

## SPIS TREŚCI

### NUMERU 1(193)

Myślcie z nami	str. 1
Prawa fizyki a ciężkie życie krasnoludków <i>Paweł Blasiak</i>	str. 2
Modularne gwiazdki i bąbelki <i>Michał Kwieciński</i>	str. 4
Obalamy prawa fizyki <i>doc. dr Jan Gaj</i>	str. 7
Mała Delta	str. 8
Okrag	str. 9
Korespondencyjny Klub Fizyków	str. 9
Czy bukmacher może przyjmować zakłady od samego siebie? <i>prof. dr Bolesław Kopociński</i>	str.10
Zadania	str.12
Descartes czy Kartezjusz	str.12
Patrz w niebo	str.13
Klub 44	str.13
Drobiazgi	str.16
Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki	str.17

**W następnym numerze:**

**Ćwierć wieku  $\Omega$**

„Delta”  
matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego, Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
Towarzystwa Astronomicznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Edukacji Narodowej

Komitet Redakcyjny  
dr Maciej Bryński  
dr Bogdan Cichocki  
dr Antoni L. Dawidowicz  
dr Alicja Derkowska  
doc.dr Jan A. Gaj  
doc.dr Bolesław Gleichgewicht  
prof.dr Tomasz Hofmokl – v-przewodniczący  
doc.dr Tadeusz Jarzębowski  
doc.dr Marcin Kubiak  
mgr Andrzej Mąkowski  
dr Zbigniew Plochocki  
dr Jan Rempala  
prof.dr Konrad Rudnicki  
prof.dr Grzegorz Sitarski  
prof.dr Józef I. Smak  
prof.dr Kazimierz Stępień  
prof.dr Mieczysław Subotowicz  
doc.dr Andrzej Szymacha  
doc.dr Aniela Wolska  
prof.dr Andrzej Woszczyk  
prof.dr Wojciech Żakowski –  
przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:  
mgr inż. Krzysztof Biesaga  
dr Lidia Goettig – z-ca red. nacj.  
mgr Maria Kapuścińska  
mgr Krystyna Kordos – sekr. red.  
dr hab. Marek Kordos – red. nacj.  
dr Paweł Krawczyk  
dr Tomasz Kwast  
mgr Anna Rudnik  
dr Jerzy Ryll  
mgr Joanna Udalska

Adres Redakcji  
ul. Noakowskiego 14  
00-666 Warszawa  
tel. 25-56-39

Wydawca:  
Uniwersytet Warszawski  
Krakowskie Przedmieście 26/28  
00-325 Warszawa

Nakład 18 000 egz.  
Objętość 2 ark. wyd., 2,50 ark. druk.,  
papier offsetowy V kl. 70 g.  
Wydrukowano w Prasowych  
Zakładach Graficznych  
RSW „Prasa-Książka-Ruch”  
w Łodzi, ul. Armii Czerwonej 28.  
Nr zam. 4074/89  
Skład systemem T<sub>E</sub>X  
wykonała redakcja.

### DRODZY CZYTELNICY !

Jest to trzeci numer wydawany przez Uniwersytet Warszawski. Praktycznie wydawanie *Delta* zostało zawieszono w październiku 1989 roku, formalnie – w lutym 1990 roku. Zdecydowaliśmy się wydać przygotowane do druku i znajdujące się na różnych etapach produkcji w drukarni numery *Delta* praktycznie bez zmian. Zmieniliśmy jednak ich numerację na aktualną. Nie będzie więc numerów 11 i 12 z 1989 roku oraz numerów 1, 2 i 3 z 1990 roku. Nie będziemy udawali, że jest wszystko w porządku, gdy nie jest.

Prosimy o wyrozumiałość dla tych wszystkich fragmentów, w których można znaleźć ślady starej numeracji. W szczególności przepraszamy uczestników Ligi za zaistniały bałagan. W tym roku przerwa ligowa będzie w numerze 11 i 12. Mamy nadzieję, że od 1991 roku wszystko będzie w porządku. Nie tylko u nas.

REDAKCJA

P.S. Zwrot pieniędzy wpłaconych za prenumeratę zapewnia Warszawskie Wydawnictwo Prasowe RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Al. Jerozolimskie 125/127, 02-017 Warszawa. Do prenumeraty wrócimy w IV kwartale 1990 roku.

**Cena 1 egzemplarza zł 1500,-**

Mówiąc, a nawet myśląc, o tym co będzie, zwracamy uwagę na różnice między znanym „dzis” a oczekiwanym „jutro”. Czasem widzimy się w owym „jutro” sponiewieranymi, przepędzanymi z miejsca na miejsce, bezrobotnymi, czasem zaś pędzimy jakąś toyotą ze swojej gustownej willi do przedsiębiorstwa zbudowanego naszą przemyślnością. Na ogół jednak nie zwracamy uwagi na to, że (w każdym przypadku) rzecz dzieje się na tle obecnego „dzis”, że nasze lęki i marzenia sens mają jedynie przy założeniu, że w sumie będzie tak jak było, tylko może my przesuniemy się na inne miejsce. A jest to spostrzeżenie ważne. Tym, co stanowi najtrwalszy element świata, w którym żyjemy, jest kultura. To w niej odbywa się nasze życie niesprowadzalne do zaspokajania, choćby najszerzego, wachlarza potrzeb fizjologicznych.

Każdy aspekt naszego życia ma swoją kulturę. Ma ją i matematyka. Składają się na nią wielowiekowe powiązania między rozwojem matematyki, postęпами cywilizacji i tzw. historią powszechną. Składa się na nią pitagorejskie poczucie mocy rozumu badającego wiedzę pewną (a taka jest przecież tylko matematyka), odrodzeniowy zachwyt nad doskonałością konstrukcji Wszechświata (a wyrazić ją można najlepiej przez matematykę), surowe spojrzenie na kategoryczność następstw zjawisk, na ich wzajemne zdeterminowanie (co beznamiętnie potwierdza matematyka), na układanie się przypadkowych fluktuacji w jednoznaczny bieg zdarzeń (czego też bez matematyki uchwycić niepodobna). O wszechobecności matematyki w naszej kulturze świadczyć może fakt, że jej język pisany jest jednakowo zrozumiały pod każdą szerokością geograficzną, że jej symbole, tak różnie wymawiane, mają dla wszystkich ten sam jednoznaczny sens.

Ale życie praktyczne zaciera ślady wszelkiej kultury, czyniąc nas samotnymi rozbitkami walczącymi o przetrwanie, nie różniącymi się często od naszych uboższych braci – zwierząt. Dlatego o obecność kultury w naszym życiu trzeba walczyć, by, nawet zwyciężywszy w walce o byt, nie stanąć przed pytaniem „po co?”.

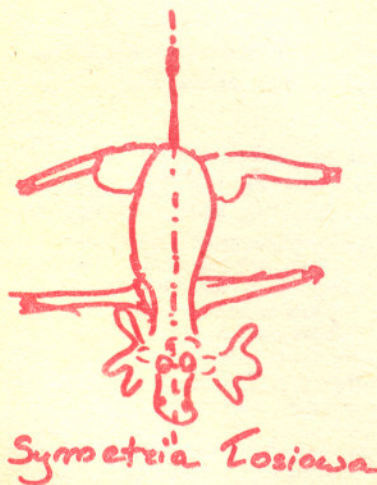
Ten front walki, który jest szczególnie bliski naszej redakcji i, jak mamy nadzieję, naszym Czytelnikom – kultura matematyczna – ma od jakiegoś czasu pewne formy organizacyjne. Dwa lata temu, w grudniu 1987 roku, grupa matematyków, wywodzących się z 11 ośrodków z całej Polski, postanowiła wspólnymi siłami zająć się krzewieniem kultury matematycznej. Dziś jest to Ośrodek Kultury Matematycznej organizujący jednodniowe i dłuższe Szkoły Matematyki Poglądowej, propagujący przez wykłady i słowo-pisane matematykę zrozumiałą i mądrą, uwolnioną od ciasnego gorsetu formalizmów, pozbawioną stresów zdawanych egzaminów.

Działalność naszą od zarania sponsoruje siedleckie środowisko naukowe. O swoim Ośrodku (który jest dzisiaj właściwie tylko *zestrzeleniem myśli w jedno ognisko*) mówimy OKM w Mordach. Otrzymaliśmy bowiem obietnicę, że remontowany obecnie pałac w małej (choć starożytnej) miejscowości podlaskiej Mordy stanie się w przyszłości siedzibą naszego Ośrodka.

A jest nas coraz więcej. I mamy coraz liczniejszych zwolenników. To, że popiera nas Rada Upowszechniania Nauki przy Prezydium PAN, Komitet Nauk Matematycznych czy Polskie Towarzystwo Matematyczne, to zrozumiałe – w końcu to ludzie w podobnej jak my sytuacji. Ale prawdziwie cennego poparcia, bo praktycznego, udzieliło nam środowisko krakowskie, gdzie we wrześniu 1989 roku powstała Filia OKM w Mordach – powstała i zaczęła działać.

Ośrodek podejmuje współpracę z każdym, kto w kulturze matematycznej widzi wartość. Możecie i Wy, Czytelnicy, zorganizować u siebie Dzień Zrozumiałej Matematyki. Piszcie do Ośrodka – nawiążemy współpracę. Zobowiązujemy się udowodnić, że matematyka jest piękna i przejrzysta – są ludzie, którzy inaczej o matematyce wstydzą się mówić. Piszcie pod adresem redakcji *Delty* lub bezpośrednio

Ośrodek Kultury Matematycznej w Mordach  
ul. Nowotki 19/21, 08-110 Siedlce.



Zofia Nowińska

Paweł BŁASIAK

Kiedy byłem małym chłopcem, bardzo lubiłem opowiadania o krasnoludkach. Nie mogłem zgodzić się z tym, że dorośli nieustannie leniuchują, a krasnale muszą za nich pracować. Bardzo mi było żal sympatycznych i niezwykle pracowitych ludzików. Dopiero w szkole zrozumiałem, że wszystkiemu winne są prawa fizyki.

Wszystkie dzieci wierzą, że krasnoludki chętnie zjadają pożywienie wystawiane im na noc przez dobrych ludzi. Podobno w każdej bajce jest odrobina prawdy. W niniejszym artykule przedstawimy naukowe argumenty na temat legendarnej żarłoczości małych ludzików.

Założmy na początku, że krasnoludki są istotami ciepłokrwistymi (zimnokrwiste krasnale, podobne do żab, nie mogłyby przecież pozyskać sympatii małych dzieci). Rozważmy bilans energetyczny istot ciepłokrwistych. Energia dostarczona organizmowi w formie pożywienia jest przeznaczona na podtrzymanie pracy różnych narządów wewnętrznych (np. pracy serca, płuc), na wykonanie pracy mechanicznej oraz na utrzymanie stałej temperatury ciała. Badania biofizyków wykazały, że prawie cała energia dostarczona człowiekowi jest przeznaczona na utrzymanie ciepłokrwistości (kaprys natury czy konieczność? – spróbujcie sami odpowiedzieć na to pytanie). W temperaturze 20°C około 31% ogólnej ilości pozyskanej energii cieplnej jest tracone w drodze konwekcji (unoszone przez będące w ruchu powietrze), 44% ciepła organizm wypromieniowuje do otoczenia, 22% jest zużywane na parowanie z powierzchni skóry.

W prostym i bardzo przybliżonym modelu równowagi energetycznej organizmu założymy, że energia pobrana przez organizm wraz z pożywieniem ( $E_{pob}$ ) jest w całości tracona w formie promieniowania ( $E_{wyp}$ ).

$$(1) \quad E_{pob} = E_{wyp}.$$

Niech  $P$  oznacza energię (pobieraną lub traconą) w jednostce czasu (czyli moc organizmu wyrażoną w kaloriach na dobę lub J/s). Mamy więc

$$(2) \quad P_{pob} = P_{wyp}.$$

Zapotrzebowanie na energię zależy od masy organizmu

$$(3) \quad P_{pob} = Z \cdot m,$$

gdzie  $m$  jest masą organizmu, a  $Z$  współczynnikiem proporcjonalności ( $Z$  może być w ogólności także zależne od masy ciała). Współczynnik  $Z$  oznacza ilość energii pobranej przez organizm w jednostce czasu przypadającą na jednostkę jego masy. Będziemy go dalej nazywać **żarłoczością właściwą** organizmu.

Spróbujemy teraz odpowiedzieć na pytanie: jak żarłoczość właściwa zależy od rozmiarów organizmu? Dla uproszczenia rozważań założymy, że organizm ma kształt kuli. Wówczas

$$(4) \quad P_{pob} = Z(r) \cdot 4\pi r^3 \rho / 3,$$

gdzie:  $r$  – promień kuli,  $\rho$  – średnia gęstość organizmu.

Ciało o powierzchni  $S$  i temperaturze  $T$ , znajdujące się w środowisku o temperaturze  $T_0$  ( $T > T_0$ ), wypromieniowuje w jednostce czasu energię zgodnie ze wzorem

$$(5) \quad P_{wyp} = \alpha S \Delta T.$$

Jeśli  $\Delta T \ll T$ , to współczynnik proporcjonalności  $\alpha$  jest proporcjonalny do  $T^3$ . (Wynika to z prawa promieniowania Stefana-Boltzmann'a,  $P = \sigma(T^4 - T_0^4) = \sigma S(T^2 + T_0^2) \cdot (T + T_0) \cdot (T - T_0) = 4\sigma T^3 \cdot S \cdot \Delta T$  dla  $T \approx T_0$ .) W temperaturze pokojowej  $\alpha \approx 2 \div 5 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$  (w zależności od rodzaju powierzchni ciała). Dla ciała kulistego

$$(6) \quad P_{wyp} = \alpha 4\pi r^2 \Delta T.$$

Podstawiając (4) i (6) do (2) mamy

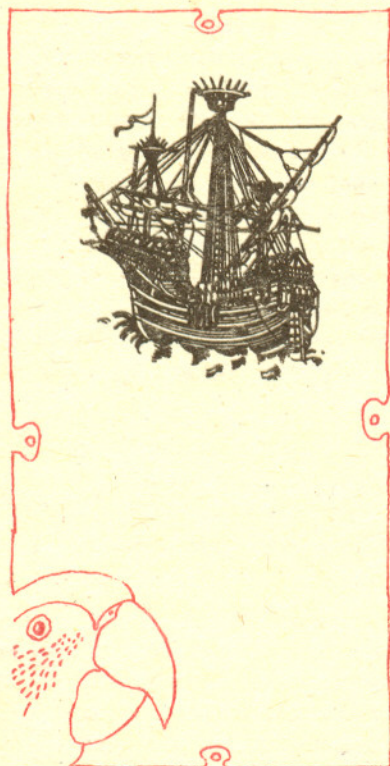
$$(7) \quad Z(r) 4\pi r^3 \rho / 3 = \alpha 4\pi r^2 \Delta T,$$

a stąd interesująca nas żarłoczość właściwa organizmu

$$(8) \quad Z(r) = (3\alpha/\rho)(\Delta T/r),$$

czyli

$$(9) \quad Z(r) \sim \frac{1}{r} \Delta T.$$



## Rozwiązanie zadania M 567.

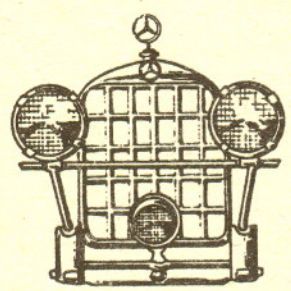
Spośród wszystkich par  $(l, X)$ , gdzie  $l$  jest prostą przechodzącą przez co najmniej dwa punkty zbioru, a  $X$  punktem zbioru nie należącym do  $l$ , wybierzmy taką, dla której odległość z  $X$  do  $l$  jest najmniejsza. Przypuśćmy, że na  $l$  leżą trzy punkty zbioru  $A, B, C$  (w tej kolejności). Wówczas rzut prostopadły punktu  $X$  na  $l$  nie należy do którejś z dwu półprostych, na które prostą  $l$  dzieli punkt  $B$ . Przypuśćmy, że należy do półprostej zawierającej punkt  $A$ . Wtedy kąt  $ABX$  jest rozwarty lub prosty, stąd w trójkącie  $ABX$  bok  $AX$  jest najdłuższy. Ponieważ w każdym trójkącie iloczyn: bok  $\cdot$  wysokość nań opuszczona jest stały, prowadzi to do wniosku, że odległość punktu  $B$  od prostej przechodzącej przez punkty  $A$  i  $X$  jest mniejsza od odległości  $X$  od  $l$ . Sprzeczność!



