

Klub „Młodego Cybernetyka” oraz Szkolne Koło Matematyczne organizują

„III Krajowy Złot Młodzieży Szkół Średnich – Miłośników Matematyki i Cybernetyki”, w terminie: 1–7 VIII 1990 r., lokum: Internat LO w Działdowie.

Adres do korespondencji: Klub „Młody Cybernetyk”  
13-200 Działdowo  
skr. pocz. 19

## SPIS TREŚCI

### NUMERU 4(191)

Równania różniczkowe i komputer <i>doc. dr Andrzej Palczewski</i>	str. 1
Zadania	str. 3
Patrz w niebo	str. 3
Kosmiczne rozbłyski promieniowania gamma <i>doc. dr Tadeusz Jarzębowski</i>	str. 4
Figury wypukłe a koła <i>mgr Jarosław Górnicki</i>	str. 6
Mała Delta	str. 8
Ultrazimne neutrony (II) <i>dr Konrad Blinowski</i>	str.10
Klub 44	str.12
Korespondencyjny Klub Fizyków	str.13
Kącik prac uczniowskich	str.13
Drobniaczki	str.14
Ozon atmosferyczny... <i>mgr Małgorzata Degórska</i>	str.15

**W następnym numerze**

**Wszystko o pierwiastkach**

„Delta”  
matematyczno-fizyczno-astronomiczny  
miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa  
Matematycznego, Polskiego  
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego  
Towarzystwa Astronomicznego  
wydawany przy poparciu  
Ministerstwa Edukacji Narodowej

#### Komitet Redakcyjny

dr Maciej Bryński  
dr Bogdan Cichocki  
dr Antoni L. Dawidowicz  
dr Alicja Derkowska  
doc.dr Jan A. Gaj  
doc.dr Bolesław Gleichgewicht  
prof.dr Tomasz Hofmokr – v-przewodniczący  
doc.dr Tadeusz Jarzębowski  
doc.dr Marcin Kubiak  
mgr Andrzej Małowski  
dr Zbigniew Płochocki  
dr Jan Rempala  
prof.dr Konrad Rudnicki  
prof.dr Grzegorz Sitarski  
prof.dr Józef I. Smak  
prof.dr Kazimierz Stępień  
prof.dr Mieczysław Subotowicz  
doc.dr Andrzej Szymacha  
doc.dr Aniela Wolska  
prof.dr Andrzej Woszczyk  
prof.dr Wojciech Żakowski –  
przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga  
dr Lidia Goettig  
dr hab. Jan Kalinowski – z-ca red. nac.  
Maria Kapuścińska  
mgr Krystyna Kordos – sekr. red.  
dr hab. Marek Kordos – red. nac.  
dr Tomasz Kwast  
mgr Anna Rudnik  
dr Jerzy Ryll  
mgr Joanna Udalska  
Jacek Urbański – grafik

Adres Redakcji

ul. Noakowskiego 14  
00-666 Warszawa  
tel. 25-56-39

Wydawca:

Uniwersytet Warszawski  
Krakowskie Przedmieście 26/28  
00-325 Warszawa

Nakład 18 000 egz.

Objętość 2 ark. wyd., 2,50 ark. druk.,  
papier offsetowy V kl. 70 g.  
Wydrukowano w Prasowych  
Zakładach Graficznych  
RSW „Prasa-Książka-Ruch”  
w Łodzi, ul. Armii Czerwonej 28  
Nr zam. 3230/89  
Skład systemem TrX  
wykonała redakcja.

#### DRODZY CZYTELNICY!

Ten numer wydajemy już w naszego nowego wydawcy, którym jest Uniwersytet Warszawski. Praktycznie wydawanie *Delty* zostało zawieszono w październiku 1989 roku, formalnie – w lutym 1990 roku. Zdecydowaliśmy się wydać przygotowane do druku i znajdujące się na różnych etapach produkcji w drukarni numery *Delty* praktycznie bez zmian. Zmieniliśmy jednak ich numerację na aktualną. Nie będzie więc numerów 11 i 12 z 1989 roku oraz numerów 1, 2 i 3 z 1990 roku. Nie będziemy udawali, że jest wszystko w porządku, gdy nie jest.

Prosimy o wyrozumiałość dla tych wszystkich fragmentów, w których można będzie znaleźć ślady starej numeracji. W szczególności przepraszamy uczestników Ligi za zaistniały bałagan. W tym roku przerwa ligowa będzie w porządku. Mamy nadzieję, że od 1991 roku wszystko będzie w porządku. Nie tylko u nas.

REDAKCJA

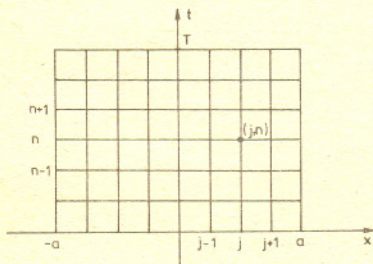
P.S. Zwrot pieniędzy wpłaconych za prenumeratę zapewnia Warszawskie Wydawnictwo Prasowe RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Al. Jerozolimskie 125/127, 02-017 Warszawa. Do prenumeraty wrócimy w IV kwartale 1990 roku.

Cena 1 egzemplarza zł 1500,-



Postęp w budowie sprzętu komputerowego był przez wiele lat inspirowany głównie potrzebami fizyków i inżynierów. Tworzyli oni różne matematyczne modele rzeczywistości, modele coraz doskonalsze, ale jednocześnie coraz trudniejsze do matematycznego zbadania. Jedyną szansą było znajdowanie rozwiązań przybliżonych, w czym nieocenioną pomocą służył komputer. Ponieważ rzecz dotyczyła często spraw kluczowych dla rozwoju cywilizacji – budowa statków, mostów, samolotów itp. – nie oszczędzono wysiłków dla doskonalenia narzędzia niezbędnego do tej działalności, tj. komputera.

W poniższym tekście zajmiemy się niektórymi pułapkami, jakie cychają na praktyka pragnącego znaleźć, przy użyciu komputera, przybliżone rozwiązanie wymyślonego przez siebie modelu matematycznego. W opisie ograniczymy się tylko do klasy modeli opisywanych za pomocą równań różniczkowych. Ponieważ świat jest wielowymiarowy, więc mówić będziemy o równaniach z pochodnymi cząstkowymi, tj. pochodnymi w kierunku poszczególnych osi współrzędnych.



Rys. 1

Aby rozwiązać równanie (1) na tej siatce musimy występujące w nim pochodne zastąpić przez odpowiednie ilorazy różnicowe korzystając przy ich tworzeniu jedynie z wartości funkcji w węzłach siatki. Możemy na przykład napisać

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &\approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &\approx \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Takie postępowanie nazywa się tworzeniem schematu różnicowego.

Zbudujmy teraz różnicowe przybliżenie równania (1). Wykonując w tym równaniu odpowiednie różniczkowanie możemy je zapisać następująco

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

i wstawiając przybliżenia pochodnych ze wzorów (2) otrzymujemy równanie różnicowe

$$(3) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + u_j^n \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0.$$

Po prostych przekształceniach dostajemy

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{u_j^n \Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n).$$

Tak więc znając wartości  $u$  w warstwie  $n$  możemy z tego wzoru wyznaczyć wartości  $u$  w warstwie  $n + 1$ .

Wyobraźmy więc sobie, że mamy model matematyczny, w którym interesująca nas cecha rzeczywistości jest opisana funkcją  $u$  zależną od czasu  $t$  i położenia w przestrzeni. Dla uproszczenia przyjmijmy, że położenie zadane jest jedną zmienną  $x$ . Oznacza to, że  $u = u(t, x)$ . Model nasz dany jest następującym równaniem o pochodnych cząstkowych

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial (u^2)}{\partial x} = 0.$$

Równanie to opisuje prawo, według którego zmienia się w czasie funkcja  $u$ . Jeśli chcemy znaleźć jej postać w jakiejś chwili czasu  $t$ , musimy znać ją w chwili początkowej  $t = 0$ , tzn. znać funkcję

$$u(0, x) = u_0(x).$$

Ograniczmy jeszcze obszar zmienności  $x$  do przedziału  $[-a, a]$  (ułatwi to korzystanie z komputera) zakładając przy tym, że na krańcach tego przedziału znamy funkcję  $u$  w każdej chwili czasu.

Chcąc rozwiązać równanie (1) na komputerze możemy wykorzystać następujący sposób. Dzielimy przedział  $[-a, a]$  na odcinki o tej samej długości  $\Delta x$ , a przedział  $[0, T]$  na odcinki o długości  $\Delta t$ . Ponumerujemy węzły powstającej w ten sposób siatki parami liczb  $(j, n)$  tak, żeby  $j$  rosło w kierunku osi  $0x$ , a  $n$  w kierunku osi  $0t$  (patrz rys. 1, gdzie  $0 \leq j \leq J$ ,  $0 \leq n \leq N$  oraz  $J = 2a/\Delta x$ ,  $N = T/\Delta t$ ). Rozwiązanie równania (1) na komputerze będzie polegało na znalezieniu wartości funkcji  $u$  we wszystkich węzłach siatki, tj. zbioru liczb  $u_j^n$ , gdzie  $u_j^n$  jest wartością funkcji  $u$  w węźle o numerze  $(j, n)$ ,  $u_j^n = u(n\Delta t, -a + j\Delta x)$ . Jak łatwo zauważyć, znając funkcję  $u_0(x)$  możemy obliczyć wartości  $u$  w najniższej warstwie węzłów  $u_j^0 = u_0(-a + j\Delta x)$ .

Zauważmy jednak, że moglibyśmy nie wykonać różniczkowania w równaniu (1) i zastosować następujące przybliżenie

$$\frac{\partial (u^2)}{\partial x} \approx \frac{(u_j^n)^2 - (u_{j-1}^n)^2}{\Delta x}.$$

Wtedy nasze równanie różnicowe przyjąłoby postać

$$(4) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{(u_j^n)^2 - (u_{j-1}^n)^2}{\Delta x} = 0.$$

Powstaje teraz pytanie, które z dwóch otrzymanych równań różnicowych jest lepsze, tzn. lepiej przybliża rozwiązanie równania różniczkowego. Aby odpowiedzieć na to pytanie, scałkujmy równanie (1) względem  $x$  w przedziale  $[-a, a]$ . Otrzymamy wtedy (zakładamy, że funkcja  $u(t, x)$  jest całkowalna)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-a}^a u(t, x) dx + \int_{-a}^a \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) dx = 0.$$

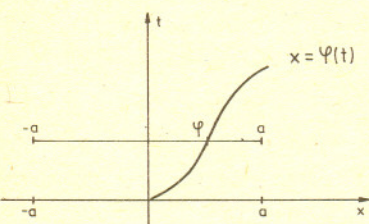
Po dokonaniu prostych przekształceń drugiej całki otrzymujemy

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{-a}^a u(t, x) dx + \frac{1}{2} (u^2(t, a) - u^2(t, -a)) = 0,$$

tzn. zmiana w czasie całki  $\int u(t, x) dx$  zależy jedynie od różnicy wartości funkcji  $u$  na brzegach przedziału. W szczególności jeśli  $u(t, a) = u(t, -a)$ , to całka  $\int u dx$  jest stała w czasie.



Załóżmy, że nasz skok propaguje się po krzywej  $x = \varphi(t)$  (rysunek poniżej).



Wtedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-a}^a u(t, x) dx &= \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_{-a}^{\varphi} u(t, x) dx + \int_{\varphi}^a u(t, x) dx \right] = \\ &= \int_{-a}^{\varphi} \frac{\partial u}{\partial t} dx + u(t, \varphi^-) \frac{d\varphi}{dt} + \\ &+ \int_{\varphi}^a \frac{\partial u}{\partial t} dx - u(t, \varphi^+) \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned}$$

Korzystając z faktu, że

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial (u^2)}{\partial x},$$

otrzymujemy

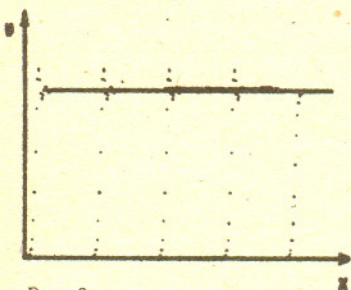
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-a}^a u(t, x) dx &= \\ &= \frac{1}{2} u^2(t, -a) - \frac{1}{2} u^2(t, \varphi^-) + \\ &+ u(t, \varphi^-) \frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2} u^2(t, a) + \\ &+ \frac{1}{2} u^2(t, \varphi^+) - u(t, \varphi^+) \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned}$$

Uwzględniając tożsamość (5) dostajemy

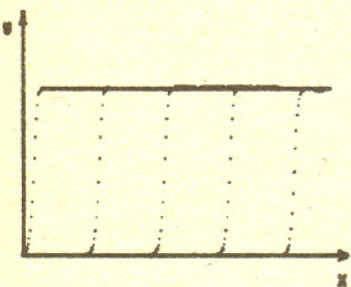
$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} \frac{[u^2(t, \varphi^+) - u^2(t, \varphi^-)]}{u(t, \varphi^+) - u(t, \varphi^-)}.$$

Ponieważ w naszym przypadku  $u(t, \varphi^+) = 0$ , a  $u(t, \varphi^-) = 1$ , więc

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad \varphi(t) = \frac{1}{2}t.$$



Rys. 3



Rys. 4

Dokonując analogicznych operacji na równaniu różnicowym (4) (całkowanie zastępujemy teraz sumowaniem) otrzymujemy

$$\sum_{j=1}^J \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \sum_{j=1}^J \frac{(u_j^n)^2 - (u_{j-1}^n)^2}{2\Delta x} = 0,$$

a po wykonaniu drugiego sumowania

$$\sum_{j=1}^J \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{(u_1^n)^2 - (u_0^n)^2}{2\Delta x} = 0.$$

Pokazuje to, że równanie (4) ma tę samą własność co równanie różniczkowe (1), tj. przyrost całki (sumy) względem czasu zależy jedynie od wartości na brzegu. Łatwo można sprawdzić, że własności tej nie ma równanie (3). Oznacza to, że równanie różnicowe (4) lepiej przybliża równanie różniczkowe (1).

