

SPIS TREŚCI

NUMERU 9(189)

Rysowanie siedmiokąta	str. 1
O przysłowiowej dokładności astronomicznej prof. dr Grzegorz SitarSKI	str. 2
Kącik Prac Uczniowskich	str. 5
Zadania	str. 5
Numeryczna telepatia czy sprawność rachunkowa?	str. 6
Mała Delta	str. 8
Korespondencyjny Klub Fizyków	str. 9
Rachunkowa archeologia	str.10
Poważne skutki	str.11
Obliczanie π	str.12
Patrz w niebo	str.13
Klub 44	str.14
Drobiazgi	str.16
Dodajemy	str.17

W następnym numerze:

Jak pamiętać obrazy?

Nasza okładka:

Narysowany przez komputer
zbiór Julii (dla przekształcenia
 $z \mapsto z^2 + (0,32 + 0,043i)$)
ze wspaniałej książki
The Beauty of Fractals.

O komputerowym kodowaniu
obrazków piszemy w następnym
numerze *Delta*.

„Delta”

matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Edukacji Narodowej

Komitet Redakcyjny

dr Maciej Bryński
dr Bogdan Cichocki
dr Antoni L. Dawidowicz
dr Alicja Derkowska
doc.dr Jan A. Gaj
doc.dr Bolesław Gleichgewicht
doc.dr Tomasz Hofmokr – v-przewodniczący
doc.dr Tadeusz Jarzębowski
doc.dr Marcin Kubiak
mgr Andrzej Mąkowski
dr Zbigniew Płochocki
dr Jan Rempala
prof.dr Konrad Rudnicki
prof.dr Grzegorz SitarSKI
prof.dr Józef I. Smak
prof.dr Kazimierz Stępień
prof.dr Mieczysław Subotowicz
doc.dr Andrzej Szymacha
doc.dr Aniela Wolska
prof.dr Andrzej Woszczyk
prof.dr Wojciech Żakowski –
przewodniczący

WARUNKI I CENY PRENUMERATY ORGANIZOWANEJ PRZEZ RSW

Prenumeratorem indywidualni, instytucje i zakłady pracy zamawiają prenumeratę w Oddziałach RSW „Prasa-Książka-Ruch” właściwych dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział w Warszawie Nr 370044-1195-139-11.

Cena prenumeraty na rok 1990:

kwartalnej 1800,- zł
półrocznej 3600,- zł
rocznej 7200,- zł

Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów.

Na życzenie prenumeratora dostawa może odbywać się drogą lotniczą; koszty dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.

Terminy przyjmowania prenumeraty

- na I kwartał, I półrocze i cały rok następny – na kraj do 10 XI,
— na zagranicę do 31 X.
- na pozostałe okresy prenumeraty: do 1-go dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarza zł 600,-

Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga
dr Lidia Goettig
dr hab. Jan Kalinowski – z-ca red. nac.
Maria Kapuścińska
mgr Krystyna Kordos – sekr. red.
dr hab. Marek Kordos – red. nac.
dr Tomasz Kwast
mgr Anna Rudnik
dr Jerzy Ryll
mgr Joanna Udalska
Jacek Urbański – grafik

Adres Redakcji

ul. Noakowskiego 14
00-666 Warszawa
tel. 25-56-39

Warszawskie Wydawnictwo Prasowe
RSW „Prasa-Książka-Ruch”
Al. Jerozolimskie 125/127
02-017 Warszawa

tel. centr. 28-52-31
Biuro Reklamy Prasowej i Ogłoszeń
ul. Poznańska 38
00-689 Warszawa
tel. 28-23-09

Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.,
2,50 ark. druk.,
papier offsetowy V kl. 70 g.
Wydrukowano w Prasowych
Zakładach Graficznych
RSW „Prasa-Książka-Ruch”
w Łodzi. ul. Armii Czerwonej 28
Nr zam. 2275/89
Skład systemem TeX
wykonała redakcja.

Oto zadanie:

Narysować na ekranie komputera siedmiokąt foremny.

Przypuśćmy, że nasz komputer potrafi rysować na ekranie odcinki (komenda ODCINEK(a, b, c, d) daje odcinek o końcach (a, b) i (c, d)). Program wydaje się być banalny:

KĄT POPRZEDNI (KP) kładziemy równy 0

$$\begin{cases} \text{KĄT NASTĘPNY (KN) obliczamy dodając do KĄTA POPRZEDNIEGO } \frac{2\pi}{7} \\ \text{rysujemy ODCINEK}(\cos KP, \sin KP, \cos KN, \sin KN) \\ KP \text{ kładziemy równy } KN \end{cases}$$

Część programu zaznaczoną klamrą powtarzamy 7 razy (rys. 1). A co będzie, jeśli tę część powtórzymy nie 7, lecz 7000 razy (rys. 2)?

Przy pracy z komputerem, szczególnie przy obliczeniach, trzeba pamiętać, że działania nie są wykonywane dokładnie i powstają błędy zaokrągleń. Mimo że bardzo małe, kumulują się i łączny efekt może być duży.

Czy można poprzedni program poprawić? Tak. Pomocna w tym jest wiedza z analizy numerycznej zajmującej się między innymi teorią rachunków przybliżonych. Napiszmy nasz program w skrócie ($a := b$ oznacza kładziemy a równe b):

$KP := 0$
 dla i od 1 do 7000 powtarzaj

$$\begin{cases} KN := KP + \frac{2\pi}{7} \\ \text{ODCINEK}(\cos KP, \sin KP, \cos KN, \sin KN) \\ KP := KN \end{cases}$$

Znacznie lepsze efekty (rys. 3) daje program:

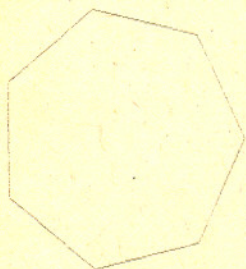
$KP := 0$
 dla i od 1 do 7000 powtarzaj

$$\begin{cases} KN := i \frac{2\pi}{7} \\ \text{ODCINEK}(\cos KP, \sin KP, \cos KN, \sin KN) \\ KP := KN \end{cases}$$

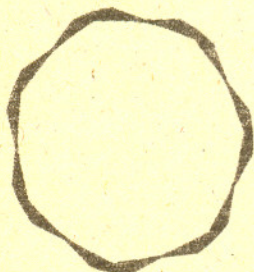
W programie tym uniknięto kumulowania się błędów dodawania. Działa on jednak dłużej, gdyż mnożenie jest wolniejsze od dodawania.

Programy do rysowania rysunków zostały napisane w języku FORTRAN i skompilowane (przetłumaczone na język zrozumiały dla procesora w komputerze) za pomocą kompilatora FORTRAN MS 3.31. Pewnego razu użyto innego kompilatora FORTRAN MS 4.0. Oba programy rysowały rysunek 3. Co się stało? Otóż nowy kompilator starał się „poprawić” człowieka i zamienił „niepotrzebnie” powtarzane w pętli mnożenie na dodawanie – tak jak w pierwszym programie.

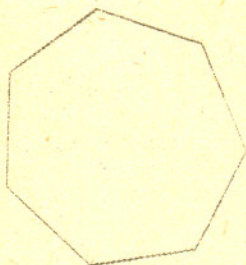
J.R.



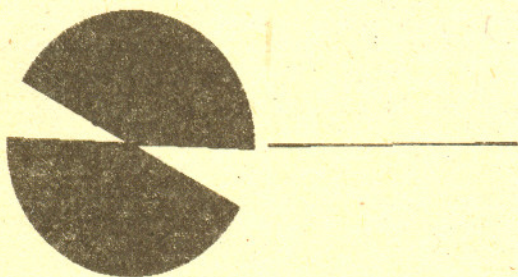
Rys. 1



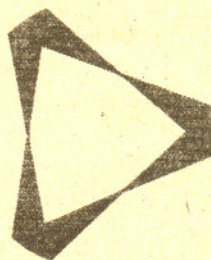
Rys. 2



Rys. 3



Odcinek rysowany przez pierwszy i drugi program (liczba powtórzeń 8000).



Trójkąt rysowany przez pierwszy i drugi program (liczba powtórzeń 5000).

Prof. dr Grzegorz SITARSKI



Jako chłopiec czytałem wiele popularnych książek o Wszechświecie. Pamiętam moje zaskoczenie, kiedy w trzech różnych źródłach znalazłem trzy zupełnie różne wartości odległości słynnej Wielkiej Mgławicy w Andromedzie: 750 tysięcy, jeden milion i półtora miliona lat świetlnych. Nastawiło mnie to nieufnie do naszej znajomości danych dotyczących Wszechświata, ale potem dowiedziałem się, że odległości galaktyk nie wyznacza się z dokładnych pomiarów, lecz ocenia się je na podstawie różnych przesłanek, a wartość takiej oceny zależy od znajomości wielu czynników (dziś odległość mgławicy w Andromedzie oceniamy na ponad dwa miliony lat świetlnych).

Wiele lat później zetknąłem się praktycznie z prawdziwą dokładnością obliczeń astronomicznych, kiedy jako młody astronom brałem udział w obserwacjach częściowego zaćmienia Słońca widocznego w okolicach Warszawy. Nasza trzyosobowa ekipa miała wykonać serię zdjęć zaćmiewanego Słońca w stacji obserwacyjnej Politechniki Warszawskiej w Józefostawiu, a moim zadaniem było obliczenie dokładnego momentu początku zaćmienia. Na podstawie odpowiednich danych zaczerpniętych z rocznika astronomicznego oraz znajomości dokładnych wartości współrzędnych geograficznych miejsca obserwacji obliczyłem ten moment z dokładnością do sekundy. Początek zaćmienia można uchwycić obserwując na ekranie obraz tarczy Słońca rzucony przez lunetę, w pewnym momencie idealnie równy brzeg zostaje „nadgrzyziony” przez nasuwającą się tarczę niewidocznego Księżyca. Tuż przed oczekiwanym momentem początku zjawiska patrzyliśmy z napięciem na obraz tarczy Słońca wspólnie z kierowcą, który nas przywiózł i dotąd dosyć obojętnie przyglądał się naszym przygotowaniom do obserwacji. Kiedy jednak dostrzeżliśmy początek zaćmienia kilka sekund od wyznaczonego przeze mnie momentu, kierowca wyraźnie zaczął odnosić się do nas z szacunkiem i podziwem, że astronomowie potrafią tak dokładnie przewidywać zjawiska na niebie (powiedział nam to w drodze powrotnej).

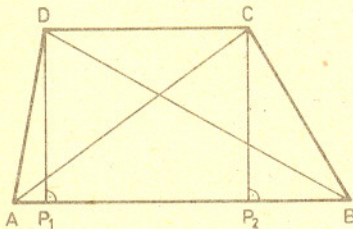
Obserwacje ruchu planet prowadzone od wieków oraz znajomość praw, według których poruszają się one wokół Słońca, istotnie pozwalają przewidywać z dużą dokładnością konfiguracje planet, Słońca i Księżyca na niebie nawet na setki lat naprzód. Inaczej wygląda sprawa przewidywania powrotów komet okresowych. Komety obiegają Słońce po zdecydowanie eliptycznych orbitach, a obserwowane są tylko na łuku orbity w pobliżu peryhelium. Dlatego też trzeba zebrać obserwacje z kilku pojawień się komety, aby wyznaczyć dostatecznie dokładne wartości elementów orbity i na tej podstawie obliczyć efemerydę, czyli położenia komety na niebie podczas jej następnego powrotu. Kiedy prof. Felicjan Kępiński w 1926 r. podjął badania ruchu komety okresowej Kopffa wracającej do Słońca co 6,5 roku, obliczał efemerydy kolejnych powrotów komety i tuż przed wojną zdażył jeszcze wysłać swoje wyniki do Międzynarodowego Biura Telegramów Astronomicznych mieszczącego się wówczas w Kopenhadze; dzięki temu kometą była obserwowana także w 1939 r. Kometę Kopffa odnaleziono wtedy na niebie w odległości 3" od miejsca obliczonego, a jak mały jest to kąt, mówi nam obrazowe porównanie: pod takim kątem widać średnicę ludzkiego włosa z odległości siedmiu metrów.

Aby tak dokładnie obliczyć położenie komety na niebie, trzeba znać jej położenie w przestrzeni, a więc i elementy orbity z dokładnością siedmiu czy nawet ośmiu cyfr znaczących. Rachunki z taką dokładnością zapewnią nam dziś każdy kalkulator kieszonkowy, nie wystarcza ona jednak do wykonania wszystkich obliczeń związanych z dokładnym przewidzeniem powrotu komety po kilku czy kilkunastu latach. Wiąże się to z koniecznością numerycznego całkowania równań różniczkowych opisujących ruch komety w polu grawitacyjnym Słońca i planet.

Równania ruchu komety w heliocentrycznym układzie współrzędnych prostokątnych mają postać:

$$(1) \quad \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -k^2 \frac{\mathbf{x}}{r^3} - k^2 \sum_{p=1}^n m_p \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_p}{\rho_p^3} + \frac{\mathbf{X}_p}{R_p^3} \right)$$

Rozwiązanie zadania M 565.