**Rozwiązanie zadania M 565.**

Ustalmy liczbę naturalną  $N$ .  
Niech  $a_n$  oznacza moc zbioru  $\{(x, w) : 0 < x, w \leq N \text{ i } x^{19} + w^{17} = n\}$ .  
Wówczas liczba rozwiązań równania (\*) wynosi  $\sum a_n^2$ , a liczba rozwiązań równania (\*\*) wynosi  $\sum a_n \cdot a_{n+1}$ .  
Mamy teraz

$$\sum a_n^2 - \sum a_n \cdot a_{n+1} = \frac{1}{2} \sum (a_n^2 - 2a_n a_{n+1} + a_{n+1}^2) \geq 0.$$



**Rozwiązanie zadania M 566.**

Wybermy się w podróż, w trakcie której odwiedzimy wszystkie lotniska (można to zrobić, bo sieć jest spójna). Ustawmy teraz lotniska w ciąg (być może z powtórzeniami) w kolejności ich odwiedzania, włączając weń te lotniska, na których dokonywaliśmy przesiadek. Wyłączmy z eksploatacji to lotnisko, które pojawi się w ciągu dopiero wtedy, kiedy wszystkie inne w nim wystąpiły. Dowolne dwa różne od niego lotniska znalazły się na trasie naszej podróży, zanim dolecieliśmy do lotniska wyłączonego, więc nie przesiadaliśmy się na nim w trakcie przelotu z jednego na drugie.

Dla stałej różnicy temperatur (ciała i otoczenia) żarłoczność właściwa jest hiperboliczną funkcją rozmiaru organizmu (promienia). Im organizm jest większy, tym mniej musi spożywać pożywienia na jednostkę swojej masy, natomiast małe organizmy cechuje duża żarłoczność właściwa.

Nasze wnioski potwierdzają się w przyrodzie. Np. ilość pożywienia przypadająca na 1 kg masy słońa jest około 30 razy mniejsza niż u polnej myszki. Słoń może sobie pozwolić na dłuższą przerwę w jedzeniu, natomiast myszka musi ciągle uganiać się za pożywieniem. Myszki etruskie, ważące około 1,5 g, muszą zjadać w ciągu doby około 3 g pożywienia. Parogodzinna przerwa w jedzeniu może być dla nich zgubna.

Małe kolibry żyjące w Południowej Ameryce, ważące około 2 g, są praktycznie cały czas zajęte zdobywaniem i konsumowaniem pożywienia. Dłuższą przerwę nocną na sen mogą przeżyć tylko dzięki temu, że w nocy temperatura ich ciała mocno się obniża (cóż za wspaniały wynalazek przyrody!).

Już w 1847 r. Carl Bergman zauważył, że w zimnym, surowym klimacie zwierzęta są większe niż przedstawiciele tych samych gatunków czy rodzajów, żyjących w cieplejszych stronach. Np. czaszki dzików z południowej Hiszpanii osiągają 32 cm długości, z Polski około 41 cm, z Białorusi 46 cm, natomiast na Syberii spotyka się zwierzęta o długości czaszki 56 cm.

Średnia masa ciała mieszkańców Finlandii wynosi około 70 kg, Amerykanów zamieszkujących południowe stany – 64 kg, a mieszkańców tropikalnego Wietnamu – 50 kg. Im klimat chłodniejszy, tym większa wartość  $\Delta T$  we wzorze (8), a tym samym większa wartość  $r$  (przy założeniu tej samej żarłoczności właściwej).

Aby nie popaść w zbytnią zarozumiałość, należy podkreślić, że naszego prostego modelu nie należy traktować bezkrytycznie. Wiadomo bowiem, że wzrost i masa ciała ludności zamieszkującej w jakimś obszarze zależą nie tylko od warunków klimatycznych, ale także od czynników genetycznych i społeczno-ekonomicznych. Faktem jest jednak, że zwierzęta hodowane za młodu w temperaturze około  $+6^\circ\text{C}$  wykazywały w eksperymentach laboratoryjnych znacznie większe wymiary niż ich pobratymcy hodowani w warunkach cieplarnianych. Powyższy fakt został wykorzystany w hodowli kurcząt na skalę przemysłową.

Biolodzy przytaczają w podręcznikach tzw. regułę Allena. Mówi ona o tym, że zwierzęta żyjące w krajach zimnych mają mniejszą powierzchnię ciała od ich pobratymców żyjących w krajach cieplejszych. Zwierzęta polarne mają mniejsze uszy, krótsze ogony, pysk i łapy krótsze i grubsze, a nawet krótsze szyje. Np. północny zając bielak (*Lepus timidus*) ma uszy krótsze od naszego szaraka (*Lepus europaeus*). Podręczniki zoologii pełne są przykładów potwierdzających regułę Bergmana i Allena.

Zanim przejdziemy do krasnoludków, oszacujemy żarłoczność właściwą człowieka. Człowiek o masie około 80 kg spożywa w ciągu doby około 1 kg pożywienia dającego około 12 MJ energii. Żarłoczność właściwa człowieka wynosi więc  $12\,000\,000 / (24 \cdot 3600 \cdot 80) \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{s})$ , czyli około 1,75 W/kg.

Teraz zajmijmy się naszym krasnoludkiem. Załóżmy, że ma on kształt prostopadłościanu o wymiarach  $0,5 \times 1 \times 2 \text{ mm}$ . Jeśli szanowni Czytelnicy hodują inne krasnoludki, wówczas rachunki należy nieco zmodyfikować. Objętość naszego krasnala wynosi  $10^{-9} \text{ m}^3$ , a powierzchnia  $7 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$ . Moc wypromieniowaną obliczymy ze wzoru (5) zakładając, że  $\Delta T$  wynosi  $20^\circ\text{C}$ , a  $\alpha = 4 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ . Otrzymujemy wartość około  $6 \cdot 10^{-4} \text{ W}$ . Zakładając, że średnia gęstość ciała krasnala jest równa gęstości wody, obliczymy jego masę, a następnie żarłoczność właściwą (tak jak wcześniej zakładamy, że cała energia uzyskana w formie pożywienia jest wypromieniowana). Żarłoczność właściwa krasnoludka wyniesie więc  $(6 \cdot 10^{-4} \text{ W}) / (10^{-6} \text{ kg})$ , czyli 600 W/kg.

Żarłoczność właściwa naszego krasnoludka jest więc ponad 300 razy większa od żarłoczności właściwej człowieka!

Człowiek zjada w ciągu doby pożywienie o masie równej 1/80 masy swego ciała. Ponieważ żarłoczność naszego krasnala jest ponad 300 razy większa od żarłoczności człowieka, musi on zjadać w ciągu doby pożywienie o masie równej  $(1/80) \cdot 300$ , czyli około 4 razy większej od masy jego ciała! Jeśli krasnale są takie małe, jak w bajkach i ciepłokrwiste (tak jak tego chcieliśmy), to mają ogromnie trudne życie, zwłaszcza w dobie kryzysu ekonomicznego.

Pamiętajcie więc o dokarmianiu krasnoludków.

# Modularne gwiazdki i bąbelki

Michał KWIECIŃSKI

Pierścień liczb całkowitych modulo  $m$  (oznaczany przez  $Z_m$ ) jest dobrze znany każdemu matematykowi. Pojawia się na początku większości podręczników algebry wyższej. Oto krótkie wprowadzenie dla niewtajemniczonych:

$Z_m$  możemy zdefiniować jako zbiór pierwszych  $m$  nieujemnych liczb całkowitych  $\{0, 1, 2, \dots, m-2, m-1\}$ . Liczby te możemy dodawać i mnożyć tak samo jak zwykle liczby całkowite, z tym że jeśli wynik działania przekroczy  $m-1$ , to „sprowadzamy go z powrotem” do  $Z_m$  biorąc jego resztę z dzielenia przez  $m$ . Łatwo sprawdzić, że zbiór  $Z_m$  z tak określonymi działaniami tworzy pierścień (to znaczy modularne dodawanie i odejmowanie mają własności łączności, przemienności, rozdzielności itd.).

Ładnym i często podawanym przykładem dodawania „modulo  $m$ ” jest dodawanie godzin na dwunastogodzinnym zegarze. Aby otrzymać pełną analogię z dodawaniem w  $Z_{12}$ , powinniśmy zastąpić godzinę dwunastą godziną 0. Tarcza zegara będzie dla naszych celów bardzo istotna jako punkt wyjścia do rysowania wykresów funkcji modularnych.

Funkcję modularną  $f: Z_m \rightarrow Z_m$  otrzymuje się z funkcji o argumentach i wartościach całkowitych  $F: Z \rightarrow Z$  podobnie jak modularne dodawanie i mnożenie, tzn. jeśli wartość  $F(n)$  przekroczy  $m-1$ , to zdefiniujemy  $f(n)$  jako resztę z dzielenia  $F(n)$  przez  $m$ .

Rozważmy funkcję  $n \mapsto n + 4$  w  $Z_{12}$ . Moglibyśmy narysować jej wykres używając zwykłego prostokątnego układu współrzędnych o osiach  $x, y$ . Wykres ten składałby się po prostu z dwunastu współliniowych punktów. Wprowadzimy teraz inną metodę „ilustrowania” funkcji modularnych. Rysujemy tarczę zegara (tego poprawionego: 0 zamiast 12) i łączymy odcinkami każdą godzinę  $n$  ( $n = 0, 1, \dots, 11$ ) z godziną  $n+4$  (rys. 1). Nasz „zegarowy” wykres funkcji jest gotowy.

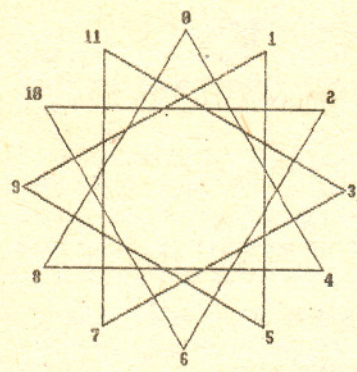
Można ten sposób rysowania wykresów uogólnić i rysować wykresy w  $Z_m$  dla dowolnego  $m$ . Wtedy używać będziemy tarczy  $m$ -godzinnej zegara (zamiast zwykłego 12-godzinnego) jako „układu współrzędnych”. Możemy teraz przyjrzeć się wykresom różnych funkcji dla różnych wartości  $m$ . To zadanie może nam ułatwić mikrokomputer (rysunki zamieszczone w tym artykule zostały wykonane na AMSTRADZIE CPC664), lecz kartka papieru i ołówek wystarczą w zupełności.

Najpierw przyjrzyjmy się funkcjom typu  $n \mapsto n + p$ , gdzie  $p$  jest liczbą naturalną. Ten prosty wzór generuje pokazną rodzinę gwiazd. Zachęcamy Czytelnika do badania ich własności (geometria przeplata się tu z teorią liczb). Oto kilka problemów do rozwiązania:

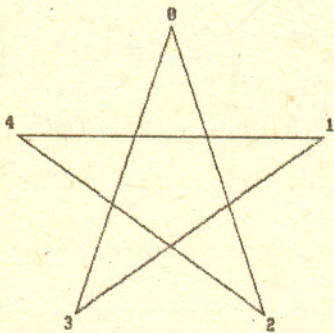
- 1) Kiedy dwie różne funkcje mają ten sam wykres (np.  $n \mapsto n + 2$  i  $n \mapsto n + 3$  w  $Z_5$  - Gwiazda Pitagorejska - rys. 2)?
- 2) Kiedy otrzymujemy gwiazdę „o obwodzie zamkniętym”, a kiedy gwiazda składa się z kilku obwodów zamkniętych? Sformułowanie: gwiazda „o obwodzie zamkniętym” nie wymaga chyba precyzyjnej definicji: jest taką np. gwiazdą  $n \mapsto n + 2$  w  $Z_5$ , zaś Gwiazda Dawida, czyli  $n \mapsto n + 2$  w  $Z_6$  taką nie jest (rys. 2, 3).
- 3) Ile jest „gwiazd o obwodzie zamkniętym” w  $Z_m$  dla ustalonego  $m$ ?

Badając gwiazdy zauważamy, że ich kształt zależy zarówno od  $p$ , jak i od  $m$ . Gdy przy ustalonym  $p$  będziemy zwiększać  $m$ , to wykres funkcji  $n \mapsto n + p$  będzie „zmierzał” do okręgu.

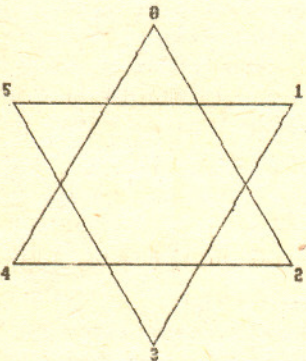
Przyjrzyjmy się teraz wykresowi funkcji  $n \mapsto 2n$  dla różnych wartości  $m$ . Dla małych  $m$  widzimy pewną regularność w tym wykresie, który gwiazdą już nie jest (rys. 4).