To, że równanie (4) jest lepsze, nie znaczy jeszcze, że jest dobre. Ważnym kryterium jest zachowanie się rozwiązania komputerowego dla nieciągłego warunku początkowego. (De facto każdy problem rozwiązywany na siatce możemy traktować jako problem rozwiązywany w klasie funkcji schodkowych, więc nieciągłych.) W tym celu weźmy

$$(6) \quad u_0(x) = \begin{cases} 1 & x < 0, \\ 0 & x > 0. \end{cases}$$

Jak łatwo sprawdzić, funkcja

$$(7) \quad u(t, x) = \begin{cases} 1 & x < t/2, \\ 0 & x > t/2, \end{cases}$$

jest wtedy rozwiązaniem równania (1) (patrz margines). Oznacza to, że skok, który był początkowo w punkcie  $x = 0$ , porusza się z czasem po prostej  $t = 2x$ .

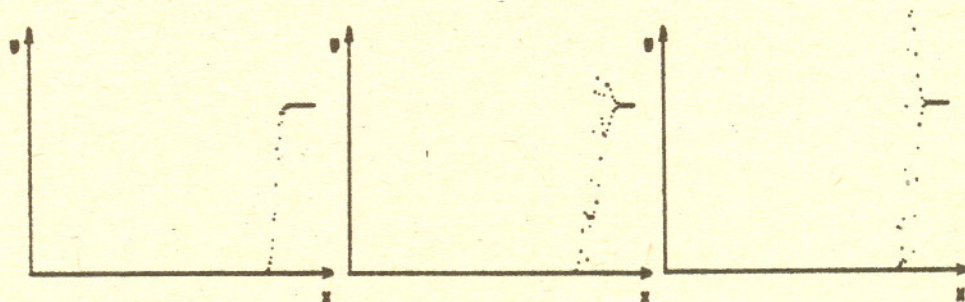
Tymczasem próba rozwiązania równania (4) z warunkiem początkowym (6) prowadzi bardzo szybko do pojawienia się na ekranie komputera komunikatu „real overflow” (przekroczony zakres liczb rzeczywistych) lub podobnego (zależy od typu komputera i użytego języka programowania), który świadczy, że wyniki obliczeń w kolejnych krokach musiały być obciążone coraz większym błędem (prawdziwe rozwiązanie jest przecież ograniczone).

Dla liczenia takich nieciągłych rozwiązań wymyślono znacznie bardziej wyrafinowane schematy różnicowe. Schemat wymyślony przez Petera D. Laxa prowadzi do następującego równania różnicowego

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2}}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{(u_j^n)^2 - (u_{j-1}^n)^2}{\Delta x} = 0.$$

Spełnia on dyskretną wersję tożsamości (5) i daje ograniczone rozwiązanie przy nieciągłych warunkach początkowych.

Prześledźmy to na przykładzie modelu nieco bardziej skomplikowanego niż równanie (1). Jest to model opisujący rozchodzenie się fal w powietrzu. Rysunek 2 pokazuje wyniki otrzymane przy obliczeniach z wykorzystaniem schematu użytego w równaniu (4) na kilka krótków przed komunikatem „real overflow”.



Rys. 2

Rysunek 3 ilustruje wyniki otrzymane po zastosowaniu schematu Laxa. Widać wyraźnie, że w miejscu skoku funkcji pojawiły się oscylacje, których źródłem są błędy numeryczne. Na szczęście oscylacje te nie rosną w czasie w odróżnieniu od przypadku równania (4). Wreszcie rysunek 4 pokazuje rozwiązanie numeryczne, które bardzo dobrze się zgadza z wynikami dokładnymi. Niestety, do jego osiągnięcia należało użyć znacznie bardziej skomplikowanego schematu numerycznego.





## Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

**M 559.** Dany jest ciąg Fibonacciego  $(u_n)$ :  $u_0 = 0, u_1 = 1, u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$  dla  $n = 2, 3, \dots$ . Udowodnić, że szereg  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$  jest zbieżny w pewnym otoczeniu zera i obliczyć jego sumę.

Rozwiązanie na str. 12

**M 560.** Znaleźć jawny wzór na wyraz ciągu Fibonacciego.

Rozwiązanie na str. 17

**M 561.** Oznaczmy przez  $p_n$  prawdopodobieństwo tego, że w serii  $n$  rzutów symetryczną monetą orzeł nie pojawi się trzy razy pod rząd. Udowodnić, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \alpha$ , gdzie  $0 < \alpha < 1$  (oznacza to, że  $p_n$  zachowuje się w przybliżeniu tak, jak ciąg geometryczny).

Rozwiązanie na str. 5

Redaguje dr Rafał STAROŃSKI

**F 280.** Moc punktowego źródła światła monochromatycznego o długości fali  $\lambda = 500$  nm wynosi  $P_0 = 10$  W. Z jakiej maksymalnej odległości można gołym okiem zaobserwować to źródło światła? Przyjmijmy, że oko ludzkie reaguje na strumień światła większy od 60 fotonów na sekundę. Średnica źrenicy wynosi  $d = 0,5$  cm. Rozwiązanie na str. 15

**F 281.** Promieniowanie lasera argonowego ( $\lambda = 500$  nm) zostało skupione na płaskiej fotokatodzie. Średnica ogniska wynosi  $d = 0,1$  mm. Praca wyjścia elektronu z fotokatody wynosi  $A = 2$  eV. Do anody, znajdującej się w odległości  $l = 30$  mm od katody, przyłożono napięcie przyspieszające  $V = 4$  kV. Znaleźć średnicę ogniska fotoelektronów na anodzie. Przyjąć, że anoda jest płaska i położona równolegle do katody.

Rozwiązanie na str. 15



## Patrz w niebo

Centrum naszej Galaktyki zakryte jest przed nami grubą (jakby nie było – rzędu 10 kpc) warstwą gazu i pyłu międzygwiazdowego. Dlatego wszelkie obserwacje tych obszarów są trudne, a wyniki niepewne, gdyż trudno jest z chaosu licznych sygnałów wyodrębnić ten, który pochodzi akurat z centrum. W rezultacie długo nie było wiadomo, co tam właściwie jest: gęsta gromada gwiazd, czarna dziura, jedno i drugie, czy jeszcze coś innego. Obecnie sprawa ta chyba zdążyła do ostatecznego wyjaśnienia.

Gdyby przeprowadzić głosowanie, to zapewne większość badaczy opowiedziałaby się za czarną dziurą i – co więcej – miałaby na to rozsądne argumenty. Przemawiają za tym mianowicie zarówno pewne obserwacje, jak i nasze obecne informacje o pokrewieństwie aktywnych galaktyk, kwazarów i czarnych dziur. Kwazary, te najpotężniejsze źródła energii, o których wpierw panowała opinia, że „mieszkają” w najodleglejszych peryferiach Wszechświata, są prawdopodobnie najsilniejszym przejawem skądinąd bardzo powszechnego zjawiska – aktywności galaktyk. Jądrem tych obiektów byłaby czarna dziura, a emitowana przez nie energia pochodziłaby z akrecji (spadku) materii na tę czarną dziurę. Mniej gwałtownymi krewniakami kwazarów byłyby galaktyki Seyferta, lacertydy, a wreszcie jądra na pozór zupełnie spokojnych galaktyk. Pierwszym takim dziwnym obiektem była galaktyka M 32, mała eliptyczna galaktyka, satelita widocznej gołym okiem Wielkiej Mgławicy w Andromedzie M 31. W jej jądrze wykryto zwarty obiekt o masie oszacowanej na 5 mln mas Słońca. W związku z tym podejrzenie, że i w naszej Galaktyce jest czarna dziura, nie było już żadną herezją.

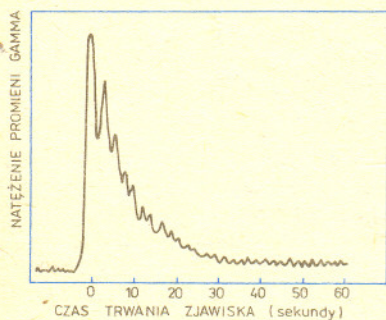
Na poparcie tego podejrzenia zaczęło się pojawiać coraz więcej obserwacji innych galaktyk, które okazały się w rozmaitym stopniu aktywne lub wykazywały ślady dawniejszej aktywności. Wreszcie (1985) wykonano też precyzyjne badania radiowe centrum naszej Galaktyki z użyciem interferometrii wielkobazowej (VLBI – Very Large Baseline Interferometry). Zgodnie z nimi w centrum radioźródła Sagittarius A Zachodni zlokalizowano źródło oznaczone Sgr A\*, którego rozmiary zostały oszacowane na 20 j.a., czyli rzędu rozmiarów orbity Saturna! W pewnym sensie potwierdziły to dalsze obserwacje pochodzące stamtąd promieniowania podczerwonego i mikrofalowego. Mianowicie wyznaczono rozkład prędkości radialnych gazu w centralnym obszarze Galaktyki obejmującym około 10 pc (nawiasem mówiąc te 10 pc z odległości, jaka dzieli nas od jądra Galaktyki, widać pod kątem 0,001 radiana, czyli rzędu 3'). Okazało się, że jeżeli prędkości radialne interpretować jako krążenie gazu wokół centrum Galaktyki, to ich zależność od odległości od jądra nie może odpowiadać żadnej sensownie zbudowanej gromadzie gwiazd, dopuszcza natomiast „punktowe” źródło grawitacji. Skoro tak, to na mocy trzeciego prawa Keplera centralna masa wyniosłaby około 4 mln mas Słońca.

Centrum naszej Galaktyki było następnie obserwowane np. przez rentgenowskiego satelitę Spartan (wysłanego z promu kosmicznego), ale wszyscy z niecierpliwością oczekują skierowania w tamtą stronę Teleskopu Kosmicznego, by móc wreszcie coś dostrzec w zakresie optycznym.

dr Tomasz KWAST

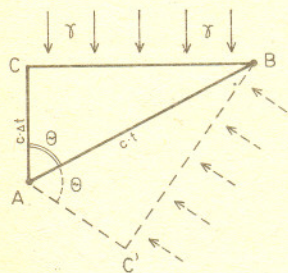


Doc. dr Tadeusz JARZĘBOWSKI



Rys. 1. Przebieg rozbłysku z 29 października 1977 roku.

Od redakcji: rozbłysk ten nastąpił dokładnie w dniu 50. rocznicy urodzin Autora artykułu.



Rys. 2

W majowym numerze *Delty* pisałem o promieniowaniu gamma z kosmosu. Omówiłem tam ważniejsze źródła tego promieniowania z pominięciem dość intrygującego tematu, jaki stanowią sporadyczne rozbłyski. Dla ilustracji – przebieg jednego z takich rozbłysków przedstawia rysunek 1.

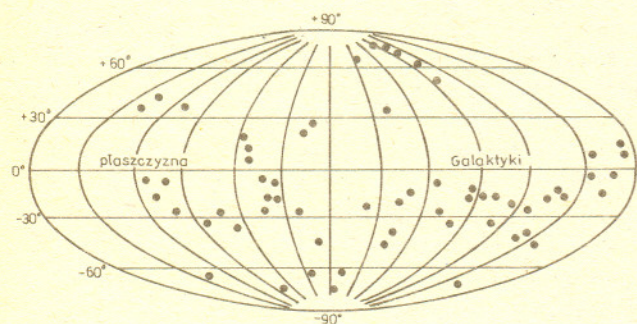
Historia odkrycia tego zjawiska jest osobliwa. Pod koniec lat sześćdziesiątych Stany Zjednoczone umieściły na orbitach okołozemskich satelity w celu prowadzenia kontroli nad przestrzeganiem układu o zakazie prób jądrowych w atmosferze i przestrzeni kosmicznej. Na satelitach zainstalowana była aparatura do rejestrowania promieniowania gamma, które zawsze powstaje przy eksplozjach jądrowych. Otóż rozbłyski takiego promieniowania rzeczywiście wykryto, ale okazało się, iż nie pochodzą one . . . . .znad Kazachstanu, lecz skądś z głębin Wszechświata. Sprawa przestała więc być tajemnicą wojskową; w 1973 roku ukazał się w *Astrophysical Journal* artykuł pod znamienym tytułem: *Gamma-Ray Bursts of Cosmic Origin*. Zjawiskiem zajęli się odąd astronomowie.

Lokalizację takich rozbłysków przeprowadza się w sposób względnie prosty, chociaż trochę nietypowy, stosując swego rodzaju triangulację. We wspomnianym artykule pisałem, że kierunek, z którego dochodzi do nas promieniowanie gamma, określa się przy użyciu „teleskopu” wyposażonego w komorę iskrową (gdzie kwant gamma materializuje się w postaci pary pozyton – elektron). Ale w przypadku, gdy źródło nie świeci w sposób ciągły, lecz jest tylko krótkotrwałym rozbłyskiem, jego pozycję można określić za pomocą bardziej prozaicznych detektorów, nie wyróżniających kierunków. Istota zagadnienia polega tu jednak na tym, iż musimy dysponować kilkoma takimi detektorami, możliwie jak najbardziej od siebie oddalonymi.

Spójrzmy na rysunek 2. Strzałki wyznaczają kierunek, z którego nadbiega promieniowanie. W punktach A i B znajdują się detektory. Nadejście rozbłysku zarejestruje najpierw detektor B, a po upływie czasu  $\Delta t$  detektor A. Można tu zatem określić kąt  $\theta$ , zawarty między prostą łączącą oba detektory a kierunkiem biegu promieni:

$$\cos \theta = \frac{AC}{BC} = \frac{c\Delta t}{ct} = \frac{\Delta t}{t},$$

gdzie  $c$  jest prędkością światła, a  $t$  czasem, w ciągu którego światło przebiegłoby odległość dzielącą detektory A i B. Zwróćmy jednak uwagę, że tę samą wartość kąta otrzymamy, gdyby promieniowanie nadchodziło np. z kierunku oznaczonego przerywanymi strzałkami czy też z każdego innego kierunku tworzącego kąt  $\theta$  z prostą łączącą detektory. Za pomocą dwóch detektorów lokalizujemy zatem źródło rozbłysku na pewnym okręgu na sferze niebieskiej.

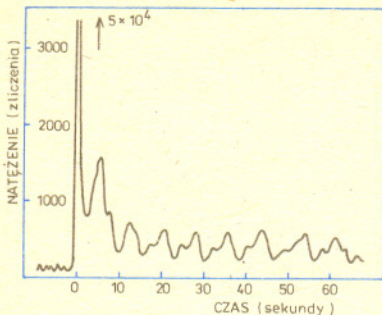


Rys. 3. Rozmieszczenie rozbłysków na sferze niebieskiej. Liczby podają odległość kątową od płaszczyzny Galaktyki.