Wprowadzimy następujące oznaczenia: $AB = x$, $CD = y$, $DP_1 = h$, $BP_1 = p_1$, $AP_2 = p_2$. Mamy $\frac{x+y}{2} \cdot h = 1$. Dalej, niech $d_1 = BD$, $d_2 = AC$. Nie trudno zobaczyć, że $p_1 + p_2 = x + y$. Ponadto dłuższa przekątna ma dłuższy rzut na podstawę, jako że $d_1^2 = p_1^2 + h^2$, $d_2^2 = p_2^2 + h^2$. Niech BD będzie dłuższą przekątną. Mamy wtedy

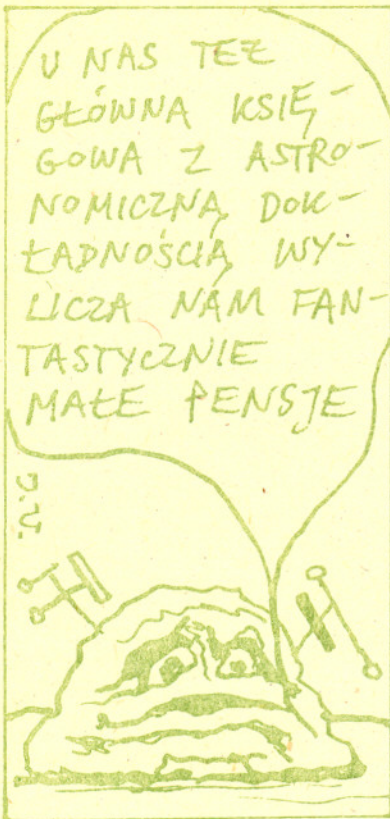
$$p_1 \geq \frac{x+y}{2} = \frac{1}{h}$$

Stąd

$$d_1^2 = p_1^2 + h^2 \geq \frac{1}{h^2} + h^2 = \left(\frac{1}{h} - h\right)^2 + 2,$$

wobec tego $d_1 \geq \sqrt{2}$. Łatwo pokazać przykład trapezu, dla którego $d_1 = \sqrt{2}$:

musi być wtedy $h = \frac{1}{h}$, czyli $h = 1$ i wystarczy wziąć kwadrat.



i podobnie dla y i z , gdzie x, y, z są współrzędnymi komety, X_p, Y_p, Z_p współrzędnymi planety, r odległością komety od Słońca, ρ_p odległością komety od planety, a R_p odległością planety od Słońca; $k = 0,01720209895$ jest stałą Gaussa związaną ze stałą grawitacji w przyjętym układzie jednostek (jednostką długości jest średnia odległość Ziemi od Słońca, czyli tzw. jednostka astronomiczna, jednostką czasu – doba, a jednostką masy – masa Słońca). Równanie (1) nie ma rozwiązania analitycznego, tzn. nie da się go przedstawić w postaci wzorów zawierających czas jako parametr i pozwalających obliczyć wartości x, y, z dla dowolnej chwili. Pozostaje więc tylko sposób całkowania numerycznego.

Metody numerycznego całkowania równań różniczkowych polegają np. na przybliżeniu występującej w równaniu funkcji czasu wielomianem dość wysokiego stopnia powstałym z rozwinięcia funkcji w nieskończony szereg Taylora względem czasu i obcięcia go do kilku lub kilkunastu wyrazów; szereg ten jest dostatecznie szybko zbieżny zwykle w niewielkim przedziale czasowym zwanym krokiem całkowania. Zestaw odpowiednich wzorów i algorytm postępowania pozwala na obliczanie wartości scałkowanej funkcji krok po kroku, aż do wyczerpania zadanego interwału czasowego. Taka metoda pozwala całkować każdy układ równań różniczkowych, ma jednak bardzo poważną wadę, mianowicie stałe narastanie błędu numerycznego całkowania. Są dwa źródła tego błędu: błąd obcięcia wynikający z uwzględnienia skończonej liczby wyrazów szeregu Taylora oraz błąd zaokrąglenia, bo wszystkie wielkości biorące udział w obliczeniach muszą mieć skończoną liczbę cyfr, a ostatnia cyfra jest już wynikiem zaokrąglenia. Nic więc dziwnego, że aby osiągnąć wymaganą dokładność końcowego wyniku całkowania, musimy brać pod uwagę nieuchronne narastanie błędu numerycznego, a wobec tego trzeba wszystkie obliczenia wykonywać z podwójną precyzją, czyli uwzględniając 15 cyfr znaczących we wszystkich liczbach występujących w rachunkach. I nie ma tu nic do rzeczy, że dane początkowe mogą być mało dokładne, musimy bowiem mieć pewność, że końcowe wyniki zależą tylko od dokładności danych początkowych, a nie są zafałszowane błędem całkowania numerycznego.

Największy kłopot w metodach numerycznego całkowania stanowi dobór odpowiedniej wartości kroku. W różnicowych metodach wielokrokowych, jak np. metoda Adamsa czy Cowella, wartość ta co najmniej przez kilka lub kilkanaście kroków musi być stała. W metodach jednokrokowych, jak metoda Rungego-Kutty, wartość kroku może być teoretycznie na każdym kroku inna, ale nie bardzo wiadomo, jaka ma ona być. W przypadku całkowania równań ruchu komety problem doboru odpowiedniego kroku całkowania jest bardzo ważny, bo zmiany ruchu komety od peryhelium do aphelium są duże, a mogą być także znaczne w przypadku zbliżenia komety do planety. Dlatego też w badaniach ruchów komet konieczne trzeba stosować numeryczne metody całkowania ze zmiennym krokiem.

Doskonale rezultaty daje tu metoda rekurencyjnych szeregów potęgowych. Zastosowanie tej metody pokażemy na przykładzie całkowania równań ruchu keplerowskiego, czyli ruchu komety tylko pod wpływem przyciągania Słońca. Dokonajmy podstawienia $s = -k^2 r^{-3}$ oraz wykorzystajmy zależność $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Wówczas równania ruchu możemy uzupełnić dwoma dodatkowymi równaniami i zapisać je w następującej postaci, oznaczając różniczkowanie względem czasu kropką nad zmienną:

$$(2) \quad \begin{aligned} r\dot{r} &= x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}, & r\dot{s} &= -3s\dot{r}, \\ \dot{x} &= sx, & \dot{y} &= sy, & \dot{z} &= sz. \end{aligned}$$

Przypuśćmy, że jakaś funkcja czasu f dana jest w postaci szeregu potęgowego

$$(3) \quad f(t) = f_0 + \sum_{n=1}^N f_n(t-t_0)^n.$$

Jeśli dla $n = 0, 1, \dots, N$ znamy wartości liczbowe współczynników f_n , to możemy obliczyć wartość $f(t)$ dla każdego t w przedziale $(t_0, t_0 + h)$, gdzie wartość h zależy od N i wymaganej dokładności liczbowej wartości f . Wypiszmy szeregi typu (3) dla wszystkich wielkości występujących w równaniach (2), zróżniczkujmy je względem czasu, aby otrzymać szeregi dla pochodnych, podstawmy je do równań (2), wymnóżmy szeregi i uporządkujmy wyrazy względem potęg czasu, a następnie przyrównajmy obustronnie współczynniki przy jednakowych potęgach czasu. Otrzymamy wówczas wzory rekurencyjne na kolejne współczynniki w rozwinięciach typu (3).



Rozwiązanie zadania M 554. Jeśli ciąg (x_n) jest zbieżny, to jego granica g spełnia równanie $g = g(2 - yg)$; stąd $g = 0$ lub $g = \frac{1}{y}$.

Niech $x_n = \frac{1}{y}(1 - d_n)$. Wtedy

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{y}(1 - d_n) \left(2 - y \cdot \frac{1}{y}(1 - d_n) \right) = \\ &= \frac{1}{y}(1 - d_n)(1 + d_n) = \frac{1}{y}(1 - d_n^2); \end{aligned}$$

czyli $d_{n+1} = d_n^2$. Wyjściowy ciąg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy (d_n) jest zbieżny, tzn. dla $-1 \leq d_1 \leq 1$. Wynika stąd warunek na a : ponieważ $a = \frac{1}{y}(1 - d_1)$, to $d_1 = 1 - ay$, musi więc

być $-1 \leq 1 - ay \leq 1$, czyli $0 \leq a \leq \frac{2}{y}$.

Jeśli $a = 0$ lub $a = \frac{2}{y}$, to $x_n \rightarrow 0$,

w pozostałych przypadkach $x_n \rightarrow \frac{1}{y}$.

Uwaga. Ponieważ $d_{n+1} = d_n^2$, ciąg (x_n) jest bardzo szybko zbieżny: liczba dokładnych cyfr podwaja się w każdym kroku.

Na przykład dla $x_1 = 0,5$ i $y = 3$ otrzymujemy $x_2 = 0,25$, $x_3 = 0,3125$, $x_4 = 0,33203125$, $x_5 = 0,333328247\dots$, $x_6 = 0,333333333\dots$

Toteż stosuje się tę metodę w technice komputerowej do szybkiego obliczania odwrotności. Pokrewna metoda pozwala obliczyć \sqrt{y} : bierzemy wtedy $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{y}{x_n})$.

Danymi początkowymi będą wartości współrzędnych x, y, z oraz ich pochodnych $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ (czyli składowych prędkości komety) dla chwili t_0 , tj. x_0, y_0, z_0 oraz x_1, y_1, z_1 . Wzory na kolejne współczynniki rozwinięcia wyglądają następująco:

$$\begin{aligned} r_0 &= (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{1/2}, & s_0 &= -k^2/r_0^3, \\ r_1 &= (x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1)/r_0, & s_1 &= -3s_0r_1/r_0, \\ x_2 &= s_0x_0/2, & y_2 &= s_0y_0/2, & z_2 &= s_0z_0/2, \end{aligned}$$

a dalej kolejne współczynniki wyższych rzędów dla $n = 1, 2, \dots, N$:

$$(n+1)r_0r_{n+1} = (n+1)(x_{n+1}x_0 + y_{n+1}y_0 + z_{n+1}z_0) + \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(x_{k+1}x_{n-k} + y_{k+1}y_{n-k} + z_{k+1}z_{n-k} - r_{k+1}r_{n-k}),$$

$$(n+1)r_0s_{n+1} = -3(n+1)r_{n+1}s_0 - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(3r_{k+1}s_{n-k} + s_{k+1}r_{n-k}),$$

$$(n+1)(n+2)x_{n+2} = \sum_{k=0}^n s_k x_{n-k}$$

i podobnie dla y i z .

Przebieg całkowania krok po kroku jest następujący. Po obliczeniu wszystkich współczynników x_n, y_n, z_n określamy optymalną wartość kroku całkowania h . Definiując $A_N = |x_N| + |y_N| + |z_N|$ oraz przyjmując dokładność obliczeń ε , obliczamy wartość kroku $h = (\varepsilon/A_N)^{1/N}$. Dalej dla $t_h = t_0 + h$ obliczamy

$$x_h = x_0 + \sum_{n=1}^N x_n h^n \quad \text{oraz} \quad \dot{x}_h = x_1 + \sum_{n=2}^N n x_n h^{n-1}$$

i podobnie dla y i z ; otrzymane wartości x_h, y_h, z_h oraz $\dot{x}_h, \dot{y}_h, \dot{z}_h$ wykorzystujemy jako dane początkowe do następnego kroku całkowania.

Metoda rekurencyjnych szeregów potęgowych jest metodą jednokrokową, a dzięki optymalizacji wartości kroku dla zadanej dokładności obliczeń jest prawie wolna od narastania błędu obliczenia. Udowodnił to leningradzki matematyk B.F. Miaczin, którego poznałem osobiście w Instytucie Astronomii Teoretycznej, a podziw dla jego pracy na zawsze zachowałem w pamięci, bowiem Miaczin jest od urodzenia niewidomy. Metodę tę stosujemy w opracowanych w Centrum Badań Kosmicznych PAN programach obliczeniowych do badania ruchu komet i planetoid. Oczywiście, uwzględnienie przyciągania wszystkich planet, a także innych wpływów, jak efekty relatywistyczne czy efekty niegrawitacyjne, niepomrotnie komplikuje wzory obliczeniowe w stosunku do przytoczonych tutaj dla ruchu keplerowskiego. Jest to w pewnym sensie wadą metody, bo dodanie każdego nowego członu w równaniach ruchu wymaga modyfikacji programu całkowania. Jednak zalety metody gwarantującej dużą dokładność końcowych wyników całkowania są oczywiste, a raz napisany i sprawdzony program może służyć do całkowania równań ruchu najrozmaitszych komet i planetoid. Jasne jest, że przy tak olbrzymiej ilości działań arytmetycznych, wykonywanych podczas każdego kroku całkowania, konieczne jest zastosowanie szybkich komputerów, a wszystkie obliczenia prowadzi się w podwójnej precyzji. Dzięki istnieniu takich programów przepowiednia powrotu komety okresowej nie jest już wielkim problemem, a komety zostają odnajdywane na niebie za pomocą czułych przyrządów jako bardzo słabe obiekty w miejscach dokładnie wskazanych obliczeniami.

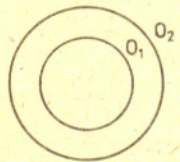
Uważny Czytelnik mógłby sądzić, że gdy prof. Kępiński obliczał ruch komety Kopffa w czasach, kiedy o komputerach nikomu się nie śniło, musiał dokonać gigantycznej pracy prowadząc skomplikowane piętnastocyfrowe obliczenia, aby dokładnie przewidzieć powrót komety. Otóż tak źle nie było, bo stosowano wówczas inne metody, polegające na obliczaniu perturbacji w ruchu keplerowskim komety, czyli obliczano zmiany jej elementów orbity. Wiązało się to także z numerycznym całkowaniem różniczkowych równań zmian elementów orbity w czasie, ale w tym przypadku wystarczyło w zupełności rachunek nawet pięciocyfrowy. Wzory opisujące zmiany elementów orbity są jednak o wiele bardziej skomplikowane niż równania ruchu we współrzędnych prostokątnych, dlatego też warto było opracować specjalne metody obliczeniowe, wykorzystując dla rachunków komputerowych formalną prostotę zapisu równań ruchu.

