, 2, \dots$, $\Delta\alpha$ – bardzo mały kąt) dokonujemy następujących operacji:

- (1) wyznaczamy równanie prostej p_1 pierwszego odcinka toru;
- (2) znajdujemy współrzędne punktu P_1 pierwszego odbicia od bandy (punkt przecięcia prostej p_1 z bandą);
- (3) wyznaczamy równanie stycznej s_1 do bandy w punkcie P_1 ;

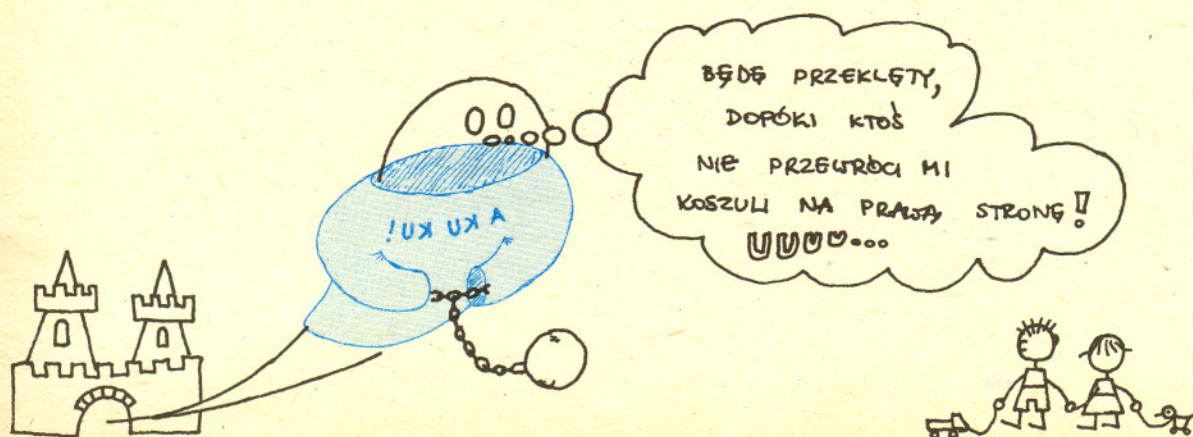
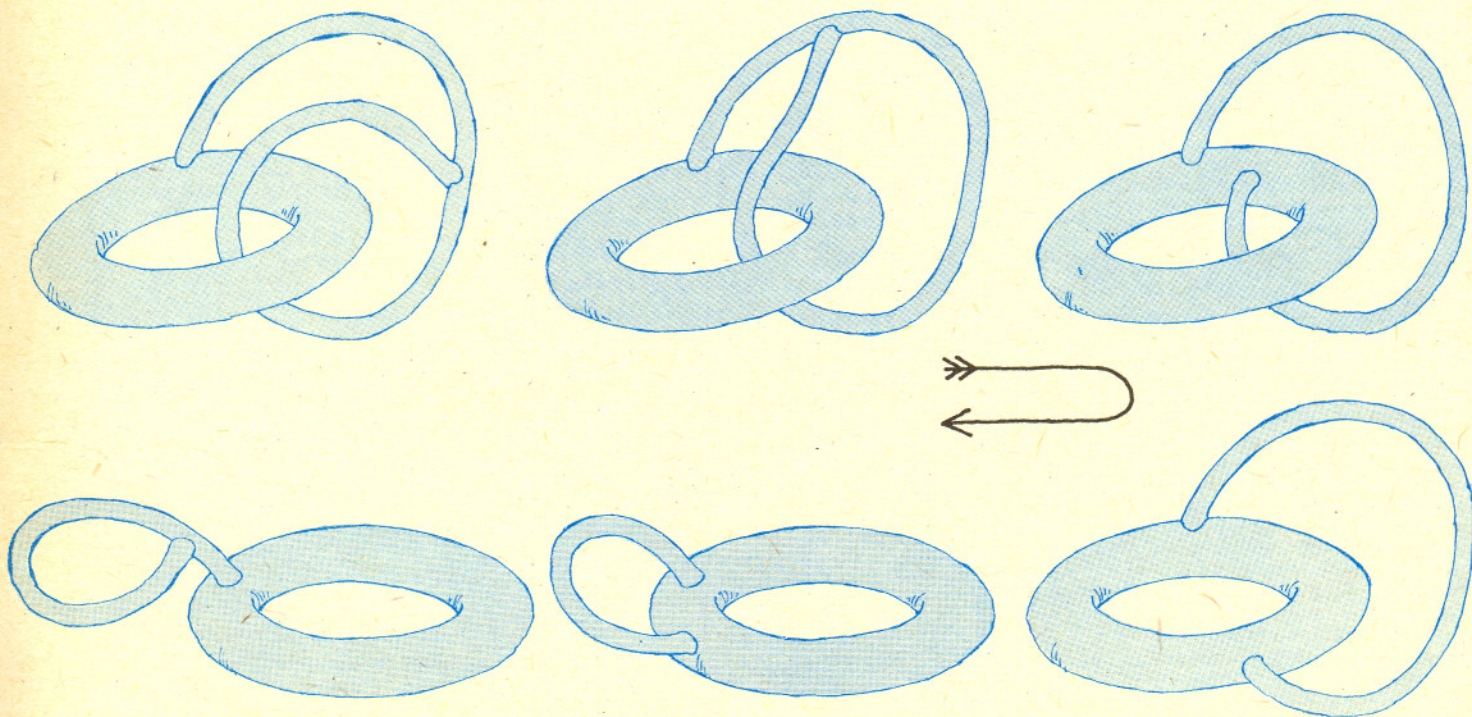
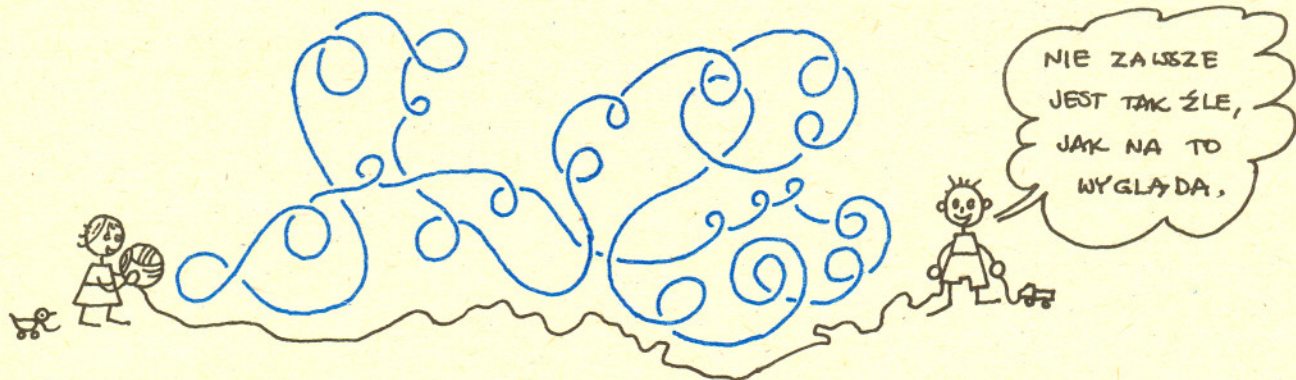
- (4) na podstawie równań prostych p_1 i s_1 wyznaczamy równanie prostej p_2 drugiego odcinka toru;
- (5) powtarzamy operację (2) dla prostej p_2 wyznaczając punkt P_2 drugiego odbicia;
- (6) sprawdzamy, czy punkt P_2 nie pokrywa się z punktem startowym A (ze względu na skończoną wartość $\Delta\alpha$ oraz na niedokładności obliczeń numerycznych przyjmujemy, że omawiane punkty się pokrywają, jeżeli odległość między nimi jest mniejsza od $\epsilon \ll R$, gdzie R – promień półokręgów), jeśli tak – wypisujemy wartość kąta α_k , dla którego nastąpił powrót krążka do punktu A , jeśli nie – kontynuujemy dalsze operacje, wyznaczając kolejne p_i oraz P_i , aż np. do $i = 5$.