A teraz założmy, że dysponujemy większą liczbą detektorów. Jeżeli moment nadejścia rozbłysku zarejestrują trzy detektory, będziemy mogli skonstruować dwa okręgi, a z ich przecięcia otrzymamy dwa punkty. Trzy detektory redukują zatem możliwe miejsce rozbłysku do dwóch punktów na sferze niebieskiej. No i samo nasuwa się już zdanie ostatnie, że o tym, z którego z tych dwóch punktów nadeszło promieniowanie, rozstrzygnie czwarty detektor.

Pierwotnie detektory, jeszcze tamte wojskowe, umieszczane były na satelitach obiegających naszą planetę w odległości około 120 tysięcy kilometrów (około 1/3 drogi do Księżycy). Była to seria satelitów o nazwie Vela. Ponieważ lokalizacja rozbłysku jest tym dokładniejsza, im większa jest odległość między detektorami, zaangażowano następnie do tego programu również i dalsze sondy.





Rys. 4. Przebieg rozbłysku z 5 marca 1979 roku. Główne maksimum wybiega poza skalę osiągając wartość wskazaną przez strzałkę.



**Rozwiązanie zadania M 561.** Jeśli zaszło zdarzenie, o którym mowa w zadaniu, to pierwsza reszka pojawia się najpóźniej w trzecim rzucie, tj. ciąg rozpoczyna się od R, OR lub OOR. Wzór na prawdopodobieństwo całkowite daje wtedy

(\*) 
$$p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2} + \frac{1}{8}p_{n-3},$$
 przy czym  $p_0 = p_1 = p_2 = 1$ . Podobnie jak w zadaniu M 559 znajdujemy wzór na  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$  (tutaj  $|z| < 1$ , gdyż  $p_n \leq 1$ ): po pomnożeniu obu stron (\*) przez  $z^n$  i wzięciu sumy dla  $n = 3, 4, \dots$  otrzymamy

$$\begin{aligned} f(z) - 1 - z - z^2 &= \\ &= \frac{z}{2}(f(z) - 1 - z) + \\ &+ \frac{z^2}{2}(f(z) - 1) + \frac{z^3}{8}f(z), \end{aligned}$$

skąd

$$f(z) = \frac{2z^2 + 4z + 8}{8 - 4z - 2z^2 - z^3}.$$

Wielomian w mianowniku ma jeden pierwiastek rzeczywisty  $a \approx 1,087$  oraz dwa zespolone,  $b$  i  $c$ . Ze wzorów Viète'a  $|a| |b| |c| = 8$ , ponadto  $|b| = |c|$ , zatem  $|b| = |c| > |a|$ . Metoda, zastosowana w zadaniu M 560, daje

$$f(z) = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} + \frac{C}{z-c}$$

i

$$p_n = -\frac{A}{a^{n+1}} - \frac{B}{b^{n+1}} - \frac{C}{c^{n+1}}.$$

Ponieważ  $|a| < |b| = |c|$ , pierwszy wyraz jest dominujący dla dużych  $n$  i otrzymujemy

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} \rightarrow \frac{1}{a} < 1, \quad \text{c.n.d.}$$

**Uwaga.** Można wykazać, że

$$p_n \approx \frac{1,237}{(1,087)^{n+1}}.$$
 Dokładność jest dobra nawet dla niedużych  $n$ , np.  $p_4 = 0,8125$ , podczas gdy nasze przybliżenie daje 0,814.

Na przykład rozbłysk z 5 marca 1979 roku (rys. 4) został zarejestrowany przez detektory dziewięciu różnych statków kosmicznych. Była wśród nich zdążająca ku Słońcu sonda Helios, był satelita planety Wenus (Pioneer Venus Orbiter), były sondy Wenus 11 i Wenus 12, był też znajdujący się na orbicie International Sun-Earth Explorer. Pozycja tego rozbłysku została określona z dokładnością do około 1'.

Zaobserwowano już około tysiąca rozbłysków promieniowania gamma. Detektory na sondach kosmicznych rejestrują każdego roku około setki nowych. Z jakich rejonów Wszechświata te rozbłyski pochodzą? Czym są, jaka jest ich natura? Pewne wskazówki w odniesieniu do pierwszego pytania wynikają z miejsc ich pojawiania się na niebie. Na rysunku 3 przedstawiono jest sfera niebieska, gdzie zaznaczono miejsca ponad 60 rozbłysków (tych dokładniej zlokalizowanych). Jest to w układzie współrzędnych galaktycznych, gdzie płaszczyzną odniesienia jest płaszczyzna naszej Galaktyki. Otóż nie dostrzega się żadnej wyraźnej koncentracji punktów wokół tej płaszczyzny. Nasuwa się stąd dość logiczny wniosek, że zjawiska te powstają albo bardzo blisko nas, albo też źródła tych rozbłysków usytuowane są daleko poza naszą Galaktyką.

Wybór – bliskie czy dalekie – pociąga za sobą bardzo istotne wnioski natury energetycznej, gdyż im dalszy obiekt, tym więcej musiałby emitować energii. Wykonajmy proste obliczenie. Energia, jaką odbieramy tu, w pobliżu Ziemi, od bardziej intensywnych rozbłysków, wynosi około  $10^{-3}$  erg/cm<sup>2</sup>. Gdyby źródło rozbłysku znajdowało się w odległości takiej, jak najbliższa gwiazda, tj. parę lat świetlnych, czyli około  $10^{18}$  cm, to oświetlałoby powierzchnię kulistą o takim promieniu. Musiałoby zatem wyemitować energię  $4\pi(10^{18})^2 \cdot 10^{-3}$ , czyli około  $10^{34}$  ergów. Jest to spora energia, jeśli zauważymy, że nasze Słońce, we wszystkich zakresach fal, emituje łącznie  $4 \cdot 10^{33}$  ergów na sekundę.

Jeżeli natomiast źródło rozbłysku miało by znajdować się w odległościach równych najbliższym galaktykom, czyli byłoby odległe o jakieś  $10^6$  lat świetlnych, to podobny rachunek wskazuje, iż rozbłysk niósłby energię rzędu  $10^{46}$  ergów. A takie ilości energii emituje nasza gwiazda w ciągu setek tysięcy lat! Dodajmy jeszcze w tym miejscu, iż wysuwane są też sugestie, że źródła tych rozbłysków są na odległościach kosmologicznych, a to pociągałoby za sobą emisję energii rzędu  $10^{51}$  ergów w czasie rzędu sekundy. Byłyby to zatem obiekty jaśniejsze nawet od kwazarów.

A teraz to drugie pytanie. Jaka jest natura tych obiektów, czym są? Jedno można stwierdzić od razu, iż muszą to być ciała o niewielkich rozmiarach. Taka odpowiedź nasuwa się ze spojrzenia na przebieg zjawiska (rys. 1 i 4). Cały rozbłysk trwa krótko, a na krzywej blasku pojawiają się błyski trwające zaledwie ułamki sekundy. Tego typu krótkotrwałe zjawiska zamazałyby się, gdyby to był obiekt o rozmiarach np. normalnej gwiazdy. Powinien to być zatem jakiś obiekt skondensowany – może biały karzeł, może gwiazda neutronowa? Raczej to drugie. Obserwowane przez nas rozbłyski mogłyby być zatem jakimiś poważniejszymi zdarzeniami zachodzącymi na gwiazdach neutronowych.

Za gwiazdą neutronową przemawia m.in. wspomniany już rozbłysk z 5 marca 1979 roku (rys. 4). Z przebiegu zjawiska widzimy, iż po pierwszym intensywnym maksimum na krzywej blasku pojawia się kilka kolejnych pojaśnień, następujących z okresowością około 8 sekund. Nasuwa się tu taka oto interpretacja: na obracającej się w okresie 8 sekund gwiazdzie neutronowej nastąpił jakiś wybuch i zjawisko to było widoczne przez kilka kolejnych obrotów. Obserwowaliśmy więc coś w rodzaju krótkotrwałego pulsara.

Ten marcowy rozbłysk wniósł coś jeszcze. Jak wspomnieliśmy, jego pozycja została wyznaczona bardzo dokładnie. Otóż w tym miejscu na niebie, skąd doszło promieniowanie gamma, znajduje się pozostałość po wybuchu supernowej w Wielkim Obłoku Magellana. Jeżeli ta zgodność pozycji nie jest przypadkowa, byłby to jedyny rozbłysk o znanej odległości. I, jak z tego wynika, znajdowałby się w sąsiedniej galaktyce.

Na koniec pytanie dość zasadnicze. Jakie zjawisko byłoby źródłem energii rozbłysku? Co działałoby się na takiej gwiazdzie skondensowanej? Teorii było i jest bardzo dużo – na przykład wybuch jądrowy na powierzchni, upadek planetoidy czy komety na gwiazdę neutronową itp. Przed paroma laty ktoś napisał, że liczba teorii przekracza liczbę znanych rozbłysków. Dziś już tak nie jest, niemniej problem pozostaje otwarty.

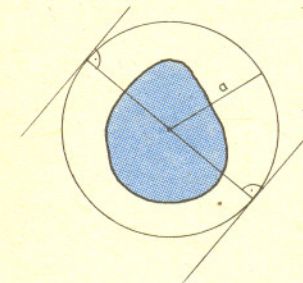


# Figury wypukłe a koła

Mgr Jarosław GÓRNICKI

W całym artykule jest mowa wyłącznie o figurach płaskich (czyli podzbiorach płaszczyzny euklidesowej).

Figurę nazywamy wypukłą, gdy każde dwa jej punkty można połączyć odcinkiem zawartym w tej figurze.



Rys. 1

Z figurą wypukłą i ograniczoną można związać dwie liczby – jej średnicę i szerokość.

**Średnicą figury** nazywamy kres górny odległości jej punktów.

**Szerokością figury** nazywamy kres dolny szerokości pasów zawierających tę figurę (pas to obszar zawarty między dwiema prostymi równoległymi, a jego szerokość to odległość tych prostych).

Aby używać tych pojęć, trzeba wykazać, że oba te kresy istnieją. Wynika to jednak wprost z własności liczb rzeczywistych (odległość to przecież liczba rzeczywista) mówiącej, że ograniczony zbiór liczb rzeczywistych ma zarówno kres dolny, jak i górny. Figura jest ograniczona, gdy zawiera się w pewnym kole – niech jego promień będzie  $a$ . Wówczas odległości jej punktów nie przekraczają  $2a$  – stąd mają kres górny. Dla oznaczenia średnicy figury używać będziemy litery  $D$ .

Łatwo też wskazać pas zawierający figurę, mający szerokość  $2a$ . Możemy zatem rozważać tylko pasy o szerokości nie większej niż  $2a$ . I znów w (ograniczonym – z dołu przez 0) zbiorze ich szerokości istnieje kres dolny. Dla oznaczenia szerokości figury używać będziemy litery  $d$ .

Na przykład średnicą prostokąta jest długość jego przekątnej, a szerokością – długość krótszego boku. Średnicą trójkąta jest długość najdłuższego boku, a szerokością – długość najkrótszej wysokości. Średnicą odcinka jest jego długość, a szerokość jest równa 0. Średnica i szerokość koła to jego (wzięta z elementarnej geometrii) średnica (czyli dwa promienie).

Inne liczby związane z figurą domkniętą i ograniczoną to promień koła opisanego i wpisanego w figurę.

Tu potrzebne jest od razu zastrzeżenie. Wiemy przecież dobrze, że w prostokąt różny od kwadratu nie można wpisać koła. Podobnie, gdy romb nie jest kwadratem, nie można na nim koła opisać. Wynika stąd, że używać tu będziemy (tak robi się w teorii figur wypukłych) innych pojęć koła opisanego i wpisanego niż te, których używa się w szkole. Zaczniemy od określenia interesujących nas liczb – promieni.

**Promieniem koła opisanego** na figurze nazywamy kres dolny promieni kół domkniętych zawierających tę figurę.

**Promieniem koła wpisanego** w figurę nazywamy kres górny promieni kół otwartych (bez brzegu) zawartych w tej figurze.

Dowód istnienia tych liczb dla dowolnej figury wypukłej i ograniczonej jest analogiczny do dowodu istnienia jej średnicy i szerokości. Dla oznaczenia tych promieni będziemy używali, odpowiednio, liter  $R$  i  $r$ .

Czytelnik bez trudu znajdzie  $R$  i  $r$  dla kilku figur. Zauważmy, że nawet dla tych figur, dla których istnieje koło opisane i wpisane w klasycznym (szkolnym) sensie, określone tu promienie mogą być inne od uzyskanych w klasyczny sposób. Np. dla trójkątów rozwartokątnych  $R$  jest mniejsze od promienia koła opisanego na trójkącie w klasycznym sensie.

Związek między liczbami  $D$ ,  $d$ ,  $R$ ,  $r$  podaje

**Twierdzenie.** Dla każdej figury  $\phi$  wypukłej i ograniczonej, mamy

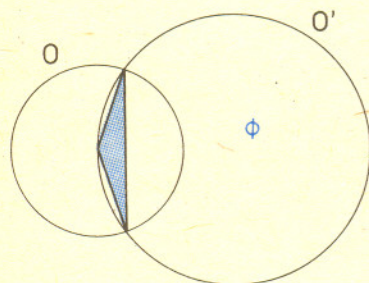
$$\text{a) } \frac{D}{2} \leq R \leq \frac{D}{\sqrt{3}},$$

$$\text{b) } \frac{d}{3} \leq r \leq \frac{d}{2}$$

i żadne z tych oszacowań nie może być poprawione.

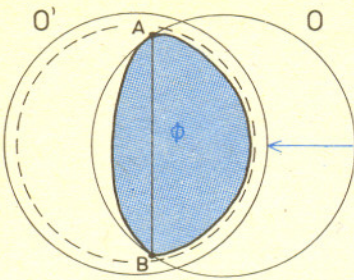
To, że oszacowania poprawione być nie mogą, wskazują (kolejno) przykłady prostokąta o średnicy  $D$ , trójkąta równobocznego o boku długości  $D$ , znów trójkąta równobocznego o wysokości  $d$  i prostokąta o szerokości  $d$ .

Z wcześniejszych rozważań wiemy, że dla każdej figury wypukłej i ograniczonej istnieje koło domknięte (odpowiednio – otwarte) zawierające tę figurę (zawarte w tej figurze) i mające promień  $R$  (odpowiednio –  $r$ ). Nazywamy to koło opisanym (wpisanym).