MELDUJE
OBYWATELU
KOMENDANCIE,
ZE W ODLEGŁOS-
CI 681 LAT
ŚWIETLNYCH,
ORAZ 0,341
ROKU ŚWIET-
NEGO ORAZ
758 KILOMET-
RÓW, 238
METRÓW, 31
CENTYMETRÓW,
ORAZ 3,126
MILIMETRA -
WYKRYLIŚMY
PRAWDOPODOBNIIE
ZGRUPOWANIA
WROGA



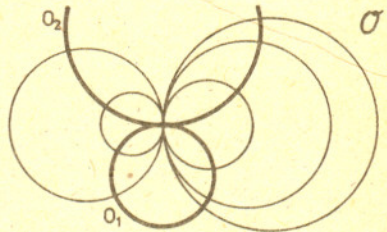
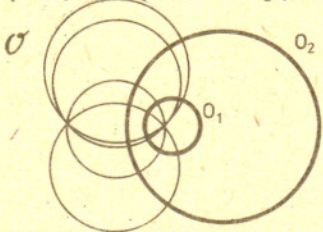
Pęki okręgów

Propozycje ewentualnych tematów prac na Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki zamieszczamy od numeru 3/1988 (z pominięciem numerów 6 i 12 z 1988 roku oraz 1, 6, 7 i 8 z roku bieżącego). Oczywiście, chętnie widzimy prace również na inne tematy.



Te dwa okręgi O_1 i O_2 nie wyznaczają żadnego pęku O' . Czy to jedyna „zła” sytuacja?

Skonstruujemy, dla dowolnie ustalonych okręgów O_1 i O_2 , rodzinę O' okręgów, z których każdy przecina O_1 i O_2 pod kątem prostym. Taką rodzinę nazywa się **pękiem okręgów**. Gdy, dla dowolnie ustalonych okręgów O'_1 i O'_2 należących do rodziny O' , powtórzmy tę konstrukcję, otrzymamy pęk O . Wstępnym krokiem do badania własności pęków może być wykazanie, że każdy wybór okręgów O'_1 i O'_2 (różnych) daje ten sam pęk O .



Pęki określa się też w inny sposób. Oznaczmy równanie

$$x^2 + y^2 + a_i x + b_i y + c_i = 0$$

krótko $g_i(x, y) = 0$. Jeśli $g_1(x, y) \neq g_2(x, y)$, to rodzinę figur mających równanie postaci

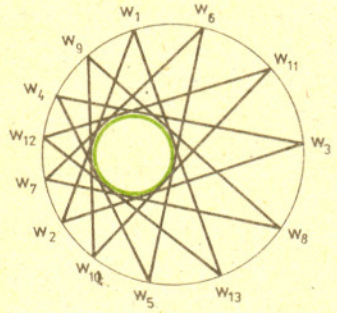
$$p \cdot g_1(x, y) + q \cdot g_2(x, y) = 0,$$

gdzie p i q to stałe rzeczywiste nie równe jednocześnie zeru, również nazywamy pękiem. Można łatwo sprawdzić, że w takim pęku są nie tylko okręgi (a co jeszcze?). Nasuwa się pytanie, jak zmodyfikować pierwszą definicję, by była równoważna drugiej. A może są to zupełnie różne pojęcia?

Badanie własności pęków okręgów jest ambitnym problemem matematycznym. Zamiast przytaczać tu szereg dających się uzyskać rezultatów, zwróćmy uwagę na twierdzenie o dwóch tylko okręgach, do którego uzyskania (podobno) pojęcie pęku jest niezbędne. Umieszczone w nawiasie słowo „podobno” wyraża fakt, że matematyka (jeśli wierzyć autorytetom) nie dysponuje żadnym eleganckim dowodem tego twierdzenia, a istniejące (bardzo zawiłe) dowody z pojęcia pęku korzystają. Jest to twierdzenie Poncela:

Jeżeli istnieje łamana zamknięta mająca n wierzchołków, z których każdy leży na okręgu O_1 i której każdy bok jest styczny do okręgu O_2 , to można taką (n -odcinkową) łamaną zamkniętą narysować zaczynając z dowolnego punktu okręgu O_1 .

Opracował M.K.



Zadania

Poziomy energetyczne atomu znajdującego się w zewnętrznym polu magnetycznym ulegają rozszczepieniu wskutek oddziaływania momentu magnetycznego powłoki elektronowej z polem magnetycznym. Rozszczepieniu poziomów odpowiada rozszczepienie linii widmowych promieniowania. Zjawisko to było zaobserwowane po raz pierwszy w 1896 r. przez Pietera Zeemana i nosi nazwę **efektu Zeemana**. W przypadku, gdy moment magnetyczny powłoki elektronowej związany jest jedynie z momentem orbitalnym elektronów (tzn. wkład spinowy wynosi 0), mówimy o **normalnym efekcie Zeemana**. Linia spektralna rozszczepia się wtedy na trzy składowe przesunięte w częstotliwości o $\Delta\nu = 0$ bądź $\Delta\nu = \pm \frac{eB}{4\pi m_e}$, gdzie $\omega = 2\pi\nu$, e i m_e oznaczają odpowiednio ładunek i masę elektronu, B – indukcję pola magnetycznego. Jeśli wkład od spinowych momentów magnetycznych nie jest równy zeru, to wyróżnia się dwa skrajne przypadki: przypadek słabego pola – wtedy mówimy o **anomalnym efekcie Zeemana** i przypadek silnego pola – wtedy mówimy o **efekcie Paschena-Backa** od nazwisk fizyków, którzy to zaobserwowali po raz pierwszy w 1912 r.

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 553. Dwóch korektorów wykonało (niezależnie) korektę tekstu. Pierwszy znalazł 450 błędów, a drugi 300, przy czym 250 błędów wykryli obaj. Podać oszacowanie faktycznej liczby błędów.

Rozwiązanie na str. 13

M 554. Ciąg (x_n) jest określony w następujący sposób: $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n(2 - yx_n)$ dla $n = 1, 2, \dots$; a oraz $y > 0$ są ustalone.

Zbadać, dla jakich a ciąg jest zbieżny i wyznaczyć jego granicę.

Rozwiązanie na str. 3

M 555. Jaka jest najmniejsza możliwa długość dłuższej przekątnej trapezu o polu 1?

Rozwiązanie na str. 2

Redaguje dr Rafał STAROŃSKI

F 276. Ocenic, jaka powinna być odległość L między zwierciadłami interferometru Fabry’ego-Pérot’a, aby z jego pomocą można było obserwować rozszczepienie Zeemana w polu magnetycznym o indukcji $B = 1$ T. Zwierciadła interferometru posrebrzone są tak, że między nimi zachodzi $N \cong 20$ odbić.

Rozwiązanie na str. 7

F 277. Ocenic, jaką wielkość pola magnetycznego gwiazdy typu Słońca można zmierzyć na podstawie efektu Zeemana, w zakresie promieniowania widzialnego (przyjmujemy $\omega = 10^{15} s^{-1}$). Okres obrotu gwiazdy $\tau = 10^6$ s, promień $R = 10^{10}$ cm, temperatura powierzchni $T = 6000$ K.

Rozwiązanie na str. 17

Numeryczna telepatia czy sprawność rachunkowa?

Dr Lidia GOETTIG

Przekazywanie myśli bez pośrednictwa zmysłów, czyli telepatia, jest, jak wiadomo, zjawiskiem spornym i nie wyjaśnionym naukowo. Zupełnie inaczej rzecz ma się z przekazywaniem liczb; w tej dziedzinie można osiągnąć niemałe sukcesy, a przy tym wszystko daje się uzasadnić racjonalnie. Istnieją jednakże i tu pewne ograniczenia, nie wszystkie bowiem liczby jednakowo łatwo poddają się zabiegom telepatycznym. Przekonamy się na paru przykładach, że stuprocentową skuteczność mogą gwarantować liczby będące wynikiem pewnych operacji, takich jak np. mnożenie czy dodawanie. Bezbłędne odgadywanie tego wyniku może czasem wyglądać na zawrotną sprawność rachunkową obliczeń wykonywanych w pamięci, ale przyznacie, że mało to prawdopodobne, szczególnie w przypadku osób, które jeszcze do wczoraj tak szybko liczyć nie potrafiły.

Przykład 1. Dotyczy dodawania. Występuje w nim „nadawca” (NAD) liczby i jej „odbiorca” (OD). OD powinien mieć zawiązane oczy i stać tyłem do NAD. Po uzgodnieniu największej dopuszczalnej długości liczby (w cyfrach, np. 4 cyfry) NAD i OD na zmianę podają kolejno liczby naturalne (nie przekraczające długości maksymalnej), które NAD notuje. Pierwszą i ostatnią podaje ta sama osoba, OD bądź NAD. Liczb może być więc 3, 5, 7 itd. Po zakończeniu NAD sumuje wszystkie liczby, a wynik usiłuje „przekazać” do OD, który ma cały czas zawiązane oczy. O dziwo, gdy OD ujawnia wynik, cała liczba, cyfra po cyfrze, się zgadza. Można by podejrzewać, że OD „po prostu” opanował umiejętność szybkiego sumowania wielu dużych liczb w pamięci. Proponuję więc Wam zagrać rolę OD i przekonać się, że nie jest to takie trudne.

Przykład 2. Też dotyczy dodawania. NAD i OD zamieniają się rolami (tym razem bez opaski na oczach). Ustalają znowu maksymalną długość liczby, a następnie NAD (który poprzednio grał rolę OD) wypisuje na kawałku papieru pewną, sobie tylko znaną, liczbę i chowa ją np. do kieszeni OD. Tak jak poprzednio, NAD i OD na zmianę podają liczby zapisując je. Tym razem pierwszą i ostatnią podaje NAD. Rolą NAD jest telepatyczne przekazanie do OD poleceń napisania takich liczb, aby wszystkie w sumie dały wynik zapisany *a priori*. Porównanie ... i znowu całkowita zgodność! Czy i tym razem mamy do czynienia „po prostu” z fenomenalną sprawnością rachunkową?

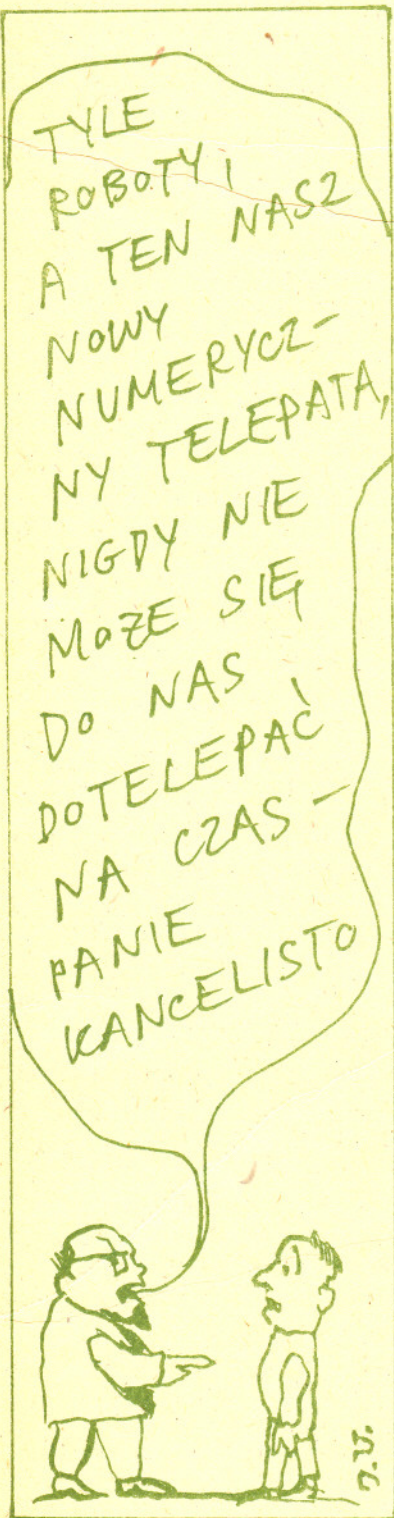
Przykład 3. NAD wybiera pewną liczbę nie ujawniając jej. OD wymienia inną liczbę, o dowolnej długości (długość – w cyfrach – może np. ustalić NAD). Z liczb tych NAD tworzy następnie iloczyn. Okazuje się, że OD będzie w stanie prawidłowo podać dowolną cyfrę tego iloczynu, o ile NAD ujawni wszystkie pozostałe cyfry, przy czym nawet znajomość ich kolejności nie będzie konieczna. OD będzie miał kłopoty tylko w jednym przypadku, gdy zgadywaną cyfrą będzie 0 lub 9 – nie będzie ich mógł rozróżnić. Tego przykładu nie można już tłumaczyć sprawnością obliczeniową. OD nie jest w stanie wykonać obliczeń, bowiem nie zna jednego z czynników. A więc ... numeryczna telepatia? Chyba jednak nie.

Wszystkie trzy przykłady ilustrują niezwykle własności liczby 9 w (9+1)-kowym, czyli dziesiętnym-układzie liczb.

W przykładzie 1 OD musi tak dopasować swoje liczby do liczb NAD, aby dla danej pary liczb suma cyfr w każdej kolumnie wynosiła 9. Sumę wszystkich liczb wyznaczy wtedy niesparowana liczba, którą trzeba jedynie nieco zmodyfikować (w bardzo prosty sposób) w zależności od liczby par, np.:

NAD	6348	}	w każdej kolumnie tej pary liczb suma cyfr wynosi 9
OD	3651		
NAD	9805	}	w każdej kolumnie tej pary liczb suma cyfr wynosi 9
OD	194		
NAD	4507		niesparowana liczba, wyznaczająca wynik sumowania
SUMA	24505		

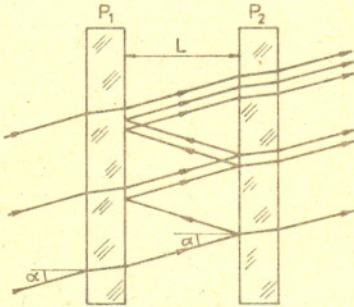
Przy dwóch parach wynik powstaje przez odjęcie 2 od niesparowanej liczby





Rozwiązanie zadania F 276.