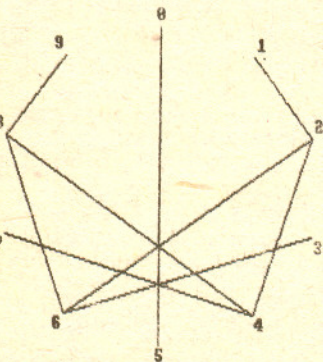
Rys. 1. Na zmodyfikowanej tarczy zegara łączymy każdą godzinę  $n$  z godziną  $n + 4$ . W ten sposób powstaje „zegarowy wykres” funkcji  $n \mapsto n + 4$  w  $Z_{12}$ .



Rys. 2. Gwiazda Pitagorejska jest zarówno wykresem funkcji  $n \mapsto n + 2$ , jak i  $n \mapsto n + 3$  w  $Z_5$ . Jest to gwiazda „o obwodzie zamkniętym”.

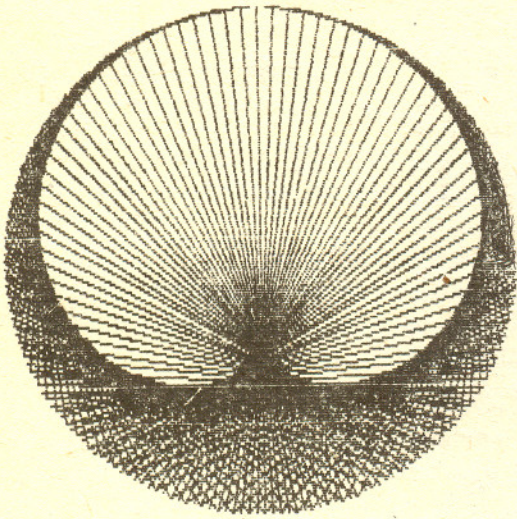


Rys. 3. Gwiazda Dawida  $n \mapsto n + 2$  w  $Z_6$  nie jest gwiazdą „o obwodzie zamkniętym”.



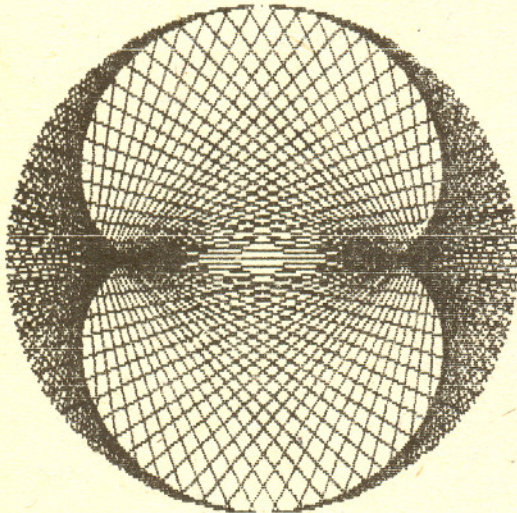
Rys. 4. Zegarowy wykres funkcji  $n \mapsto 2n$  w  $Z_{10}$ .

Gdy przechodzimy do większych  $m$ , pojawia się nam kształt bąbelka (rys. 5 ilustruje przypadek  $m = 200$ ). Kształt ten wydaje się nie zmieniać dla dalszych wartości  $m$ .



Rys. 5. Zegarowy wykres funkcji  $n \mapsto 2n$  w  $Z_{200}$ . Na wykresach tej funkcji w  $Z_m$  dla dużych  $m$  pojawia się „krzywa bąbelkowa”.

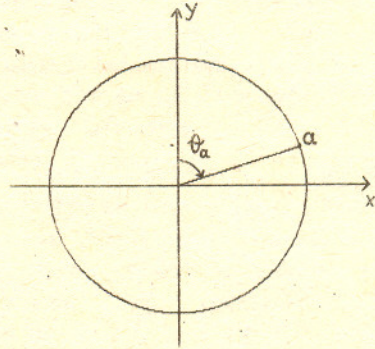
Co się będzie działo dla  $n \mapsto 3n$ ? Znowu pojawia się pewien kształt, który makroskopowo wygląda tak samo dla dużych  $m$ . Jednakże w tym przypadku widzimy dwa bąbelki zamiast jednego (rys. 6). Dalsze eksperymentowanie sugeruje hipotezę, że funkcja typu  $n \mapsto kn$ , gdzie  $k$  jest liczbą naturalną, ma  $(k-1)$ -bąbelkowy wykres (rys. 7 ilustruje przypadek  $k = 4$ ).



Rys. 6. Wykres  $n \mapsto 3n$  w  $Z_{200}$ . Tym razem widzimy dwa bąbelki.

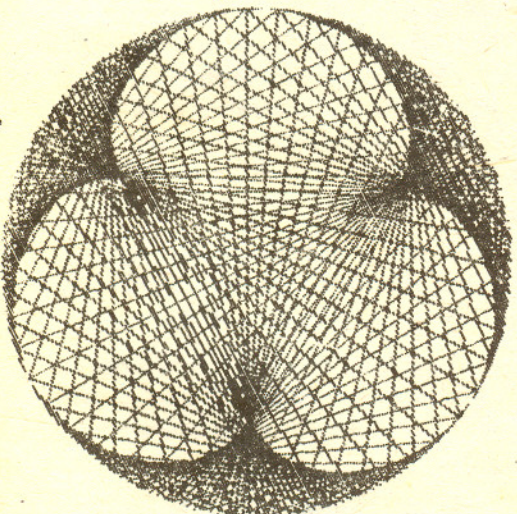
Badanie modularnych bąbelków będziemy kontynuować używając odtąd metod analitycznych. Spróbujemy odpowiedzieć na pytanie, czym właściwie jest „krzywa bąbelkowa”, którą widzimy na wykresie funkcji  $n \mapsto kn$ .

Niezmienniczość względem  $m$  wykresów funkcji  $n \mapsto kn$  sugeruje „uciąglenie” procesu ich rysowania. Tarczę naszego  $m$ -godzinnego zegara możemy traktować jak okrąg jednostkowy na płaszczyźnie. Każdemu punktowi  $a$  tego okręgu przyporządkujemy kąt  $\theta_a$ .



Rys. 8.

Aby otrzymać zgodność z naszymi zegarowymi wykresami, płaszczyznę orientujemy zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara (a nie przeciwnie, jak nakazuje matematykom tradycja). Łatwo zauważyć, że niezależnie od wartości  $m$ , pomnożenie godziny  $n$  ( $n = 0, 1, \dots, m-1$ ) przez  $k$  odpowiada pomnożeniu przyporządkowanego jej kąta  $\theta$  przez  $k$ . (Uwaga: samo przyporządkowanie kąta zależy od  $m$ .) Tak więc połączenie odcinkiem godziny  $n$  z godziną  $kn$  jest równoważne połączeniu odcinkiem punktu odpowiadającego kątowi  $\theta$  z punktem odpowiadającym kątowi  $k\theta$  (nie będzie nam przeszkadzać, jeśli  $k\theta$  przekroczy  $2\pi$ ). Możemy sobie wyobrazić, że każdy punkt  $a$  okręgu jednostkowego łączymy odcinkiem z punktem odpowiadającym kątowi  $k\theta_a$ . Powstały w ten sposób wykres zawierałby wszystkie wykresy  $n \mapsto kn$  (dla wszystkich  $m$  przy ustalonym  $k$ ).



Rys. 7.  $n \mapsto 4n$  w  $Z_{200}$ , 3 bąbelki. Hipoteza:  $n \mapsto kn$  daje  $k-1$  bąbelków.

Wróćmy teraz do naszego głównego pytania. Widzimy, iż nasza krzywa bąbelkowa to raczej łamana wyznaczona przez punkty przecięcia odcinków z sąsiadującymi odcinkami. Przy zwiększaniu  $m$  łamana ta się wygładza. Znaczący to, że gdy sąsiadujące odcinki zbliżają się do siebie, łamane wyznaczone przez ich punkty przecięcia coraz dokładniej przybliżają nam pewną idealną krzywą. Tą idealną krzywą jest zbiór „granicznych punktów przecięcia”. Pokażemy, że gdy kąt  $\varphi$  zmierza do ustalonego kąta  $\theta$ , to punkt przecięcia odpowiadających im odcinków  $S_\varphi$  (odc. łączący  $\varphi$  z  $k\varphi$ ) i  $S_\theta$  (odc. łączący  $\theta$  z  $k\theta$ ) zmierza do pewnego punktu płaszczyzny  $P(\theta)$ , który nazwalibyśmy granicznym punktem przecięcia.

Współrzędne prostokątne  $(x, y) = (x(\varphi, \theta), y(\varphi, \theta))$  punktu przecięcia odcinków  $S_\varphi$  i  $S_\theta$  można obliczyć z układu równań:

$$\begin{cases} x(\cos \varphi - \cos k\varphi) - y(\sin \varphi - \sin k\varphi) = \sin((k-1)\varphi) \\ x(\cos \theta - \cos k\theta) - y(\sin \theta - \sin k\theta) = \sin((k-1)\theta) \end{cases}$$

Współrzędne punktu  $P(\theta)$  są granicami  $x$  i  $y$ , przy  $\varphi \rightarrow \theta$ .

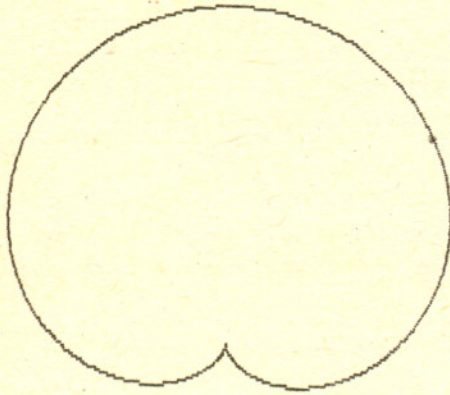
Względnie prosty, lecz trochę przydługi rachunek (reguła de l'Hospitala i tożsamości trygonometryczne) pokazuje nam, że te granice istnieją i wynoszą:

$$\begin{cases} x_P = (k \sin \theta + \sin k\theta)/(k+1) \\ y_P = (k \cos \theta + \cos k\theta)/(k+1) \end{cases}$$

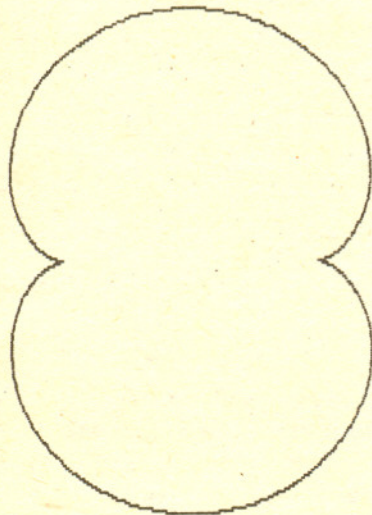
Powyższe wzory to równanie parametryczne naszej krzywej bąbelkowej, dla parametru  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

Wykreślając krzywe odpowiadające różnym wartościom  $k$  zauważamy, iż rzeczywiście zgadzają się z tym, co widzimy na zegarowych wykresach (rys. 9 - 11 ilustrują przypadki  $k = 2, 3, 4$ ).

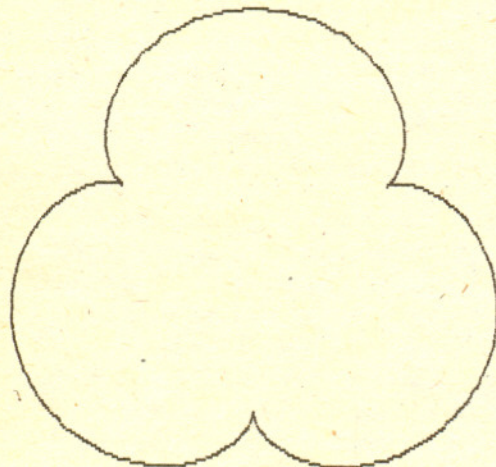
Otrzymane równanie parametryczne można zinterpretować w następujący sposób: Krzywa bąbelkowa jest zakresłana przez punkt  $P$  obracający się zgodnie z ruchem wskazówek zegara dookoła punktu  $Q$  (z prędkością kątową  $k$  po okręgu o promieniu  $1/(k+1)$ ), przy czym punkt  $Q$  obraca się dookoła stacjonarnego punktu  $O$  (z prędkością kątową 1, po okręgu o promieniu  $k/(k+1)$ ) (rys. 12). Ta obserwacja klasyfikuje krzywe bąbelkowe jako krzywe epicykliczne.



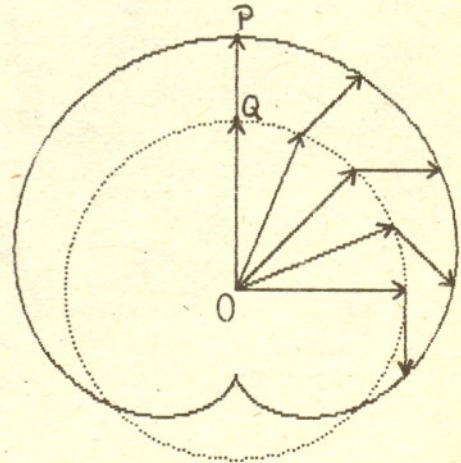
Rys. 9. Krzywa bąbelkowa dla  $k = 2$ , wykreslona na podstawie otrzymanego równania parametrycznego.



Rys. 10. Krzywa bąbelkowa dla  $k = 3$ .



Rys. 11. Krzywa bąbelkowa dla  $k = 4$ .



Rys. 12. Punkt  $P$  porusza się dookoła punktu  $Q$  (z prędkością kątową 2, po okręgu o promieniu  $1/3$ ); sam punkt  $Q$  porusza się dookoła stacjonarnego punktu  $O$  (z prędkością kątową 1, po okręgu o promieniu  $2/3$ ). W ten sposób punkt  $P$  zakresła krzywą bąbelkową dla  $k = 2$ .

Możemy także podać intuicyjno-teoriolizbowe uzasadnienie faktu, że liczba bąbelków wynosi  $k - 1$ . Zauważmy, że każdemu bąbelkowi odpowiada jeden wektor  $S_\theta$  mający ten sam kierunek i zwrot, co promień okręgu jednostkowego. Ma to miejsce, gdy  $(k\theta - \theta - \pi) = 2q\pi$ , dla pewnej liczby naturalnej  $q$ , co jest równoważne temu, że  $\theta = \pi/(k-1) + q2\pi/(k-1)$ . Z tego równania widzimy, że otrzymamy  $k - 1$  różnych wartości  $\theta$  dla  $q = 0, \dots, (k-2)$ .