Przy prawidłowym doborze wartości $\Delta\alpha$ i ϵ jako odpowiedź powinno się z reguły otrzymywać nie pojedyncze wartości α_k , lecz ich serie dla kolejnych kilku (kilkudziesięciu) wartości k . Zbyt duże $\Delta\alpha$ lub zbyt małe ϵ stwarzają niebezpieczeństwo „zgubienia” pewnych rozwiązań, które przypadną między dwoma kolejnymi kątami α_k i α_{k+1} .

Wyniki obliczeń komputerowych, wykonanych dla $\Delta\alpha = 5 \cdot 10^{-7} \pi$, $\epsilon = 10^{-3} R$, są przedstawione na histogramie (dolny rysunek na tylnej okładce). Na osi odciętych zaznaczono wartości kąta $\alpha \in (0, \pi/2)$ spełniające warunki zadania. Wysokość odcinków odpowiada liczbie kątów α_k występujących w każdej serii (co stanowi miarę tolerancji błędów, jaki można popełnić wystrzelując krążek pod danym kątem); rozpiętość kątów w serii wynosi tu co najwyżej około $0,01^\circ$, jest więc mniejsza od dokładności wykresu. Przy każdym odcinku podano liczbę występujących odbić (maksymalnie cztery) oraz oznaczenia literowe.

Na górnym rysunku na tylnej okładce pokazane są tory dla 1, 2 i 3 odbić. Dodatkowo trzeba jeszcze uwzględnić tory utworzone przez odbicia symetryczne względem długiej osi lodowiska. Okazuje się, że pomimo bardzo małej wartości kroku $\Delta\alpha$ nie wszystkie z tych torów w przypadku 4 odbić pojawiły się w obliczeniach. Nie ma więc gwarancji, że któreś z rozwiązań dla większej liczby odbić nie zostanie przeoczone. Zastosowane symbole literowe odpowiadają oznaczeniom na histogramie. Para tych samych liter z primem i bez odpowiada temu samemu torowi (bądź dwóm torom symetrycznym) przebieganemu w dwóch kierunkach.

ŁOŚCI W PRZESTRZENI



Do napisania tej pracy zainspirowało mnie zadanie nr 6 z XXIX Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej:

jeśli liczby x, y i $\frac{x^2 + y^2}{xy + 1}$ są naturalne, to $\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{xy + 1}}$ też jest liczbą naturalną.

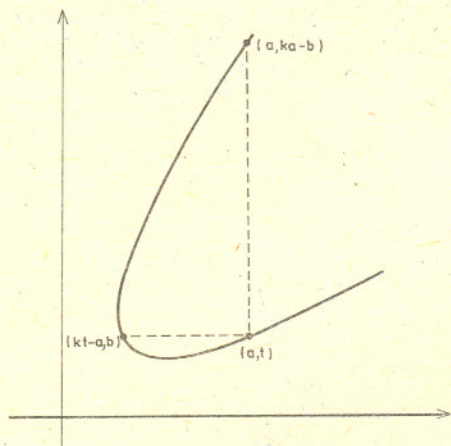
FIZYCZNE NOWINKI

Redaguje dr hab. Andrzej KENNEL

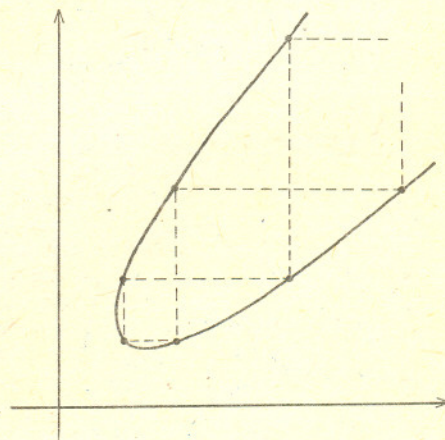
OPÓR W TEMPERATURZE MILIONA STOPNI

Pomiar wartości oporu elektrycznego metalu w temperaturze miliona stopni wydaje się czynić absolutnie niemożliwym. Przecież wszystkie znane materiały w dużo niższych temperaturach przechodzą najpierw do fazy ciekłej, a później gazowej. A jednak pomysłowość fizyków z laboratorium firmy Bell w Murray Hill (USA, stan New Jersey) umożliwiła wykonanie takich pomiarów. Badanym obiektem była napyłona na szkło cienka folia aluminiowa. użytym narzędziem badawczym był laser impulsowy wysyłający impulsy promieniowania ultrafioletowego o długości fali 308 nanometrów, o niezwykle krótkim czasie trwania (mniejszym od pół pikosekundy) i energii dochodzącej do 7 miliardów w impulsie. Światło lasera było ogniskowane na próbce, na powierzchni wynoszącej około 10^{-5} cm², co prowadziło do osiągnięcia bardzo dużej gęstości mocy promieniowania dochodzącej do około 10^{15} wata na centymetr kwadratowy. Folia metalowa była przesuwana tak szybko, że każdy impuls padał w nowym "chłodnym" miejscu. Bardzo krótki czas trwania impulsu i odpowiedni dobór długości fali promieniowania powodował chwilowe podgrzanie gazu elektronowego w metalu. Sieć krystaliczna nie rozgrzewała się i nie rozszerzała się w trakcie eksperymentu. Pomiar zależności współczynnika odbicia promieniowania od mocy lasera umożliwił wyznaczenie zmian oporności badanego materiału. Natomiast obserwacja efektu Dopplera, czyli zmian długości fali odbitego promieniowania, umożliwiła znalezienie wartości temperatury badanego gazu elektronowego, również w zależności od mocy lasera. W eksperymencie stwierdzono, że oporność aluminium wzrasta z temperaturą ponad stokrotnie (w stosunku do temperatury pokojowej) i osiąga nasycenie przy wartości około $200 \mu\Omega \text{ cm}$ (mikrocentymetrów) w temperaturze wynoszącej około pół miliona stopni. Przy dalszym znacznym wzroście temperatury obserwowano jedynie spadek oporności o około 20%. Średnią drogę swobodną elektronu (czyli drogę przebywaną między kolejnymi zderzeniami) w obszarze maksymalnego oporu oszacowano na około 3Å. Odpowiada to w przybliżeniu odległości pomiędzy atomami. Dla porównania, w bardzo niskich temperaturach średnia droga swobodna elektronu w metalach może wynosić kilka centymetrów. Wydaje się więc, że otrzymano w ten sposób maksymalną możliwą wartość oporności aluminium. Spadek oporu przy dalszym wzroście temperatury został zinterpretowany jako wynik pewnego wzrostu koncentracji swobodnych elektronów w aluminium przy tak wysokiej temperaturze.