Interferometr Fabry'ego-Pérot'a składa się z dwóch płytek szklanych, jednostronnie posrebrzonych (od strony wewnętrznej), tak, że przepuszczają część światła, ale mają dużą zdolność odbijającą. Promienie, które przez płytkę P_1 przedostają się do wnętrza, ulegają wielokrotnemu odbiciu od posrebrzonych ścianek i z płytki P_2 wychodzi szereg wiązek równoległych promieni, które interferują.



Zdolność rozdzielcza interferometru jest określona przez

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN, \quad \text{gdzie } m = \frac{2L}{\lambda}.$$

Stąd

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{2LN}{\lambda},$$

co daje

$$L = \frac{\lambda^2}{2N\Delta\lambda}.$$

Przechodząc od długości fali λ do częstości kołowej $\omega = 2\pi c/\lambda$ możemy otrzymać wzór na przyrost ω

$$\Delta\omega = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \Delta\lambda.$$

Łącząc ostatnie dwa wzory otrzymujemy

$$L = \frac{\pi c}{N\Delta\omega}. \quad \text{Rozszczepienie zeemanowskie wynosi}$$

$$\Delta\omega = \frac{eB}{2m_e} = \frac{\mu_B B}{h}.$$

W wyniku otrzymujemy

$$L = \frac{2\pi m_e c}{NeB} \approx 5 \cdot 10^{-2} \text{ cm}.$$

i dopisanie tej dwójki z przodu (tu: na piątej pozycji od końca), bowiem dodawanie sprowadza się do:

$$\begin{array}{r} 9999 \text{ suma dla pary liczb} \\ 9999 \text{ suma dla pary liczb} \\ + \quad x \text{ niesparowana liczba} \\ \hline \end{array}$$

czyli:

$$19998 + x = 20000 + x - 2.$$

Jeśli par jest więcej, przepis się modyfikuje, np. dla 3 par (czyli sumowania 7 liczb np. 4-cyfrowych) mamy

$$3 \cdot 9999 + x = 29997 + x = 30000 + x - 3,$$

czyli trzeba od liczby x odjąć 3 i dopisać cyfrę 3 na miejscu piątym od końca. Dla 4 par trzeba odjąć 4 i dopisać 4, itd., zauważacie już chyba prostą prawidłowość. Mamy więc racjonalne wytłumaczenie, a potrzebna sprawność rachunkowa jest na pewno w zakresie naszych możliwości.

Przykład 2 jest innym sposobem zademonstrowania tego samego co wyżej. Osoba, która z góry wypisuje wynik sumowania, musi rozpoczynać i kończyć podawanie liczb, bo właśnie pierwsza liczba będzie tą niesparowaną, która wyznaczy przewidziany wynik.

Przykład 3 wykorzystuje własności liczb podzielnych przez 9. Jeśli dodać wszystkie cyfry tworzące dowolną liczbę podzielną przez 9, a w otrzymanym wyniku znowu dodać cyfry i tak dalej, aż w końcu otrzyma się jedną cyfrę, to cyfra ta będzie równa 9. Nosi ona nazwę pierwiastka cyfrowego (z angielskiego *digital root*). To, że wielokrotności 9 mają pierwiastek cyfrowy równy 9, można wykazać przez indukcję. Dla wielokrotności $n = 1$ jest to prawda. Załóżmy, że jest to prawda dla jakiegoś n . Wykażemy, że jest nią również dla $n + 1$. Jeśli ostatnia cyfra wynosiła 0, to po dodaniu 9 suma cyfr zwiększyła się o 9, ale pierwiastek cyfrowy liczby 18 znowu wynosi 9. Jeśli zaś ostatnia cyfra była większa od 0, to w wyniku dodawania 9 ostatnia cyfra zmniejszyła się o 1, a cyfra dziesiątek wzrosła o 1 – pierwiastek cyfrowy nie uległ więc zmianie, co kończy dowód.

Podobnie można udowodnić twierdzenie odwrotne, a mianowicie każda liczba mająca pierwiastek cyfrowy 9 jest podzielna przez 9.

W przykładzie wystarczy więc dowolną liczbę pomyślaną przez NAD przemnożyć przez liczbę podzielną przez 9, aby wiedzieć, że pierwiastek cyfrowy iloczynu wynosi też 9 i móc odgadnąć jedną z cyfr, jeśli znamy wszystkie pozostałe. Z powodów teraz już oczywistych 0 od 9 istotnie nie daje się odróżnić.

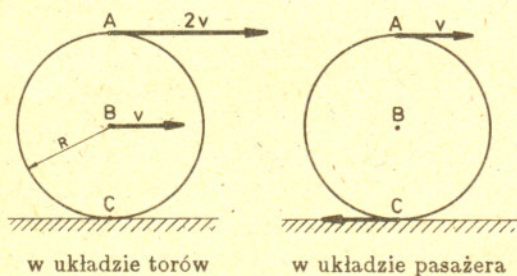
Na zakończenie – o przypadkach mniej skutecznej „telepatii”. Takie pokazy odgadywania pomyślanej przez kogoś liczby oparte są często na obserwacji, iż z jakichś niejasnych powodów ludzie preferują pewne liczby wybierając je statystycznie częściej niż inne (*Mathematics, Magic and Mystery* – książka napisana przez Martina Gardnera). Spytani o liczbę między 1 a 10 mamy tendencję do wyboru 7, także chętniej niż pozostałe wybieramy liczbę 3 z przedziału od 1 do 5. Jeśli spytać o liczbę dwucyfrową między 1 a 50, taką, aby obie jej cyfry były nieparzyste i różne, np. nie może być 11, to podobno najczęściej wymieniana jest liczba 37, a następna w kolejności prawdopodobieństw jest 35. Przy czym ze względów psychologicznych dla osiągnięcia takiego wyniku nie bez znaczenia pozostaje tu wzmianka o liczbie 11. Podobnie z przedziału od 50 do 100 najbardziej prawdopodobną liczbą o obu cyfrach parzystych i różnych okazuje się być 68. A może sprawdzicie, jak stosują się do tych statystycznych zachowań Wasi znajomi i koledzy? Spróbujcie zdobyć odpowiednią „statystykę” (tj. liczbę przypadków), aby móc odpowiedzieć na pytanie, jakie są prawdopodobieństwa wymienienia poszczególnych liczb w podanych przez nas przykładach. Prawdopodobieństwo dla danej liczby k wyznaczone jako stosunek liczby dobrych odpowiedzi N_k do wszystkich odpowiedzi N . Zbadajcie więc, dla przykładu, jak różnią się od $\frac{1}{8}$ wyznaczone przez Was stosunki N_k/N dla poszczególnych liczb z przedziału od 1 do 50, o ile obie cyfry są nieparzyste i różne (jest 8 takich liczb). Wyniki przedstawcie na histogramach. A może podzielicie się z nami wynikami Waszych badań?

delta

Ciekawostki dla podróżujących

Wszyscy wiemy, że prędkość zależy od układu odniesienia, w którym ją wyznaczamy. Dla przykładu, ciało poruszające się względem jakiegoś obserwatora z prędkością v w swoim własnym układzie ma prędkość równą zeru. Jako ciekawostkę można podać przypadek z czasów I wojny światowej, kiedy to podobno pewien lotnik francuski schwytał w rękę, bez uszczerbku dla siebie, niemiecką kulę karabinową, bowiem wydała mu się wolno przelatującym owadem.

Pasażer siedzący w pędzącym ze stałą prędkością pociągu uważa za zupełnie oczywiste, że otaczające go elementy tego pociągu znajdują się względem niego w spoczynku. A czy potraficie wskazać takie części tego pociągu (jego punkty), które poruszają się względem pasażera i to z prędkością równą prędkości pociągu mierzonej w układzie torów. Oczywiście! Te punkty znajdują się na kołach pociągu (na rysunku punkty A i C). Biorą one udział w dwóch ruchach: obrotowym i postępowym.

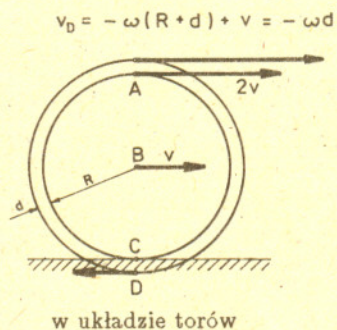


Punkt na obwodzie koła będący chwilowo w położeniu A porusza się w układzie torów z prędkością $v_A = \omega R + v$, gdzie v jest prędkością pociągu, a ω – prędkością kątową obracającego się koła, która związana jest z v zależnością $\omega R = v$, o ile nie występuje poślizg. Stąd $v_A = 2v$.

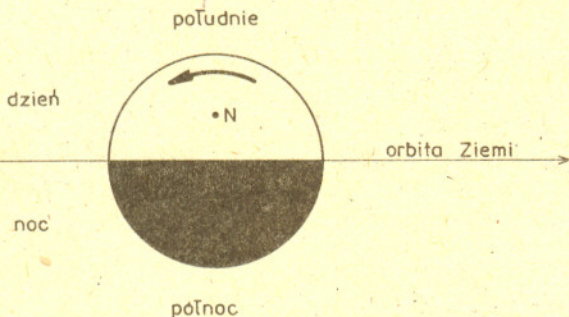
Natomiast w układzie pasażera punkt A porusza się z prędkością v w kierunku ruchu pociągu. Punkt C , będący chwilowo punktem zetknięcia się koła z torem, ma w układzie torów prędkość $v_C = -\omega R + v = 0$, zaś w układzie pasażera porusza się z prędkością v , ale w kierunku przeciwnym do ruchu pociągu.

Tak więc nie dziwi nas to, że w każdej chwili pewne punkty pociągu w układzie pasażera pędzą z prędkością pociągu. Przyjmujemy za zupełnie naturalne, że choć niektóre jego punkty pozostają w spoczynku względem torów, podczas gdy inne mkną do przodu ze zdwojoną prędkością, to pociąg w całości dojedzie do kolejnej stacji.

A czy wydaje się Wam możliwe, aby pewne punkty pociągu pędzącego do przodu poruszały się w układzie torów do tyłu, tj. w kierunku przeciwnym do kierunku jazdy? Okazuje się, że i to jest zupełnie normalne – w pociągu jadącym na północ pewne punkty uparcie poruszają się względem torów na południe i bynajmniej nie jest to sytuacja awaryjna. Wynika to z kształtu kół, które „obejmują” szynę z boku. Najniżej położony punkt D koła obraca się z prędkością liniową większą od prędkości pociągu, a więc jego wypadkowa prędkość skierowana jest przeciwnie do kierunku ruchu pociągu.



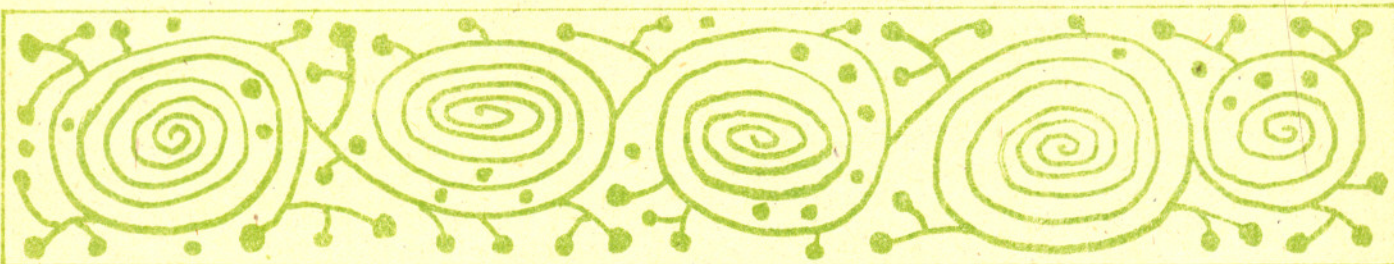
To była ciekawostka dla podróżujących pociągiem, a teraz coś dla uczestników podróży kosmicznych, w szczególności tej wielkiej wyprawy dookoła Słońca, w której wszyscy uczestniczymy. Czy wiecie, że nocą podróżujemy szybciej niż w ciągu dnia?



Po orbicie wokółsłonecznej poruszamy się z prędkością średnią około 30 km/s, ale równocześnie bierzemy udział w ruchu wokół osi naszej planety. Ziemia wykonuje jeden obrót w czasie 23 h 56 min, a więc w tym ruchu punkty na równiku obracają się z prędkością około 0,5 km/s.

W południe prędkości obu tych ruchów odejmują się, a o północy dodają. Wahania prędkości między środkiem dnia a środkiem nocy wynoszą więc na równiku około 1 km/s, co stanowi około 3,3 %. W Polsce różnica ta jest mniejsza – trzeba ją pomnożyć przez około 0,6 (= cos 52°), a na biegunach w ogóle nie istnieje. Może dzięki temu żyje się tam spokojniej i śpi lepiej?

Małą Deltę przygotowała Lidia GOETTIG



Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego

KORRESPONDENCYJNY KLUB FIZYKÓW

Drodzy Członkowie i Sympatycy Klubu!