Możemy teraz zapytać, jak wygląda wykres funkcji liniowej  $n \mapsto kn + p$ . Łatwo jest uogólnić otrzymane rezultaty i pokazać, że „zmierza” on do normalnej krzywej bąbelkowej, gdy  $m \rightarrow \infty$ .

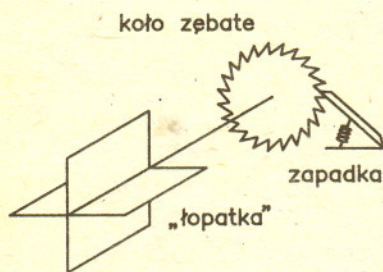
Na zakończenie zauważmy analogię między wykresem zegarowym i kołem jednostkowym na płaszczyźnie zespolonej. Łączenie godzin z ich wielokrotnościami odpowiada łączeniu liczb zespolonych z ich potęgami.

W tym artykule badaliśmy wykresy zegarowe funkcji liniowych. Jak wyglądają wykresy zegarowe innych funkcji? Ten problem pozostawiamy Czytelnikowi.

Przypominam, że w tym artykule opisałem zasadę działania filtru przepuszczającego światło tylko w jedną stronę twierdząc, że jego istnienie przeczy II zasadzie termodynamiki. Filtr składał się z dwóch polaryzatorów o kierunkach polaryzacji tworzących kąt  $45^\circ$  i umieszczonego między nimi osrodka w polu magnetycznym obracającego polaryzację przepuszczanego przez siebie światła właśnie o taki kąt.

**Zdolność emisyjna:** stosunek natężenia promieniowania wysyłanego przez dane ciało do natężenia promieniowania wysyłanego przez ciało doskonale czarne w tych samych warunkach.

**Zdolność absorpcyjna:** stosunek energii zaabsorbowanej do całkowitej energii promieniowania padającego na ciało.



Z przyjemnością stwierdzam, że II zasada termodynamiki, zaatakowana przeze mnie w niewybredny sposób w numerze 1/1989 *Delty*, doczekała się obrońców.

Najtrafniej ujął istotę sprawy pan Adam Lipowski z Poznania. Oddaję mu więc głos: „Jak wiadomo, działanie filtru polaryzacyjnego opiera się na zjawisku selektywnego pochłaniania światła. Polaryzator 1 pochłonie więc padającą na niego wiązkę światła (gdyż nie może jej przepuścić). Przy długotrwałym działaniu takiego urządzenia polaryzator 1 podgrzeje się do bardzo wysokiej temperatury, co spowoduje utratę jego własności filtracyjnych – będzie przepuszczał światło, a tym samym energię, bez względu na rodzaj polaryzacji. Nasz układ osiągnie równowagę termiczną. Powyższe perpetuum mobile jest więc urządzeniem krótkodziałającym.”

Gratulując prawidłowej odpowiedzi chciałbym dodać parę słów komentarza.

1. Oprócz polaryzatorów, które pochłaniają światło o niepożądanym polaryzacji, istnieją takie, które je odbijają. Oczywiście, jeżeli wiązka odbita miałaby być pochłonięta przez obudowę polaryzatora, rozwiązanie powyżej podane w pełni się stosuje. Interesujące jest rozważenie przypadku, kiedy polaryzator odbija z powrotem światło o niepożądanym polaryzacji. Wtedy (zechciej, Czytelniku, sprawdzić) wystąpią wielokrotne odbicia między dwoma polaryzatorami (wewnątrz naszego filtru). Sumując natężenia wszystkich wiązek (szereg geometryczny) zauważymy, że nasz filtr nie działa w sposób przeze mnie opisany – będzie przepuszczał w każdą stronę tyle samo światła.

2. Pozostając przy rozważanym przez p. Lipowskiego polaryzatorze pochłaniającym, interesujące może być zastanowienie się, dlaczego przestanie on działać w wysokiej temperaturze. Pamiętajmy, że wcale nie musi on ulec zniszczeniu (zwłaszcza w doświadczeniu myślowym). Nie wiemy, jaka była temperatura naszych dwóch ciał – może być, na przykład, pokojowa, a nasz filtr może działać w obszarze podczerwieni. Możemy jednak uratować zarówno nasz filtr, jak i II zasadę termodynamiki przypominając sobie prawo Kirchhoffa: **Zdolność emisyjna jest równa zdolności absorpcyjnej.**

A więc po nagraniu polaryzator zacznie emitować światło właśnie o takiej polaryzacji, którą pochłania. Można to widzieć jako „utratę własności filtracyjnych”, jak to ujął p. Lipowski. Dalszy ciąg listu brzmi: „Jeszcze bardziej użyteczne urządzenie zaproponował R.P. Feynman w książce *Feynmana wykłady z fizyki*.

W wyniku chaotycznych ruchów cząsteczek powietrza na łopatkę działa fluktuująca siła. Zapadka wybiera tylko ukierunkowane fluktuacje, co powoduje, że urządzenie może się obracać – mamy również perpetuum mobile II rodzaju. Niestety, dokładniejsza analiza pokazuje, że po pewnym czasie sprężyna musi się rozgrzać do takiej temperatury, że średni czas otwartej i zamkniętej zapadki będą sobie równe – urządzenie przestanie obracać się (w jedną stronę).”

Zachęcam do szczegółowego zapoznania się z tym fragmentem podręcznika Feynmana (PWN 1969, tom 1, str. 307). Bardzo ciekawe! Autorowi listu zgodnie z obietnicą wysyłamy książkę.

A oto odpowiedzi Autorom innych listów:

Przemysław Chełminiak, Piła

Nie chodziło mi o dowód słuszności II zasady termodynamiki, ale o konkretne pokazanie, w którym miejscu moje rozumowanie było błędne.

Stanisław Gorczyński, Sokole Pole

Jak Pan zauważył, nie należę do osób mających nadzieję na zbudowanie perpetuum mobile. W sprawie Pana konkretnego pomysłu nie mam zdania, bo nie zrozumiałem jego zasady z Pana listu.



# Mała delta

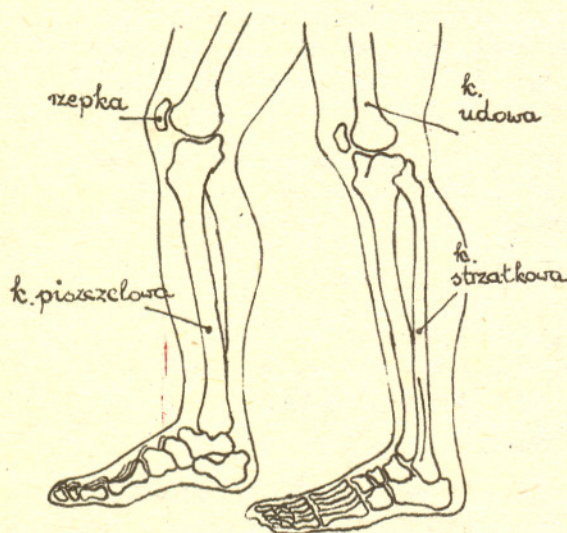
## Łamanie w kościach

Gdy spadamy lub skaczemy z pewnej wysokości na nogi, kości nóg są poddane dużym siłom. Najbardziej wrażliwym miejscem na złamanie jest kość piszczelowa w miejscu największego zwężenia, zaraz nad kostką. Kość piszczelowa ulegnie złamaniu, jeśli siła ściskająca (taka, jaka powstaje przy skoku) przekroczy około 50 000 N. Jeśli spadniemy na obie nogi, to kości mogą wytrzymać siłę około  $10^5$  N. Siła ta jest około 130 razy większa od ciężaru człowieka o masie 75 kg.

W jaki sposób należy wylądować po skoku, aby nie połamać sobie nóg? Z doświadczenia wiemy, że lądowanie na „sztywne nogi” jest niebezpieczne. Lepiej w momencie lądowania ugiąć kolana. Spróbujmy zobaczyć dlaczego.

Załóżmy, że skok (spadek) następuje z wysokości  $H$ . W polu ciężkości ciało spada ze stałym przyspieszeniem  $g$ . Jeżeli prędkość początkowa wynosi zero, to ciało spadając z wysokości  $H$  osiągnie prędkość końcową

$$v = \sqrt{2gH}.$$



Ciało spadając musi wyhamować. Przyjmując, że wyhamowanie zachodzi na odcinku o długości  $h$  ze średnim stałym opóźnieniem  $a$  otrzymujemy

$$v = \sqrt{2ah},$$

a więc

$$a = g \frac{H}{h}.$$

Stąd siła wywierana na hamujące ciało (więc i na kości) musi być równa

$$F = ma = mg \frac{H}{h} = G \frac{H}{h},$$

gdzie przez  $G$  oznaczyliśmy ciężar spadającego ciała. Zobaczmy więc, jaka jest maksymalna wysokość, z jakiej możemy bezpiecznie skoczyć na „sztywne nogi”. W tym wypadku droga hamowania jest bardzo krótka, około 1 cm, to jest o tyle ugnie się skóra pod piętami. Pamiętając, że maksymalna siła może być nie większa niż 130 razy ciężar ciała, otrzymujemy

$$H = 130 \cdot 1 \text{ cm} = 1,3 \text{ m}.$$

A więc upadek z niewielkiej wysokości może okazać się fatalny.

Ugięcie kolan w momencie lądowania zwiększa  $h$ , co powoduje zmniejszenie  $a$  i  $F$ . Maksymalne ugięcie kolan i pochylenie się w czasie lądowania może wydłużyć  $h$  do około 60 cm. Jeśli wstawimy  $h = 60$  cm do powyższego wzoru, to otrzymamy

$$H = 130 \cdot 60 \text{ cm} = 78 \text{ m} !!$$

Każdy jednak wie, że spadek z takiej wysokości (nawet z ugięciem kolan) jest katastrofalny. Wytłumaczenie tego jest proste. Siły hamujące ciało są wywierane nie tylko na kości, ale i na mięśnie, błony itp., które mogą wytrzymać maksymalnie siłę równą około 20 razy ciężar ciała. Oznacza to, że maksymalna wysokość bezpiecznego skoku wynosi około 4 m. Skok z większej wysokości wymaga już miękkiego podłoża, które pozwoli na odpowiednie wydłużenie drogi lądowania.

Małą Deltę przygotował Jan KALINOWSKI

Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych kryje wiele niespodzianek.

Okrag o srodku w punkcie (0,0) i promieniu  $R$  to zbior punktow  $(R \cos \varphi, R \sin \varphi)$ , gdzie  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Traktujac wsporzędne  $x$  i  $y$  punktow okregu jako funkcje zmiennej  $\varphi$  i różniczkujac otrzymujemy:

$$\begin{aligned} x'(\varphi) &= -R \sin \varphi = -y(\varphi), \\ y'(\varphi) &= R \cos \varphi = x(\varphi). \end{aligned}$$

Jeśli chcemy narysować rozwiązanie tego układu równań na ekranie komputera, to najprościej zamienić równania różniczkowe na równania różnicowe

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - h y_n, \\ y_{n+1} &= y_n + h x_n, \end{aligned}$$

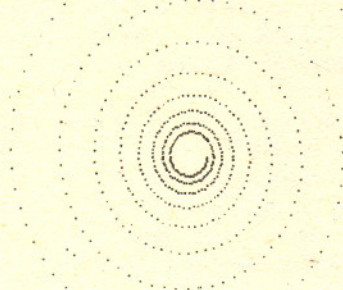
przy warunku początkowym  $x_0 = R$  i  $y_0 = 0$ , a następnie rysować otrzymane punkty.

Na rysunku 1 widzimy wynik dla kroku  $h = 0,1$ . Niezupełnie to, co chcieliśmy. Dla  $h = 0,01$  niewiele lepiej - rysunek 2. Wystarczy jednak maleńka zmiana

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - h y_n, \\ y_{n+1} &= y_n + h x_{n+1} \end{aligned}$$

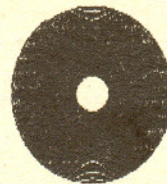
i wynik jest idealny - rysunek 3.

liczba obrotów 10



Rys. 1

liczba obrotów 50



Rys. 2

liczba obrotów 50



Rys. 3

Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego

## KORESPONDENCYJNY KLUB FIZYKÓW

*Drodzy Członkowie i Sympatycy Klubu!*  
Przypominamy, że co miesiąc przyznajemy nagrodę książkową dla autora najciekawiej opracowanego rozwiązania postawionych zagadnień. A oto nowa seria propozycji:

1. Zbadaj, jak zależy wysychanie tkaniny od wilgotności względnej powietrza, od temperatury otoczenia i od ruchów powietrza. W tym celu wybierz „wzorcowy” kawałek płótna, np. 1 dcm<sup>2</sup> starego prześcieradła i badaj zależność czasu wysychania od różnych czynników.

W tym prostym, a praktycznym doświadczeniu możesz wykazać się dużą pomysłowością i naukowym podejściem do zagadnienia. Jest jedno „ale”. W jaki sposób wyznaczyć wilgotność powietrza? W tym celu musimy zbudować urządzenie do pomiaru wilgotności. Będzie to tak zwany psychrometr (inaczej: higrometr).

Tablica psychrometryczna względnej wilgotności powietrza w %

$t_s$ (°C)	$t_s - t_m$ (°C)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	100	88	76	65	54	44	34	24	14	4
12	100	89	78	68	57	48	38	29	20	11
14	100	90	79	70	60	51	42	33	25	17
16	100	90	81	71	62	54	45	37	30	22
18	100	91	82	73	64	56	48	41	34	26
20	100	91	83	74	66	59	51	44	37	30
22	100	92	83	76	68	61	54	47	40	34
24	100	92	84	77	69	62	56	49	43	37
26	100	92	85	78	71	64	58	50	45	40
28	100	93	85	78	72	65	59	53	48	42
30	100	93	86	79	73	67	61	55	50	44

2. Budujemy psychrometr.

Najpierw definicja wilgotności: *Wilgotność względna  $\phi$  (może być wyrażona w procentach) jest to stosunek obecnej w danej temperaturze masy pary wodnej  $f$  do masy pary wodnej  $f_0$ , która byłaby obecna, gdyby para wodna przy tej temperaturze była nasycona  $\phi = f/f_0$ .*

Do budowy psychrometru wykorzystamy zjawisko ochładzania przez parowanie mokrej powierzchni. Postaramy się o dwa jednakowe termometry pokojowe. Bańkę jednego z nich owijamy tkaniną (może to być jedwab, batyst, itp.), której koniec zanurzony jest w naczyniu z wodą. W ten sposób bańka tego termometru będzie stale wilgotna. Termometr „mokry” pokaże zawsze niższą temperaturę (chłodzenie wynikające z parowania) niż termometr „suchy”. Byłoby dobrze, gdyby termometry znajdowały się stale w strumieniu powietrza, na przykład w pobliżu wentylatora, aby w ich otoczenie napływało stale powietrze z badanego obszaru. Jeżeli dopuścimy, aby powietrze było stojące, to, oczywiście, wilgotność w pobliżu mokrego termometru wzrośnie i zafalszuje wyniki. Gdy ustalą się wskazania mokrego termometru, należy odczytać wskazania obu termometrów  $t_{s(uchy)}$ ,  $t_{m(okry)}$  i z zamieszczonej tabelki odczytać względną wilgotność powietrza. (Tak wyznaczona wilgotność jest obarczona pewnym niewielkim błędem, ponieważ nie uwzględniamy panującego ciśnienia atmosferycznego.)