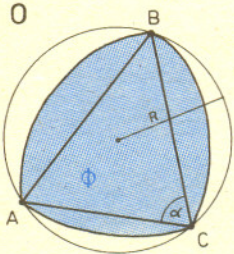


Rys. 2

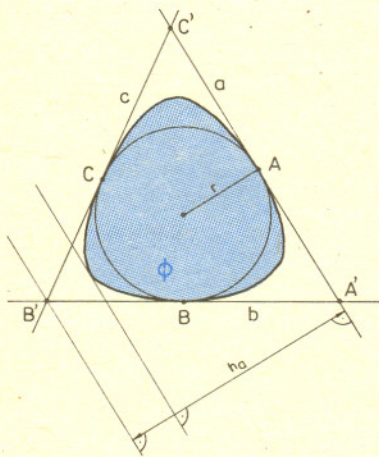




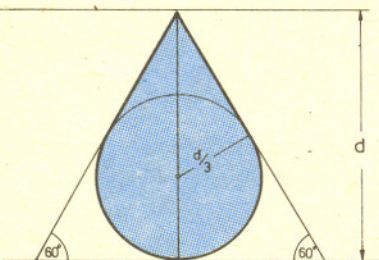
Rys. 3



Rys. 4



Rys. 6



Rys. 7

Można udowodnić obie nierówności nie przechodząc „po drodze” przez ten fakt – dowód jest wtedy bardziej skomplikowany technicznie.

Brzeg koła opisanego musi spełniać jeden z warunków:

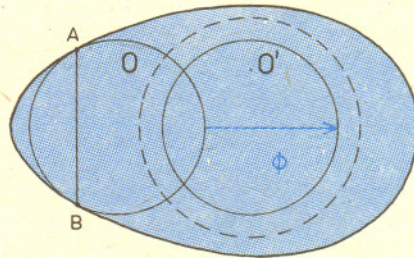
- (1) należą do niego dwa punkty brzegowe figury  $\phi$  leżące na przeciwległych końcach średnicy,
- (2) należą do niego trzy punkty brzegowe figury  $\phi$  położone w wierzchołkach trójkąta ostrokątnego.

Załóżmy bowiem, że koło o brzegu  $O$  zawiera figurę  $\phi$  i nie spełnia powyższych warunków. Zatem istnieje łuk  $AB$  okręgu  $O$  o rozwartości mniejszej niż  $\pi$  zawierający część wspólną  $O$  i  $\phi$  (ta część wspólna może być pusta, jednopunktowa, ...). Możemy więc przesunąć równolegle okrąg  $O$  w kierunku prostopadłym do cięciwy  $AB$  i znaleźć koło o mniejszym promieniu zawierające  $\phi$  (rys. 3).

Z warunków (1) i (2) wynikają oszacowania podane w twierdzeniu. Ponieważ figura  $\phi$  jest zawarta w kole o promieniu  $R$ , więc  $2R \geq D$ , czyli  $R \geq \frac{D}{2}$ . Jeżeli teraz okrąg  $O$  zawiera trzy punkty figury będące wierzchołkami trójkąta ostrokątnego  $ABC$  (rys. 4), to co najmniej jeden z kątów ma miarę nie mniejszą niż  $\frac{\pi}{3}$ . Sinus tego kąta  $\alpha$  jest nie mniejszy niż  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , bok trójkąta leżący naprzeciw tego kąta jest nie większy niż  $D$ , więc na podstawie twierdzenia sinusów mamy

$$2R = \frac{|AB|}{\sin \alpha} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}D, \text{ czyli } R \leq \frac{D}{\sqrt{3}}.$$

W przypadku nierówności b) postępujemy podobnie. Brzeg koła wpisanego zawiera dwa punkty brzegowe figury  $\phi$  położone na końcach średnicy lub trzy punkty brzegowe figury  $\phi$  stanowiące wierzchołki trójkąta ostrokątnego (rys. 5).



Rys. 5

Koło wpisane zawiera się w każdym pasie zawierającym  $\phi$ . Ma zatem miejsce nierówność  $2r \leq d$ , czyli  $r \leq \frac{d}{2}$ . Jeśli zaś brzeg koła wpisanego  $O'$  zawiera trzy punkty brzegowe  $A, B, C$  tej figury, stanowiące wierzchołki trójkąta ostrokątnego, to z brzegów pasów zawierających  $\phi$  można utworzyć trójkąt  $A'B'C'$  (rys. 6) opisany jednocześnie na figurze  $\phi$  i okręgu  $O'$ . Oznaczmy długości boków tego nowego trójkąta przez  $a, b, c$  ( $a$  – najdłuższy z boków), a odpowiednie wysokości przez  $h_a, h_b, h_c$ . Pole powierzchni trójkąta  $A'B'C'$  wynosi z jednej strony  $\frac{a+b+c}{2} \cdot r$ , z drugiej zaś  $\frac{a}{2} \cdot h_a$ . Ponieważ  $a \geq b, a \geq c$ , więc z równości  $\frac{a+b+c}{2} \cdot r = \frac{a}{2} \cdot h_a$  wynika, że  $h_a = (1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}) \cdot r \leq 3r$ , więc  $r \geq \frac{1}{3} \cdot h_a$ . Ponieważ wysokość trójkąta  $A'B'C'$  jest nie mniejsza niż szerokość figury  $\phi$ , tzn.  $h_a \geq d$ , więc  $r \geq \frac{d}{3}$ .

Z udowodnionego twierdzenia wynikają dwa ważne fakty.

**Wniosek 1** (H.W.E. Jung). Każdą figurę o średnicy  $D$  można zawrzeć w kole o promieniu  $\frac{D}{\sqrt{3}}$ .

(Inny dowód tego faktu podany jest w *Delcie* 3/1985.)

**Wniosek 2** (W. Blaschke, 1914). Każda figura wypukła o szerokości  $d$  zawiera koło o promieniu  $\frac{d}{3}$ .

Z rezultatem Blaschkego wiąże się nie rozwiązane dotychczas zagadnienie: znaleźć figurę o największym polu, którą można umieścić wewnątrz każdej figury wypukłej o szerokości  $d$ .

Uzyskane wyniki gwarantują jedynie istnienie takiej figury, ale nie mówią nic o jej kształcie. Oto propozycja: wewnątrz każdej figury wypukłej o szerokości  $d$  można umieścić zakreskowaną figurę z rysunku 7; jej pole wynosi

$$\frac{3\sqrt{3} + 2\pi}{27} d^2 \approx 0,4251 \cdot d^2.$$

Może Czytelnik znajdzie kontrprzykład lub wskaże lepszą kontynuację.





# mała delta

## Dlaczego narciarz pochyła się do przodu?

Dlaczego instruktor narciarstwa ciągle powtarza początkującym narciarzom, aby w czasie jazdy z góry pochylić się do przodu? Początkującym narciarzom taka rada wydaje się dziwna i nienaturalna. Przecież aby ustać na stoku, musimy zachować pozycję pionową – tak jak drzewa rosnące obok trasy zjazdowej. Dlatego zaskakujące wydaje się polecenie „nie stać pionowo, pochylić się!”. Spróbujmy uzasadnić, że rady instruktora są rzeczywiście dobre.

Dla uproszczenia naszych rozważań stok narciarski zastąpimy równią pochyłą, po której ciała zsuwają się bez tarcia. Na końcu zajmiemy się efektami wywołanymi tarciem i oporem powietrza.

Rozpatrzmy ciało o masie  $m$  zsuwające się z równi pochyłej nachylonej pod kątem  $\alpha$  do poziomu. Siłę ciężkości  $F = mg$  o kierunku pionowym możemy przedstawić jako sumę wektorową sił składowych. Wybierzmy składowe w kierunku równoległym i prostopadłym do równi. Wówczas

$$F_{\parallel} = mg \sin \alpha,$$

$$F_{\perp} = mg \cos \alpha.$$

Ponieważ w czasie jazdy ciało nie odrywa się od równi (innymi słowy, przyspieszenie w kierunku prostopadłym do równi wynosi zero), to na ciało musi działać siła równoważąca  $F_{\perp}$ . Siłę tę nazywamy siłą reakcji równi  $N$ . Ma ona wartość i kierunek taki jak  $F_{\perp}$ , natomiast przeciwny zwrot. Gdy pomijamy wszystkie siły oporu, to jedyną niezrównoważoną siłą jest  $F_{\parallel}$  i ciało zsuwa się z przyspieszeniem  $a$  danym wzorem

$$F_{\parallel} = mg \sin \alpha = ma,$$

$$a = g \sin \alpha.$$

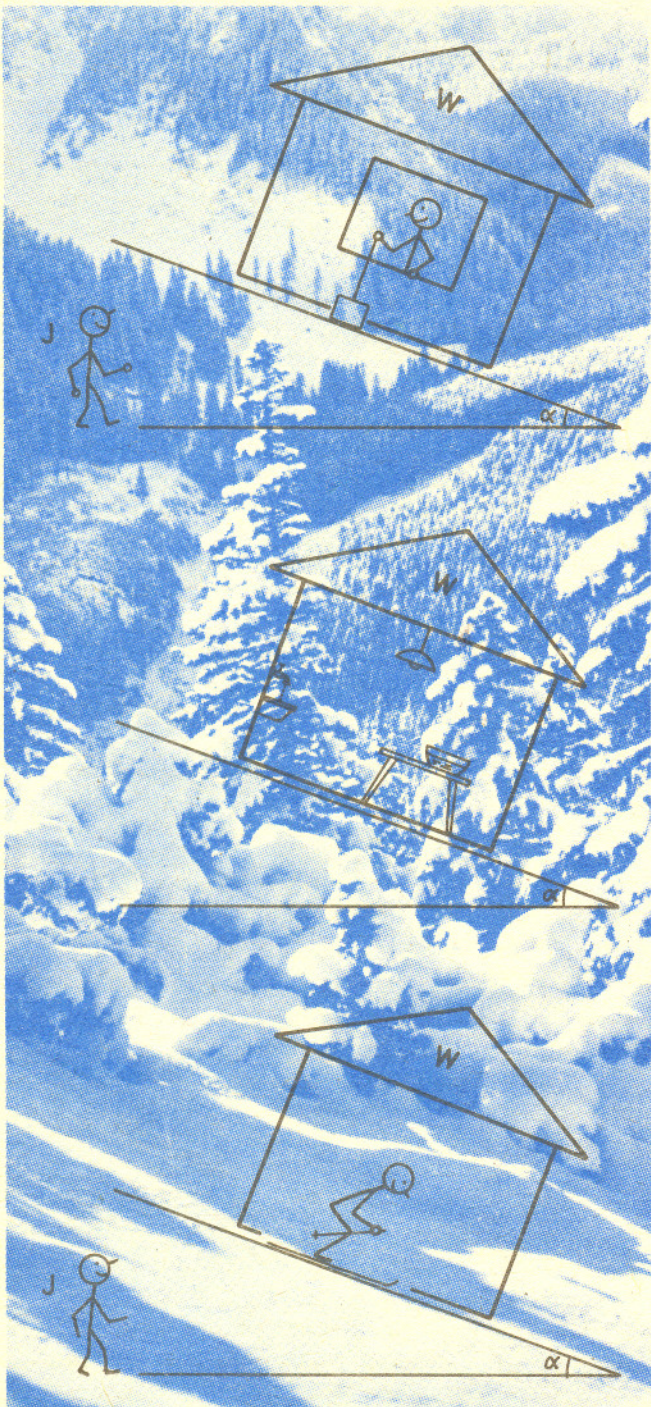
Przyspieszenie zsuwających się mas jest więc niezależne od ich masy.

Na początku powiedzieliśmy, że aby ustać na stoku, staramy się utrzymać pozycję pionową. Spróbujmy zastanowić się, czy pion dla zjeżdżającego narciarza jest tym samym pionem, co dla narciarza stojącego. Dla krótkości zjeżdżającego narciarza nazwiemy Wackiem, a stojącego – Jackiem. W jaki sposób najłatwiej wyznaczyć kierunek pionu? Wystarczy zawiesić na nitce jakiś przedmiot i poczekać, aż nitka zawisnie nieruchomo. Kierunek nitki wyznaczy nam kierunek pionu. Wyobraźmy sobie teraz dom zsuwający się po równi pochyłej, a w środku domu Wacka próbującego ustalić kierunek pionu. Zawiesza więc jakiś przedmiot, na przykład klocek, na nitce i nitka wyznacza kierunek pionu. Jaki kierunek będzie miała nitka?





Dla fizyka zadanie to nie przedstawia żadnych trudności. Układ odniesienia związany z domem, w którym znajduje się Wacek, jest układem nieinercyjnym, poruszającym się z przyspieszeniem  $a$ . Dlatego na klocek zawieszony na nitce oprócz siły ciężkości i siły napięcia nici działa jeszcze siła bezwładności  $B$  o wartości  $ma$  skierowana przeciwnie do kierunku zsuwania się domu. Przez  $m$  oznaczyliśmy tutaj masę klocka. Suma wektorowa  $\vec{F} + \vec{B}$  ma więc kierunek prostopadły do równi. Względem domu klocek spoczywa, więc nic musi równoważyć  $\vec{F} + \vec{B}$ . Dlatego nitka będzie zwisała w kierunku prostopadłym do równi.



Ten wynik możemy otrzymać bez odwoływania się do skomplikowanych pojęć: układ nieinercyjny i siła bezwładności. Wyobraźmy sobie Jacka stojącego na stoku i obserwującego Wacka w zsuwającym się domu. Przypuśćmy, że klocek przywiązany przez Wacka do nitki znajduje się na zewnątrz domu i leży na stoku. Wacek trzyma koniec luźnej nitki. Wiemy, że ciała na równi pochyłej bez tarcia zsuwają się z tym samym przyspieszeniem. Jeżeli w pewnej chwili dom i klocek miały tę samą prędkość (na przykład zerową w umownej chwili początkowej), to będą zsuwały się obok siebie. Jacek będzie widział więc dom i klocek zsuwające się po równi coraz szybciej, ale zawsze mające tę samą prędkość chwilową. Niech Wacek zacznie naprężyć nitkę, aż klocek uniesie się nieco ponad równię. Teraz nitka równoważy składową prostopadłą ciężaru klocka  $F$ . Ale siła, z którą nitka działa na klocek, jest prostopadła do kierunku ruchu. Nie może zmienić przyspieszenia ani klocka, ani domu. Widzimy więc, że nitka będzie miała kierunek prostopadły do równi. Dla Wacka pion jest zatem prostopadły do równi. Woda z kranu w zsuwającym się domu będzie ciekła w kierunku prostopadłym do równi, zupa w talerzu Wacka będzie miała powierzchnię równoległą do równi itp. Jeżeli Wacek stanie na wagę, to odczyta swój ciężar równy  $mg \cos \alpha$ . Życie w domu wygląda prawie normalnie. Jedyne kierunki pionu i poziomu uległy zmianie i ciężary ciał zmniejszyły się  $\cos \alpha$ -razy. Dla stojącego Jacka wszystko w domu, łącznie z Wackiem, będzie „pochylone”. Wacek może teraz przypiąć narty, delikatnie przejść na stok i zjeżdżać w dół niezależnie od domu. Dom i Wacek będą zsuwać się nadal z tym samym przyspieszeniem, a dla Wacka kierunek prostopadły do równi w dalszym ciągu będzie pionem. Teraz już wiemy, dlaczego instruktor powtarza „pochyl się do przodu”.