Postanowiliśmy wprowadzić punktację i nagrody za najlepiej rozwiązane problemy postawione przed Wami w kolejnych wydaniach Klubu. Odtąd co miesiąc będziemy przyznawali nagrodę książkową dla autora najciekawiej opracowanego rozwiązania postawionych zagadnień. A oto nowa seria propozycji:

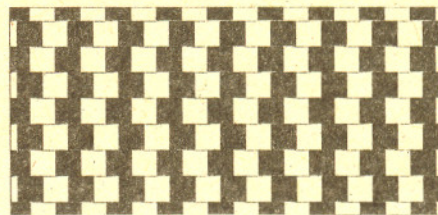
1. Wiadomo, że jeśli wychylenia wahadła matematycznego (w praktyce wahadłem matematycznym może być ciężarek zawieszony na pręcie) są niewielkie, to okres wahań nie zależy od amplitudy wychyleń. Mówimy o izochronizmie wahadła matematycznego. W szkole wyprowadza się wzór na okres wahań T :

$$T = 2\pi\sqrt{l/g},$$

gdzie l jest długością wahadła, a g przyspieszeniem ziemskim. Jest to wzór przybliżony. Proponuję zbadanie odstępstw od tego wzoru dla dużych kątów wychyleń, bliskich nawet 180°. Jeżeli zauważysz odstępstwa, musisz się upewnić, że nie jest to wynik przypadkowego błędu pomiaru. Wyniki przedstaw w postaci wykresu zależności okresu wahań od amplitudy. Postaraj się ocenić błąd pomiaru i nanieś na wykres.

2. Spróbuj powtórzyć doświadczenie Foucaulta wykazujące w warunkach laboratoryjnych obrót Ziemi. Doświadczenie to wymaga pomieszczenia, w którym można zawiesić kilkumetrowej długości wahadło. Im dłuższe, tym lepsze. Dlatego najlepiej wykonać je w szkole pod opieką nauczyciela fizyki (np. na klatce schodowej) lub w bezwietrzny dzień zawieszając wahadło na drzewie.

Wprawiamy wahadło w ruch. Zaznaczamy płaszczyznę, w której odbywają się wahania i notujemy czas. Co 15 minut zaznaczamy płaszczyznę wahań. Na podstawie pomiarów możemy wyznaczyć prędkość kątową obrotu Ziemi. Uwaga! Przy wyznaczaniu prędkości kątowej nie zapominajmy, że nie mieszkamy na biegunie.



3. Popatrzcie na rysunek ściany wyłożonej czarnymi i białymi kafelkami. Czy proste rozdzielające poszczególne szeregi kafelków są równoległe? Potwierdź swoje spostrzeżenie pomiarami. Czy jest taki kąt patrzenia na rysunek, aby wyniki pomiarów i obserwacji wizualnej były zgodne?

Redaguje doc. dr Tomasz HOFMOKL

Listy prosimy przysyłać pod adresem:

Korespondencyjny Klub Fizyków,
Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego, ul. Hoża 69,
00-681 Warszawa.

Rachunkowa archeologia

Prowadzenie długich i żmudnych rachunków jest w wielu dyscyplinach ludzkiej działalności koniecznością. Nic więc dziwnego, że „od zawsze” starano się czynności te uprościć, tak dla skrócenia potrzebnego na ich wykonanie czasu, jak i dla zminimalizowania popełnianych przy tym błędów. Z jednej strony starano się budować przyrządy „rachujące”, z drugiej – tworzone przepisy, algorytmy ułatwiające rachunki.

Najprostsze algorytmy to znane (mam nadzieję) ze szkoły przepisy pisemnego dodawania i mnożenia. To właśnie te przepisy zdecydowały o upowszechnieniu się w Europie już od XIV wieku liczb arabskich, do których te przepisy są dostosowane, i praktyczne wyeliminowanie przez nie liczb rzymskich w księgach kupieckich i pracach naukowych do końca XV wieku.

Oczywiście, używanie cyfr arabskich było w czasach wojen krzyżowych czymś w rodzaju ulegania wrogiej propagandzie. Wydane w 1299 roku statuty *Arte del Cambio* zakazują używania cyfr arabskich w dokumentach handlowych – sporządzone z ich udziałem dokumenty nie mają żadnej mocy prawnej. Przeglądając księgi rachunkowe Mediceich znajdujemy cyfry arabskie w tekście opisowym w 1406 roku. Od roku 1439 zaczynają one występować w kolumnach różnych ksiąg. Od roku 1482 we wszystkich księgach prócz jednej (dla władz fiskalnych) są już cyfry arabskie. Ostatecznie cyfry rzymskie znikają z ksiąg rachunkowych Mediceich w 1494 roku.

Nietrudno zauważyć, że przepis na dodawanie umożliwia dodanie równocześnie wielu liczb (w tak zwanym słupku), podczas gdy przepis na mnożenie umożliwia pomnożenie tylko dwóch. Usunięcie tej niewygody było przedmiotem najsilniejszego ataku rachmistrzów XVI wieku.

Warto wspomnieć o metodzie wykonywania wielu dodawań i odejmowań w jednym słupku. Polegało to na dzieleniu liczby dziesiętnej na cechę i mantysę, czyli na to, co dziś nazywamy częścią całkowitą (dodatnią lub ujemną) i „resztę” (zawsze nieujemną, mniejszą od 1). Dla liczby dodatniej zapis taki jest zwykłym zapisem dziesiętnym. Dla liczby ujemnej jest inaczej. Np.: $-2,7892 = \bar{3},2108$. W ten sposób rachunek:

$$2,7849 - 3,4752 + 11,82 - 1,234$$

można było wykonać w słupku

$$\begin{array}{r} 2,7849 \\ 4,5248 \\ 11,8200 \\ \bar{2},7660 \\ \hline 9,8957 \end{array}$$

Zacząto od tego, że próbowano, nawet w przypadku mnożenia dwóch liczb, zastąpić je dodawaniem. Pierwszą z dość rozpowszechnionych metod było użycie tablic kwadratów. Mamy mianowicie

$$a \cdot b = ((a + b)^2 - (a - b)^2) / 4.$$

A oto zastosowanie:

$$\begin{aligned} 284 \cdot 391 &= (675^2 - 107^2) / 4 = (455\,625 - 11\,449) / 4 = \\ &= 444\,176 / 4 = 111\,044. \end{aligned}$$

Choć komuś mogłoby się zdawać, że metoda ta komplikuje rzeczy proste, to jednak XVI-wieczni rachmistrzowie uważali ją za szybszą i pewniejszą. Oczywiście, nie w przypadku tak prostych i „krótkich” liczb jak w podanym przykładzie, choć i takie rachunki

„dla porządku” tak przeprowadzano. Ważną rzeczą było tu posiadanie dużych tablic kwadratów, ale pod koniec XVI wieku każdy szanujący się ośrodek naukowy dysponował tablicami kwadratów do 100 000, co umożliwiało mnożenie liczb pięciocyfrowych.

Spostrzeżenie, że mnożenie wykonuje się tak samo dla liczb o różnie umieszczonych przecinkach, a przecinek należy na zakończenie wstawić w odpowiednie miejsce, pozwalało zarówno sprowadzić mnożenie dowolnych liczb do mnożenia liczb całkowitych, jak i przeciwnie – do mnożenia ułamków właściwych, czyli liczb mniejszych od jedności. To ostatnie nasunęło pomysł wykorzystania do mnożenia tablic trygonometrycznych. Np.

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) / 2.$$

W podanym poprzednio przykładzie będzie to:

$$\begin{aligned} 284 \cdot 391 &\approx 1\,000\,000 \cdot \cos 73^\circ 30' \cdot \cos 66^\circ 59' = \\ &= 1\,000\,000 \cdot (\cos 140^\circ 29' + \cos 6^\circ 31') / 2 \approx \\ &\approx 1\,000\,000 \cdot (-0,7714 + 0,9936) / 2 = \\ &= 1\,000\,000 \cdot (0,2222) / 2 = 111\,100. \end{aligned}$$

To, że wynik jest przybliżony, wzięło się stąd, iż dane są wzięte ze szkolnych tablic czterocyfrowych. A np. w 1613 r. Pitiscus wydał tablice piętnastocyfrowe. Przy ich użyciu wyszłoby „jak obszy”, mimo że rachunek jest przybliżony niejako z założenia.

Istnienie takich tablic jest zresztą dowodem na to, że faktycznie w takich celach były używane – w żadnej sytuacji geometrycznej piętnastocyfrowa dokładność nie może mieć zastosowania.

I wreszcie, na przełomie XVI i XVII wieku wymyślono to, co zasłużyło się ludzkości w ciągu 3,5 wieku tak bardzo, że komputery długo jeszcze będą musiały pracować, by się zasłużyć podobnie. Chodzi mianowicie o logarytmy, czyli funkcje spełniające warunek

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y).$$

Funkcja taka po prostu zamienia mnożenie na dodawanie, a więc umożliwia mnożenie wielu czynników.

Początkowo logarytmy były to dwa ciągi – geometryczny i arytmetyczny. Aby pomnożyć dwie liczby, należało znaleźć je wśród wyrazów ciągu geometrycznego, dodać wyrazy ciągu arytmetycznego o tych właśnie numerach, odnaleźć sumę wśród wyrazów ciągu arytmetycznego i, jako iloczyn, wziąć wyraz ciągu geometrycznego o takim samym numerze. Oczywiście, aby przybliżenia nie były zbyt grube, oba ciągi musiały być dość gęste. Chcąc takie otrzymać Szwajcar Jost Bürgi, pierwszy stosujący tę metodę, potęgował $1 + 0,0001$, co (jak łatwo zauważyć) sprowadza się do dodawania liczb „przesuniętych”:

$$a_{n+1} = a_n + 10^{-4} a_n.$$

Kolejny rachmistrz, szkocki arystokrata John Neper (Napier), potęgował $1 - 0,0000001$, co znów sprowadza się do odejmowania liczb przesuniętych:

$$b_{n+1} = b_n - 10^{-7} b_n.$$

Jak widać, używano zarówno logarytmów rosnących (jak my dzisiaj), jak też malejących. Widać więc wyraźnie, że początkowo logarytmy nie miały wiele wspólnego (a może jednak miały) z opisaną w tekście funkcją.

Stosując logarytmy do poprzedniego przykładu (Nlog oznacza funkcję odwrotną do log) mamy:

$$\begin{aligned} 284 \cdot 391 &= N\log(\log 284 + \log 391) \simeq \\ &\simeq N\log(2,4533 + 2,5922) = \\ &= N\log(5,0455) \simeq 111\,050 \end{aligned}$$

(te same tablice, też jest błąd). Czternastocyfrowe tablice takich logarytmów wydał (częściowo) Henry Briggs w 1624 roku, a uzupełnił je Ezechiel de Decker w 1627 roku.

Podobnie inną historią jest np. sposób korzystania z tablic logarytmów (ktoś, kto skończył szkołę mniej niż 20 lat temu, miałby zapewne kłopoty z odkryciem, skąd w logarytmach 284 i 391 wzięły się na początku dwójki).

Logarytmy dziesiętne oblicza się korzystając z podziału na cechę i mantysę. Cechą logarytmu jest najwyższa całkowita potęga dziesiątki mieszcząca się w danej liczbie. Np. cechą logarytmu liczby 275,438 będzie 2, dla liczby 5,324 otrzymamy 0, a dla 0,0123 będzie $\bar{2}$. W tablicach odszukujemy mantysę logarytmu, a na „całych” logarytmach rachujemy w słupku tak, jak to było podane wyżej.

Ważne natomiast jest spostrzeżenie, że logarytmy, o których na początku XIX wieku Laplace powiedział: *Wynalazek logarytmów skraca czas pracy z miesięcy do dni, dosłownie podwaja życie astronomów*, są dla młodego pokolenia równie egzotyczną skamieliną, jak dla ich starszych kolegów podane wcześniej, poprzedzające logarytmy, pomysły usprawnienia rachunków.

Ponieważ dodawanie odcinków geometrycznie odpowiada przesunięciu, więc jeśli na dwóch deseczkach zaznaczymy skalę logarymiczną, to przesuwając je tak, by nad 1 jednej skali znalazła się liczba a drugiej skali, nad liczbą b pierwszej skali zobaczymy na drugiej skali liczbę $a \cdot b$.

Tego prostego wynalazku dokonał w 1620 roku Edmund Günter. Suwak logarymiczny był w użyciu jeszcze do niedawna – 20 lat temu wielu inżynierów mnożyło suwakiem szybciej niż ich koledzy za pomocą kalkulatora (wynik znali, zanim „konkurencja” zdążyła nacisnąć wszystkie potrzebne klawisze).

Ciekawe, czy upowszechnienie komputerów spowoduje, że i na tabliczkę mnożenia będziemy patrzyli jak na wykopalisko. A jeśli tak, to kiedy?

Opracował M.K.



Rachunki komputerowe

Poważne skutki niepoważnej zmiany

Zdarza się czasem, że drobna zmiana danych bardzo zmienia wynik. Na przykład odejmijmy od wielomianu

$$w(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-19)(x-20),$$

wydawałoby się, niezauważalną poprawkę $2^{-23}x^{19}$. Oto pierwiastki poprawionego wielomianu.

1,000 000 000	10,095 266 145 ± 0,643 500 904 i
2,000 000 000	11,793 633 881 ± 1,652 329 728 i
3,000 000 000	13,992 358 137 ± 2,518 830 070 i
4,000 000 000	16,730 737 466 ± 2,812 624 894 i
4,999 999 928	19,502 439 400 ± 1,940 330 347 i
6,000 006 944	
6,999 697 234	
8,007 267 603	
8,917 250 249	
20,846 908 101	

Pojawiło się 5 par pierwiastków zespolonych o dużej części urojonej, a część rzeczywista nowych pierwiastków też znacznie różni się od pierwiastków pierwotnego wielomianu.