Redaguje doc. dr Tomasz HOFMOKL

Listy prosimy przysyłać pod adresem:  
Korespondencyjny Klub Fizyków  
Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego  
ul. Hoża 69, 00-681 Warszawa.



# Czy bukmacher może przyjmować zakłady od samego siebie?

Prof. dr Bolesław KOPOCIŃSKI

## Rozwiązanie zadania F 284.

Strumień magnetyczny  $\Phi$  przenikający przez powierzchnię otoczoną konturem nadprzewodzącym jest stały, ponieważ siła elektromotoryczna indukcji

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = RI = 0, \text{ (bowiem } R = 0\text{).}$$

Przy spadaniu ramki strumień przenikający ją wynosi

$$\Phi = a^2 B_0 + a^2 \alpha z + LI,$$

ale ponieważ  $\Phi = \text{const}$ , więc

$$LI = -\alpha z a^2,$$

czyli

$$I = -\frac{\alpha z a^2}{L}.$$

Siła wypadkowa działająca na ramkę z prądem  $I$  wynosi

$$F = a^2 \alpha I = -\frac{a^4 \alpha^2 z}{L}$$

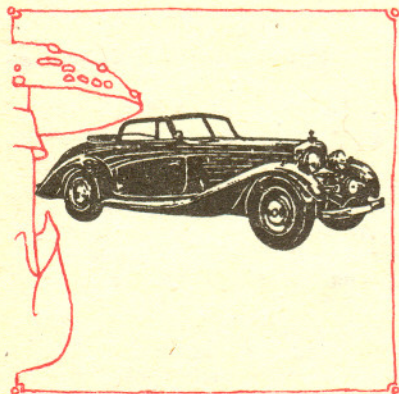
i skierowana jest wzdłuż osi  $z$ .

Równanie ruchu ramki

$$m\ddot{z} = -mg - \frac{a^4 \alpha^2 z}{L}.$$

Ruch będzie podobny do ruchu masy zawieszanej na sprężynie w polu grawitacyjnym. Ramka będzie wykonywać drgania harmoniczne

o częstości  $\omega = \frac{a^2 \alpha}{\sqrt{Lm}}$  wokół położenia równowagi  $z_0 = -\frac{mgL}{a^4 \alpha^2}$ .



## Rozwiązanie zadania F 285.

Indukcja  $B$  pola magnetycznego wewnątrz walca jest równa zero, na zewnątrz, w pobliżu powierzchni wynosi  $B = \mu_0 I / (2\pi R)$ . Ciśnienie wywierane przez pole magnetyczne, jakie działa na ten walec, jest równe

$$p_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^2}.$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymujemy  $p_m \cong 6,4 \times 10^4 \text{ N/m}^2$ . A więc w naszym przypadku  $p_m < p$  ( $p$  - ciśnienie wewnętrzne w plazmie), co oznacza, że plazma będzie się rozszerzać. Warunek równowagi  $p_m = p$  nastąpi przy przepływie prądu o natężeniu  $I = 1,25 \times 10^5 \text{ A}$ .

Bukmacher kojarzy się nam zwykle z angielskim hazardzistą, który ryzykując własnym kapitałem przyjmuje karkołomne zakłady. Czy przyjmuje je od samego siebie? Grającym jest to raczej obojętne. Ale bukmacherem jest także pośrednik w grze w totalizatora, człowiek, który nie angażując własnego kapitału organizuje grę innych. Zazwyczaj grający utrzymują wzajemnie w tajemnicy swoje typy, ale poznaje je wszystkie bukmacher. Powstaje więc obawa, że biorąc udział w grze wykorzysta on te informacje na szkodę współgrających. Pokażemy teraz na przykładzie gry *orzeł czy reszka*, jak wielkie korzyści może on przy tym uzyskać.

Gra *orzeł czy reszka* jest dość nudną formą hazardu, ale stanowi wdzięczny przedmiot rozważań matematycznych. W grze dwóch osób jedna rzuca monetą, a druga odgaduje wynik. Odgadując wygrywa stawkę, nie odgadując - przegrywa. Gdy w grze uczestniczy kilka osób, bukmacher zbiera typy, rzuca monetą i dzieli zebraną pulę między wygrywających (ewentualnie zwraca stawki, gdy nikt nie wygrał). Gra jest sprawiedliwa, każdy ma zapewnioną oczekiwaną wygraną w wysokości stawki.

Pozwólmy teraz bukmacherowi zagrać wraz z innymi. Oczywiście, nie stara się on przewidzieć wyniku rzutu monetą, ale postara się manipulować wysokością wypłat. Optymalna strategia bukmachera jest prosta: jeśli większość grających stawia na orła, to on stawia na reszkę, jeśli przeciwnie, to on stawia na orła. W rezultacie, przy rzucie idealną monetą, bukmacher wygrywa z taką samą częstością jak inni, ale zawsze, gdy wygrywa, pula jest dzielona między małą liczbę wygrywających, a więc wygrane są wysokie.

Przy równej liczbie typów na orła i na reszkę bukmacherowi, jak się to później okaże, nie opłaca się grać. Przymuszony do gry może typować z jednakowym skutkiem na orła lub reszkę; powiedzmy więc, że stawia wtedy zawsze na orła.

Niech  $n$  będzie liczbą grających i  $X$  oznacza liczbę osób stawiających na orła. Gdy zdarzy się, że  $X = k$  i  $k$  jest małe, tzn.  $k = 0, 1, \dots, [\frac{n}{2}]$  (przez  $[x]$  oznaczamy część całkowitą liczby  $x$ ), wówczas wygrana bukmachera wynosi  $\frac{n+1}{k+1}$ , ale, oczywiście, tylko wtedy, gdy w rzucie monetą padnie orzeł; wygrana wyniesie 0, gdy padnie reszka. Średnio zysk, po odliczeniu stawki, wyniesie więc  $\frac{1}{2} \frac{n+1}{k+1} - 1$ . Podobnie analizujemy sytuację przy dużym  $k$  i otrzymujemy wzór na zyski bukmachera:

$$Z_{n,k} = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{n+1}{k+1} - 1, & \text{jeśli } k = 0, 1, \dots, [\frac{n}{2}], \\ \frac{1}{2} \frac{n+1}{n-k+1} - 1 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Aby określić, jak często pojawia się zdarzenie  $X = k$ , przyjmijmy, że grający z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{2}$  typują orła lub reszkę i czynią to niezależnie jeden od drugiego. Wówczas to zdarzenie ma prawdopodobieństwo dwumianowe  $\binom{n}{k} (\frac{1}{2})^n$ . Oczekiwana wygrana bukmachera wynosi

$$Z_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n Z_{n,k}.$$

Po przekształceniu otrzymujemy

$$Z_n = \left(\frac{n+1}{[\frac{n}{2}] + 1}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

czyli tzw. wyraz środkowy w rozkładzie dwumianowym dla  $n+1$  prób pomniejszony o wyrazy skrajne. Gdy zmieniamy  $n$ , wówczas największą wartość wygranej uzyskujemy przy  $n = 5$  i wynosi ona  $Z_5 = 0,281$ . Asymptotycznie  $Z_n \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$ , gdy  $n \rightarrow \infty$ . Zauważmy, że  $Z_n \rightarrow 0$ , gdy  $n \rightarrow \infty$ .

Bukmacher może próbować zwiększyć zysk zwielfokrotniając swój udział w grze lub wstrzymując się czasami od gry. Przypuśćmy, że stawia on  $r = r(k)$  razy na orła, gdy  $X = k$  i  $k$  jest małe i tyleż razy na reszkę, gdy  $X = n - k$  i  $k$  jest małe.

W dalszych rozważaniach, podobnie jak poprzednio, dokładniej opisujemy przypadek  $k = 0, 1, \dots, [\frac{n}{2}]$ , nie zapominając przy obliczaniu globalnego zysku o symetrycznym wariacie strategii. Zysk przy  $X = k$  wynosi teraz

$$Z_{n,k}(r) = \frac{1}{2} \frac{n+r}{k+r} r - r, \quad \text{jeśli } k = 0, 1, \dots, [\frac{n}{2}].$$

To wyrażenie jest dodatnie dla  $0 < r < n - 2k$ , ujemne, gdy  $n$  jest parzyste i  $k = \frac{n}{2}$ . Maximum zysku jest przyjmowane dla

$$r_0 = \left[ \sqrt{k(n-k) + \frac{1}{4}} - \frac{k+1}{2} \right].$$

Oczekiwany zysk, gdy bukmacher stawia optymalnie, wynosi

$$Z_n = 2 \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2} \frac{n+r_0}{k+r_0} - 1\right) r_0.$$

Znajdowanie optymalnej strategii bukmachera i obliczanie zysku jest łatwym zadaniem z programowania obliczeń na komputerze. Wstrzymywanie się od gry przy  $n$  parzystym i  $k = n/2$  podnosi maksymalny zysk bukmachera, jaki może uzyskać ze swego procederu. Wyniesie on teraz 0,3125 przy  $n = 4$ . Opłacalne powtórzenie stawki pojawia się w grze 7 osób przy  $k = 1$ . Przy  $n = 20$  funkcja  $r = r(k)$  ma postać

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r(k)$	1	3	4	4	4	4	3	3	2	1	0

Zysk maksymalny nie dąży do zera ze wzrostem  $n$ . Pokażemy, że  $Z_n \rightarrow \frac{1}{4}$ , gdy  $n \rightarrow \infty$ .

Prawdopodobieństwa w rozkładzie dwumianowym można przybliżać przy użyciu gęstości normalnego rozkładu prawdopodobieństwa:

$$\binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n \approx \frac{2}{\sqrt{n}} \varphi\left(\frac{k-n/2}{\sqrt{n}/2}\right), \quad \text{gdzie } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Nie popełnimy znaczących błędów, jeśli ekstremum funkcji  $Z = Z_{n,k}(r)$  będziemy szukali nie na zbiorze liczb całkowitych, ale na zbiorze liczb rzeczywistych  $r \geq 0$ . Wówczas ekstremum jest przyjmowane w punkcie  $r_0 = \sqrt{k(n-k)} - k$  i wynosi  $\frac{n}{2 - \sqrt{k(n-k)}}$ .

Mamy więc (dla  $n$  parzystego)

$$\begin{aligned} Z_n &\approx 2 \sum_{k=0}^{n/2} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{n}{2} - \sqrt{k(n-k)}\right) \approx \\ &\approx 2 \sum_{k=0}^{n/2} \frac{2}{\sqrt{n}} \varphi\left(\frac{k-n/2}{\sqrt{n}/2}\right) \frac{(n/2)^2 - k(n-k)}{\frac{n}{2} + \sqrt{k(n-k)}} = \\ &= \sum_{i=0}^{n/2} \frac{2}{\sqrt{n}} \varphi\left(-\frac{2i}{\sqrt{n}}\right) \left(\frac{2i}{\sqrt{n}}\right)^2 \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2i}{\sqrt{n}}\right)^2}} \approx \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \varphi(-u) u^2 du = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

W trakcie tych obliczeń zmieniliśmy zmienną przy sumowaniu i zastosowaliśmy wzór przybliżony na obliczanie całki.

Do tej pory zakładaliśmy, że grający nie porozumiewają się między sobą, nie zakładają koalicji. Warto zauważyć, że dwóch graczy w koalicji skutecznie może ograć bukmachera, zanim się on zorientuje, że jest oszukiwany. Wystarczy, że będą oni zawsze (dla zmylenia przeciwnika prawie zawsze) stawiali jeden na orła, a drugi na reszkę. Wówczas bukmacher uzyska średnią wygraną  $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ , a średni zysk będzie miał ujemny  $-0,25$ .

Popularny totolotek przypomina grę *orzeł czy reszka*, a kioskarsz totka jest, oczywiście, bukmacherem. Wyobraźmy więc sobie kioskarsza, który przyjmując zakłady notuje obstawione zakłady i, jako ostatni, wypełnia kupon zgodnie z zaleceniami naszej teorii, tzn. typuje najmniej popularny układ. Brzmi to dość rozsądnie, ale rychło każdy z nich przekona się, że upodobania klientów są dość stabilne, związane raczej z kształtem kuponu, i w dodatku dostępne do wiadomości wszystkich. Ujawnił je bowiem profesor Hugon Steinhaus ze współpracownikami w 1960 roku w czasopiśmie *Zastosowania Matematyki*. Ogólny wydzźwięk tamtych dociekań jest raczej pesymistyczny – znajomość upodobań klientów totka podnosi oczekiwaną wartość wygranej, ale jest raczej wątpliwe, aby podniosła ją do granicy opłacalności.