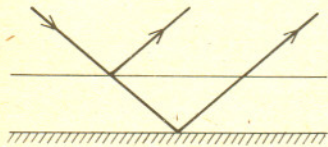
Rozpatrzmy na koniec realistyczną sytuację z tarciem i oporem powietrza. Tym razem po okresie przyspieszonego ruchu dom będzie zsuwał się ze stałą prędkością, gdy siły oporu zrównoważą siłę ściągającą  $F$ . Wówczas pion w domu będzie „prawdziwym” pionem, tak jak dla stojącego Jacka. Wacek po zapięciu nart w domu będzie stał w kierunku równoległym do drzew. Ale jeśli wyjdzie na stok, będzie musiał się pochylić do przodu, aby zrównoważyć siłę oporu powietrza starającą się przewrócić go do tyłu.

Małą Deltę przygotował Jan KALINOWSKI

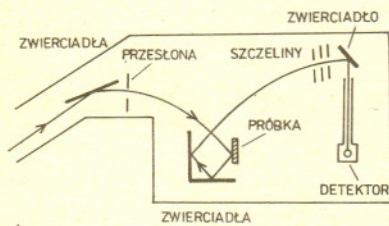


Dr Konrad BLINOWSKI

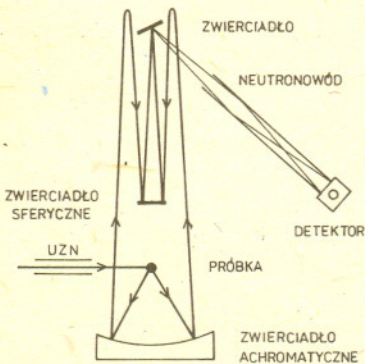
Jest wiele przyczyn, dla których fizycy interesują się neutronami o skrajnie niskich energiach. Już sama możliwość uzyskania gazu neutronowego jest wystarczającym powodem, aby dążyć do zrealizowania tego eksperymentalnie. Dysponowanie gazem neutronowym pozwala na przeprowadzenie niezwykle interesujących i ważnych dla fizyki badań. Jednym z nich jest dokładne wyznaczenie średniego czasu życia  $\tau$  swobodnego neutronu – parametru potrzebnego w teorii oddziaływań słabych. Swobodny neutron jest promieniotwórczy. Rozpada się na proton, elektron i antyneutrino. Badania rozpadu neutronów prowadzone na wiązce neutronów pozwoliły na pomiar  $\tau$  z dokładnością 1,5%,  $\tau = (918 \pm 14)$  s. W odniesieniu do podstawowej cząstki elementarnej, jaką jest neutron, taka dokładność jest wysoce niewystarczająca. Np. mniej znana cząstka elementarna – mion ( $\mu$ ) – ma czas życia wyznaczony z dokładnością 0,03%,  $\tau = (2,1983 \pm 0,0008) \cdot 10^{-6}$  s. Badania rozpadu na wiązce są obciążone dużymi błędami wynikającymi z niedokładności pomiaru bezwzględnej liczby neutronów znajdujących się w obserwowanym obszarze i określenia granic tego obszaru oraz z niedokładnie znanej wydajności detektorów rejestrujących protony lub elektrony z rozpadu. Uwieszenie ultrazimnych neutronów w zamkniętym pojemniku pozwala na zastosowanie tylko jednego detektora. Jeśli uda się zamknąć neutrony tak, aby ich ucieczka była znikoma, wówczas szybkość ubywania neutronów będzie zależać tylko od rozpadu badanego tak samo, jak rozpad promieniotwórczego izotopu. W takich warunkach na dokładność pomiaru czasu życia wpłyną jedynie błędy statystyczne, a nie aparaturowe.



Rys. 1. Zwierciadlane odbicie neutronów od cienkiej warstwy.



Rys. 2. Schemat działania grawitacyjnego spektrometru UZN.

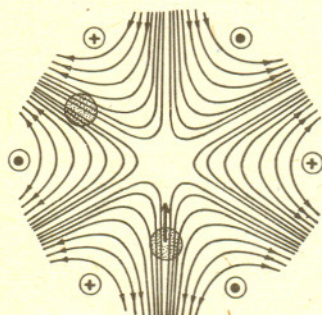


Rys. 3. Zasada funkcjonowania mikroskopu neutronowego.

Chociaż neutron jest elektrycznie obojętny – stąd jego nazwa – brak ładunku nie oznacza, że ładunki (+) protonu i (-) elektronu nie mogą w neutronie tworzyć dipolowego momentu elektrycznego. Taką możliwość przewiduje kwarkowy model neutronu. Istnienie dipolowego momentu w neutronie świadczyłoby o łamaniu zasady zachowania symetrii czasowej. Polega ona na tym, że układ opisany funkcją zależną od czasu pozostaje tym samym układem, gdy znak czasu zmienimy na przeciwny. Wyobraźmy sobie neutron z momentem dipolowym równoległym do spinu. Odwrócenie czasu (w równaniu ruchu odwraca się bieg czasu przez podstawienie w miejsce  $t$  wartości ujemnej  $-t$ ) zmieni kierunek wirowania na przeciwny, co oznacza odwrócenie kierunku spinu. Orientacja momentu dipolowego pozostanie jednak nie zmieniona, bo znaki ładunków (+) i (-) nie zależą od czasu. Otrzymamy więc inny neutron z dipolem elektrycznym antyrównoległym do spinu! Czyż nie jest to problem fascynujący każdego, kogo interesują fundamentalne zagadnienia budowy materii? Jeżeli neutron ma moment dipolowy, to jego energia w polu elektrycznym będzie zależała od orientacji dipola względem kierunku pola. Po zmianie orientacji neutronu – co możemy zrobić posługując się spolaryzowanymi neutronami – jego energia zmieni się o wielkość proporcjonalną do wartości momentu dipolowego i natężenia zewnętrznego pola elektrycznego. Dostrzegamy już argument przemawiający za użyciem do tych badań neutronów o jak najmniejszych energiach. Łatwiej przecież wykryć małą zmianę energii, gdy sama energia też jest mała. Istotnie, eksperymenty z zimnymi neutronami pozwoliły na oszacowanie górnej granicy momentu dipolowego neutronu jako  $D \leq 3 \cdot 10^{-24} e \cdot \text{cm}$ . Natomiast zastosowanie bardzo zimnych i ultrazimnych neutronów obniżyło wynik do  $D \leq 0,8 \cdot 10^{-25} e \cdot \text{cm}$ .

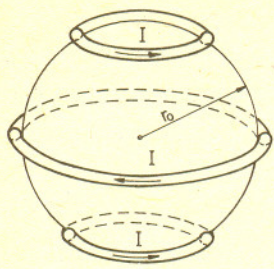
Energia bardzo zimnych neutronów (BZN) jest porównywalna z typowymi wartościami jądrowych potencjałów rozpraszania. Dzięki temu BZN są silnie rozpraszane na fluktuacjach gęstości materii, przy czym rozpraszanie zachodzi pod dość dużymi kątami, co ułatwia prowadzenie pomiarów. Fluktuacje mogą dotyczyć składu próbki albo namagnesowania spowodowanego np. strukturą domenową. Te własności BZN czynią je przydatnymi do badania niejednorodności strukturalnych wewnątrz próbek oraz w warstwach powierzchniowych ciał stałych i cieczy.

Omówione wcześniej zachowanie się BZN padających na powierzchnię oddzielającą dwa ośrodki optyczne i ulegających odbiciu może być wykorzystane nie tylko do wyznaczania amplitudy rozpraszania, ale również do pomiaru gęstości i grubości cienkiej warstwy. Gęstość *wszak* zależy bezpośrednio od liczby atomów w jednostce objętości  $N$ . Podczas odbijania się BZN na granicach cienkiej warstwy, której grubość jest porównywalna z  $\lambda$ , powstają obrazy interferencyjne fal odbijanych od obydwu powierzchni. Badając takie odbicia można określić grubość i gęstość warstwy.

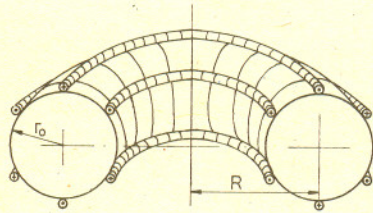


Rys. 4. Rozkład linii sił w heksapolowym polu magnetycznym.

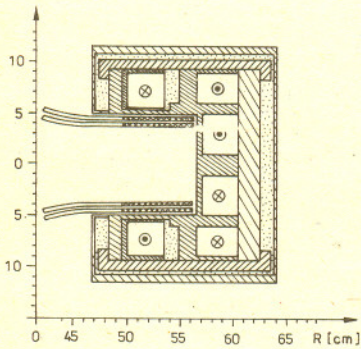




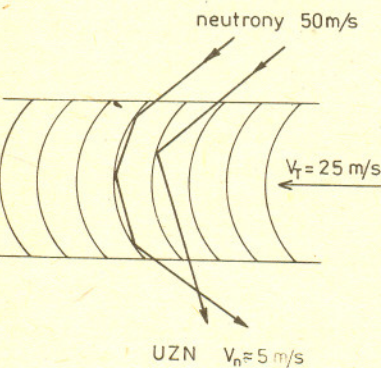
Rys. 5. Butelka magnetyczna z uzwojeniami nadprzewodzącymi.



Rys. 6. Idea torusa magnetycznego.



Rys. 7. Przekrój poprzeczny torusa ukazujący rozmieszczenie uzwojeń nadprzewodzących, oznaczonych ⊙ i ⊗. Maksymalne natężenie pola wynosi 3,5 T, gradient pola 1,2 T/cm. Na górze i na dole wnętrza widoczne liczniki scyntylacyjne do rejestracji elektronów z rozpadu neutronów.



Rys. 8. Wycinek obwodu turbiny do spowalniania neutronów.  $v_T$  - szybkość liniowa łopatek umocowanych na obwodzie koła.

Ze względu na bardzo małą energię ultrazimne neutrony (UZN) stanowią niezwykle czułe narzędzie do wykrywania małych zmian energii zachodzących podczas oddziaływania z materią. Rolę analizatora energii spełnia ziemskie pole grawitacyjne. Możemy łatwo obliczyć, że neutron o energii  $10^{-7}$  eV, poruszający się przeciwnie do kierunku grawitacji, wznieśnie się na wysokość 1 m. Po zatrzymaniu się, oczywiście, znacznie spadnie ruchem jednostajnie przyspieszonym zwiększając swoją energię tak jak każdy spadający w próżni przedmiot. Rysunek 2 przedstawia zasadę działania pierwszego neutronowego spektrometru grawitacyjnego, zbudowanego przez dr. A. Steyerla z Politechniki Monachijskiej. Regulowane położenie szczelin i zwierciadła umieszczonego nad detektorem określa bieg zakrzywionego w polu ciężkości toru neutronów, a tym samym ich energię. Odległość detektora od zwierciadła jest tak dobrana, aby spadające neutrony miały energię wystarczającą do przeniknięcia przez okienko detektora. Spektrometr UZN służy do badania wzbudzeń powierzchniowych oraz do badania dynamiki makromolekuł m.in. substancji biologicznych. UZN zostały również wykorzystane do realizacji mikroskopu neutronowego, którego schemat pokazany jest na rysunku 3. Część neutronów rozproszonych na próbce dochodzi do zwierciadła achromatycznego i zostaje od niego odbita poruszając się do góry po torach parabolicznych. Spadając na zwierciadło sferyczne neutrony znowu ulegają odbiciu i, zogniskowane na zwierciadle płaskim, odbijają się po raz trzeci w kierunku neutronowodu i detektora. Uzyskany „obraz” mikroskopowy jest zupełnie niepodobny do obrazów w mikroskopach optycznych lub elektronowych, niemniej jednak zawiera informacje o rozkładzie gęstości próbki, ze zdolnością rozdzielczą do 1  $\mu$ m.

Magazynowanie UZN w zamkniętych pojemnikach, chociaż w zasadzie proste, okazało się w realizacji niezwykle trudne. Czas przebywania neutronów zgromadzonych w przechowalniku jest znacznie krótszy niż należałoby oczekiwać na podstawie czasu życia neutronu. Podczas zderzeń ze ściankami naczynia jedne neutrony odbijają się sprężysto, inne odbierają porcję energii i tak „podgrzane” przy następnym spotkaniu ze ścianką przedostają się na zewnątrz. Ubywanie neutronów może być też spowodowane ich absorpcją przez zanieczyszczenia osiadłe na ściankach, przede wszystkim wodór. Należało więc zbudować taki pojemnik, aby neutrony nie mogły mieć w nim kontaktu z jakimkolwiek materiałem. Spełnienie tego wymagania stało się możliwe dzięki temu, że neutron ma moment magnetyczny. Magnetyczny dipol, jakim jest neutron, poruszający się w polu magnetycznym dostatecznie wolno i przeciwnie do linii sił pola, będzie hamowany aż do zatrzymania. Następnie zacznie się cofać ruchem przyspieszonym, podobnie jak to się dzieje w polu grawitacyjnym. Jeśli w drodze powrotnej napotka znowu pole magnetyczne skierowane przeciwnie, to sytuacja powtórzy się – na podobieństwo ruchu wahadła lub oscylatora. Neutron zostanie uwięziony bez możliwości przekroczenia granicy prędkości pozwalającej na ucieczkę. Warunki takiego ukształtowania pola magnetycznego spełnione są w heksapolowym polu magnetycznym (Rys. 4). Ideę butelki magnetycznej z heksapolową geometrią zrealizowano praktycznie w Instytucie Lauego-Langevina w Grenoble. Kulisty pojemnik jest otoczony trzema pierścieniami nadprzewodzących uzwojeń, wytwarzających sferyczne heksapolowe pole magnetyczne (Rys. 5). Zostaje on napełniony nadciętym helem i umieszczony w wiązce zimnych neutronów o energii  $E \approx 0,001$  eV. Neutrony o tej energii wchodzić przez przezroczystą dla nich ściankę do wnętrza naczynia. Rozpraszają się na nadciętym płynie tracąc prawie całą swoją energię i stają się neutronami ultrazimnymi. Ich ucieczka jest uniemożliwiona przez pole magnetyczne również po opróżnieniu pojemnika z helu. Analogiczne warunki przechowywania neutronów uzyskuje się w torusie magnetycznym, w którym UZN krążą po orbicie, podobnie jak cząstki naładowane w cyklotronie (Rys. 6 i 7). W pierścieniowym zbiorniku neutronów wystarczy wytworzenie pola magnetycznego tylko po zewnętrznej stronie torusa, ponieważ siła odśrodkowa neutronów nie pozwala im na ucieczkę do środka.