Z podobnym problemem spotykamy się znajdując wartości własne macierzy A i $A + \varepsilon B$ wymiaru $n \times n$, gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wartości własne (zespolone) macierzy zaburzonej są odległe od n -krotnej wartości własnej macierzy A , to znaczy od liczby 1, o $\varepsilon^{\frac{1}{n}}$. Dla np. $n = 10$ i $\varepsilon = 10^{-10}$ wartości własne różnią się o $\frac{1}{10}$.



J. R.

Redaguje dr hab. Andrzej HENNEL

UPORZĄDKOWANE JONY
W PUŁAPKACH

Spektroskopia jonów schwytych w różnego rodzaju pułapkach magnetycznych, elektrycznych i laserowych umożliwiła ostatnio zaobserwowanie bardzo interesujących efektów uporządkowania się jonów w symetryczne struktury przestrzenne. Jony w pułapkach mogą być chłodzone za pomocą odpowiednio dostrojonej wiązki laserowej (patrz Fizyczne nowinki - Mrożone atomy, Delta 3/1989). W obszarze temperatur milikelwinowych oddziaływania elektrostatyczne między jonami są porównywalne co do rzędu wielkości z ich energią termiczną i rozpoczynają się uporządkowanie układu. Zjawisko to jest dobrą analogią procesu krystalizacji ciał stałych przy obniżaniu temperatury. Ostatnio opublikowano cały szereg zdjęć tak uporządkowanych układów. Grupa fizyków z Instytutu Optyki Kwantowej Maxa Plancka (RFN) pokazała istotną różnicę między świeceniem (poszerzonym przez efekt Dopplera) bezładnej „chmury” kilku jonów magnezu, znajdujących się w pułapce elektrostatycznej, a ostrą linią świecenia tych samych jonów po ich uporządkowaniu. Zmiana częstotliwości chłodzącego lasera lub parametrów pola tworzącego pułapkę umożliwiła wielokrotne „skraplanie” i „krystalizację” owej grupy jonów. Przedstawiony na taśmie wideo proces „krystalizacji” przebiegał w czasie między kolejnymi klatkami filmu (tzn. krótszym niż 40 ms). Odległość jonów w „sieci” wynosiła około 20 μm . Z kolei grupa fizyków z National Bureau of Standards (USA) badała „pseudomolekuły” zbudowane z małej liczby jonów rtęci schłodzonych do 8 mK wyznaczając nawet energie drgań takich układów. Większe ilości jonów (setki i tysiące) mogą być trzymane w pułapkach magnetycznych. Grupa amerykańska chłodziła w takiej pułapce jony berylu. Stwierdzono, że schłodzone jony tworzą kolejne powłoki. Przy 20 jonach w pułapce powstawała tylko jedna powłoka, przy 15 000 jonów – szesnaście powłok. Jony mogą dość łatwo poruszać się wewnątrz powłoki (z szybkością rzędu 1 mm/s), ale rzadko zmieniają zajmowane powłoki. Struktura taka przypomina ciekły kryształ zwany smektykiem. Teoretycznie przewidywano sferyczny kształt powłok. Eksperyment wykazał, że mogą one również przybierać postać cylindryczną, co nie jest jeszcze wyjaśnione. Przy dalszym schładzaniu jonów również wewnątrz danej powłoki pojawia się dodatkowe uporządkowanie. Należy sądzić, że wraz z udoskonaleniem metod eksperymentalnych chwytania i chłodzenia jonów możemy spodziewać się jeszcze wielu ciekawych rezultatów.

Przez ponad 250 lat obliczano kolejne cyfry rozwinięcia dziesiętnego π korzystając z rozwinięcia funkcji arctg w szereg Taylora

$$\arctg(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^8} - \dots$$

i różnych wzorów wyrażających π za pomocą arkusa tangensa, np.:

$$\pi = 16 \arctg \frac{1}{5} - 4 \arctg \frac{1}{239},$$

$$\pi = 24 \arctg \frac{1}{4} + 8 \arctg \frac{1}{57} + 4 \arctg \frac{1}{239}.$$

Tego ostatniego wzoru użyto w roku 1961, gdy obliczono 100 000 cyfr π . Wymagało to wykonania 105 000 działań z dokładnością, z jaką chcieliśmy π obliczyć. Czas wykonywania jednego działania z dokładnością n cyfr jest proporcjonalny do $n \cdot \log n \cdot \log \log n$, tak więc zmniejszenie liczby działań jest sprawą bardzo istotną. Nowe algorytmy pozwalają obliczyć π z tą samą dokładnością przy użyciu tylko 112 działań. Jakież to nowe odkrycie matematyczne spowodowało tę rewolucję? Są to po prostu wzory dotyczące całek eliptycznych pochodzące z... początku XIX wieku. Z ich pomocą w roku 1975 Salamin i Brent (niezależnie od siebie!) znaleźli nowe wzory na π .

Jeszcze Gauss rozpatrywał tak zwaną średnią arytmetyczno-geometryczną. Dla $0 < k < 1$ przyjmijmy $a_0 = 1$, $b_0 = k$, oraz $a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$, $b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}$ dla $n = 1, \dots$. Średnią arytmetyczno-geometryczną liczb 1 i k ($\text{agm}(k)$) nazywamy wspólną granicę ciągów (a_n) i (b_n) . Dlaczego ta wspólna granica istnieje? Ciąg (a_n) jest malejący (średnia arytmetyczna jest nie mniejsza niż geometryczna), ciąg (b_n) rosnący, ponadto $b_n \leq a_n$ (nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną). Tak więc oba ciągi mają granice. Oznaczmy $\alpha = \lim a_n$, $\beta = \lim b_n$. Przechodząc w równości $a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ do granicy otrzymujemy $\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2}$, skąd $\alpha = \beta$.

Oba ciągi są zbieżne bardzo szybko.

Oznaczmy $c_0 = \sqrt{1 - k^2}$, $c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - b_n)$. Mamy

$$a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 = \left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^2 - a_n b_n = \frac{1}{4}(a_n - b_n)^2,$$

tak więc

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{(a_n - b_n)^2}{4(a_{n+1} + b_{n+1})}, \quad \text{czyli} \quad c_{n+1} \leq \frac{c_n^2}{4a_{n+1}}.$$

A zatem błąd w $(n + 1)$ -szym kroku jest mniej więcej kwadratem błędu z n -tego kroku.

Wzory, z których korzystali Brent i Salamin, dotyczą całek eliptycznych pierwszego rodzaju:

$$I(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}$$

i drugiego rodzaju

$$J(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt.$$

Gauss wykazał, że

$$I(k') = \frac{\pi}{2 \text{agm}(k)}, \quad \text{gdzie} \quad k' = \sqrt{1 - k^2}.$$

Dla całek drugiego rodzaju mamy również

$$J(k') = I(k') \left(1 - \frac{1}{2}(c_0^2 + 2c_1^2 + 4c_2^2 + \dots + 2^n c_n^2 + \dots)\right).$$

Trzeba jeszcze znać wzór Legendre'a

$$J(k)I(k') + J(k')I(k) - I(k)I(k') = \frac{\pi}{2}.$$

Wśród pierwszych 10 000 000 cyfr rozwinięcia dziesiętnego π poszczególne cyfry występują następującą liczbę razy: 999 440, 999 333, 1 000 306, 999 964, 1 001 093, 1 000 466, 999 337, 1 000 207, 999 814, 1 000 040.

Dzielnik pierwsze 10 000 000 cyfr π na 2 000 000 „rąk pokerowych” otrzymujemy: 604 976 rąk bez pary (teoretyczna liczba takich rąk – 604 800), 1 007 151 rąk z jedną parą (1 008 000), 216 520 z dwiema parami (216 000), 144 375 z trójką (144 000), 17 891 z fulem (18 000), 8 887 z kareta (9 000), 200 z pokerem (200).



Rozwiązanie zadania M 553.

Oznaczmy przez N liczbę błędów w tekście i założmy, że pierwszy korektor wykrywa błąd z prawdopodobieństwem p , a drugi – r . Zatem szansa, że obaj wykryją dany błąd, wynosi $p \cdot r$. Mamy więc do czynienia z trzema schematami Bernoulliego. Na mocy prawa wielkich liczb można się spodziewać, że liczba sukcesów w schemacie Bernoulliego przy dużej liczbie prób będzie bliska swojej średniej, czyli $Np \approx 450$, $Nr \approx 300$, $Npr \approx 250$. Stąd

$$N = \frac{Np \cdot Nr}{Npr} \approx \frac{450 \cdot 300}{250} = 540.$$

Tekst zawiera około 540 błędów.

Jeśli weźmiemy $k = k' = \frac{1}{\sqrt{2}}$, to z powyższych trzech wzorów łatwo wyprowadzić, że

$$\pi = \frac{2 \left(\operatorname{agm} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right)^2}{1 - \sum_{j=0}^{\infty} 2^j c_j^2}.$$

Zastępując średnią przez a_{n+1} i biorąc w mianowniku n -tą sumę częściową otrzymujemy przybliżenia

$$\pi_n = \frac{2a_{n+1}^2}{1 - \sum_{j=0}^n 2^j c_j^2}.$$

Dość elementarne, acz nieco długie rachunki pokazują, iż

$$0 < \pi - \pi_n < \frac{\pi^2 2^{n+4} e^{-\pi 2^{n+1}}}{\left(\operatorname{agm} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right)^2}.$$

Przy algorytmie Salamina i Brenta liczba działań potrzebna do obliczenia π z dokładnością do 10^{-n} jest proporcjonalna do $\log n$, a nie jak w poprzednich metodach do n . Tak więc czas potrzebny do obliczenia π z taką dokładnością maleje z $n^2 \cdot \log n \cdot \log \log n$ do $n \cdot (\log n)^2 \cdot \log \log n$. Zważywszy, że tylko czas wypisania n cyfr jest proporcjonalny do n , algorytm powyższy jest dosyć bliski algorytmowi optymalnemu. Później powstały algorytmy jeszcze nieco szybsze, ale główny przełom to wykorzystanie przez Salamina i Brenta starych dziewiętnastowiecznych wzorów.

J. R.

Patrz w niebo

Około 1650 r. włoski astronom Giovanni Riccioli zauważył, że Mizar – ζ Wielkiej Niedźwiedzicy – to dwie bardzo bliskie sobie gwiazdy. W następnych latach inni obserwatorzy zauważyli podwójność γ Barana, α Bliźniąt, γ Panny i innych. Pytanie tylko, co to jest gwiazda podwójna. Jak blisko siebie muszą znaleźć się dwie gwiazdy, aby ich układ określić jako gwiazdę podwójną? Intuicja podpowiada, że układ taki stanowią gwiazdy leżące „podejrzenie” blisko siebie. W 1767 r. Anglik John Michell pierwszy zasugerował, że gwiazdy widziane jako podwójne są w istocie układami dwóch składników związanych fizycznie. Jego zdaniem dowodziła tego liczba gwiazd podwójnych znacznie większa od ich liczby oczekiwanej przy losowym rozkładzie gwiazd na niebie.

Wkrótce pojawiły się lepsze dowody fizycznej więzi składników gwiazd podwójnych. W 1798 r. T. Hornsby stwierdził, że oba składniki Kastora (α Bliźniąt) mają ten sam ruch na niebie, a pięć lat później William Herschel sprawę rozstrzygnął. Dysponując mianowicie kilkudziesięcioletnimi obserwacjami kilku gwiazd podwójnych zauważył, że ruch względny ich składników można wytłumaczyć tylko przyjmując ich wzajemny obieg. Jeszcze później dało się stwierdzić, że obieg ten jest zgodny z prawami Keplera, a więc i z prawem grawitacji – stało się to pierwszym dowodem, że newtonowskiemu prawu grawitacji podlegają też odległe ciała niebieskie.

Oczywiście, niektóre z gwiazd podwójnych okazały się też skutkiem przypadkowego ustawienia się niemal na jednej prostej z Ziemią dwóch gwiazd nie mających ze sobą nic wspólnego. Są to tzw. gwiazdy optycznie podwójne. Każdy „oprzyrządowany” obserwator nieba przyzna, że aż trudno uwierzyć, iż nie są to układy fizycznie podwójne. Najbardziej chyba znaną taką gwiazdą jest δ Herkulesa. Jej składniki mają jasność 3,1 i 8,2 mag. W odległości 9'' znajdowały się one około 1960 r. i teraz para ta rozdziela się. W rzeczywistości składnik jaśniejszy odległy jest od nas o 30 pc, a słabszy o 40 pc. Inną gwiazdą optycznie podwójną jest κ Herkulesa, a jej składniki leżą o 100 i 200 pc od nas. Jeszcze inne to np. σ Smoka, ψ^5 Woźnicy, β Łabędzia (Albireo). Ta ostatnia składa się z gwiazd odległych kątowno o 0,5', o dość zbliżonych jasnościach (3,1 i 5,1 mag), za to bardzo różniących się odległościami od nas (o kilkaset lat świetlnych) i barwach (jedna żółta, druga niebieska), co pięknie widać w niewielkiej nawet lunecie.

dr Tomasz KWAST

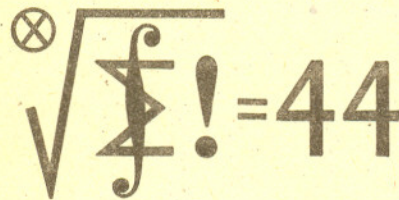
Termin nadsyłania rozwiązań:

30 XI 1989

Czołówka ligi zadaniowej Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 183 ($WT=3,27$), 184 ($WT=2,55$),
185 ($WT=1,79$) i 186 ($WT=2,65$)
z numerów 1 i 2/1989

Kazimierz Serbin	- Sanok	42,72 pkt
Jerzy Małopolski	- Kraków	40,86 pkt
Andrzej Krzysztofowicz	- Gdańsk	39,01 pkt
Dariusz Rybacki	- Kraśnik	38,49 pkt
Andrzej Szymczak	- Gdańsk	37,73 pkt
Krzysztof Zawisławski	- Warszawa	37,09 pkt
Henryk Kasprzak	- Żary	37,02 pkt



Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1989.