Rozważmy wielomian dwóch zmiennych $W(x, y) = x^2 - kxy + y^2 - k$, gdzie k jest pewną ustaloną liczbą całkowitą. Ze wzoru na sumę pierwiastków trójmianu kwadratowego (gdy potraktujemy W jako wielomian jednej ze zmiennych) wynika, że jeśli punkt (a, b) należy do wykresu stożkowej o równaniu $W(x, y) = 0$, należą doń także punkty $(kb - a, b)$ i $(a, ka - b)$, które dalej będą nazywane śladami punktu (a, b) (rys. 1). Istotne jest, że jeśli (a, b) jest punktem kratowym (tzn. gdy a i b są liczbami całkowitymi), jego ślady też są punktami kratowymi. Na stożkowej możemy więc utworzyć trajektorię złożoną z punktów kratowych (rys. 2).



Rys. 1



Rys. 2

Wynik ten może służyć do znalezienia wszystkich punktów kratowych na naszej stożkowej. Rozpatrzmy w tym celu trzy przypadki:

I. $|k| \leq 2$

Jak łatwo sprawdzić, dla $k \in \{-2, -1, 2\}$ do stożkowej nie należy żaden punkt kratowy; przy $k = 0$ jedynym rozwiązaniem jest $(0, 0)$, a dla $k = 1$ istnieją cztery punkty kratowe należące do stożkowej: $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(0, -1)$ i $(-1, 0)$.

II. $k \geq 3$

Jeśli na stożkowej leży punkt kratowy (a, b) , to do jego trajektorii należy pewien punkt kratowy (c, d) taki, że $cd \leq 0$. By tego dowieść, wprowadźmy funkcję $f(x, y) = x + y$. Albo $ab \leq 0$ i wówczas możemy przyjąć po prostu $(c, d) = (a, b)$, albo $ab > 0$, czyli $a, b > 0$ lub $a, b < 0$. Rozważmy tylko pierwszy z tych przypadków – dowód drugiego przebiega analogicznie.

Ponieważ $k \geq 3$ i $W(a, b) = 0$, otrzymujemy ciąg równoważnych nierówności:

$$\begin{aligned} \frac{4 - k^2}{k}(a^2 + b^2) &< 0 < k^2 + 4, \\ \left(\frac{k^2 + 4}{k} - 2k\right)(a^2 + b^2) &< k^2 + 4, \\ (k^2 + 4)\left(\frac{a^2 + b^2}{k} - 1\right) &< 2k(a^2 + b^2), \\ (k^2 + 4)ab - 2k(a^2 + b^2) &< 0, \\ (kb - 2a)(ka - 2b) &< 0, \end{aligned}$$

$$\left(f((kb - a, b)) - f((a, b))\right) \cdot \left(f((a, ka - b)) - f((a, b))\right) < 0.$$

Roswiązanie zadania F 289.
Niech α oznacza kąt odchylenia pręta od pionu. Gdybyśmy nie poruszali ręką, na której oparty jest pręt, to jego energia wynosiłaby

$$E = \frac{1}{2} I \dot{\alpha}^2 + mg \frac{l}{2} (\cos \alpha - 1),$$

gdzie $I = \frac{1}{3} ml^2$ oznacza moment bezwładności pręta względem punktu podparcia, $\dot{\alpha}$ jest prędkością kątową, a m masą pręta. Zwykle w opisanej sytuacji prędkość kątowa dla $\alpha = 0$ jest niemal zerowa. Wówczas $E = 0$ i ograniczając się do małych kątów ($\cos \alpha = 1 - \frac{1}{2} \alpha^2 + \dots$) znajdziemy

$$\dot{\alpha} = \sqrt{\frac{3g}{2l}} |\alpha|.$$

Próbując przywrócić pręt do pionu poruszamy ręką w poziomie. Jeśli robimy to z przyspieszeniem a , to na pręt działa siła bezwładności ma zaczepiona w środku masy. Niech ruch trwa przez czas Δt . Wówczas moment pędu pręta zmieni się o

$$\Delta L = \frac{1}{2} ma \cdot \Delta t = \frac{1}{2} ml \cdot \Delta v,$$

gdzie Δv jest zmianą prędkości ręki. Aby przywrócić pręt do pionu, ΔL musi być równe podwojonemu momentowi pędu pręta

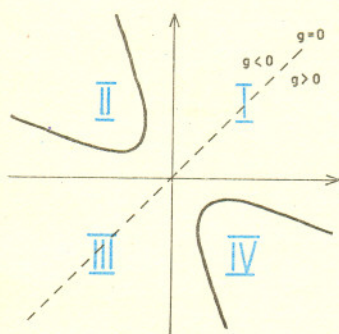
$$\Delta L = 2L = 2 \cdot \frac{1}{3} ml^2 \dot{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{g}{l} ml^2 |\alpha|,$$

a więc

$$\Delta v = 2 \sqrt{\frac{2}{3}} gl \cdot |\alpha| \approx 5 \sqrt{l} |\alpha| \frac{m}{s},$$

gdzie l jest wyrażone w metrach. Widzimy, że gdy l jest rzędu 1 m (wybieramy $|\alpha| \sim \frac{1}{3}$ radiana), to $\Delta v \sim 1 \frac{m}{s}$. Jest to typowa prędkość ruchów ręki, skąd wywodzi się łatwość balansowania metrowym prętem. Gdy długość pręta staje się duża, trzeba bardzo uważać, by kąt α był bardzo mały. W przeciwnym razie trzeba by używać prędkości nieosiągalnych dla ludzkiej ręki. W przypadku „długopisu” ($l \sim 10$ cm) trudność polega na precyzyjnym doborze Δv . Ponieważ jest ono teraz bardzo małe, łatwo nadać ręce zbyt dużą prędkość i przerzucić długopis na drugą stronę (ze znacznie większą energią). Trzeba również działać znacznie szybciej – typowy czas, w którym musimy się zmieścić, spełnia warunek:

$$\Delta t \ll \sqrt{\frac{2l}{3g}}.$$



Rys. 3

Zatem w jednym ze śladów f przybiera większą, a w drugim – mniejszą wartość niż w punkcie (a, b) . Można więc tak dobrać kolejne punkty z trajektorii (a, b) , by wartość funkcji f malała. Atoli f przyjmuje tylko wartości będące liczbami całkowitymi, zatem w trajektorii od pewnego momentu (jeszcze $a, b > 0$) pojawiają się punkty nie mające obu współrzędnych dodatnich. Ten z nich, który „pojawi się” jako pierwszy, jest szukanym punktem (c, d) , gdyż ze względu na sposób tworzenia śladów musi mieć jedną współrzędną dodatnią. Stąd $cd \leq 0$. Ponadto $c^2 - kcd + d^2 - k = 0$, czyli

$$(*) \quad c^2 + d^2 = k(cd + 1).$$

Gdyby było $cd \leq -1$, to $0 \leq c^2 + d^2 \leq 0$, zatem $c = d = 0$, czyli $cd = 0$, co prowadzi do sprzeczności. Musi więc być $cd = 0$, czyli $c = 0$ lub $d = 0$. Załóżmy bez zmniejszenia ogólności, że to $c = 0$. Wówczas ze wzoru $(*)$ wynika, że musi być $k = d^2$.

Jeśli zatem $k \geq 3$ i $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$, na stożkowej nie ma punktów kratowych. Gdy zaś $\sqrt{k} \in \mathbb{N}$, z jednoznaczności sposobu tworzenia trajektorii wynika, że wszystkie rozwiązania należą do trajektorii punktów $(0, \sqrt{k})$, $(\sqrt{k}, 0)$, $(0, -\sqrt{k})$, $(-\sqrt{k}, 0)$.

III. $k \leq -3$

Jeśli na stożkowej leży punkt kratowy (a, b) , to do jego trajektorii należy pewien punkt kratowy (c, d) taki, że $cd \geq -3$. Aby tego dowieść, wprowadźmy funkcję $g((x, y)) = x - y$. Gdyby było $ab \geq -3$, moglibyśmy przyjąć $(c, d) = (a, b)$. Pozostaje więc przypadek, gdy $ab < -3$, wtedy $ab < -2 - \frac{8}{5} \leq -2 - \frac{8}{k^2 - 4} = \frac{2k^2}{4 - k^2}$. Stąd

$$2k \cdot k(ab + 1) < (k^2 + 4)ab,$$

a ponieważ $W(a, b) = 0$, więc

$$2k(a^2 + b^2) < (k^2 + 4)ab,$$

następnie

$$(2a - kb) \cdot (ka - 2b) < 0$$

i ostatecznie

$$(g((a, b)) - g((kb - a, b))) \cdot (g((a, b)) - g((a, ka - b))) < 0.$$

Zatem jeśli $ab < -3$, w jednym ze śladów g przybiera większą, a w drugim – mniejszą wartość niż w punkcie (a, b) . Załóżmy, że $g((a, b)) < 0$ (w przeciwnym przypadku dowód jest analogiczny do przedstawionego poniżej). Wówczas, gdyby było $xy < -3$ dla każdego punktu (x, y) , z trajektorii punktu (a, b) można by tak dobrać kolejne punkty trajektorii, aby wartość funkcji g rosła. Skoro jednak wartości g są liczbami całkowitymi, w którymś punkcie trajektorii wartość g stałaby się dodatnia. Ponadto ponieważ $W(x, y) = 0$, więc $xy = \frac{-x^2 + y^2 + (-k)}{-k} < 0$, czyli każdy punkt stożkowej leży w II lub IV ćwiartce układu współrzędnych. Ale funkcja g przyjmuje w II ćwiartce tylko wartości ujemne, a w IV ćwiartce tylko dodatnie, ze sposobu zaś określenia śladów wynika, że trajektoria może leżeć tylko w jednej z tych ćwiartek (rys. 3 – nie mogą „za jednym zamachem” zmienić się znaki obu współrzędnych). Zatem znak wartości funkcji g musi być dla całej trajektorii stały. Tu jednak dochodzimy do sprzeczności, gdyż $g((a, b)) < 0$, a jak wcześniej wykazaliśmy, gdyby dla każdego punktu (x, y) trajektorii było $xy < -3$, istniałby w trajektorii punktu (a, b) punkt, w którym g przyjmowałaby znak dodatni. Więc do trajektorii tej musi należeć szukany punkt kratowy (c, d) taki, że $0 > cd \geq -3$, czyli $-1 \geq cd \geq -3$. Ponieważ $cd \neq -1$ (byłoby wówczas $c^2 + d^2 = 0$ stąd $c = d = 0$ i $cd = 0$), więc $cd = -2$ lub $cd = -3$ skąd $(c, d) \in \{(1, -2), (-1, 2), (-2, 1), (2, -1), (1, -3), (-1, 3), (-3, 1), (3, -1)\}$. Jak łatwo sprawdzić, punkty te należą do stożkowej tylko wtedy, gdy $k = -5$. Gdy $k \leq -3$ i $k \neq -5$, na stożkowej nie ma punktów kratowych, a gdy $k = -5$, wszystkie rozwiązania należą do trajektorii wypisanych powyżej ośmiu punktów.

Zajmowałem się także nieco ogólniejszą postacią wielomianu $W(x, y)$. Wydaje mi się jednak, że przedstawiony problem wyraźnie ilustruje główną myśl mej pracy – wyszukiwanie na płaszczyźnie obszarów (zawierających skończenie wiele bądź nawet nieskończenie wiele, ale za to regularnie rozmieszczonych, punktów kratowych) takich, by przechodziły przez nie trajektorie wszystkich punktów kratowych należących do stożkowej. W rozważanym tu zagadnieniu takimi obszarami byłyby zbiory $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ (dla $k \geq 3$) i $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \geq xy \geq -3\}$ (dla $k \leq -3$).

A dlaczego *Skacząc po stożkowych?* Żywię cichą nadzieję, iż widać to na obrazkach...