## FIZYCZNE NOWINKI

Redaguje dr hab. Andrzej HENNEL

### TAJEMNICE BOMBY WODOROWEJ

Polska Agencja Prasowa podała na początku stycznia br. z Londynu sensacyjną (jej zdaniem) wiadomość o wydobyciu tajnych zapisków Hansa Bethego, jednego z fizyków kierujących amerykańskim programem budowy bomby atomowej "Manhattan". Według komunikatu PAP dopiero dzięki tym informacjom można stwierdzić, że twórca amerykańskiej bomby wodorowej był nie amerykański fizyk Edward Teller, lecz polski matematyk Stanisław Ulam. Sprawa ta wymaga nieco dokładniejszego wyjaśnienia. Znakomity matematyk Stanisław Ulam (1909–1984) urodził się we Lwowie, gdzie ukończył studia i obronił doktorat. II wojna światowa zastała go w Stanach Zjednoczonych, gdzie przebywał w Uniwersytecie Harwardzkim (Cambridge, stan Massachusetts). W 1943 roku zgodził się na podjęcie pracy dla celów wojskowych. W ten sposób trafił do środowiska naukowców zgromadzonych w Los Alamos, tajnym mieście-laboratorium, w którym opracowywano amerykańską bombę atomową. Niezależnie od prac nad bombą A jeszcze w czasie trwania wojny Edward Teller wysunął koncepcję opracowania bomby termojądrowej (wodorowej), nazywanej wówczas Super, złożonej ze zwykłej bomby A, deuteru i trytu. Teller zaproponował konstrukcję Super poprzez zapakowanie materiału do syntezy termojądrowej w płaszcz uranowy tworzący bombę A. Symulacja matematyczna takiej bomby okazała się największym problemem matematycznym owych czasów, znacznie przewyższającym komplikację rachunków astronomicznych. W 1950 roku Ulam (prowadzący obliczenia za pomocą suwaka logarytmicznego) dowiódł, że koncepcja Tellera była błędna. Jeszcze przed rozpoczęciem reakcji syntezy jąder cały materiał zostałby rozrzucony przez falę uderzeniową bomby A. Teller zakwestionował ten rezultat, jednakże obliczenia za pomocą pierwszego na świecie komputera ENIAC (zbudowanego przez von Neumanna) potwierdziły w całej pełni wynik Ulama. Niedługo potem, wiosną 1951 roku, Ulam zaproponował prawidłowe rozwiązanie problemu. Należało odseparować od siebie zapalnik (czyli bombę A) i właściwą bombę H (wodorową). Silna wiązka promieni X, powstających po wybuchu bomby A, doprowadzi do "zapalenia" bomby H przed dotarciem do niej fali uderzeniowej. Ogromne ambicje kierującego całym programem Tellera, jak i konieczność zachowania w ścisłej tajemnicy wyników Ulama, doprowadziły jednak do nazwania Tellera "ojcem bomby H". Jednakże już w latach sześćdziesiątych sprawa ta stała się głośna. Najlepiej podsumował ją sam Bethe – "Zwykłem mówić, że Ulam był ojcem bomby wodorowej, a Edward (Teller) był jej matką, gdyż nosił dziecko przy sobie przez pewien czas." Podstawowe założenia koncepcji Ulama zostały ujawnione dopiero przed kilku laty i jeszcze w "Encyklopedii Fizyki Współczesnej" (PWN 1983) można znaleźć schemat bomby H odpowiadający raczej pierwotnej koncepcji Tellera.



**M 565.** Udowodnić, że równanie

$$(*) \quad x^{19} - y^{19} = z^{17} - w^{17}$$

ma nie mniej rozwiązań niż równanie

$$(**) \quad x^{19} - y^{19} = z^{17} - w^{17} + 1$$

w czwórkach liczb naturalnych  $(x, y, z, w)$  takich, że  $x, y, z, w \leq N$  ( $N$  ustalona liczba naturalna).

Rozwiązanie na str. 3

**M 566.** W pewnym kraju sieć lotnicza ma tę własność, że z każdego lotniska można przelecieć na każde inne (przesiadając się, być może, wielokrotnie). Udowodnić, że pewne lotnisko można wyczołfać z eksploatacji (i zawiesić wszystkie z nim połączenia) nie tracąc tej własności.

Rozwiązanie na str. 3

**M 567.** Mamy pewną skończoną liczbę punktów nie leżących na jednej prostej. Udowodnić, że istnieje prosta przechodząca przez dokładnie dwa spośród nich.

Rozwiązanie na str. 2

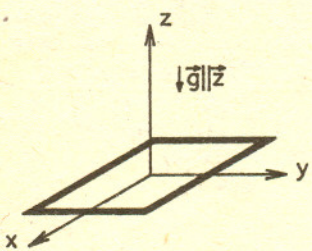
Redaguje dr Lidia GOETTIG

**F 284.** Szttywna, kwadratowa ramka o masie  $m$  i długości boku  $a$  wykonana jest z materiału nadprzewodzącego. Ramkę umieszczono poziomo w ziemskim polu grawitacyjnym i poddano również działaniu pola magnetycznego o indukcji, której składowe wynoszą  $B_x = \alpha x$ ,  $B_y = 0$ ,  $B_z = \alpha z + B_0$ , gdzie  $B_0, \alpha = \text{const.}$  (Osie  $x, y, z$  jak na rysunku, początek układu w środku ramki.) Współczynnik samoindukcji ramki wynosi  $L$ . W pewnej chwili nieruchoma ramka, w której nie płynie prąd, zostaje puszczona swobodnie. Jak będzie się poruszać ramka?

Rozwiązanie na str. 10

**F 285.** Wzdłuż długiego cylindrycznego sznura plazmy, który traktujemy jak walec o promieniu  $R = 5$  cm, płynie w warstwie powierzchniowej prąd elektryczny o natężeniu  $I = 10^5$  A. Ciśnienie w plazmie wynosi  $p = 10^5$  N/m<sup>2</sup>. Czy plazma kurczy się, czy rozszerza? Określić siłę działającą na jednostkę powierzchni bocznej cylindra plazmy. Znaleźć natężenie prądu, przy którym nastąpi równowaga.

Rozwiązanie na str. 10



## Descartes

### czy Kartezjusz?

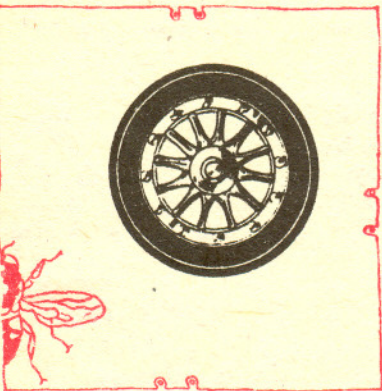
W *Delcie* 5/1989, str. 12, znalazłem taki oto lapsus: *W naszym kraju panuje nieznanym wśród licznych innych nacji zwyczaj tłumaczenia nazwisk. (...) Konia z rzedem temu, kto skłoni Francuzów, żeby się domyślili, że pod mianem Kartezjusza kryje się ich znakomity rodak René Descartes.*

Bronić spolszczania nazwisk nie zamierzam. Ponieważ jednak powyższa wypowiedź może wprowadzić Czytelników w błąd, chcę sprawę wyjaśnić. Otóż *Kartezjusz* to nie tłumaczenie, lecz polonizacja formy zlatynizowanej *Renatus Cartesius*, której używał sam Descartes. Źródła podają też pisownię rozdzielną *Des Cartes*. Każdy wykształcony Francuz wie, że przymiotnikiem odpowiadającym nazwisku *Descartes* jest *cartésien* i pochodzi od *Cartesius*; wie też, że w wielu obcych językach w miejsce liter *c, s* mogą pojawić się *k, z*. Znaczenia słowa *Kartezjusz* domyśliliby się więc łatwo, o ile w ogóle czytałby coś po polsku.

Dlaczego w owych czasach latynizowano nazwiska? Grały one inną rolę niż dziś, wystarczy przypomnieć sobie np. *Wacława z Szamotuł*. W tekście łacińskim tego „z” nie mogło, oczywiście, być, trzeba je było zastąpić jakimś łacińskim odpowiednikiem. Podobnie było z francuskimi przedimkami *de, du* i *des*. Dzisiaj pisownia nazwisk zaczynających się jedną z tych form (podobnie jak nazwisk na *la, le* i *les*) sprawia ogromne kłopoty. Na przykład w *Wielkiej Encyklopedii Powszechnej PWN* można znaleźć nazwiska *Fontaine, La Fontaine* i *Lafontaine*, a także *Dubois* i *Du Bois-Reymond*. Często nie wiadomo, gdzie takiego nazwiska należy szukać np. w książce telefonicznej.

Polacy nie są jedyną nacją zmieniającą nazwiska, choć, być może, w tym przodujemy. Anglicy np. piszą *Euclid*. Główną przyczyną polonizacji nazwisk są sprawy fleksji. *Kartezjusz* odmienia się łatwo, *Descartes* – z kłopotami.

Aby uzmysłowić Czytelnikom, że polonizacja nazwiska to nie tłumaczenie, podaję polskie tłumaczenia trzech znanych francuskich nazwisk: *Dubois* – *Lasota*, *Dupont* – *Mostowski*, *Delacroix* – *Krzyżewski*. Takich tłumaczeń dokonuje się czasem w literaturze pięknej. Zamiana *Descartes* na *Kartezjusz* nie jest tłumaczeniem.

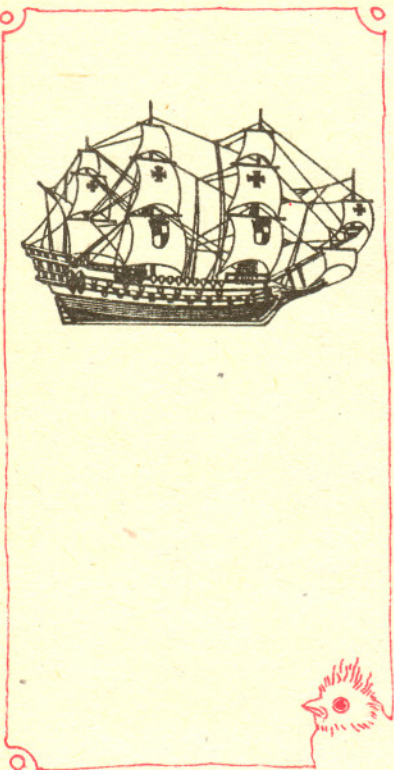


Radioaktywność jest chyba powszechnie uważana za zjawisko długotrwałe. Wiemy przecież, że promieniotwórcze preparaty stosowane w medycynie służą latami, a pozbywanie się radioaktywnych odpadów jest poważnym problemem. Okazuje się jednak, że promieniotwórczość gra prawdopodobnie jedną z głównych ról w tak gwałtownym zjawisku, jakim jest wybuch supernowej.

Jak wiadomo, supernowe zostały podzielone na dwa typy. Typ II to eksplodujące gwiazdy o dużej masie. Uprzednio na drodze kolejnych reakcji termojądrowych doszło stopniowo do wytworzenia żelaznego jądra, ponieważ żelazo – jako pierwiastek o najsilniej związanych nukleonach – paliwem jądrowym już być nie może. Jądro takiej gwiazdy, gdy przekroczy określoną masę, może się już tylko zapaść pod własnym ciężarem, reszta gwiazdy również się, oczywiście, zapada i wyzwolona przy tym energia grawitacyjna powoduje w następnej chwili eksplozję, w wyniku której obiekt taki świeci przez jakiś czas z mocą miliardów Słońc. Z jądra powstaje prawdopodobnie gwiazda neutronowa, a otoczka rozplywa się w przestrzeni.

Inaczej nieco przebiega wybuch supernowej I typu. Ten etap osiągają gwiazdy niezbyt masywne, które nie są w stanie wyprodukować żelaznego jądra. U nich synteza termojądrowa zatrzymuje się na wytworzeniu węgla lub tlenu, następnie gwiazda dość łagodnie pozbywa się warstw zewnętrznych, a to, co zostaje, to biały karzeł. W samotności biały karzeł może już tylko powoli stygnąć. Jednak bardzo często jest składnikiem układu podwójnego, a wtedy może pobierać materię od gwiazdy towarzyszącej. Ponieważ jednak masa białego karła nie może przekroczyć 1,4 mas Słońca (jest to tzw. granica Chandrasekhara), to w końcu dochodzi do jego zapadnięcia się, co jest wstępną fazą wybuchu supernowej I typu. W ciągu kilku sekund jądro gwiazdy zostaje wypalone i wytworzona energia rozrywa gwiazdę. I tu rzecz niezwykła: wybuch taki mógłby być niewidoczny! Bowiem materia białego karła, zwłaszcza zapadającego się, jest bardzo gęsta, a więc nieprzezroczysta. Aby światło mogło się z jego wnętrza wydobyć w miarę swobodnie, musiałyby spuchnąć setki tysięcy razy, ale wtedy ostygłoby tak dalece, że znowu z zewnątrz nic specjalnego nie dałoby się zobaczyć.

Teraz dochodzi do głosu radioaktywność. Obliczenia modelowe dowodzą, że wskutek gwałtowności kolapsu gwiazdy synteza termojądrowa prowadzi do wytworzenia jądra zbudowanego z promieniotwórczego niklu  $^{56}\text{Ni}$ , który rozpadając się następnie na kobalt i żelazo przez kilka dni ogrzewa rozprężającego się byłego białego karła z mocą usprawiedliwiającą nazwanie całego zjawiska wybuchem supernowej (I typu). A dowody na to już istnieją: linie niklu, kobaltu i żelaza w widmach supernowych zostały już zaobserwowane!



Dr Tomasz KWAST

Roczne omówienie zadań Klubu 44 wraz ze szczegółowym regulaminem i obszernymi czołówkami zamieścimy w następnym numerze.

### Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

#### Skrót regulaminu

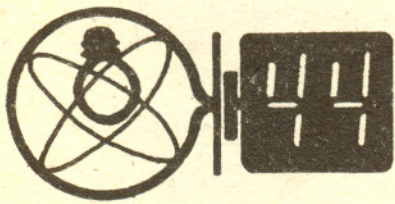
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 3$ . Szkielet rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniany zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1989.

#### Zadania z fizyki nr 101, 102

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

**101.** Izolowana kula metalowa o promieniu 1 cm jest bombardowana przez szeroki strumień elektronów o energii 1000 eV. Po pewnym czasie zostaje osiągnięty stan równowagi. Jakie są w tym stanie: potencjał kuli, zgromadzony na niej ładunek oraz natężenie pola elektrycznego przy powierzchni kuli?

**102.** Jednorodna, wiotka lina o długości  $l$  i masie  $m$ , z zawieszonym na jej dolnym końcu obciążnikiem o masie  $M = 5m$ , zwisa swobodnie, zaczepiona swym górnym końcem. Wiejący poziomo ze stałą prędkością wiatr działa na linę siłą równą co do wartości ciężarowi liny, podczas gdy siła wiatru działająca na obciążnik jest zaniedbywalna w porównaniu z jego ciężarem. Jaki kąt tworzy lina z kierunkiem pionowym w punkcie jej zaczepienia? Obliczyć w sposób przybliżony metodami numerycznymi odchylenie obciążnika od pionu.



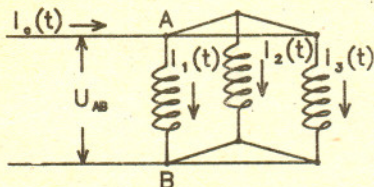
Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 87 ( $WT=2,72$ ) i 88 ( $WT=1,57$ )  
z numeru 4/1989

Jerzy Lipkowski	- Białąg	44,01pkt
Tomass Więtecha	- Tarnów	42,40pkt
Aleksander Surma	- Myszków	41,57pkt
Piotr Koczyński	- Warszawa	39,57pkt
Piotr Bała	- Toruń	33,23pkt
Wojciech Feisert	- Wrocław	32,77pkt
Andrzej Borowski	- Aleksandrów	
	Kujawski	30,84pkt
Przemysław Gworys	- Częstochowa	30,19pkt
Jacek Stelmach	- Zabrze	29,44pkt
Mariusz Bogacz	- Pińczów	28,86pkt

Pan Lipkowski po raz drugi przekroczył  
44 punkty.