Zadania z matematyki nr 195, 196

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

195. Dwie identyczne talie po n kart stasowano razem. Przyjmujemy, że wszystkie układy (permutacje) są jednakowo prawdopodobne. Odkrywamy karty po jednej aż do chwili, gdy wśród odkrytych kart znajdują się dwie identyczne; wówczas przerywamy odkrywanie. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby kart, które zostaną odkryte. Uwaga. Wynik należy podać w możliwie zwartej postaci (bez symboli \sum , „...”, procedur rekurencyjnych; dopuszczalne symbole: silnia, symbol Newtona, najprostsze działania, standardowe funkcje elementarne).

196. Dla dowolnego punktu P leżącego wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC oznaczmy przez P_1, P_2, P_3 rzuty tego punktu odpowiednio na boki AB, BC, CA .

Dowieść, że iloraz

$$\frac{|AP_1| + |BP_2| + |CP_3|}{|PP_1| + |PP_2| + |PP_3|}$$

jest wielkością stałą (gdy P przebiega wewnątrz trójkąta) wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt ABC jest równoboczny.

Zadanie 196 zaproponował pan Krzysztof Hryniewiecki z Białegostoku.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/1989

Przypominamy treść zadań:

191. Wyznaczyć liczbę permutacji (x_1, \dots, x_{30}) zbioru $\{1, \dots, 30\}$ spełniających warunki:

$$x_{i-2} < x_i \text{ dla } 3 \leq i \leq 30, \quad x_{i-3} < x_i \text{ dla } 4 \leq i \leq 30.$$

191. Permutację (x_1, \dots, x_n) zbioru $\{1, \dots, n\}$ (gdzie $n \geq 4$) nazwiemy dopuszczalną, jeśli spełnia warunki:

$$(1) \quad x_{i-2} < x_i \text{ dla } 3 \leq i \leq n, \quad x_{i-3} < x_i \text{ dla } 4 \leq i \leq n.$$

(Przyjmujemy, że dla $n = 3$ permutacje dopuszczalne są określone przez sam tylko pierwszy warunek, a dla $n \leq 2$ wszystkie permutacje są dopuszczalne.)

Wykażemy, że jeżeli (x_1, \dots, x_n) jest permutacją dopuszczalną zbioru $\{1, \dots, n\}$, $n \geq 3$, to

$$(2) \quad x_k < x_n \text{ dla } k < n - 1.$$

Uzasadnienie wynika z (1):

jeśli $n - k$ parzyste, to $x_k < x_{k+2} < x_{k+4} < \dots < x_n$;

jeśli $n - k$ nieparzyste ≥ 3 , to $x_k < x_{k+3} < x_{k+5} < \dots < x_n$.

Wobec (2), $x_k \neq n$ dla $k < n - 1$, a więc $n \in \{x_{n-1}, x_n\}$. Są dwie możliwości:

1° $n = x_n$; wtedy (x_1, \dots, x_{n-1}) może być dowolną dopuszczalną permutacją zbioru $\{1, \dots, n - 1\}$.

2° $n = x_{n-1}$; wtedy, zgodnie z (2),

$x_n = \max\{x_k : k \neq n - 1\} = n - 1$, zaś (x_1, \dots, x_{n-2}) może być dowolną dopuszczalną permutacją zbioru $\{1, \dots, n - 2\}$.

Oznaczmy przez d_n liczbę dopuszczalnych permutacji zbioru $\{1, \dots, n\}$. Z 1° i 2° wynika zależność rekurencyjna $d_n = d_{n-1} + d_{n-2}$. Przy tym $d_1 = 1$, $d_2 = 2$. Liczby d_n są więc kolejnymi wyrazami ciągu Fibonacciego. Stosując otrzymaną zależność rekurencyjną bez trudu znajdujemy $d_{30} = 1346269$.

192. Dowieść, że dla $a, b, c > 0$ jest

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{a + b + c}{3}.$$

192. Oznaczmy:

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + xy + y^2} \quad \text{dla } x, y > 0$$

i zauważmy, że

$$\begin{aligned} f(x, y) + f(y, x) &= (x + y) \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2} = \\ &= (x + y) \frac{(x + y)^2 + 3(x - y)^2}{3(x + y)^2 + (x - y)^2} \geq \frac{x + y}{3}, \end{aligned}$$

podczas gdy

$$f(x, y) - f(y, x) = x - y.$$

Rozważana w zadaniu suma równa się

$$S = f(a, b) + f(b, c) + f(c, a).$$

Przyjmijmy ponadto

$$S' = f(b, a) + f(c, b) + f(a, c).$$

Z wyprowadzonych tożsamości otrzymujemy

$$S + S' \geq \frac{a+b}{3} + \frac{b+c}{3} + \frac{c+a}{3} = \frac{2}{3}(a+b+c)$$

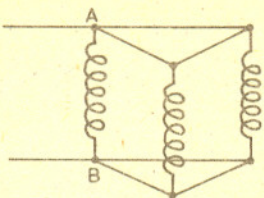
oraz

$$S - S' = (a - b) + (b - c) + (c - a) = 0.$$

A wobec tego

$$S \geq \frac{a+b+c}{3}.$$

Redaguje dr Andrzej NADOLNY



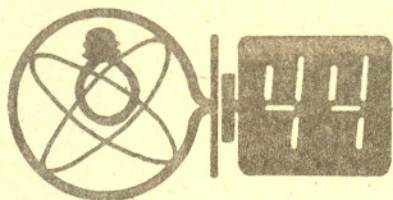
Rys. 1

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 81 ($WT=1,65$) i 82 ($WT=2,47$)
z numeru 1/1989

Paweł Perkowski	- Szczecin	44,34 pkt
Roman Musiał	- Katowice	44,00 pkt
Wiesław Kacprzak	- Kraków	43,04 pkt
Piotr Koczyński	- Warszawa	38,29 pkt
Dzierżysław Lipniacki	- Lublin	37,49 pkt
Aleksander Surma	- Mysłków	35,73 pkt
Jerzy Lipkowski	- Elbląg	34,95 pkt
Tomasz Wietecha	- Tarnów	32,37 pkt
Mariusz Bogacz	- Pińczów	27,66 pkt
Wojciech Feisert	- Wrocław	25,56 pkt

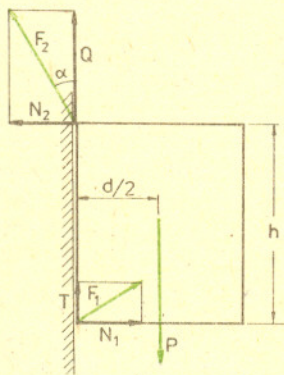
Panowie Perkowski i Musiał stają się
członkami Klubu z numerami 13 i 14.



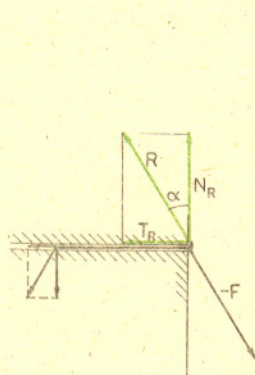
89. Na rysunku 2 przedstawiono siły działające na szafkę w przypadku, gdy podkładka umieszczona jest przy dolnej krawędzi szafki. P oznacza siłę ciężkości, $F_1 = N_1 + T$ - siłę, jaka działa na szafkę ze strony podkładki (N_1 - siła nacisku, T - siła tarcia), F_2 - siłę, którą na szafkę działa hak. W stanie równowagi wypadkowa siła musi być równa zeru, z czego wynika $Q + T = P$, $N_1 = N_2 = N$. Z warunku znikania momentu siły działającego na szafkę wynika ponadto $Nh = Qd/2$. Siła tarcia T spełnia nierówność $T \leq f_1 N$. Na podstawie powyższych zależności znajdujemy warunek na kąt α :

$$(*) \quad \operatorname{tg} \alpha = N/Q = k/(1 - kT/N) \leq k/(1 - kf_1),$$

gdzie $k = d/(2h)$.



Rys. 2



Rys. 3

Rysunek 3 przedstawia siły działające na hak. Przy założeniu, że hak jest długi, mamy w przybliżeniu $R = -F$ (zaniedbujemy tu siły działające na drugi koniec haka, w rzeczywistości siły te utrudniają jego wyciągnięcie). Na to, żeby hak nie wysunął się z otworu, musi być spełniony związek $\operatorname{tg} \alpha = T_R/N_R \leq f_2$. Kąt α powinien więc być jak

93. Trzy jednakowe cewki o indukcyjności L , nawinięte w tę samą stronę, połączone równolegle w taki sposób (rys. 1), że współczynnik indukcji wzajemnej każdej pary tych cewek jest jednakowy i wynosi M . Jaka jest indukcyjność zastępcza L_{AB} układu tych cewek?

94. Rakieta III stopnia o masie własnej $M = 4 \text{ Mg}$ i początkowej masie paliwa $m = 7 \text{ Mg}$ rozpoczyna na wysokości $H = 100 \text{ km}$ nad powierzchnią Ziemi samodzielny lot z prędkością początkową $v_0 = 1 \text{ km/s}$ w kierunku pionowym ku górze. Przyjmując, że przez cały okres $T = 90 \text{ s}$ pracy silnika jego siła ciągu $F = 100 \text{ kN}$ jest stała i skierowana pionowo w górę, wyznaczyć zależność prędkości v rakiety oraz jej wysokości h od czasu i przedstawić ją w postaci wykresów. Obliczyć maksymalną wysokość, na jaką wzniesie się rakieta. Podać przyjęte założenia.

Zadanie daje się rozwiązać analitycznie, ale zachęcamy do użycia metod numerycznych z wykorzystaniem kalkulatora lub komputera.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/1989

Przypominamy treść zadań:

89. Prostopadłościenną szafkę o wysokości $h = 0,5 \text{ m}$ i głębokości $d = 0,4 \text{ m}$ wieszamy na dwóch stalowych hakach luźno osadzonych w poziomych otworach w betonowej ścianie za pomocą zaczepów zamocowanych w jej górnych narożach. Dla ustalenia punktów styku „pleców” szafki ze ścianą stosujemy cienkie podkładki o współczynniku tarcia (o ścianę) f_1 ; $0 \leq f_1 \leq 0,75$. Jaką wartość f_1 należy dobrać i w którym miejscu przytwierdzić podkładki, aby zminimalizować niebezpieczeństwo wyciągnięcia haków ze ściany przez szafkę? Przyjmujemy, że środek ciężkości szafki pokrywa się z jej środkiem geometrycznym, a współczynnik tarcia stali o beton wynosi $f_2 = 0,5$. Czy zastosowanie dodatkowych haków podpierających dolną, przyścienną krawędź szafki mogłoby poprawić sytuację?

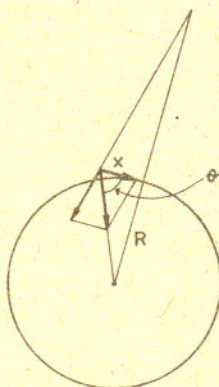
90. Czy można tak dobrać wilgotność otoczenia (powietrza) i średnicę kropli wody, aby krople te całkowicie zamieniały się w parę nie pobierając ciepła z otoczenia? Napięcie powierzchniowe wody wynosi $\sigma = 7,2 \cdot 10^{-2} \text{ J/m}^2$, ciepło parowania wody $-r = 2,3 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$.

najmniejszy. Z zależności (*) wynika zatem, że wartość siły tarcia T powinna również być jak najmniejsza. Należy więc dobrać podkładkę o minimalnym współczynniku tarcia f_1 . Dla $f_1 = 0$ mamy $\operatorname{tg} \alpha \leq k = 0,4$, czyli zachodzi nierówność $\operatorname{tg} \alpha < f_2$ i hak utrzyma się w ścianie. Natomiast dla $f_1 = 0,75$ będzie $\operatorname{tg} \alpha \leq 0,57$ i może nastąpić wyciągnięcie haka. Łatwo można wykazać, że umieszczenie podkładki w innym położeniu pogorszy sytuację. Podparcie dolnej krawędzi szafki, dzięki czemu mogłoby nastąpić zniknięcie siły Q , byłoby bardzo niekorzystne.

90. Pozytywna odpowiedź na postawione pytanie ma miejsce wtedy, gdy energia wymagana dla odparowania pewnej ilości wody z kropli będzie mniejsza lub równa zmianie energii napięcia powierzchniowego związanej ze zmniejszeniem się jej średnicy. Energia napięcia powierzchniowego kulistej kropli o promieniu R wynosi $4\pi R^2 \sigma$. Zmniejszenie promienia kropli o $\Delta R \ll R$ powoduje zmianę powierzchni o $\Delta S = 8\pi R \Delta R$, co pociąga za sobą zmniejszenie energii napięcia powierzchniowego o $\Delta E_n = 8\pi \sigma R \Delta R$. Z drugiej strony odpowiednia zmiana objętości kropli wynosi $\Delta V = 4\pi R^2 \Delta R$, co odpowiada odparowaniu masy $\Delta m = 4\pi \rho R^2 \Delta R$ i wymaga energii $\Delta E_p = 4\pi r \rho R^2 \Delta R$. Warunek $\Delta E_p \leq \Delta E_n$ zachodzi dla $R \leq R_0 = 2\sigma/(r\rho) = 6 \cdot 10^{-11} \text{ m}$. Otrzymana wartość R_0 jest porównywalna z rozmiarami cząsteczek wody, z czego wynika negatywna odpowiedź na postawione w zadaniu pytanie. Parowanie wody może jeszcze odbywać się kosztem energii wewnętrznej wody zawartej w kropli, czyli obniżania się jej temperatury. Energia ta jest jednak niewystarczająca dla odparowania całej wody, a ponadto obniżenie się temperatury wody wobec otoczenia musiałoby prowadzić do wymiany ciepła z otoczeniem. Wilgotność powietrza ma o tyle znaczenie, że przy wilgotności względnej 100% efektywnie parowanie wody w ogóle nie zachodzi.

DR OBLAZGA

Wzór na okres małych drgań wahadła matematycznego $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ sugeruje, że zwiększając długość wahadła l można dowolnie wydłużyć okres wahań. Okazuje się, że w warunkach ziemskich nie można jednak przekroczyć wartości $T = 84,3$ min. Jest to najdłuższy możliwy okres wahań wahadła w pobliżu Ziemi. Takim samym okresem charakteryzuje się ruch punktu materialnego w fikcyjnym tunelu przechodzącym przez środek Ziemi oraz ruch sputnika znajdującego się na orbicie kołowej, bardzo bliskiej powierzchni Ziemi.



Równanie ruchu:
 $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg \cos \theta$,
 $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg \frac{x}{R}$ dla $x \ll R$,
 stąd okres $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$.

Elipsa ma cztery wierzchołki, to znaczy punkty, gdzie krzywizna przyjmuje wartości ekstremalne. Są to końce długiej osi (tu krzywizna jest największa) i końce krótkiej osi (krzywizna najmniejsza). Łatwo zobaczyć, że dla dowolnego owalu, to znaczy płaskiej krzywej gładkiej ograniczającej obszar wypukły, istnieją co najmniej dwa punkty ekstremalne krzywizny. Jak jednak wykazał matematyk bengalski S. Mukhopadhyaya, dla dowolnego owalu istnieją co najmniej cztery takie punkty.

Od dawna znanych jest wiele galaktyk z „jetami”, czyli wyrzucających z reguły w przeciwne strony dwa strumienie materii kończące się z dala od macierzystej galaktyki rozciągłymi radioźródłami. Wśród takich obiektów radioźródło 3C75, leżące w Wielorybie, okazało się unikatem. Mianowicie za pomocą systemu anten znanego pod kryptonimem VLA (*Very Large Array*) stwierdzono, że macierzysta dla tego radioźródła olbrzymia galaktyka ma dwa centralne zgęszczenia produkujące w sumie cztery jety, z których dwa oplatają się nawzajem. Cała struktura rozciąga się na milion lat świetlnych, a od nas znajduje się w odległości 300 mln lat świetlnych. Moc radiowa jetów jest większa, niż można by oczekiwać na podstawie prędkości strug gazu – na razie nie wiadomo dlaczego.

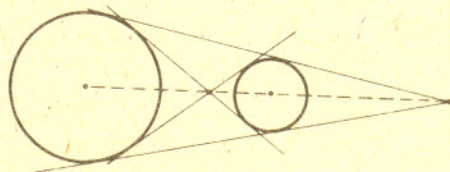
Ministrowie nauki reprezentujący 11 krajów europejskich podpisali projekt wspólnej budowy i eksploatacji Europejskiego Ośrodka Promieniowania Synchrotronowego. Ośrodek powstanie w Grenoble na terenie Instytutu Lauego-Langevina. Budowa potrwa ok. 6 lat i pochłonie 600 milionów dolarów, a pierwsze eksperymenty przewidywane są na 1994 rok. Wiązka o energii 6 GeV pozwoli na badanie struktury ciał stałych. W Japonii podjęto decyzję o budowie podobnego ośrodka, w którym będzie można uzyskać energię 8 GeV. Koszt budowy oceniający jest na 820 milionów dolarów, a budowa potrwa do 1995 r. W Stanach Zjednoczonych w Uniwersytecie Kalifornijskim w Berkeley budowane jest urządzenie mające osiągnąć energię 2 GeV oraz planuje się budowę nowego ośrodka o energii 7 GeV w Argonne.

Zgodność teorii względności z doświadczeniem została już potwierdzona w niezliczonych eksperymentach, niemniej jednak nowe jej testy są zawsze mile widziane. W ostatnim dziesięcioleciu wykonano eksperyment mający na celu sprawdzenie, czy „stare” światło wyemitowane z kwazarów miliardy lat temu porusza się rzeczywiście z tą samą prędkością co światło „młode” pochodzące z gwiazd naszej Galaktyki. Wykorzystano tu zjawisko aberracji światła, mianowicie wektorowego dodawania się prędkości światła i orbitalnej prędkości Ziemi. Wskutek tego zjawiska źródło światła jest widoczne w kierunku nieco innym, niż gdyby Ziemia nie poruszała się i zmiany tego kierunku w ciągu roku są dość łatwo mieralne. Wieloletnie obserwacje kilku kwazarów i kilku gwiazd przeprowadzone w Blue Mesa Observatory koło Las Cruces (Nowy Meksyk, USA) wykazały, że aberracja światła wszystkich tych obiektów jest taka sama. Badacze wnioskujeją, że prędkość światła jest stała w całym Wszechświecie i w całym okresie jego życia z dokładnością do 0,4%.

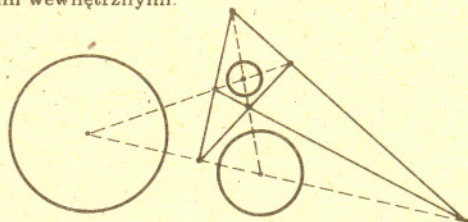
Ciekły hel ochłodzony do temperatury około 2 kelwinów wykazuje właściwości nadciekłości – jest nielepki i przepływa bez tarcia. Ale przepływ może być turbulentny, a jego natura jest kwantowo-mechaniczna. Np. w wirach ruch atomów określają te same równania, co ruch elektronów w atomach.

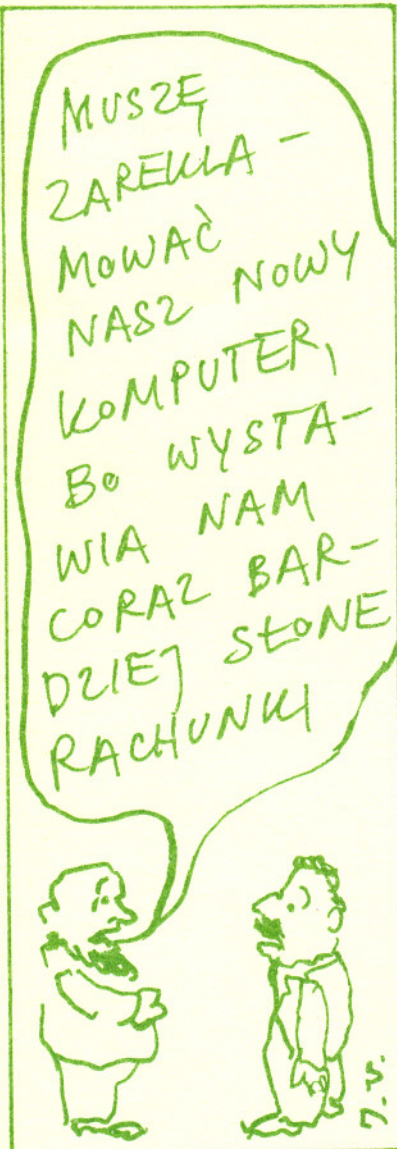
Atomy rydbergowskie (tzn. z elektronami w stanach bardzo wysoko wzbudzonych) są spotykane nie tylko w laboratorium (por. *Delta* 9/1983), lecz i w kosmosie. Kilka lat temu o zaobserwowaniu radiowych linii widmowych pochodzących od takich atomów donieśli astronomowie radzieccy A.A. Konowalenko i L.G. Sodin oraz hinduscy K.R. Anantharamajah i V. Radhakrishnan. Zaobserwowali oni absorpcyjne linie radiowe w widmie rozrzedzonego gazu leżącego gdzieś między Ziemią a silnym radioźródłem Cassiopeia A. Linie te z zakresu 26–68 MHz pochodzą prawdopodobnie od węgla i powstają przy przejściach elektronów między stanami o głównej liczbie kwantowej ponad 600.

Jeśli mamy na płaszczyźnie dwa niewspółśrodkowe koła o różnych promieniach, to łatwo wskazać dwa punkty będące środkami jednokładności nakładających te koła. Nie trzeba tłumaczyć, który z nich nazwiemy środkiem wewnętrznym, a który zewnętrznym.



Narysujmy teraz trzy koła o trzech różnych promieniach i środkach nie leżących na jednej prostej. Wówczas okaże się, że środki zewnętrzne każdej pary leżą na jednej prostej oraz każdy ze środków zewnętrznych leży na jednej prostej z dwoma środkami wewnętrznymi.





Przy obliczaniu sumy dużej liczby składników ważna może okazać się kolejność wykonywania działań. Na przykład gdy chcemy dodać odwrotności kolejnych liczb naturalnych, należy zacząć od składników najmniejszych. Uzyskana dokładność będzie lepsza. A jak jest w przypadku, gdy dodawane składniki są różnych znaków? Tu mogą się dziać rzeczy bardzo dziwne. Obliczmy wartości funkcji e^x sumując wyrazy szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

tak długo, jak dodawanie kolejnych wyrazów zmienia sumę.

Otrzymujemy:

x	wartość prawdziwa	wartość obliczona	liczba wyrazów
1	$2,7182818285 \cdot 10^0$	$2,7182818284 \cdot 10^0$	16
5	$1,4841315910 \cdot 10^2$	$1,4841315910 \cdot 10^2$	29
10	$2,2026465795 \cdot 10^4$	$2,2026465794 \cdot 10^4$	41
20	$4,8516519540 \cdot 10^8$	$4,8516519539 \cdot 10^8$	60
30	$1,0686474581 \cdot 10^{13}$	$1,0686474581 \cdot 10^{13}$	77
40	$2,3538526683 \cdot 10^{17}$	$2,3538526682 \cdot 10^{17}$	93
50	$5,1847055282 \cdot 10^{21}$	$5,1847055281 \cdot 10^{21}$	108

Jak widać, zgodność jest doskonała. Ale spróbujmy podstawiać x ujemne:

x	wartość prawdziwa	wartość obliczona	liczba wyrazów
-1	$3,6787944117 \cdot 10^{-1}$	$3,6787944117 \cdot 10^{-1}$	17
-5	$6,7379469991 \cdot 10^{-3}$	$6,7379469956 \cdot 10^{-3}$	35
-10	$4,5399929763 \cdot 10^{-5}$	$4,5400873455 \cdot 10^{-5}$	54
-20	$2,0611536225 \cdot 10^{-9}$	$-1,1102886555 \cdot 10^{-5}$	85
-30	$9,3576229689 \cdot 10^{-14}$	$-3,5816950084 \cdot 10^{-1}$	105
-40	$4,2483542555 \cdot 10^{-18}$	$-6,6038896798 \cdot 10^3$	125
-50	$1,9287498481 \cdot 10^{-22}$	$3,5499353132 \cdot 10^8$	142

Tu dla x o wartościach bezwzględnych nieco większych wyniki przestają być jakimikolwiek przybliżeniami wartości prawdziwych. Może pomoże zwiększenie dokładności?

x	wartość prawdziwa	wartość obliczona	liczba wyrazów
-1	$3,67879441171442 \cdot 10^{-1}$	$3,67879441171442 \cdot 10^{-1}$	23
-5	$6,73794699908547 \cdot 10^{-3}$	$6,73794699908547 \cdot 10^{-3}$	43
-10	$4,53999297624849 \cdot 10^{-5}$	$4,53999297623172 \cdot 10^{-5}$	64
-20	$2,06115362243856 \cdot 10^{-9}$	$2,06131645566816 \cdot 10^{-9}$	102
-30	$9,35762296884017 \cdot 10^{-14}$	$1,93898163510921 \cdot 10^{-8}$	130
-40	$4,24835425529159 \cdot 10^{-18}$	$-9,20981738881628 \cdot 10^{-4}$	152
-50	$1,92874984796392 \cdot 10^{-22}$	$9,71814344655281 \cdot 10^0$	172
-100	$3,72007597602084 \cdot 10^{-44}$	$-4,93314732398325 \cdot 10^{22}$	262
-200	$1,38389652673674 \cdot 10^{-87}$	$1,54586500493996 \cdot 10^{66}$	417
-300	$5,14820022241201 \cdot 10^{-131}$	$-8,46193521756401 \cdot 10^{107}$	566

Jak widać, problemy zaczynają się później.

Jak więc obliczać e^x dla x ujemnych? Po prostu należy skorzystać ze wzoru

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

i sumować szereg tylko dla x dodatnich.



Rozwiązanie zadania F 277.

Rozszczepienie Zeemana powinno być większe od dopplerowskiego poszerzenia linii widmowych na skutek ruchu cieplnego atomów (w naszym przypadku wodoru) i ruchu obrotowego gwiazdy. Możemy to zapisać w postaci warunku:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{2\mu_B B}{h} \geq \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_{\text{ciepl}} + \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_{\text{obr}} = \frac{v_{\text{ciepl}}}{c} + \frac{v_{\text{obr}}}{c} \approx \frac{v_{\text{ciepl}}}{c}$$

Przyjmujemy, że ruch obrotowy daje mały wkład. Otrzymujemy stąd

$$B \geq \frac{h\omega}{2\mu_B c} \sqrt{\frac{2kT}{m}} \approx 0,18 \text{ T,}$$

gdzie m jest masą atomu wodoru, k - stała Boltzmanna.