Do spowalniania zimnych neutronów, w celu otrzymania ultrazimnych neutronów, służą też mechaniczne turbiny, w których łopatki umieszczone na obwodzie odbijają neutrony jak uciekające przed nimi zwierciadła. Podczas odbicia, jak w zjawisku Dopplera, zmienia się długość fali neutronu w wyniku przekazania porcji pędu ruchomej łopatce. Rysunek 8 ilustruje zasadę spowalniania neutronów za pomocą turbiny. A teraz spójrzmy na odwrotną sytuację. Czy możliwe jest przyspieszenie bardzo zimnych neutronów przez zmianę kierunku obrotu turbiny? Ależ tak! Tylko zaraz powstaje pytanie – w jakim celu? Po co znowu zwiększać energię neutronów po tylu skomplikowanych zabiegach ze spowalnianiem? Taki zamiar, wydawałoby się, zakrawa na absurd, ale nim nie jest. Kryje się w nim wyrachowany i bardzo





**Rozwiązanie zadania M 559.**  
Ponieważ  $u_n \leq 2^n$ , więc szereg jest zbieżny bezwzględnie dla  $|z| < \frac{1}{2}$ .  
Mamy

$$u_n z^n = u_{n-1} z^n + u_{n-2} z^n.$$

Oznaczmy  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ . Sumując dla  $n = 2, 3, \dots$  otrzymamy

$$f(z) - z = z f(z) + z^2 f(z),$$

(tu korzystamy ze zbieżności bezwzględnej). Ostatecznie

$$f(z) = \frac{z}{1-z-z^2}.$$

obiecujący pomysł. Do odbicia neutronów zastosowana jest jednak nie turbina z łopatkami, lecz płytka monokrystaliczna. Schłodzenie od temperatury pokojowej do temperatury ciekłego wodoru, lub jeszcze lepiej helu, powoduje skupienie widma neutronów z szerokiego przedziału energii w przedziale o małej szerokości. Wszystkie neutrony z widma termicznego mają teraz zbliżoną energię. Dostarczenie tym neutronom jednakowej porcji energii prowadzi do zwielokrotnienia natężenia neutronów o ściśle określonej energii równej sumie wartości początkowej i dodanej.

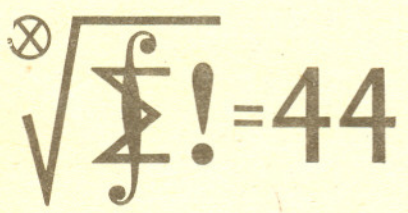
Odkąd zaczęto stosować neutrony, czy to jako przedmiot badań, czy jako narzędzie badawcze, zawsze istniała potrzeba zwiększenia uzyskiwanych natężeń. Nic dziwnego zatem, że po wyczerpaniu bezpośrednich możliwości technicznych, takich jak zwiększenie gęstości mocy reaktorów, wyspecjalizowanie konfiguracji rdzenia i optymalizacji elementów paliwowych, dalszy postęp prowadzi przez realizację coraz bardziej wyrafinowanych pomysłów. Zwiększenie natężenia neutronów pozwala na dokładniejsze i szybsze wykonywanie eksperymentów, a w konsekwencji na bardziej efektywne wykorzystywanie tak kosztownych urządzeń, jakimi są reaktory.

## Klub 44

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 3$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł *Weterana*. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1989.



### Czołówka ligi zadaniowej Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 189 (WT=2,48), 190 (WT=2,25), z numeru 4/1989

Henryk Kasprzak	- Żary	45,24 pkt
Józef Siwy	- Baziska G.	40,89 pkt
Adam Czornik	- Bytom	40,37 pkt
Krzysztof Zawislawski	- Warszawa	39,34 pkt
Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	37,99 pkt

Pan Kasprzak w znakomitym stylu kończy drugą rundę „44”.

### Zadania z matematyki nr 199, 200

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

**199.** W trójkącie równoramiennym  $ABC$  ( $|AC| = |BC|$ ) odcinek  $CM$  jest wysokością. Niech  $P$  będzie dowolnym punktem tego odcinka. Prowadzimy półprostą  $AP^-$ : jej punkt przecięcia z okręgiem  $\Omega$  opisanym na trójkącie  $ABC$  oznaczmy przez  $D$ . Rozważamy okrąg  $\Gamma$  styczny do odcinków  $PD$ ,  $PB$ , i do łuku  $BD$  okręgu  $\Omega$ . Przy jakim położeniu punktu  $P$  na odcinku  $CM$  średnica okręgu  $\Gamma$  jest maksymalna?

**200.** Na stole stoi sześcian o krawędzi długości  $n$ , zbudowany z  $n^3$  klocków - kostek jednostkowych. Na ile sposobów można go całkowicie rozebrać zdejmując kolejno po jednym klocku? (Wolno za każdym razem zdjąć dowolny klocek, na którym nie stoi żaden inny.) Jaka jest najmniejsza wartość  $n$ , dla której znaleziona liczba sposobów przekroczy trylion ( $10^{18}$ )?

Zadanie 200 zaproponował pan Janusz Fiett z Warszawy.

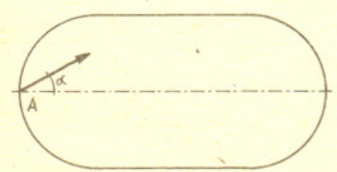
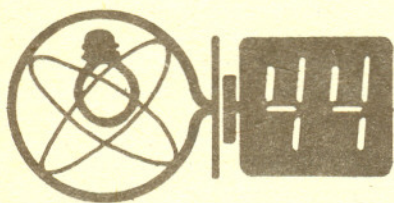
### Zadania z fizyki nr 97, 98

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

**97.** Wyobraźmy sobie w miejscu Ziemi oraz Marsa planety składające się wyłącznie z wody (i nie mające księżyców). Jakie co najmniej powinny być średnice tych planet, aby mogły one istnieć w sposób trwały? Przedyskutować czynniki decydujące o trwałości wodnych planet.

**98.** Po tafli lodowiska otoczonego owalną bandą (rysunek), ślizga się krążek hokejowy. Krążek wystrzelony jest z punktu  $A$  pod dowolnym kątem  $\alpha$  względem osi lodowiska. Przy jakich wartościach kąta  $\alpha$  krążek może wrócić do punktu startowego? Zakładamy, że banda ogranicza figurę złożoną z kwadratu i dwóch połówek koła oraz że odbicie krążka od bandy jest doskonale sprężyste.

Zadanie kwalifikuje się do rozwiązania numerycznego. W przypadku wykorzystania komputera prosimy o dołączenie programu do rozwiązania.





W Deltie 8/1989 na stronie 12 wydrukowano tylko początkowy fragment programu zatytułowanego PROJEKCJA 3/2-D. Zakończenie „zniknęło” już po podpisaniu przez Redakcję numeru do druku. Zagubiony fragment drukujemy poniżej. Przepraszamy.

```
740 REM
750 FOR j=4 TO 32 STEP 2
760 PLOT 7*j+6,19: DRAW 0,3
770 NEXT j
780 REM
790 FOR j=4 TO 22 STEP 2
800 PLOT 19,7*j+6: DRAW 3,0
810 NEXT j
820 REM
830 REM Projektcja
840 FOR n=1 TO nk
850 LET y1=q1+dt*FN A(q1,q2,q3)/2
860 LET y2=q2+dt*FN B(q1,q2,q3)/2
870 LET y3=q3+dt*FN C(q1,q2,q3)/2
880 LET x1=q1+dt*FN A(y1,y2,y3)
890 LET x2=q2+dt*FN B(y1,y2,y3)
900 LET x3=q3+dt*FN C(y1,y2,y3)
910 PLOT sx1+sx*x1, sx2+sx*x2
920 LET q1=x1: LET q2=x2: LET q3=x3
930 NEXT n
```

*Drodzy Członkowie i Sympatycy Klubu!*

*Przypominamy, że co miesiąc przyznajemy nagrodę książkową dla autora najciekawiej opracowanego rozwiązania postawionych zagadnień.*

Postaraj się o dwa przenośne odbiorniki radiowe. Za ich pomocą możesz wykonać wiele ciekawych doświadczeń z akustyki:

1. Nastaw oba radioodbiorniki na tę samą stację i umieść je w odległości kilku metrów od siebie. Doświadczenie najlepiej przeprowadzać na otwartej przestrzeni. Zmieniając położenie odbiornika, jakim jest twoje ucho, powinieneś zaobserwować zjawisko interferencji fal głosowych.

2. Jeżeli radioodbiorniki mają zakres UKF, to może uda ci się nastroić je na pisk nadawczej stacji telewizyjnej. Wtedy badając zjawisko interferencji możesz wyznaczyć częstotliwość drgań.

W obu proponowanych eksperymentach opisz dokładnie (z podaniem odległości wzajemnego ustawienia radioodbiorników i ucha) przebieg doświadczenia, sposób wnioskowania i wyniki.

3. Zbadaj, jaką największą prędkość potrafisz uzyskać puszczając „światelnego zajęczaka” za pomocą lusterka. Możesz to robić w odkrytym terenie w słoneczny dzień tak, aby zajęczak poruszał się w dużej odległości. Zastanów się, czy można w ten sposób osiągnąć prędkość większą od prędkości światła. Jeżeli byłoby to możliwe, to jak to pogodzić z twierdzeniem, że nie można osiągnąć prędkości większej niż prędkość światła?

*Redaguje doc. dr Tomasz HOFMOKL*

Listy prosimy przysyłać pod adresem:

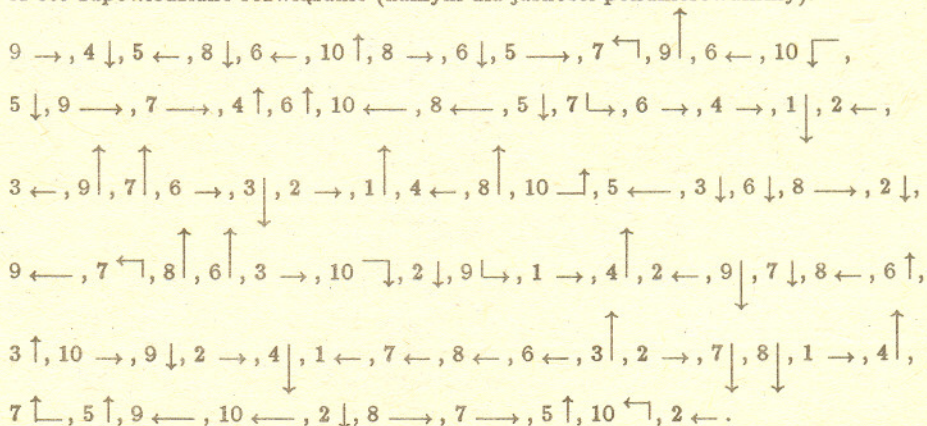
Korespondencyjny Klub Fizyków, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego, ul. Hoża 69, 00-681 Warszawa.

### Rudy osioł

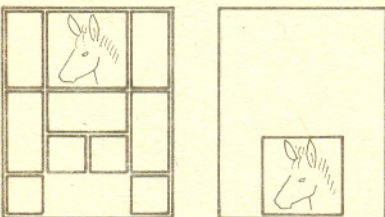
Tak podobno nazywa się układanka przedstawiona na rysunku. Ścisłej biorąc, nie jest to układanka, ale przesuwanka. W prostokątnej ramce  $4 \times 5$  znajduje się 10 prostokątnych kamieni: jeden  $2 \times 2$ , pięć  $1 \times 2$  i cztery  $1 \times 1$ . Kamieni z ramki wyjmować nie wolno – wolno je tylko przesuwać. Zadanie polega na takim przemieszczeniu kamieni, by kamień z osłem znalazł się na środku przy dolnej krawędzi ramki (położenie pozostałych kamieni nas nie interesuje). Wynikiem gry (gramy sami ze sobą) jest liczba przesunięć – za przesunięcie uważamy dowolny ruch jednego kamienia. Wynik jest tym lepszy, im liczba jest mniejsza.

Nie jest (o ile wiadomo) znany najlepszy wynik. Niżej podany jest sposób uzyskania liczby 81. Ciekawą pracą byłoby uzasadnienie, że jest on najmniejszy z możliwych, lub wskazanie sposobu uzyskania liczby mniejszej (najlepiej najmniejszej – też z dowodem).

A oto zapowiedziane rozwiązanie (kamyki dla jasności ponumerowaliśmy):



*Opracował M. K.*



1	2	3
4	5	6
7	8	9
10		





Paul Hanson z Uniwersytetu Kalifornijskiego w Santa Barbara zbudował nowy rodzaj mikroskopu – jonowy mikroskop skaningowy (ang. scanning ion-conductance microscope – SICM). Idea działania mikroskopu jest podobna do idei działania tunelowego mikroskopu skaningowego, z tym że w SICM skanowanie odbywa się za pomocą mikropipetki, z której wypływa roztwór jonów. SICM pozwoli nie tylko na uzyskiwanie obrazów żyjących komórek biologicznych w ich naturalnym środowisku bez ich niszczenia, ale również na obserwację przepływu jonów przez błonę komórkową.

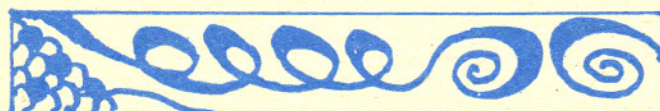


Niektóre twierdzenia geometrii opisują zupełnie nieprawdopodobną regularność otaczającej nas rzeczywistości. Np. takie:

Jeśli na bokach dowolnego trójkąta  $ABC$  zbudujemy (na zewnątrz) trzy podobne (też dowolne) trójkąty  $PCB$ ,  $CQA$ ,  $BAR$ , to środki okręgów opisanych na tych trójkątach utworzą trójkąt też podobny do nich.



Prawdopodobnie niedługo radioastronomia przestanie istnieć. Umieszczanie jeszcze silniejszych nadajników na satelitach do łączności satelitarnej uniemożliwi badanie naturalnego promieniowania radiowego docierającego z przestrzeni kosmicznej. Z kolei satelity szpiegowskie wyposażone w reaktory jądrowe uniemożliwiają obserwację promieniowania gamma.



Pewna galeria sztuki w Gifu (środkowa Japonia) użyła systemu tzw. dokładnej telewizji (HDTV  $\equiv$  high-definition television), aby pokazać zwiedzającym dzieła sztuki utrwalone w zapisie cyfrowym na płytach kompaktowych. HDTV używa dwa razy tyle linii na ekranie, co konwencjonalna telewizja i produkuje obraz o niezwyklej ostrości.



Europejska Agencja Przestrzeni (Kosmicznej) szacuje, że oprócz około 7000 większych obiektów śledzonych przez USA i ZSRR Ziemię okrąża od 30 000 do 70 000 mniejszych obiektów. Zderzenie z nimi może mieć katastrofalne skutki dla czułych przyrządów umieszczonych na satelitach. Oblicza się, że teleskop kosmiczny (który ma zostać umieszczony na orbicie), noszący nazwisko Hubble'a, ma „szansę” 1 : 100 zderzyć się z obiektem o średnicy większej od 10 cm w czasie jego spodziewanej 17-letniej pracy. Ale nawet okrusz wielkości ziarnka grochu uderzający z prędkością 5 km/s może zniszczyć przyrząd wartości 100 mln dolarów.

Przemysłowcy japońscy zdecydowali się zainwestować „grube pieniądze” w badania nad obliczeniami rozmytymi (ang. fuzzy computing). Obliczenia te opierają się na teorii zbiorów rozmytych (ang. fuzzy set theory) zapoczątkowanej przez prof. L. A. Zadeha z Uniwersytetu Kalifornijskiego w Berkeley. W odróżnieniu od dotychczasowych komputerów, które działają w logice dwójkowej (wartości 1 lub 0, tak lub nie), komputery typu *fuzzy* operują na nieprecyzyjnych danych takich, jak na przykład: szybkości, niezbyt gorące, całkiem duży itp. Takie dane są reprezentowane przez liczby z zakresu 0 – 1. Zwolennicy takich obliczeń twierdzą, że komputery typu *fuzzy* pozwolą przetwarzać informacje w sposób podobny do sposobu działania naszego mózgu. Obecnie w Japonii program typu *fuzzy* na konwencjonalnym komputerze kontroluje pracę metra w mieście Sendai.



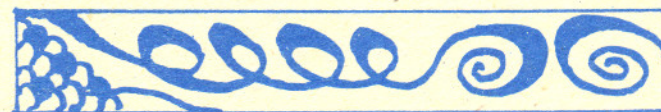
Badania przeprowadzone przez Departament Edukacji USA wykazały istnienie dodatniej korelacji między liczbą zdanych egzaminów z matematyki w szkole średniej a zarobkami absolwentów w okresie pierwszych dziesięciu lat pracy zarobkowej. Świadczy to o tym, że pracodawcy cenią absolwentów z dobrym wykształceniem matematycznym. Badaniem objęto 12 tysięcy młodych ludzi, którzy ukończyli szkołę średnią w okresie 1972–1986. A u nas?



Aktywność Słońca ma istotny wpływ na ruch satelitów. Na skutek silniejszego napromieniowania w okresie wzmózonej aktywności Słońca atmosfera ziemska „puchnie” na tyle, że dla niżej orbitujących satelitów istotny stać się może opór powietrza. Tak zakończył swój żywot 85-tonowy Skylab, który w 1979 r. na skutek oporu powietrza zmienił orbitę i rozlać się. Obecnie wchodzimy w kolejny okres aktywności Słońca.



Częstość dźwięku ulega zmianie przy odbiciu od poruszającego się obiektu; rośnie, gdy obiekt się przybliża do obserwatora i maleje, gdy obiekt się oddala. To zjawisko przesunięcia dopplerowskiego zaczęto wykorzystywać ostatnio do pomiaru szybkości przepływu krwi w arteriach organizmu ludzkiego. Porównując przesunięcia dopplerowskie sygnału ultradźwiękowego z wzorcowymi danymi dla zdrowego organizmu można stwierdzić, czy przepływ krwi nie jest utrudniony lub zablokowany wskutek odłożenia się warstwy tłuszczu wewnątrz arterii.



Wywołany koniecznością stałego publikowania pęd do uzyskiwania tzw. nowych twierdzeń już 150 lat temu przerosł się w swoje zaprzeczenie – pozorną, ale za to udokumentowaną, pracę naukową. Oto, co pisał wtedy francuski geometra Michel Chasles:

*Dziś każdy może przyjść, wziąć jakąkolwiek znaną prawdę i poddać rozmaitym ogólnym zasadom przekształceń; otrzyma z niej nowe prawdy, inne lub ogólniejsze; i te poddać będzie można podobnym operacjom; w ten sposób możliwe będzie pomnożenie, prawie do nieskończoności, liczby nowych prawd, wprowadzonych z pierwszej... Każdy, kto chce, może więc, w obecnym stanie wiedzy, uogólniać i tworzyć w dziedzinie geometrii; nie musi już być geniuszem, kto chce dolożyć cegielkę do jej gmachu.*



# Ozon atmosferyczny

## – kłopoty z niedoborem i nadmiarem

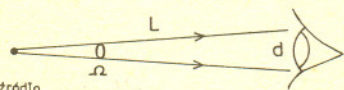
Mgr Małgorzata DEGÓRSKA



### Roswiasanie sadania F 280.

Cala moc źródła punktowego jest wypromieniowywana w kąt bryłowy  $4\pi$ . Do oka znajdującego się w odległości  $L$  od źródła dochodzi moc:

$$P = P_0 \Omega / 4\pi = P_0 \cdot d^2 / (16L^2).$$



Obliczmy, jaka liczba fotonów w ciągu jednostki czasu wpada do oka znajdującego się w odległości  $L$  od źródła. Energia jednego fotonu wynosi  $E = h\nu$  ( $\nu$  – częstotliwość,  $h$  – stała Plancka). Wyrażając to przez długość fali  $\lambda$  otrzymamy  $E = \frac{hc}{\lambda}$  ( $c$  – prędkość światła). Tak więc w ciągu jednostki czasu do oka dochodzi

$$n = \frac{P}{E} = \frac{P_0 d^2 \lambda}{16L^2 hc} \text{ fotonów.}$$

Ponieważ oko reaguje, jeśli  $n > 60 \text{ s}^{-1}$ , to odległość spełnia warunek:

$$L < \frac{d}{4} \sqrt{\frac{P_0 \lambda}{nhc}} \approx 10^6 \text{ m} = 10^3 \text{ km.}$$



### Roswiasanie sadania F 281.

Elektrycy uwolnione z katody pod działaniem światła wylatują we wszystkich możliwych kierunkach. Na granicy plamki ogniska na anodzie padają elektrony, które wyleciały z analogicznego punktu na katodzie, mające prędkość skierowaną równoległą do powierzchni katody i anody. Prędkość tę znajdziemy z równania Einsteina:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{hc}{\lambda} - A.$$

Stąd

$$v_0 = \left[ \frac{2}{m} \left( \frac{hc}{\lambda} - A \right) \right]^{1/2}$$

Poruszając się ruchem jednostajnie przyspieszonym w kierunku anody elektron pokonuje odległości między anodą i katodą w ciągu czasu  $t = (2l/a)^{1/2}$ , jego przyspieszenie  $a = \frac{eV}{ml}$ . Stąd  $t = l \left( \frac{2m}{eV} \right)^{1/2}$ . W ciągu tego czasu przemieszczenie elektronów wzdłuż powierzchni anody wyniesie  $\Delta d = v_0 t$ . A więc średnica plamki ogniska na anodzie wyniesie

$$D = d + 2\Delta d =$$

$$= d + 4l \left( \frac{hc/\lambda - A}{eV} \right) \approx 1,3 \text{ mm.}$$

Około 100 lat temu zauważono, że ostre odcięcie nadfioletowej części widma promieniowania słonecznego jest prawdopodobnie spowodowane pochłanianiem tego promieniowania przez ozon znajdujący się w atmosferze. Ta ważna własność fizyczna ozonu stała się podstawą dogodnej metody pomiaru zawartości ozonu stosowanej do dziś w znacznej części przyrządów.

Ponadto wkrótce stało się jasne, że silna absorpcja biologicznie szkodliwego, nadfioletowego promieniowania Słońca przez ozon powoduje, że odgrywa on szczególną i ważną rolę w ziemskim systemie biologicznym, a także w bilansie cieplnym atmosfery Ziemi.

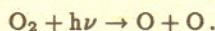
### Warstwa ozonowa w atmosferze i główne czynniki wpływające na nią

Ozon występuje w atmosferze od powierzchni Ziemi do wysokości około 100 km. Jednakże jego większa część znajduje się w warstwie zwanej stratosferą (rozciągającej się, średnio biorąc, na wysokości 10–50 km) z maksimum koncentracji wynoszącym  $5 \cdot 10^{12}$  cząsteczek /  $\text{cm}^3$ , występującym na wysokości około 25 km. W mezosferze, warstwie rozciągającej się powyżej poziomu 60 km, ozonu jest bardzo niewiele. W troposferze, warstwie znajdującej się między powierzchnią Ziemi i stratosferą, koncentracja ozonu jest niższa niż w stratosferze, odgrywa on jednak ważną rolę w zachodzących tam procesach chemicznych, a także oddziałuje na bilans cieplny dolnych warstw atmosfery.

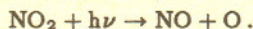
Ozon tworzy się głównie w stratosferze w wyniku działania słonecznego promieniowania nadfioletowego, które powoduje, że cząsteczki tlenu ( $\text{O}_2$ ) są stale przetwarzane w cząsteczki ozonu ( $\text{O}_3$ ), a ozon znowu w tlen na skutek licznych reakcji fotochemicznych, z których najważniejszą jest reakcja:



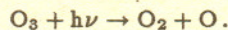
zachodząca w obecności trzeciej cząsteczki M (np. azotu lub tlenu). Powyżej poziomu około 20 km atomy tlenu biorące udział w tej reakcji pochodzą prawie wyłącznie z fotodysocjacji tlenu cząsteczkowego spowodowanej przez promieniowanie słoneczne o długości fali  $\lambda < 243 \text{ nm}$ :



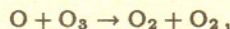
W dolnej stratosferze, a przede wszystkim w troposferze, większą rolę w produkcji tlenu atomowego odgrywa proces fotodysocjacji dwutlenku azotu:



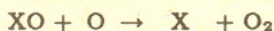
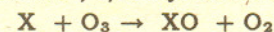
Fotodysocjację ozonu może powodować zarówno promieniowanie nadfioletowe, jak i widzialne:



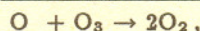
Straty ozonu będące wynikiem procesów fizycznych bądź chemicznych są (w warunkach niezaburzonych) równoważone przez działanie procesów produkcji ozonu, o których była mowa powyżej. Do lat 50. naszego stulecia straty tlenu atomowego i ozonu były przypisywane wyłącznie reakcji:



na którą już w 1930 roku wskazał S. Chapman, twórca akceptowanej przez wiele lat klasycznej teorii generacji i rozpadu ozonu. Obecnie jest rzeczą znaną, że w stratosferze straty ozonu następują głównie w wyniku cykli reakcji katalitycznych ozonu z wolnymi rodnikami cząsteczek substancji śladowych, takich jak związki o nieparzystej liczbie atomów wodoru ( $\text{HO}_x$ ), azotu ( $\text{NO}_x$ ), chloru ( $\text{ClO}_x$ ) i bromu ( $\text{BrO}_x$ ), przy czym  $x$  może być równe 0, 1, 2. Symbolicznie możemy to zapisać jako:



w rezultacie końcowym



a katalizatorem X może być: H, OH, NO, Cl i Br (ilustrację tego cyklu w przypadku Cl można znaleźć na okładce).



## Chłodniej o zimnej fuzji

W sierpniu ukazał się raport specjalnej komisji rządu Stanów Zjednoczonych powołanej w celu zbadania zjawiska tzw. chłodnej fuzji. Raport ten przypieczętował narastające w społeczności naukowej przekonanie, że efekt chłodnej fuzji, cokolwiek by to nie było, nie stanowi użytecznego źródła energii i nie doprowadzi do produkcji energii na skalę przemysłową. O więcej, komisja nie dopatrywała się przekonujących dowodów na zachodzenie fuzji w temperaturze pokojowej i odradza wobec tego zapoczątkowywanie programów badawczych w tym kierunku.

Większość laboratoriów w obliczu wielomiesięcznych negatywnych prób zaprzestała dalszych badań, ale są i wyjątki. Na Uniwersytecie Texas A&M trzy niezależne zespoły donoszą o wynikach pozytywnych. Jedna grupa w eksperymencie kalorymetrycznym zaobserwowała nadwyżkę ciepłą w postaci ciągłej produkcji ciepła, jak i pojawiających się co pewien czas miniwybuchów. Druga grupa odkryła duże ilości trytu (parę rzędów wielkości więcej niż w naczyniach kontrolnych) zarówno w elektrolicie, jak i w gazie wydzielającym się w czasie elektrolizy. Trzecia grupa stwierdziła obecność zarówno trytu, jak i neutronów. Te trzy wymienione efekty nie zostały jednakże nigdy zaobserwowane jednocześnie. Poza tym, jak i wszędzie indziej, są one chimeryczne, niestabilne, tak np. żaden z członków wspomnianej komisji nie miał szczęścia osobiście ich zaobserwować w czasie pobytów w laboratoriach.

Na uniwersytecie w Utah jeden z odkrywców, S. Pons, stwierdził, że jest jeszcze bardziej przekonany o prawdziwości początkowych wyników, a inna grupa na tym samym uniwersytecie poinformowała o zaobserwowaniu wybuchów energii w czterech z sześciu testowanych układów. W jednym takim, trwającym 90 minut, „błysku” układ wyświecił 42 waty energii przy włożonych 9 watach.

Na Uniwersytecie Stanford również zaobserwowano większą emisję energii w przypadku elektrolizy ciężkiej wody w porównaniu z elektrolizą wody zwykłej. W Laboratorium w Los Alamos zarejestrowano neutrony pochodzące ze zbiorników ciśnieniowych wypełnionych deuterem, palladem i tytanem.

Ta garść pozytywnych, choć niewytłumaczalnie niepowtarzalnych wyników na tle ogromnej ilości wyników negatywnych przesądza jednak o tym, że badania będą kontynuowane. Również i w Polsce, np. na Uniwersytecie Warszawskim.  
Pisane 17 września 1989 r. L.G.

Aby zrozumieć, jak ważne dla losów warstwy ozonowej są poszczególne z wymienionych katalizatorów, należy dokładnie znać reakcje chemiczne, dzięki którym tworzą się lub „znikają” wchodząc w związki z innymi substancjami. Wymaga to więc znajomości chemii tzw. substancji źródłowych (tj. takich, których pochodne mogą być katalizatorami reakcji rozpadu ozonu lub prowadzić do jego wytwarzania) w atmosferze, których koncentracja zależy w coraz większym stopniu od działalności człowieka.

Niestety, ludzkość nieświadomie przeprowadza eksperyment w skali planety, którego przedmiotem jest atmosfera Ziemi. Różnorodna działalność ludzi powoduje, że w atmosferze wzrasta koncentracja freonów, dwutlenku węgla, metanu i innych gazów źródłowych. Coraz więcej prac naukowych w tej dziedzinie wykazuje, że jeśli ta tendencja utrzyma się, to nastąpi spadek koncentracji ozonu w stratosferze, wzrost w troposferze, a temperatura przy powierzchni naszej planety może znacząco wzrosnąć.

## Jakie zmiany obserwujemy w warstwie ozonowej?

Już od kilku lat docierają do nas niepokojące sygnały, że z ozonem w atmosferze dzieje się coś niedobrego. Przede wszystkim opinia publiczna została zaalarmowana wystąpieniem zjawiska, któremu nadano groźną, a niezbyt szczęśliwą nazwę „dziury ozonowej”. Chodzi głównie o to, iż w stratosferze nad Antarktydą, a w szczególności pomiędzy 12–18 km, stwierdzono sezonowe (na wiosnę) zmniejszanie się zawartości ozonu. Od końca lat 70. spadek ten pogłębiał się z roku na rok i wiosną 1987 roku całkowita zawartość ozonu (tzn. zawartość w pionowej kolumnie powietrza o podstawie jednostkowej) zmniejszyła się w obszarze największych spadków, tj. wewnątrz „dziury”, o 50% w stosunku do wartości notowanych w latach poprzednich. Rysunek na pierwszej stronie okładki przedstawia obraz satelitarny ilustrujący fakt wystąpienia najniższych całkowitych zawartości ozonu zmierzonych kiedykolwiek w rejonie bieguna południowego. W dolnej stratosferze, pomiędzy 12–20 km stwierdzono występowanie warstw, w których spadek sięgał nawet 95%. Spadkowi ilości ozonu towarzyszyło znaczące obniżenie się temperatury. I tak, w 1987 roku na poziomie około 15 km obserwowano temperaturę o 8 K niższą, od notowanej w 1979 roku. Obniżenie się temperatury sprzyjało rozwojowi polarnych chmur stratosferycznych. Uważa się, że tworzące je kryształki lodowe odgrywają istotną rolę w przyspieszaniu reakcji (umożliwiają zachodzenie tzw. reakcji heterogenicznych wymagających obecności substancji w innym niż reagenty stanie skupienia; substancje te odgrywają rolę jak gdyby katalizatorów) prowadzących do uwolnienia z różnych związków chemicznych chloru lub innych katalizatorów rozpadu ozonu. Jakkolwiek brak jeszcze kompletnej teorii wyjaśniającej przyczynę i mechanizmy występowania „dziury ozonowej”, to raczej jest już ugruntowany pogląd, że główną, choć pośrednią rolę odgrywają tu antropogeniczne (czyli wynikające z działalności człowieka) związki chemiczne, a wśród nich przede wszystkim tzw. freony (np.  $\text{CF}_2\text{Cl}_2$  – freon 12 lub  $\text{CFCl}_3$  – freon 11), używane do niedawna powszechnie w rozpylaczach aerozolowych, chłodnictwie, przemyśle tworzyw sztucznych itp. Uwalniane do atmosfery freony są chemicznie obojętne (co stanowiło ich niewątpliwą zaletę) przy powierzchni Ziemi i w troposferze, dopiero w stratosferze ulegają rozpadowi pod wpływem nadfioletowego promieniowania słonecznego, wzbogacając atmosferę w bardzo „wydajny” katalizator reakcji rozpadu ozonu, jakim jest chlor (rysunek na okładce). Jednakże taki prawie bezpośredni wpływ freonów na warstwę ozonową może mieć miejsce na wysokości około 30–40 km. Tymczasem „dziura” antarktyczna oraz obserwowane w innych szerokościach geograficznych (mniejsze) spadki ilości ozonu występują o wiele niżej, gdzie chlor spotyka się głównie w związkach  $\text{HCl}$  i  $\text{ClONO}_2$ , które nie reagują z ozonem. Mechanizmów uwalniania się chloru i  $\text{ClO}$  z tych substancji poszukuje się szczególnie wśród wspomnianych reakcji heterogenicznych, gdyż inne zachodziłyby zbyt wolno, aby doprowadzić w ciągu około miesiąca do tak znacznych spadków ilości ozonu, jakie obserwuje się ostatnio w atmosferze antarktycznej.

Poza „dziurą ozonową” sezonowe spadki ilości ozonu obserwuje się także w umiarkowanych szerokościach geograficznych półkuli południowej, są one tam jednak dużo mniejsze, kilkuprocentowe. Natomiast na półkuli północnej, w dużych i średnich szerokościach geograficznych, spadek całkowitej zawartości ozonu, występujący głównie w miesiącach zimowych, jest w ostatnim dziesięcioleciu raczej niewielki. Uważa się przy tym, że na półkuli północnej wpływ 11-letniego cyklu aktywności Słońca na spadek zawartości ozonu w latach 1979–1985 był porównywalny lub nawet większy niż niszczące działanie freonów.

Tak ważne w obecnej sytuacji wyznaczenie trendów zmienności ozonu jest zadaniem niezupełnie prostym, choćby z tego względu, że „ciem” niewielkich, lecz narastających



Spektrofotometr Dobsona jest przyrządem, którego układ optyczny zawiera monochromator pozwalający wydzielić z promieniowania słonecznego dwie wiązki o długościach fali znajdujących się w paśmie absorpcyjnym ozonu (300–350 nm). Wyboru długości fali dokonuje się tak, aby w jednej z nich promieniowanie było silnie pochłaniane przez ozon, a w drugiej stosunkowo słabo. Przechodząc przez atmosferę promieniowanie w obu długościach fali ulega osłabieniu dzięki rozpraszaniu na cząsteczkach powietrza i aerozolu, a w jednej długości fali – dodatkowo ulega absorpcji przez ozon, oczywiście tym silniej, im więcej cząsteczek ozonu napotyka na swej drodze. Toteż pomiar względnego natężenia promieniowania w obu długościach fali pozwala na wyznaczenie całkowitej zawartości ozonu. Wykonanie obserwacji przy różnych wysokościach Słońca pozwala na wyznaczenie również i rozkładu pionowego ozonu. Przyrządem nowej generacji, powoli wkraczającym do światowej sieci pomiarowej ozonu, jest spektrofotometr Brewera. Jego zasada działania jest podobna jak w przypadku spektrofotometru Dobsona, różni się zaś od niego znacznym stopniem zautomatyzowania i komputeryzacji, co pozwala na natychmiastowe odczytywanie zawartości ozonu, a także dwutlenku siarki.

zmian jest bardzo silna zmienność naturalna, zależna od pory roku, sytuacji synoptycznej, położenia geograficznego miejsca dokonywania obserwacji itp. Materiału do wartościowych opracowań statystycznych dostarczają w pierwszym rzędzie stacje pomiarowe dysponujące wieloletnimi seriami obserwacji starannie wykonanymi za pomocą odpowiednio wykalibrowanych przyrządów pomiarowych. Do takich placówek należy Centralne Obserwatorium Geofizyczne Polskiej Akademii Nauk w Belsku (koło Grójca), gdzie od 1963 roku wykonywane są nieprzerwanie pomiary całkowitej zawartości i rozkładu pionowego ozonu za pomocą spektrofotometru Dobsona. W wyniku tych badań można stwierdzić, że w latach 1963–1987 nastąpił około 2-procentowy spadek ilości ozonu w stratosferze i 12-procentowy wzrost zawartości ozonu w troposferze.

Ten ostatni wynik mógłby wydawać się pocieszający wobec znanego zagrożenia dla ludzi, roślin i zwierząt wynikającego ze zmniejszenia się całkowitej zawartości ozonu, a więc grubości warstwy chroniącej nas dotąd na ogół skutecznie przed niszczącym i szkodliwym promieniowaniem nadfioletowym. Dokonane przez liczne stacje pomiarowe spostrzeżenie o znaczącym wzroście koncentracji ozonu w troposferze w ciągu ostatnich lat, zwłaszcza w Europie (są nawet doniesienia, że nad naszym kontynentem koncentracja ozonu podwoiła się w stosunku do obserwowanej przed 100 laty), wydaje się być równie godne uwagi, jak zjawisko „dziury antarktycznej”, gdyż może mieć nie mniej ważne, choć innego rodzaju skutki dla ludzkości.

Przyjmuje się, że znaczne perturbacje ozonu troposferycznego, zwłaszcza w ciągu ostatnich kilkunastu lat, wynikają ze wzrastającej emisji do atmosfery gazów źródłowych, takich przede wszystkim jak węglowodory i tlenki azotu ( $\text{NO}_x$ ). Główne źródła tych związków to, niestety, silniki samochodowe, energetyka, jak i wszelkie urządzenia, w których zachodzą procesy spalania, gdyż podczas nich następuje zawsze w mniejszym lub większym stopniu emisja tlenków azotu. Toteż znalezienie sposobów zmniejszenia koncentracji ozonu troposferycznego będzie bardzo trudne, prawdopodobnie trudniejsze niż ochrona ozonu stratosferycznego, którą w wielu krajach zaczyna się podejmować.

Okazuje się, że nie możemy się pocieszać, iż ubytki ozonu w stratosferze mogą być, choć częściowo, kompensowane wzrostem koncentracji ozonu w troposferze półkuli północnej. Tego rodzaju zmiany w rozkładzie pionowym ozonu są bardzo niekorzystne, gdyż ozon – nawet w niewielkich stężeniach – jest nie tylko szkodliwy dla ludzi i zwierząt i toksyczny dla roślin, ale przede wszystkim w troposferze jest gazem wywołującym tzw. efekt cieplarniany i to tak wydajnie, że może się z nim równać tylko dwutlenek węgla.

## Efekt cieplarniany i jego przewidywane skutki

Temperatura obserwowana przy powierzchni Ziemi jest w głównej mierze wynikiem równowagi między ilością energii otrzymywanej od Słońca i energii wypromieniowanej przez układ Ziemia – atmosfera. Promieniowanie słoneczne padając na Ziemię ogrzewa jej powierzchnię. Następnie ciepło to oddawane jest do atmosfery głównie przez promieniowanie podczerwone. Może ono przeniknąć przez atmosferę i znaleźć się w przestrzeni kosmicznej bądź zostać zaabsorbowane przez substancje gazowe występujące głównie w troposferze, substancje reemitujące to promieniowanie także i w kierunku Ziemi. Ta druga ewentualność dotyczy większej części emitowanego przez Ziemię promieniowania podczerwonego i stanowi istotę efektu analogicznego do działania nie tyle cieplarni, co raczej inspektu – promieniowanie wpada w pewną przestrzeń jak w pułapkę. Jak dotąd, efekt ten w atmosferze był dla nas dobroczynny. Uważa się, że jeśli go nie było, to średnia temperatura przy powierzchni Ziemi byłaby o około 30 K niższa od obserwowanej dotychczas. Jednakże koncentracja substancji śladowych w atmosferze stale wzrasta i dlatego oczekuje się wzmoczonego efektu cieplarnianego, tzn. znaczącego wzrostu temperatury w troposferze w ciągu najbliższych kilkudziesięciu lat.

Przy obecnym stanie wiedzy, złożoności i współzależności zjawisk, z którymi trzeba będzie mieć do czynienia, właściwie bardziej możemy sobie wyobrażać niż przewidywać konsekwencje podniesienia się temperatury przy powierzchni Ziemi. Wśród nich najważniejsze to: zaburzenia w występowaniu opadów i cyklu hydrologicznego, częściowe stopienie się lodowców i lodów polarnych, a w konsekwencji podniesienie się poziomu oceanu światowego i zatopienie wielu obszarów przybrzeżnych i leżących w depresjach oraz zmiany klimatu, których konsekwencje dla życia na Ziemi są szczególnie trudne do prognozowania.



### Rozwiązanie zadania M 560.

Skorzystamy z wyniku poprzedniego zadania. Rozłożymy funkcję  $f$  na ułamki proste:

$$f(z) = \frac{-z}{z^2 + z - 1} = \frac{-z}{(z-a)(z-b)} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b},$$

$$\text{gdzie } a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, b = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Ma być

$$A(z-b) + B(z-a) = -z \text{ dla } |z| < \frac{1}{2},$$

$$\text{stad } B(b-a) = -b, A(a-b) = -a,$$

$$\text{czyli } A = -\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}, B = -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}.$$

Zauważmy teraz, że  $u_0 = f(0)$ ,

$$u_1 = \frac{f'(0)}{1!}, u_2 = \frac{f''(0)}{2!} \text{ i ogólnie}$$

$$u_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}. \text{ Z drugiej strony}$$

$n$ -ta pochodna  $\frac{1}{z-a}$  wynosi

$$(-1)^n n! (z-a)^{-(n+1)}, \text{ czyli}$$

$$u_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = -\frac{A}{a^{n+1}} - \frac{B}{b^{n+1}}. \text{ Zatem}$$

$$u_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{-(n+1)} + \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right)^{-(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right).$$