94. Równanie ruchu rakiety w przedziale czasu  $t \in [0, T]$   
ma postać

$$(M + m_p(t)) \frac{d^2 h(t)}{dt^2} = F - (M + m_p(t))g,$$

gdzie  $m_p(t)$  jest masą paliwa w czasie  $t$ ,  $g$  -  
przyspieszeniem ziemskim (na odpowiedniej wysokości).  
Opór powietrza - wobec bardzo rozrzedzonej na tych  
wysokościach atmosfery - został pominięty. Przyjmując,  
że w czasie  $T$  całe paliwo się wypala ze stałą szybkością,  
mamy

$$m_p(t) = m \left(1 - \frac{t}{T}\right).$$

Z analitycznego rozwiązania tego problemu (patrz:  
A.K. Wróblewski, J.A. Zakrzewski, *Wstęp do fizyki*, t.1,  
PWN 1984, str. 380-384) wynikają następujące wzory:

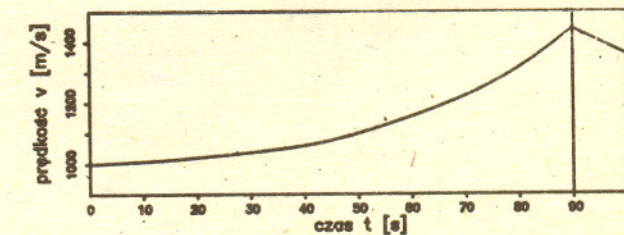
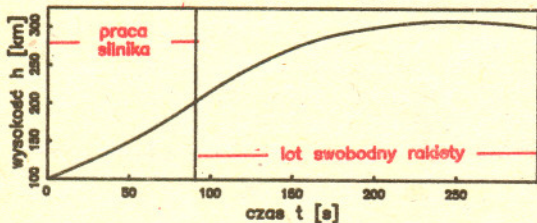
$$(1) v(t) = v_0 - gt - u \ln(1 - kt),$$

$$(2) h(t) = H + v_0 t - g \frac{t^2}{2} + \frac{u}{k} \left( (1 - kt) \ln(1 - kt) + kt \right),$$

gdzie  $k = \frac{m}{(M+m)T}$ ,  $u = \frac{FT}{m}$  (równe prędkości gazów  
wylatujących z silnika rakiety).

Dla  $t > T$  ruch rakiety jest ruchem swobodnym w polu  
grawitacyjnym (rzut pionowy).

Ze względu na zależność przyspieszenia ziemskiego  
od wysokości  $g = (R/(R+h))^2 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2$ , gdzie  
 $R = 6370 \text{ km}$  - promień Ziemi, przyjmujemy dla przedziału  
 $h \in [100 \text{ km}, 200 \text{ km}]$  średnią wartość  $g = 9,4 \text{ m/s}^2$  i ze  
wzorów (1), (2) obliczamy  $v_1 = v(90 \text{ s}) = 1440 \text{ m/s}$  oraz  
 $h(90 \text{ s}) = 201 \text{ km}$ . Wysokość osiągniętą w locie swobodnym



Przypominamy treść zadań:

93. Trzy jednakowe cewki o indukcji  $L$ , nawinięte w tę samą stronę, połączone równolegle  
w taki sposób, że współczynnik indukcji wzajemnej każdej pary tych cewek jest jednakowy  
i wynosi  $M$ . Jaka jest indukcja zastępcza  $L_{AB}$  układu tych cewek?

94. Rakieta o masie własnej  $M = 4 \text{ Mg}$  i początkowej masie paliwa  $m = 7 \text{ Mg}$  rozpoczyna  
na wysokości  $H = 100 \text{ km}$  nad powierzchnią Ziemi samodzielny lot z prędkością początkową  
 $v_0 = 1 \text{ km/s}$  w kierunku pionowym ku górze. Przyjmując, że przez cały okres  $T = 90 \text{ s}$  pracy  
silnika jego siła ciągu  $F = 100 \text{ kN}$  jest stała i skierowana pionowo w górę, wyznaczyć zależność  
prędkości  $v$  rakiety oraz jej wysokości  $h$  od czasu i przedstawić ją w postaci wykresów.  
Obliczyć maksymalną wysokość, na jaką wzniesie się rakieta.

93. Z definicji indukcji zastępczej mamy

$$(1) U_{AB} = L_{AB} \frac{dI_C}{dt},$$

gdzie  $U_{AB}$  jest napięciem między punktami  $A$  i  $B$ , natomiast  $I_C$  - natężeniem  
całkowitego prądu płynącego między tymi punktami.

Z symetrii wynika równość prądów w trzech cewkach:

$$I_1(t) = I_2(t) = I_3(t) = I(t).$$

W konsekwencji

$$(2) I_C(t) = 3I(t).$$

Dla dowolnej cewki, wobec ich nawinięcia w tę samą stronę, mamy

$$(3) U_{AB} = L \frac{dI}{dt} - 2M \frac{dI}{dt}.$$

Z przyrównania wyrażen (1) i (3), uwzględniającego związek (2), wynika, że

$$L_{AB} = \frac{1}{3}(L - 2M).$$

wyznaczamy na podstawie wzoru  $(\Delta h)_2 = v_1^2 / (2g_1)$   
podstawiając  $g_1 = 9,1 \text{ m/s}^2$  (średnie  $g$   
dla  $h \in [200 \text{ km}, 320 \text{ km}]$ ). Maksymalna wysokość, na jaką  
wzniesie się rakieta, jest równa  $h_{max} = h(90 \text{ s}) + (\Delta h)_2 =$   
 $= 315 \text{ km}$ . Zależności  $v(t)$  oraz  $h(t)$  są przedstawione  
na wykresach. Użyto w nich tylko jednej wartości  
 $g = 9,3 \text{ m/s}^2$ , pomimo tego zgadzają się one z obliczonymi  
wyżej wynikami z dokładnością do około 0,5 %. Prędkość  
rakiety początkowo nieco maleje, co zrozumiałe wobec  
 $F < (M + m)g$ .

W rozwiązaniu numerycznym dzielimy przedział czasowy  
 $T$  na  $n$  odcinków czasowych  $\Delta t = T/n$  i przyjmujemy  
 $t_i = i\Delta t$ , gdzie  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Masę całkowitą rakiety  
oraz jej przyspieszenie w chwili  $t$  określają wzory

$$m_i = M + m \left(1 - \frac{i}{n}\right) \quad \text{oraz} \quad a_i = \frac{F}{m_i} - g.$$

Oznaczając średnią prędkość w przedziale czasu  $[t_{i-1}, t_i]$   
przez  $v_i$  mamy

$$v_1 = v_0 + \left( \frac{F}{M+m} - g \right) \frac{\Delta t}{2}, \quad v_{i+1} = v_i + a_i \Delta t$$

$$\text{oraz} \quad v(90 \text{ s}) = v_n + a_n \frac{\Delta t}{2}.$$

Droga przebyta w przedziale czasu  $[t_{i-1}, t_i]$  jest,  
oczywiście, równa  $(\Delta h)_i = v_i \Delta t$ , można jednak również  
korzystać z zależności  $(\Delta h)_{i+1} = (\Delta h)_i + a_i (\Delta t)^2$ .  
Wyniki numeryczne uzyskane dla  $n = 70$  (z użyciem  
programu, który ukaże się w książce: J. Ginter, R. Kutner,  
*Komputerem w Kosmos*, WSiP) pokrywają się z wynikami  
analitycznymi w granicach  $10^{-3} \%$ .

**203.** Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną  $n$ , dla której istnieje 1990 różnych liczb naturalnych (dodatnich liczb całkowitych), nie przekraczających  $n$ , o tej własności, że żadna z nich nie jest dwukrotnością innej.

**204.** Wykazać zbieżność i znaleźć granicę ciągu

$$a_n = n^n (n!e - [n!e])^n.$$

Zadanie 204 zaproponował pan Piotr Jędrzejewicz z Torunia.

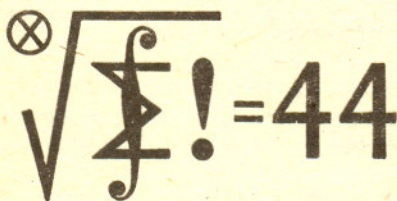
### Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/1989

#### Przypominamy treść zadań:

**195.** Dwie identyczne talie po  $n$  kart stasowano razem. Odkrywamy karty po jednej do chwili, gdy wśród odkrytych kart znajdują się dwie identyczne. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby odkrytych kart.

**196.** Niech  $P_1, P_2, P_3$  będą rzutami punktu  $P$  leżącego wewnątrz trójkąta ostrokątnego  $ABC$  odpowiednio na boki  $AB, BC, CA$ .

Dowieść, że iloraz  $(|AP_1| + |BP_2| + |CP_3|) / (|PP_1| + |PP_2| + |PP_3|)$  jest wielkością stałą (gdy  $P$  przebiega wewnątrz trójkąta) wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt  $ABC$  jest równoboczny.



**195.** Niech  $p_k$  będzie prawdopodobieństwem, z jakim rozważana zmienna losowa przyjmuje wartość  $k$ . Innymi słowy,  $p_k$  jest prawdopodobieństwem tego, że  $k$ -ta odkryta karta jest pierwszą identyczną z którąś z poprzednich ( $k = 1, 2, \dots, n+1$ ). Oznaczmy przez  $q_k$  prawdopodobieństwo tego, że wśród pierwszych  $k$  odkrytych kart nie ma dwóch jednakowych ( $k = 0, 1, 2, \dots, n+1$ ) i zauważmy, że  $q_0 = 1, q_{n+1} = 0, q_{k-1} - q_k = p_k$  dla  $k = 1, 2, \dots, n+1$ . Szukana wartość oczekiwana wynosi

$$\begin{aligned} E_n &= p_1 + 2p_2 + \dots + np_n + (n+1)p_{n+1} = \\ &= (q_0 - q_1) + 2(q_1 - q_2) + \dots + \\ &\quad + n(q_{n-1} - q_n) + (n+1)q_n = q_0 + q_1 + \dots + q_n. \end{aligned}$$

Liczba możliwych kombinacji kart odkrytych w  $k$  pierwszych ruchach wynosi  $\binom{2n}{k}$  (abstrahujemy od kolejności); wśród nich jest  $2^k \binom{n}{k}$  układów bez pary kart identycznych (wybór po 1 elemencie z  $k$  par spośród  $n$  par). Liczby te – to mianownik i licznik ułamka wyznaczającego prawdopodobieństwo  $q_k$ . A zatem

$$q_k = 2^k \binom{n}{k} \binom{2n}{k}^{-1} = 2^{n-j} \binom{2n}{n}^{-1} \binom{n+j}{j},$$

gdzie  $j = n - k$ .  
Stąd

$$E_n = \sum_{k=0}^n q_k = 2^n \binom{2n}{n}^{-1} S_n,$$

gdzie  $S_n = \sum_{j=0}^n 2^{-j} \binom{n+j}{j}$ .

Dla  $n \geq 2$  mamy równość

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \sum_{j=1}^n 2^{-j} \left( \binom{n+j-1}{j-1} + \binom{n+j-1}{j} \right) = \\ &= 1 + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{-j-1} \binom{n+j}{j} + \sum_{j=1}^n 2^{-j} \binom{n-1+j}{j} = \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left( S_n - 2^{-n} \binom{2n}{n} \right) + \\ &\quad + \left( S_{n-1} - 1 + 2^{-n} \binom{2n-1}{n} \right) = \frac{1}{2} S_n + S_{n-1}, \end{aligned}$$

czyli  $S_n = 2S_{n-1}$ . Ponieważ  $S_1 = 2$ , zatem  $S_n = 2^n$

i ostatecznie  $E_n = 4^n \binom{2n}{n}^{-1}$ .

**Uwaga.** Korzystając ze wzoru Stirlinga można wykazać,

że znaleziona wartość równa się w przybliżeniu  $\sqrt{\pi n}$ .

Dokładniej:  $E_n = \alpha_n \sqrt{\pi n}$ , gdzie  $1 < \alpha_n < \left( \frac{12n}{12n-1} \right)^2$ .

Na przykład dla  $n = 52$  mamy  $E_{52} = 12,8 \pm 0,02$ .

Układając pasjansa z dwóch zwykłych talii kart, dobrze potasowanych, oczekujemy więc pierwszego powtórzenia karty gdzieś około 13 miejsca.

**196.** Oznaczmy rozważane wyrażenie przez  $f(P)$ ; dopuszczamy położenia punktu  $P$  nie tylko wewnątrz, ale i na brzegu trójkąta  $ABC$ . Gdy punkt  $P$  przebiega ruchem jednostajnym dowolny odcinek zawarty w trójkącie  $ABC$ , wówczas zarówno licznik, jak i mianownik  $f(P)$  zmienia się w sposób liniowy. Jeżeli trójkąt  $ABC$  jest równoboczny, to  $f(P)$  przyjmuje jednakową wartość dla  $P$  będącego dowolnym z trzech wierzchołków. Zatem funkcja  $f$  jest stała wzdłuż każdego boku trójkąta; dalej: jest stała wzdłuż każdego odcinka o końcach na brzegu trójkąta  $ABC$ , czyli po prostu: jest stała.

Dowodzimy teraz implikacji przeciwnej. Niech  $ABC$  będzie dowolnym trójkątem ostrokątnym. Oznaczając przez  $O$  i  $I$  środki okręgów opisanego i wpisanego, przez  $R$  i  $r$  promienie tych okręgów, przez  $a, b, c$  długości boków trójkąta, a przez  $\alpha, \beta, \gamma$  miary odpowiednich kątów otrzymujemy równości

$$\begin{aligned} f(O) &= \frac{\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}}{\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} + \sqrt{R^2 - \frac{b^2}{4}} + \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}}} = \\ &= \frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma} = \frac{4t}{4s+1}, \end{aligned}$$

gdzie  $t = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$ ,  $s = \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$ ,  
oraz

$$\begin{aligned} f(I) &= \frac{r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + r \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + r \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}}{3r} = \\ &= \frac{1}{3} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \frac{t}{3s}. \end{aligned}$$

Jeżeli  $f = \text{const}$ , to, oczywiście,  $f(O) = f(I)$  i z równania  $\frac{4t}{4s+1} = \frac{t}{3s}$  wyznaczamy  $s = \frac{1}{8}$ . Z wklęsłości funkcji sinus oraz z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną wynika zaś, że

$$s \leq \left( \frac{\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2}}{3} \right)^3 \leq \left( \frac{\sin \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}}{3} \right)^3 = \frac{1}{8},$$

przy czym równość zachodzi jedynie wtedy, gdy  $\alpha = \beta = \gamma$ . Tak więc  $f$  jest funkcją stałą tylko w przypadku trójkąta równobocznego.



# Drobiazgi

Lidar (ang. light detection and ranging) jest urządzeniem laserowym do badania atmosfery. Zasada działania lidar jest podobna do zasady działania radaru. Lidar wysyła krótki impuls światła laserowego, a następnie analizuje światło odbite od tego, co się znajduje w atmosferze – chmur, pyłów, chemicznych zanieczyszczeń, molekuł itp. Natężenie i długość fali światła odbitego zależy od koncentracji i typu oddziaływania z centrami rozpraszającymi światło. Analiza powracającego światła pozwala wyciągnąć wnioski o składzie i fizycznym stanie atmosfery, a opóźnienie czasowe powracających sygnałów – o lokalizacji różnych składników atmosfery. Lidary są używane do badania koncentracji i przesuwania się zanieczyszczeń powietrza w pobliżu ośrodków przemysłowych, zawartości substancji chemicznych w stratosferze itp. Używane są również do obserwacji wiatrów w pobliżu lotnisk. Za ich pomocą obserwowano rozchodzenie się pyłów wulkanicznych po wybuchach wulkanów St. Helen i El Chino. Przy optymalnych warunkach mogą być bardzo czułe – mogą wykryć tak niską koncentrację, jak kilka atomów na centymetr sześcienny. Mają zasięg od kilku metrów do kilkunastu (nawet do 90) kilometrów.

27 lutego 1989 roku firma Intel Corp. (jeden z największych na świecie producentów mikroprocesorów) ogłosiła powstanie nowego mikroprocesora o nazwie i860, nazywanego przez konstruktorów skrótem N10. Jest to 64 bitowy procesor zbudowany z ponad 1 miliona tranzystorów wbudowanych w jeden monokryształ. Działanie i860 opiera się na zasadzie RISC (reduced-instruction-set computing). Oznacza to, że ograniczono zestaw wykonywanych przez procesor instrukcji pozostawiając tylko ich niezbędne minimum. Skupiono się w zamian za to na przyspieszeniu działania. Instrukcje, które w klasycznych procesorach wykraczają ponad zredukowany zestaw, RISC wykonuje jako mikroprogramy. W przypadku i860 w większości przewidywanych jego zastosowań taka koncepcja prowadzi do szybkości równej około połowie szybkości superkomputera Cray-1.

Co może mieć wspólnego astronomia z medycyną? Otóż w obu tych naukach zachodzi konieczność wykonywania długoczasowych zdjęć. Zwyczajne emulsje są jednak szczególnie niewydajne przy słabych oświetleniach, dlatego astronomowie często stosowali tzw. doczulanie emulsji np. przez podgrzewanie jej przed wykonaniem zdjęcia w obecności mieszaniny wodoru i azotu. Czasy ekspozycji stosowane w astronomii są i tak krótkie w porównaniu z niezbędnymi do otrzymania obrazu w wyniku np. autoradiografii. Skłoniło to kilka lat temu grupę lekarzy z Florydy do nawiązania współpracy z astronomami, by opracować metodę doczulania klisz rentgenowskich. Współpraca dała sukces. Okazało się, że pewne klisze przeznaczone do medycznych badań rentgenowskich łatwo można tak spreparować, że będą mogły posłużyć także do zdjęć astronomicznych. Zysk dla medycyny jest oczywisty – klisza taka umożliwia znaczne skrócenie naświetlania człowieka promieniami Roentgena, dla astronomii zaś może już nie tak wielki, bowiem i tak zastosowanie CCD chyba wypiera wszelkie metody tradycyjne.

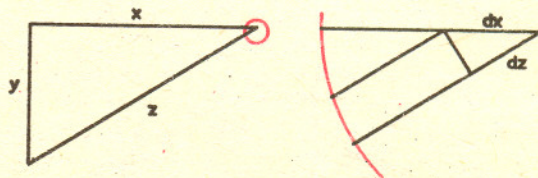
Wielki przewrót w przyrodoznawstwie, który dokonał się w XVII wieku, miał swego ideologa – był nim Kartezjusz (René Descartes). Jego *Rozprawa o metodzie* stworzyła metodologiczną podstawę nowoczesnej nauki – racjonalizm. Jednak proponowane przez Kartezjusza zasady poznania naukowego w zastosowaniu do matematyki okazywały się banalne. Leibniz pozwolił sobie nawet na takie streszczenie koncepcji Kartezjusza:

*Weź co trzeba, rób jak należy, a otrzymasz to, czego potrzebujesz.*

Od czasu odkrycia pozytonu w 1932 r. cząstki antymaterii obserwowane były w zderzeniach wysokich energii i rozpadach, ale dopiero w ciągu ostatnich paru lat udało się poczynić postęp w kierunku spowalniania i gromadzenia antycząstek. Ostatnio w ośrodku AT&T Bell Labs w USA wytworzona została po raz pierwszy chłodna plazma pozytonowa. Zasada działania pułapki pozytonowej jest podobna jak w przypadku pułapki elektronowej, gdzie w celu ograniczenia przestrzennego stosuje się pola magnetyczne i elektryczne. Pozytony o energii kilkuset keV, pochodzące z rozpadu  $^{22}\text{Na}$ , spowalniane były wstępnie (przed wejściem do pułapki) wskutek zderzeń z elektronami przechodząc przez folię z krystalicznego wolframu o grubości  $1\ \mu\text{m}$ . Następnie, już w obszarze pułapki, dalsze chłodzenie do temperatury pokojowej zachodziło w procesie zderzeń nieelastycznych w azocie gazowym. W pułapce udało się zgromadzić około  $3,3 \times 10^5$  pozytonów i utrzymać je w postaci chmury o rozmiarach włoskiego orzecha w czasie około 60 s.

Jądro komety to w przybliżeniu kilkukilometrowa bryła okruców skalnych zlepionych lodem wodnym oraz innych zamrożonych gazów. Przy zbliżeniu komety do Słońca gazy parują tworząc jej głowę i warkocz. Największą głowę miała Kometa Napoleońska 1811 I – 1,7 mln km, a najdłuższy warkocz kometa 1843 I – 2,15 j.a. Warkocz zresztą może być kilka, bywają też nietypowe, np. skierowane pozornie ku Słońcu. I tak najdłuższy „przeciwwarkocz” miała kometa 1957 III Arend-Roland, mianowicie 24 IV 1957 roku rozciągał się na niebie na  $14^\circ$ . Najwięcej zaś warkoczów, 6 lub nawet 7, miała Kometa Dzienna 1744 Cheseaux. Jądro po utracie lodu ma prawo rozpaść się, co było wielokrotnie obserwowane. Najwięcej, aż 5 fragmentów powstało z rozpadu Wielkiej Wrześniowej Komety 1882 II.

Jak skomplikować dowód twierdzenia Pitagorasa? Rozpatrzmy prostokątny trójkąt o przyprostokątnej  $x$  i przeciwprostokątnej  $z$ . Zwiększmy przyprostokątną o nieskończenie mały przyrost  $dx$ , przeciwprostokątna wzrośnie wtedy o  $dz$ .



Jeśli popatrzymy na nieskończenie wiele razy powiększone otoczenie punktu A, to z podobieństwa odpowiednich trójkątów otrzymamy równanie różniczkowe

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}$$

Rozdzielając zmienne mamy  $x dz = z dx$ , czyli  $z^2 = x^2 + c$ . Podstawiając  $x = 0$  obliczamy stałą i twierdzenie Pitagorasa jest gotowe.

## Protokół



Krzysztof Oleszkiewicz w karykaturze prof. Leona Jeśmanowicza

Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki obradując dnia 12 IX 1989 r. w składzie: prof. dr Leon Jeśmanowicz – przewodniczący oraz dr Jerzy Bednarczuk, dr Antoni Dawidowicz, dr Alicja Derkowska, dr hab. Marek Kordos, mgr Andrzej Mąkowski, dr Zofia Muzyczka, dr Zdzisław Pogoda, dr Agnieszka Wojciechowska, biorąc pod uwagę wybór tematu, poziom prac oraz przebieg obrony postanowiło przyznać:

1. Złoty medal i nagrodę w wysokości zł. 30 000,- Krzysztofowi Oleszkiewiczowi z LX LO w Warszawie za pracę *Skacząc po stożkowych*,
2. Srebrny medal i nagrodę w wysokości zł. 20 000,- Rafałowi Kapelko z III LO we Wrocławiu za pracę *Rachunek różniczkowy i całkowy funkcji zmiennej naturalnej*,
3. Brązowy medal i nagrodę w wysokości zł. 18 000,- Katarzynie Trójcy z I LO w Bytomiu za pracę *Granica złożenia funkcji*,
4. Nagrody w wysokości zł. 8 000,- każda opiekunom prac: Zbigniewowi Marciniakowi, Andrzejowi Filipkowskiemu, Krystynie Czyczy i Alicji Stankiewicz.

Propozycje ewentualnych tematów prac na Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki zamieszczamy od numeru 3/1988 (z pominięciem numerów 6 i 12 z 1988 roku oraz 1, 6, 7 i 8 z roku 1989). Oczywiście, chętnie widzimy prace również na inne tematy.

## Regulamin Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

1. Konkurs organizowany jest corocznie przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Redakcję miesięcznika *Delta*, przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
2. W konkursie mogą brać udział uczniowie wszystkich typów szkół.
3. Konkurs składa się z eliminacji i finału.
4. W eliminacjach bierze udział uczeń, który w terminie do dnia 1 maja prześle pod adresem Redakcji *Delt*y jeden egzemplarz swojej pracy matematycznej. Do pracy należy dołączyć następujące informacje: adres prywatny autora, klasa, nazwa i adres szkoły, imię, nazwisko i adres nauczyciela – opiekuna pracy.
5. Praca powinna zawierać samodzielny wkład ucznia i pełną informację o źródłach, z których korzystał jej autor. Prace czysto kompilacyjne nie będą dopuszczone do finału konkursu.
6. Prace nadesłane na eliminacje zostaną ocenione przez Komisję Konkursu i kompetentnych recenzentów. Te spośród prac, które spełniają warunki konkursu, zostaną przedstawione Jury Konkursu. Jury zakwalifikuje najlepsze prace do finału, który odbędzie się w trakcie dorocznej Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

7. Zawiadomienia o zakwalifikowaniu do finału zostaną przesłane autorom prac oraz nauczycielom – opiekunom prac przed końcem roku szkolnego.
8. Finałiści i nauczyciele opiekujący się ich pracami otrzymują od Zarządu Głównego PTM zaproszenie do udziału w Sesji na koszt Towarzystwa.
9. Finał polega na wygłoszeniu (nie na odczytaniu) przez ucznia, podczas specjalnego otwartego posiedzenia Sesji, referatu (trwającego nie dłużej niż 15 minut) i wzięciu udziału w dyskusji na temat, któremu poświęcona była praca.
10. Rezultaty finału oceni Jury Konkursu. Jury będzie brało pod uwagę, oprócz merytorycznej wartości pracy, również samodzielność i oryginalność ujęcia tematu oraz przebieg referatu i dyskusji. Jury przyznaje medale: złoty, srebrny i brązowy, wyróżnienia oraz nagrody pieniężne ufundowane przez Ministerstwo Edukacji Narodowej.
11. Ogłoszenie wyników finału następuje w trakcie Walnego Zgromadzenia Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Medale wręcza Prezes Towarzystwa. Wszyscy uczestnicy finału otrzymują dyplomy.
12. Wyniki konkursu i skróty zwycięskiej pracy będą opublikowane w miesięczniku *Delta*.
13. Komisję Konkursu oraz Jury Konkursu powołuje Zarząd Główny PTM na wniosek Komitetu Redakcyjnego *Delt*y.

**W XXX Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej w RFN zwyciężył zespół Chin, Polska reprezentacja zajęła dwunaste miejsce. Na ostatniej stronie zamieszczamy wersję zadań, z którą mieli do czynienia zwycięzcy, a poniżej jej polski odpowiednik.**

Pierwszy dzień 18 lipca 1989 r.

Drugi dzień 19 lipca 1989 r.

1. Udowodnić, że zbiór  $\{1, 2, \dots, 1989\}$  można przedstawić w postaci sum, takich parami rozłącznych zbiorów  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 117$ ), że:
  - a) każdy zbiór  $A_i$  ma 17 elementów;
  - b)  $S_1 = S_2 = \dots = S_{117}$ , gdzie  $S_i$  jest sumą wszystkich liczb ze zbioru  $A_i$ .

2. Dwsieczne kątów  $A, B, C$  trójkąta ostrokątnego  $ABC$  przecinają opisany na nim okrąg odpowiednio w punktach  $A_1, B_1, C_1$ . Prosta  $AA_1$  przecina dwsieczne kątów zewnętrznych przy wierzchołkach  $B$  i  $C$  trójkąta  $ABC$  w punkcie  $A_0$ . Punkty  $B_0$  i  $C_0$  określa się analogicznie. Udowodnić, że:

$$a) S_{A_0 B_0 C_0} = 2S_{AC_1 B A_1 C B_1};$$

$$b) S_{A_0 B_0 C_0} \geq 4S_{ABC}.$$

Uwaga.  $S_{XY\dots}$  oznacza pole wielokąta  $XY\dots$

3. Niech  $n$  oraz  $k$  będą ustalonymi liczbami naturalnymi. Zbiór  $S$  złożony z  $n$  punktów płaszczyzny ma następujące własności:

a) żadne trzy punkty zbioru  $S$  nie leżą na jednej prostej,

b) dla każdego punktu  $P$  należącego do  $S$  istnieje w  $S$  co najmniej  $k$  różnych punktów równoodległych od  $P$ .

Udowodnić, że  $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$ .

Czas rozwiązywania zadań:  $4\frac{1}{2}$  godziny.

Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów.

4. Niech  $ABCD$  będzie czworokątem wypukłym, którego boki  $AB, AD$  i  $BC$  spełniają równość  $AB = AD + BC$ . Wewnątrz tego czworokąta znajduje się taki punkt  $P$ , że  $AP = h + AD$  i  $BP = h + BC$ , gdzie  $h$  jest odległością punktu  $P$  od prostej  $CD$ .

Udowodnić, że

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}.$$

5. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej  $n$  istnieje  $n$  kolejnych liczb naturalnych, z których żadna nie jest potęgą liczby pierwszej o wykładniku całkowitym.

6. Permutację  $\{x_1, x_2, \dots, x_{2n}\}$  zbioru  $\{1, 2, \dots, 2n\}$  będziemy nazywać sympatyczną, jeżeli równość  $|x_i - x_{i+1}| = n$  zachodzi dla co najmniej jednej liczby  $i$  ze zbioru  $\{1, 2, \dots, 2n - 1\}$ .

Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej  $n$  więcej niż połowę wszystkich permutacji stanowią permutacje sympatyczne.

Czas rozwiązywania zadań:  $4\frac{1}{2}$  godziny.

Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów.