

1983-07-19 13:42:22

delta

SPIS TREŚCI

NUMERU 8(188)

Polowanie na pulsary <i>mgr Joanna Udalska</i>	str. 1
Korespondencyjny Klub Fizyków	str. 2
O złożoności obliczeniowej <i>dr Leszek Plaskota</i>	str. 3
Dyfrakcja neutronów <i>dr hab. Jan Kalinowski</i>	str. 6
Mała Delta	str. 8
Zadania	str. 9
Jeżeli nie znamy twierdzenia Cramera <i>dr Czesław Wovk</i>	str.10
Patrz w niebo	str.11
Bifurkacje <i>dr hab. Ryszard Kutner</i>	str.12
Wieszanie obrazu	str.14
Drobizgi	str.15
Klub 44	str.16

W następnym numerze:

Rachunki

Dnia 29 czerwca 1989 roku
zmarł

Grzegorz BIAŁKOWSKI

fizyk, humanista i polityk,
rektor Uniwersytetu Warszawskiego.

Był Przewodniczącym Komitetu Redakcyjnego
i Autorem *Delty*.

„Delta”
matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Edukacji Narodowej

Komitet Redakcyjny

dr Maciej Bryński
dr Bogdan Cichoński
dr Antoni L. Dawidowicz
dr Alicja Derkowska
doc.dr Jan A. Gaj
doc.dr Bolesław Gleichgewicht
doc.dr Tomasz Hofmokl – v-przewodniczący
doc.dr Tadeusz Jarzębowski
doc.dr Marcin Kubiak
mgr Andrzej Makowski
dr Zbigniew Płochocki
dr Jan Rempala
prof.dr Konrad Rudnicki
prof.dr Grzegorz SitarSKI
prof.dr Józef I. Smak
prof.dr Kazimierz Stępień
prof.dr Mieczysław Subotowicz
doc.dr Andrzej Szymacha
doc.dr Aniela Wolska
prof.dr Andrzej Woszczyk
prof.dr Wojciech Żakowski –
przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:
mgr inż. Krzysztof Biesaga
dr Lidia Goettig
dr hab. Jan Kalinowski – z-ca red. nac.
Maria Kapuścińska
mgr Krystyna Kordos – sekr. red.
dr hab. Marek Kordos – red. nac.
dr Tomasz Kwast
mgr Anna Rudnik
dr Jerzy Ryll
mgr Joanna Udalska
Jacek Urbański – grafik

Adres Redakcji
ul. Noakowskiego 14
00-666 Warszawa
tel. 25-56-39

Warszawskie Wydawnictwo Prasowe
RSW „Prasa-Książka-Ruch”
Al. Jerozolimskie 125/127
02-017 Warszawa
tel. centr. 28-52-31

Biuro Reklamy Prasowej i Ogłoszeń
ul. Poznańska 38
00-689 Warszawa
tel. 28-23-09

Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.,
2,50 ark. druk.,
papier offsetowy V kl. 70 g.

Wydrukowano w Prasowych
Zakładach Graficznych
RSW „Prasa-Książka-Ruch”
w Łodzi, ul. Armii Czerwonej 28

Nr zam. 1860/89.
Skład systemem TeX
wykonała redakcja.

WARUNKI I CENY PRENUMERATY ORGANIZOWANEJ PRZEZ RSW

Prenumeratory indywidualni, instytucje i zakłady pracy zamawiają prenumeratę w Oddziałach RSW „Prasa-Książka-Ruch” właściwych dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział w Warszawie Nr 370044-1195-139-11.

Cena prenumeraty na rok 1990:
kwartalnej 1800,- zł
półrocznej 3600,- zł
rocznej 7200,- zł

Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów.
Na życzenie prenumeratora dostawa może odbywać się drogą lotniczą; koszty dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.

Terminy przyjmowania prenumeraty

- na I kwartał, I półrocze i cały rok następny – na kraj do 10 XI,
— na zagranicę do 31 X.
- na pozostałe okresy prenumeraty: do 1-go dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Polowanie na pulsary

Mgr Joanna

UDALSKA



Rozwiązanie zadania M 550.

Równanie spełnia funkcja równa tożsamościowo zeru. Założmy, że f nie jest taką funkcją. Wtedy dla każdego punktu mamy $f(x) \neq 0$. Istotnie, jeśli lewa strona równa się zeru, to $f(x_0) = 0$ lub $f(y_0) = 0$. Wtedy jednak $f(x_0)f(y) = 0$ dla każdego y lub $f(x)f(y_0) = 0$ dla każdego x . Zatem zbiór zer lewej strony składa się z prostych równoległych do jednej z osi układu współrzędnych. Podobna analiza pokazuje, że zera prawej strony tworzą zbiór prostych równoległych do jednej z prostych: $x = y$, $x = -y$. To jest jednak możliwe tylko dla funkcji zerowej.

Funkcja f jest ciągła, zatem jest stałe dodatnia lub stałe ujemna.

Można teraz zdefiniować

$$h(x) = \log |f(x)|.$$

Mamy

$$h(x) + h(y) = h\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) + h\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right).$$

skąd różniczkując względem x otrzymujemy

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}h'\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}h'\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right).$$

Różniczkując teraz względem y otrzymujemy

$$0 = -\frac{1}{2}h''\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}h''\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right);$$

podstawiając $x = y$ otrzymujemy $h'' = \text{const}$, czyli h jest wielomianem drugiego stopnia, a ponieważ $h'(0) = 0$ na mocy (*), więc $h(x) = ax^2 + b$.

Ostatecznie

$$\log |f(x)| = ax^2 + b,$$

skąd

$$f(x) = C \cdot e^{ax^2}.$$

W listopadzie 1967 roku Jocelyn Bell z Cambridge University odkryła tajemniczy ślad w obrazie radiowym pewnego obszaru nieba. Jego niecodziennosc polegała na tym, że w odróżnieniu od innych, znanych źródeł radiowych składał się z serii niesłychanie krótkich, regularnych pulsów. Początkowo astronomowie dość sceptycznie potraktowali to odkrycie przypuszczając, że tego rodzaju pulsy mogą być tzw. efektem instrumentalnym (np. wynikiem interferencji). Na wszelki wypadek nie zaniechano jednak dalszych obserwacji. Dość niespodziewanie okazało się, że podczas kolejnych nocy coraz bardziej intrygujące źródło zajmowało tę samą pozycję na niebie. Powoli przestawał budzić wątpliwości fakt jego rzeczywistego istnienia. Potwierdzana przez każdą obserwację niewiarygodna wprost regularność pulsów, niezwykle krótki czas ich trwania i okres powtarzalności doprowadziły do powstania szalenie ekscytującej hipotezy, zgodnie z którą pulsy miałyby pochodzić od jakiejś odległej cywilizacji. W związku z tym źródło zostało nazwane LGM (od angielskiego *Little Green Men* – zielone ludziki). Żywość hipotezy i związanej z nią nazwy był jednak krótki, bowiem zaledwie w ciągu kilku tygodni odkryto w innych obszarach nieba podobne źródła, pulsujące z różnymi okresami. Na dobre uwierzono, że są to obiekty naturalne, wkrótce też nadano im bardziej odpowiadającą rzeczywistości nazwę – pulsary (od angielskiego *pulsing star*).

Ta nazwa już na zawsze przyłgnęła do źródeł milisekundowych pulsów, choć nie należy jej kojarzyć z pulsacjami gwiazd. Zważywszy, że okresy pulsarów zawierają się w przedziale od 0,033 s do 3,75 s, nie sposób sobie wyobrazić, aby gwiazdy mogły zmieniać jasność pulsując w tak zawrotnym tempie. Nie jest również możliwe, aby źródłem obserwowanych pulsów był szybki obrót normalnych gwiazd o nierównomiernym rozkładzie jasności powierzchniowej, bowiem uległyby one rozerwaniu pod naporem gigantycznych sił odśrodkowych. Trzydziestu obrotów na sekundę nie wytrzymałby nawet biały karzeł, znacznie mocniej związany siłą grawitacji. Tego rodzaju rozważania teoretyczne wskazały na konieczność poszukiwania pulsarów wśród znacznie bardziej „egzotycznych” obiektów niebieskich.

W czasach odkrycia pierwszego pulsara teoretycznie przewidywano już możliwość istnienia obiektów obdarzonych jeszcze silniejszymi, niż w przypadku białych karłów, potencjałami grawitacyjnymi – gwiazd neutronowych. Nawet proste rozważania dotyczące równoważenia się siły grawitacji i siły odśrodkowej prowadzą do wniosku, że silnie związana struktura gwiazdy neutronowej nie ulega zaburzeniom pod wpływem tak szybkiego obrotu. W tym względzie gwiazdy neutronowe spełniały więc warunki kandydatów na pulsary. Pozostała do wyjaśnienia przyczyna nierównomiernego rozkładu ich jasności powierzchniowych. W powszechnie akceptowanym obecnie modelu pulsarów za nierównomierny rozkład ich jasności w głównej mierze odpowiedzialne jest bardzo silne pole magnetyczne. Cząstki wystrzelwane z gorącej plamy pod biegunem magnetycznym wylatują w przybliżeniu wzdłuż linii pola magnetycznego promieniując w wyniku tzw. zjawiska synchrotronowego. W rezultacie promieniowanie to emitowane jest również średnio w kierunku osi pola magnetycznego. Wzajemne nachylenie osi magnetycznej i osi obrotu sprawia, że wiązka promieniowania pulsara omiata określone obszary nieba niczym światło latarni morskiej.

Już w końcu 1968 roku teoria istnienia tak niezwyklej obiektów znalazła wspaniałe potwierdzenie w obserwacjach, kiedy to odkryto pulsara w centrum Mgławicy Krab – jednej z najbardziej znanych pozostałości po wybuchach gwiazd supernowych. Aby w pełni docenić wartość tego odkrycia, należy pamiętać, że zgodnie z rozważaniami teoretycznymi gwiazdy neutronowe powstają w wyniku wybuchu supernowych. Zaobserwowanie pulsara w Mgławicy Krab potwierdziło więc z jednej strony słuszność modeli ewolucyjnych, z drugiej zaś fakt, że pulsary są szybko rotującymi gwiazdami neutronowymi.



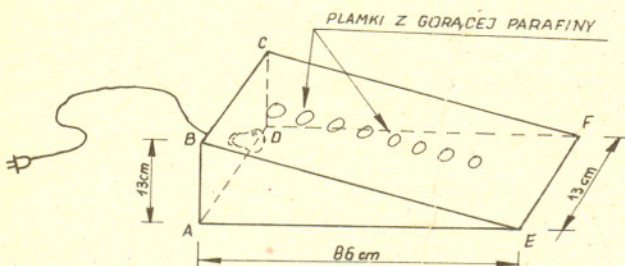
Rzecz jasna, jeden tego typu przypadek nie usatysfakcjonował jeszcze w pełni astronomów. Od ponad dwudziestu lat pilnie wypatrują oni pulsarów w pozostałościach po wybuchach gwiazd supernowych. Każde takie odkrycie przyczynia się bowiem do ugruntowania istniejących teorii. Tymczasem wyniki obserwacji wprawiają w lekkie zakłopotanie. Spośród ponad trzystu pulsarów, odkrytych od 1968 roku, zaledwie o kilku można powiedzieć, że ponad wszelką wątpliwość znajdują się w pozostałościach po wybuchu gwiazdy supernowej. Co gorsza, na ogół w tych pozostałościach nie zaobserwowano pulsarów. W pewnym stopniu teorię ratują dane dotyczące warunków, w jakich następuje eksplozja gwiazdy supernowej. Gigantyczna energia przekazana pulsarowi podczas wybuchu może prowadzić do znacznego oddalenia się go od reszty mgławicy. Ponadto żywot mgławicy, ulegającej nieustannemu rozpraszaniu, jest stosunkowo krótki, a więc w okolicach odpowiednio starych pulsarów obłoki powstające podczas eksplozji supernowej zdążyły już zniknąć. Wielu pulsarów istniejących zapewne w pozostałościach po wybuchach supernowych po prostu nie mamy szansy odkryć. Niekorzystne z punktu widzenia naszych obserwacji ustawienie ich osi magnetycznych sprawia, że wiązka wysyłanego przez nie promieniowania w ogóle do nas nie dociera.

Wszystkie te argumenty nie zmieniają jednak faktu, że dla pełnego potwierdzenia teorii przydałoby się więcej nie budzących zastrzeżeń odkryć pulsarów w pozostałościach po wybuchach gwiazd supernowych. Nic więc dziwnego, że wraz z odkryciem supernowej w Wielkim Obłoku Magellana (SN 1987A) zrodziły się nadzieje na zaobserwowanie związanego z nią pulsara. Blisko dwa lata nie pozbawionych emocji oczekiwań nie przynosiły pozytywnego rozstrzygnięcia. Silne promieniowanie gęstej, młodej mgławicy skutecznie uniemożliwiała dostrzeżenie jakiegokolwiek śladu. I wreszcie w lutym bieżącego roku poszły w świat pierwsze doniesienia o dokonaniu tego jakże oczekiwanego odkrycia. W obserwacjach przeprowadzonych 18 stycznia 1989 r. w chilijskim obserwatorium Cerro Tololo dostrzeżono 0,5-milisekundowe pulsy pochodzące najprawdopodobniej od młodego pulsara powstałego podczas wybuchu SN 1987A. O ile dalsze obserwacje potwierdzą rzeczywiste istnienie pulsara, będzie to z pewnością jedno z najbardziej znaczących odkryć ostatnich kilku lat. Na ostateczne rozstrzygnięcie musimy jednak jeszcze trochę poczekać.

Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego

KORESPONDENCYJNY KLUB FIZYKÓW

1. Budujemy fotometr. Jest to przyrząd, który po wycechowaniu pozwoli nam mierzyć oświetlenie. Wykorzystamy przy tym zjawisko zanikania tłustej plamy na kartce papieru oświetlonej z dwóch stron w sytuacji, gdy oświetlenia po obu stronach są jednakowe. Zróbmy drewniane (w ostateczności może być i kartonowe) pudełko zgodnie z rysunkiem. Podano na nim przykładowe wymiary dobrane do 40-watowej żarówki, zamocowanej w miejscu wskazanym na rysunku.



Wnętrze pudełka malujemy na biało lub wykładamy białym kartonem, aby światło dobrze się rozpraszalo. Ściankę *BCEF* stanowi biały papier, na który наносimy 10 - 12 plamek za pomocą rozgrzanej parafiny. Pomiar oświetlenia w danym miejscu przez zewnętrzne źródło światła, polega na ustawieniu

w tym miejscu ścianki z plamkami naszego przyrządu przy zapalanej żarówce wewnętrznej i zaobserwowanie, która plamka jest niewidoczna. W tej sytuacji jedna z plamek sąsiadujących będzie jaśniejsza, a druga ciemniejsza od papieru, na którym są zrobione. Pozostaje, oczywiście, problem wycechowania przyrządu. Jest to właśnie treścią drugiego zadania.

2. Zaproponuj sposób wycechowania opisanego przyrządu. Możesz to zrobić, nawet jeżeli nie zbudowałeś go sam, a opierasz się tylko na podanym opisie. Zwróć szczególną uwagę na dokładność, jaką można osiągnąć przy cechowaniu.

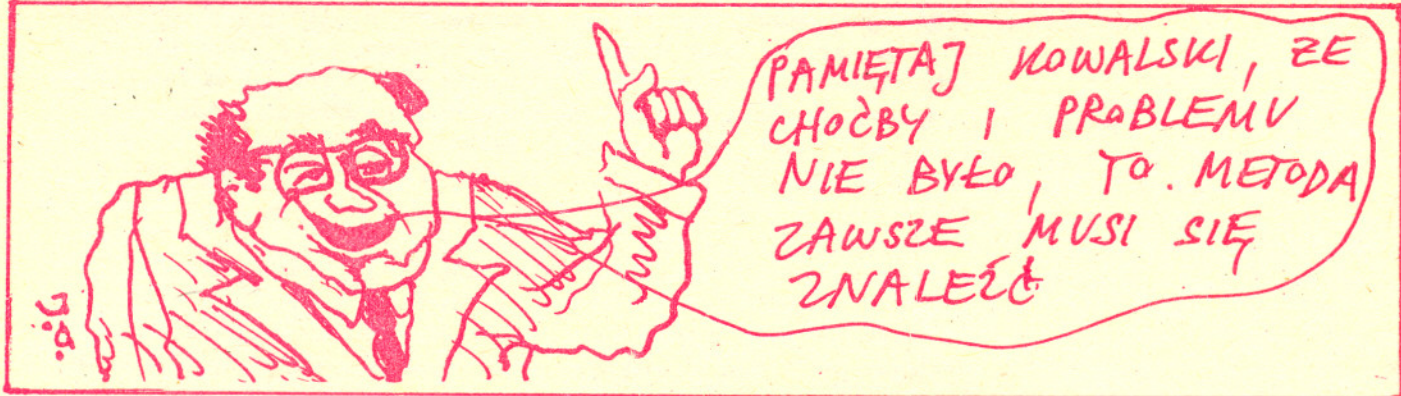
3. Zaproponuj ciekawe doświadczenia, jakie można zrobić za pomocą takiego fotometru.

4. Zadanie rachunkowe:

W rakiacie poruszającej się z przyspieszeniem $5g$ ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$) wyznaczono okres wahań wahadła matematycznego (w dobrym przybliżeniu kulka na sznurku) o długości 10 cm. Ile wynosi okres wahań?

Redaguje doc. dr Tomasz HOFMOKL

Listy prosimy przysyłać pod adresem:
Korespondencyjny Klub Fizyków,
Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego,
ul. Hoża 69, 00-681 Warszawa.



O złożoności obliczeniowej

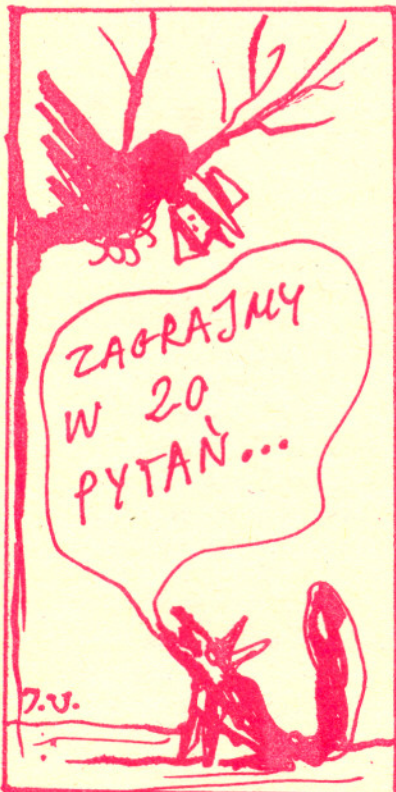
Dr Leszek PLASKOTA

Wielu z nas nie zdaje sobie sprawy z przydatności tej czy innej metody rozwiązywania jakiegoś problemu, dopóki sami nie jesteśmy zmuszeni do rozwiązania konkretnego zadania. Nie jest źle, gdy znana nam metoda jest stosunkowo prosta i mało kosztowna. Gorzej jednak, jeśli takiej metody nie znamy. Wtedy zaczynamy się często zastanawiać, czy nasze zadanie w ogóle można rozwiązać tanim kosztem. Negatywna odpowiedź na to pytanie oznacza, że złożoność zadania jest „duża”. Właśnie złożoność (złożoność obliczeniowa) zadań, rozumiana jako minimalny koszt potrzebny do znalezienia rozwiązania, będzie przedmiotem naszych rozważań.

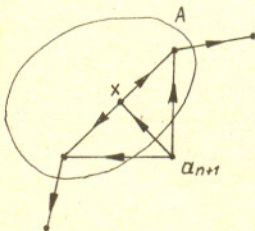
Zauważmy przede wszystkim, że złożoność zadania jest własnością zadania. Dlatego nie należy jej mylić ze złożonością (kosztem) konkretnej metody. zilustrujemy to na przykładzie rozwiązywania oznaczonego układu n równań z n niewiadomymi. W tym przypadku za miarę złożoności metody przyjmujemy liczbę wykonanych operacji arytmetycznych, takich jak dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie. Znana, teoretyczna metoda używająca wyznaczników wymaga wykonania co najmniej $n!$ operacji arytmetycznych. Nawet dla niewielkich n liczba $n!$ jest tak duża, że koszt metody wyznacznikowej jest kolosalny. Dla przykładu, jeśli dostępny nam komputer wykonuje milion operacji arytmetycznych na sekundę, to rozwiązanie układu z $n = 20$ niewiadomymi trwałoby ponad sto tysięcy lat (!). Dlatego też w praktyce obliczeniowej stosuje się najczęściej metody wymagające około n^3 operacji arytmetycznych. Najbardziej znaną jest algorytm eliminacji Gaussa. Metody o złożoności proporcjonalnej do n^3 były (i są nadal!) tak powszechnie stosowane, iż niektórzy zaczęli wierzyć, że szybsze metody w ogóle nie istnieją. Dopiero stosunkowo niedawno, bo w 1969 roku, za sprawą Strassena i później innych matematyków okazało się, że można konstruować metody wyraźnie szybsze, przynajmniej dla dużych n . Jednak do dziś nie wiadomo, jaka jest dokładnie złożoność rozwiązywania układu równań liniowych. Najlepsze znane dolne ograniczenie złożoności wynosi n^2 .

Zapewne każdy z nas grał kiedyś w „dwadzieścia pytań”. Gra polega na takim zadawaniu pytań, aby jak najszybciej odgadnąć pomysłany przez kogoś przedmiot. W naturalny sposób można tę grę następująco sformalizować.

Niech f będzie liczbą całkowitą, o której na początku wiemy tylko, że należy do zbioru $F = \{1, 2, \dots, n\}$. Zakładamy, iż możemy zadawać pytania w rodzaju: „czy liczba f należy do zbioru A ?”, gdzie A jest pewnym podzbiorem zbioru F . Zakładamy również, że na każde pytanie otrzymujemy prawdziwą odpowiedź („tak” lub „nie”). Należy odgadnąć liczbę f . Za miarę złożoności metody przyjmujemy maksymalną liczbę zadanych pytań, potrzebnych do odgadnięcia liczby f . Jaka jest złożoność tego zadania?



Rozwiązanie zadania M 551.
Zastosujemy indukcję. Sprawdzenie dla $n = 1$ jest oczywiste. Załóżmy teraz, że każdy układ n punktów a_1, \dots, a_n ma centrum. Rozpatrzmy punkty a_1, \dots, a_{n+1} . Niech x będzie centrum dla a_1, \dots, a_n . Rozpatrzmy A – zbiór punktów, do których można dojść z x w jednym kroku. Są możliwe dwa przypadki:
1. Istnieje strzałka, idąca z x do a_{n+1} ; wtedy x jest centrum dla a_1, \dots, a_{n+1} ;
2. Każda strzałka łącząca a_{n+1} i $z \in A$ idzie od a_{n+1} do z – wtedy a_{n+1} jest centrum dla a_1, \dots, a_{n+1} (patrz rysunek).





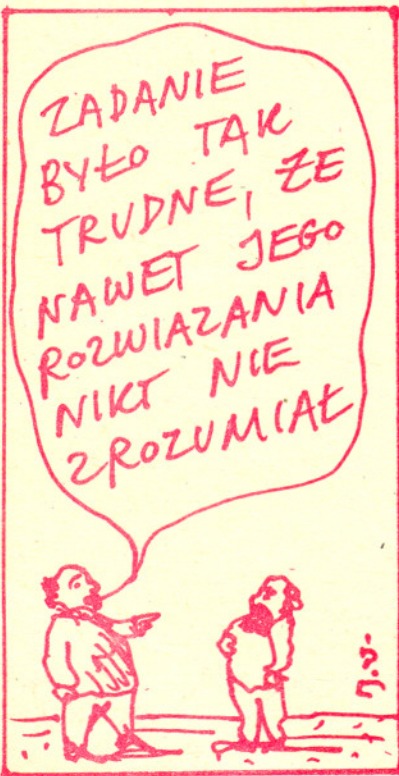
Rozwiązanie zadania M 552.
Nie. Łatwo obliczyć r z następującej zależności

$$r(1+p)^{n-1} + r(1+p)^{n-2} + \dots + r = k(1+p)^n,$$

skąd

$$r = kp[1 - (1+p)^{-n}].$$

Jak widać, przy $n \rightarrow \infty$ wielkość raty zmierza do $k \cdot p$.



Rozwiązanie zadania F 274.
Przy zadanej temperaturze atomy Na znajdują się w stanie $^2S_{1/2}$. Rzut wektora momentu magnetycznego atomu na kierunek pola wynosi

$$\mu_z = m_l g \mu_B,$$

gdzie $m_l = \pm 1/2$, $g = 2$ (czynniki Landego), μ_B – magneton Bohra. Siła rozszczepiająca wiązkę atomów lecących wzdłuż osi y , wynosząca

$$F_z = \pm \mu_z \frac{dB}{dx},$$

w ciągu czasu $t = l/v$ przyspieszy atomy o masie M do prędkości

$$v_x = \pm \mu_z \frac{dB}{dx} \frac{l}{vM},$$

powodując przesunięcie na ekranie detektora o

$$x = \pm \mu_z \frac{dB}{dx} \frac{l(L+l/2)}{Mv^2}.$$

Energia kinetyczna atomów wynosi

$$Mv^2/2 = (3/2)kT.$$

Stąd poszukiwana odległość wynosi

$$\Delta = 2x = 2\mu_z \frac{dB}{dx} \frac{l(L+l/2)}{3kT} \approx 2\text{cm}.$$

Narzucając się metodę znalezienia f opiszemy w następujący sposób. Załóżmy, że po zadaniu k pytań wiemy, że f należy do zbioru $A \subset F$. Jeśli A jest zbiorem jednoelementowym, to $A = \{f\}$. Jeśli nie, to zbiór A dzielimy na dwa rozłączne podzbiory A_1 oraz A_2 o liczebności różniącej się co najwyżej o jeden i zadajemy $(k+1)$ -sze pytanie: „czy f należy do A_1 ?”. Postępujemy tak dalej ze zbiorem A_1 , jeśli otrzymaliśmy odpowiedź „tak”, lub ze zbiorem A_2 w przeciwnym przypadku.

Łatwo zauważyć, że kładąc na początku $A = F$ znajdziemy w ten sposób liczbę f po zadaniu nie więcej niż $p(n) = \lceil \log_2 n \rceil$ pytań ($\lceil a \rceil$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą nie mniejszą od a), oraz że dla niektórych f będziemy musieli zadać dokładnie $p(n)$ pytań. A więc $p(n)$ jest złożonością opisaną metody. Czy istnieje lepsza? Nie. Aby się o tym przekonać, wystarczy zauważyć, że po zadaniu k pytań zbiór F dzieli się na co najwyżej 2^k rozłącznych podzbiorów elementów nierozróżnialnych ze względu na dotychczas zadawane pytania. Wobec tego dla $k < p(n)$ jeden z tych podzbiorów, powiedzmy B , jest co najmniej dwuelementowy. A więc w przypadku, gdy szukana liczba należy do B , nie wskażemy na nią za pomocą k lub mniej pytań. W ten sposób pokazaliśmy, że nasza metoda jest najtańsza, czyli optymalna, a jej złożoność jest złożonością zadania.

Rozpatrzone przez nas zadania mogły być rozwiązane dokładnie kosztem skończonym. W praktyce jednak często spotykamy zadania o złożoności nieskończonej lub tak dużej, że przekracza ona nasze możliwości obliczeniowe. W takim przypadku musimy się zadowolić jedynie rozwiązaniem przybliżonym. Na przykład, przy rozwiązywaniu układów równań liniowych z liczbą niewiadomych rzędu dziesięciu tysięcy eliminacja Gaussa może okazać się zbyt kosztowna. Z pomocą przychodzą wtedy tak zwane metody iteracyjne, szczególnie przydatne w przypadku układów rozrzedzonych, czyli takich, w których tylko część współczynników w każdym równaniu jest niezerowa. Stosując metody iteracyjne zyskujemy na czasie, ale musimy zadowolić się rozwiązaniem przybliżonym.

Dla zadań o dużej lub nieskończonej złożoności obliczania rozwiązania dokładnego wygodnie jest wprowadzić pojęcie ϵ -złożoności. Jest to minimalny koszt potrzebny do znalezienia rozwiązania z dokładnością ϵ . Oczywiście, wyrnaga to zdefiniowania w jakiś sposób błędu metody.

Dla ilustracji rozpatrzmy jeszcze raz grę w „dwadzieścia pytań”, tym razem jednak ze zbiorem $F = (0, 1)$. Łatwo zauważyć, że teraz złożoność zadania jest nieskończona. A jaka jest ϵ -złożoność? Zanim odpowiemy na to pytanie, wyjaśnijmy najpierw, co będziemy rozumieli przez metodę, jej błąd oraz koszt. Ponieważ możemy pytać tylko o przynależność szukanej liczby do jakiegoś podzbioru, każdą metodę można rozbić na dwa etapy. W pierwszym zbieramy pewną informację o f przez zadawanie pytań. Uzyskaną informację o f , będącą ciągiem odpowiedzi „tak” lub „nie”, oznaczymy krótko przez $N(f)$. W drugim etapie, na podstawie informacji $N(f)$ konstruujemy w jakiś sposób przybliżenie $U(f) = \Phi(N(f))$ dla szukanej liczby f . Każda metoda U jest więc złożeniem operatora informacji N z operatorem Φ , zwanym algorytmem (nazwa jest w pełni uzasadniona, gdyż Φ przetwarza uzyskane dane o zadaniu). Błąd metody U zdefiniujemy przez najgorsze jej zachowanie. A więc:

$$e(U) = \sup_{f \in F} |f - U(f)|.$$

Przez koszt metody U ($cost(U)$) rozumiemy maksymalną liczbę zadanych pytań, a więc obliczenie $y = N(f)$. Formalnie powinniśmy włączyć do kosztu całkowitego koszt obliczenia przybliżenia $\Phi(y)$. Okazuje się jednak, że jest on zanedbywalnie mały w porównaniu z kosztem zadania jednego pytania. Zgodnie z definicją ϵ -złożoność zadania, $comp(\epsilon)$, można zapisać w następujący sposób:

$$comp(\epsilon) = \inf cost(U),$$

PODWÓJNY ROZPAD BETA

Od ponad 50. lat badanie rozpadów beta jąder atomowych dostarcza informacji o strukturze materii jądrowej. W tym rozpadzie jeden z neutronów jądra rozpada się na trzy cząstki: proton, elektron i antyneutrino. Jedną z bardzo istotnych, nieznanych własności neutrin jest ich masa spoczynkowa. Zwykle przyjmuje się, że neutrino jest cząstką o masie zero, ale w większości teorii tzw. wielkiej unifikacji przewiduje się, że neutrino powinno mieć masę. Masywne neutrino są również dyskutowane w kontekście tzw. czarnej materii we Wszechświecie. Dlatego pomiar masy neutrina mógłby w istotny sposób ograniczyć obecne spekulacje teoretyczne.

Badanie widma elektronów w rozpadach beta pozwala w zasadzie wyznaczyć masę neutrin m_ν (maksymalna energia elektronów = energia rozpadu - $m_\nu c^2$). Ale błędy doświadczalne i teoretyczne (wynikające z niepełnej znajomości efektów jądrowych) pozwalają jedynie podać górną granicę na masę neutrin elektronowych $m_\nu \leq 25$ eV (grupa z Zurichu podaje nawet $m_\nu < 18$ eV). Jedynie grupa doświadczalna z Moskwy podaje wynik niezerowy dla masy neutrin elektronowych $m_\nu = 26 \pm 6$ eV. Inną interesującą zagadką jest to, czy neutrino jest istotnie różne od swojej antycząstki (tzw. neutrino Diraca), czy też są to raczej dwa różne stany spinowe tej samej cząstki (tzw. neutrino Majorany). Już prawie 50 lat temu zauważono, że na oba pytania (o naturę i masę neutrin) można szukać odpowiedzi w badaniach tzw. podwójnego rozpadu beta. Zjawisko to zachodzi wówczas, gdy zwykły rozpad beta jest zabroniony energetycznie lub silnie stłumiony, natomiast rozpad podwójny jest dozwolony. Model standardowy oddziaływań z neutrinami dirakowskimi przewiduje w takim rozpadzie emisję dwóch antyneutrin, co spowoduje, że widmo energetyczne dwóch elektronów w stanie końcowym będzie szerokie. Jeśli neutrina są typu Majorany, to możliwy jest rozpad beta, gdzie neutrino wyemitowane w jednym rozpadzie może być pochłonięte w drugim. Wówczas widmo energetyczne elektronów będzie miało bardzo silne maksimum przy energii równej energii rozpadu. Taki pomiar nie jest łatwy, gdyż procesy takie są bardzo rzadkie. Czas życia jąder rozpadających się poprzez podwójny rozpad beta jest rzędu 10^{20} lat! (Dla porównania, czas życia Wszechświata ocenia się na 10^{10} lat.)

W latach 60. dokonano istotnego przełomu uzyskując wyniki pośrednio z pomiarów geochemicznych, w których zmierzono zawartość w starych skałach izotopów ksenonu i kryptonu pochodzących z podwójnego rozpadu ^{130}Te i ^{82}Se . W sierpniu 1987 r. podwójny rozpad beta został zaobserwowany po raz pierwszy bezpośrednio w laboratorium Uniwersytetu Kalifornijskiego w Irvine. Zaobserwowano wyraźnie ślady dwóch elektronów wylatujących z próbek selenu 82. Do tej pory nie zauważono przypadków, w których suma energii elektronów równa byłaby energii rozpadu - tzn. przypadków bez emisji neutrin. Obecny stan wyników doświadczeń i analizy teoretycznej można podsumować w następujący sposób: jeśli neutrina są cząstkami Majorany, to ich masa jest mniejsza od 1 eV.

J. K.

przy czym infimum wzięte jest po wszystkich metodach U o błędzie $\epsilon(U)$ nie przekraczającym ϵ .

Po tej porcji definicji możemy już wykazać, że ϵ -złożoność naszego zadania wynosi $q(\epsilon) = \lceil \log_2(1/\epsilon) \rceil - 1$. W tym celu zauważmy, że tak jak w przypadku dyskretnym, po zadaniu nie więcej niż k pytań zbiór F zostaje podzielony na co najwyżej 2^k rozłącznych podzbiorów nierozróżnialnych ze względu na zadawane pytania. Wobec tego jeden z tych podzbiorów, nazwijmy go B , ma średnicę nie mniejszą od $1/2^k$. Dlatego dla dowolnej liczby g mamy

$$\sup_{f \in B} |f - g| \geq 1/2^{k+1}.$$

A więc każda metoda korzystająca z nie więcej niż k pytań daje błąd co najmniej $1/2^{k+1}$. W celu uzyskania błędu nie większego od ϵ musimy więc zadać co najmniej $q(\epsilon)$ pytań. Aby zakończyć dowód, wystarczy teraz wskazać metodę, która osiąga żadaną dokładność wyniku i korzysta z $q(\epsilon)$ pytań. Metodę tę zapiszemy w następujący sposób (porównaj z przypadkiem dyskretnym):

początek połącz $a_0 = 0, b_0 = 1, c = 1/2$;

dla $k = 1, 2, \dots, q(\epsilon)$ **wykonuj**

początek zadaj pytanie:

„czy f jest mniejsza od c ?”;

jeśli uzyskałeś odpowiedź „tak”, to

połącz $a_k = a_{k-1}, b_k = c$, w przeciwnym przypadku

połącz $a_k = c, b_k = b_{k-1}$;

połącz $c = (a_k + b_k)/2$

koniec;

połącz $U(f) = c$

koniec.

Przykład gry w „dwadzieścia pytań”, chociaż stosunkowo prosty, jest jednak dość typowy. Występują w nim wszystkie podstawowe elementy modelu złożoności obliczeniowej, takie jak: informacja, algorytm, błąd i koszt metody czy w końcu ϵ -złożoność. Oczywiście, błąd metody można zdefiniować na różne sposoby. Dla przykładu, można wprowadzić błąd względny,

$$\epsilon_u(U) = \sup_{f \in F} |f - U(f)|/f.$$

Jednak dla $\epsilon < 1$ złożoność naszego zadania jest wtedy nieskończona. Podobnie, przyjęty przez nas sposób oceny metody przez najgorsze jej zachowanie nie jest jedyny. Można na przykład zdefiniować błąd i koszt średni metody, co prowadzi do tak zwanego modelu przypadku średniego.

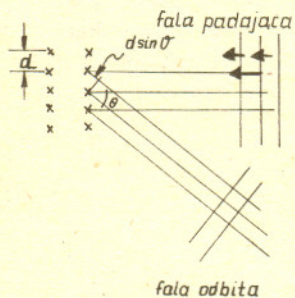
Na koniec, w kontekście naszego przykładu, zwrócimy jeszcze uwagę na pewien aspekt złożoności dotyczący sposobu uzyskiwania informacji o szukanym elemencie. Zauważmy, że kolejne pytania dowolnej metody oraz ogólna ich liczba mogły istotnie zależeć od otrzymywanych „po drodze” odpowiedzi. Dopuszczaliśmy więc tak zwaną informację adaptacyjną. Problem istnienia metod optymalnych korzystających z informacji nieadaptacyjnych ma w ogólności duże znaczenie praktyczne. Nieadaptacja umożliwia bowiem równoległe uzyskiwanie kolejnych porcji informacji. Właśnie obliczenia równoległe są ostatnio bardzo szybko rozwijającą się gałęzią informatyki. W grze w „dwadzieścia pytań” okazuje się, że informacja, z której korzystała wskazana przez nas metoda optymalna, jest równoważna nieadaptacyjnym pytaniom o kolejne bity rozwinięcia dwójkowego szukanej liczby. A więc: „czy na i -tym miejscu po przecinku w rozwinięciu dwójkowym liczby f stoi zero?”, dla $i = 1, 2, \dots, q(\epsilon)$. Na przykład, dla $f = 3/5$ otrzymalibyśmy ciąg odpowiedzi „nie”, „tak”, „tak”, „nie”, itd. Podobną informację nieadaptacyjną można wskazać dla dyskretnego zbioru F . Zainteresowanym proponujemy jeszcze zastanowienie się nad różnicą między adaptacją i nieadaptacją w przypadku, gdy wolno nam zadawać jedynie pytania typu „czy f jest mniejsza od g ”, gdzie g jest dowolną liczbą z przedziału $(0, 1)$.

Dyfrakcja neutronów

Dr hab. Jan KALINOWSKI



Dla piłki futbolowej o masie 1 kg poruszającej się z prędkością 10 m/s długość fali de Broglie'a wynosi $6,6 \times 10^{-25}$ Å.



Istotną rzeczą w doświadczeniu Davissona i Germera było użycie kryształu niklu, którego atomy tworzą regularną sieć wykazującą własności podobne do siatki dyfrakcyjnej. Maksyma powstające przy rozpraszaniu elektronów na kryształach zinterpretowali jako maksima dyfrakcyjne powstające, gdy spełniony jest warunek $n\lambda = d \sin \theta$, gdzie n - liczba naturalna będąca rzędem maksimum, λ - długość fali elektronów, d - odległość atomów w kryształach i θ - kąt rozpraszania.

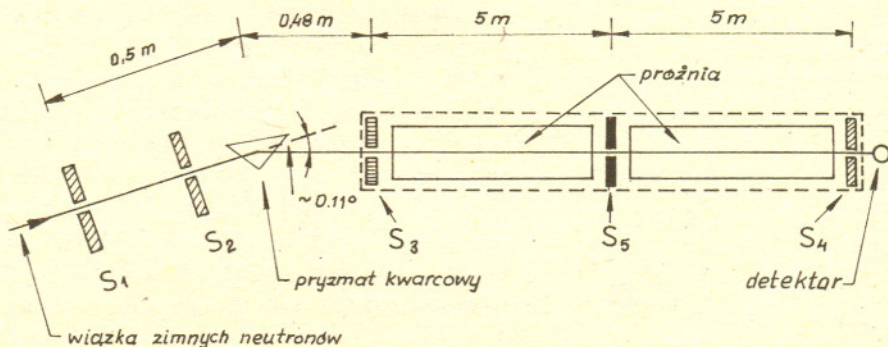
W 1923 r. trzydziestodwuletni student Sorbony Louis de Broglie w swojej pracy doktorskiej wysunął hipotezę, że materia wykazuje własności falowe. Dzisiaj, po przeprowadzeniu klasycznych już doświadczeń z dyfrakcją elektronów i neutronów na kryształach oraz licznych doświadczeń z dyfrakcją innych cząstek (w tym i z atomami) nikt nie kwestionuje poprawności tej hipotezy. Przypomnijmy, że po obserwacji kwantowej (cząstkowej) natury światła, a więc fali elektromagnetycznej, de Broglie powziął ideę, że dualizm falowo-cząstkowy powinien być powszechną cechą całej przyrody. Cząstkom powinna odpowiadać jakaś fala. Założył, że częstość i długość fali są powiązane z pędem i energią takimi samymi wzorami jak dla fotonu, to jest $E = h\nu$ i $p = h/\lambda$. Aby jakoś uzasadnić tę hipotezę, zastosował ją do atomu wodoru i zakładając dodatkowo, że stanom stacjonarnym elektronu odpowiada fala stojąca, wyprowadził warunek kwantyzacji Bohra. Jeśli elektronowi ma towarzyszyć jakaś fala, to można próbować to sprawdzić doświadczalnie badając zjawiska interferencji i dyfrakcji.

Już od 1919 r. C.J. Davisson, współpracując później z L.H. Germerem, badał rozpraszanie elektronów na kryształach niklu. Zauważył on, że natężenie elektronów zależy od kąta rozproszenia, czego nie można było wytłumaczyć traktując elektrony jak cząstki klasyczne. Dopiero w 1926 r. doświadczenia Davissona i Germera zostały zinterpretowane jako pomyślny sprawdzian teorii falowej.

Ze względu na olbrzymie znaczenie mechaniki kwantowej oraz jej poprawnej interpretacji niesłychanie ważne z punktu widzenia poznania i nauczania fizyki jest badanie dyfrakcji cząstek na prostych układach makroskopowych, których własności możemy ustalić innymi metodami. Właśnie od dyskusji zjawiska interferencji elektronów na dwóch szczelinach rozpoczyna się III tom znakomitego podręcznika *Wykłady Feynmana z fizyki* (PWN 1969). Gdy Feynman prowadził wykłady z fizyki, takich doświadczeń jeszcze nie przeprowadzono, gdyż urządzenie do dyfrakcji musi być bardzo małe. Dyskutował więc jedynie eksperyment myślowy. Zdziwiająca jest, że do dzisiaj takich doświadczeń wykonano bardzo mało, w szczególności takich, w których sprawdzano by teorię w sposób ilościowy. Z tego powodu interesująca wydaje mi się praca poświęcona dyfrakcji neutronów na pojedynczej i podwójnej szczelinie (A. Zeilinger i in., *Review of Modern Physics*, tom 60, str.1067, 1988 r.).

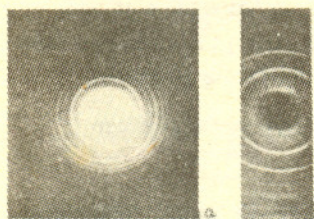
Doświadczenie zostało przeprowadzone z wiązką zimnych neutronów z reaktora w Instytucie Lauego-Langevina w Grenoble. O otrzymaniu zimnych i ultrazimnych (to znaczy o bardzo niskich energiach kinetycznych) neutronów będziecie mogli przeczytać w *Delcie* 10/1989. Schemat układu doświadczalnego jest przedstawiony na rysunku 1. Szczeliny S_1 i S_2 formowały wiązkę neutronów, która padała na pryzmat z kwarcu. Po przejściu przez pryzmat długość fali neutronów zależy od kąta odchylenia. Zmieniając położenie szczeliny S_3 można zmieniać długość fali wiązki neutronów λ_n w zakresie od 15 do 30 angstromów ($1 \text{ Å} = 10^{-8} \text{ cm}$). Tak przygotowana wiązka neutronów padała na układ szczelin S_5 , na którym badano dyfrakcję, natomiast szczelina S_4 , ustawiona bezpośrednio przed detektorem neutronów, pozwalała na pomiar rozkładu natężenia neutronów docierających do detektora. Szczeliny S_3 i S_4 miały szerokość $20 \mu\text{m}$, S_2 - $100 \mu\text{m}$, natomiast szczelina S_1 miała regulowaną szerokość.

Atomy w kryształach niklu są odległe o około 1 Å. Aby efekty dyfrakcyjne były zauważalne, długość fali elektronów powinna być tego samego rzędu co odległości między atomami $\lambda \approx d$. Pęd elektronów powinien więc wynosić $p = h/\lambda = 6,6 \times 10^{-19} \text{ g cm/s}$, to znaczy, że ich energia kinetyczna $T = p^2/2m = \frac{(6,6 \times 10^{-19} \text{ g cm/s})^2}{2(0,91 \times 10^{-27} \text{ g})^2} = 2,4 \times 10^{-10} \text{ ergów} = 150 \text{ eV}$.



Rys. 1. Schemat doświadczenia

W 1929 r. I. Estermann i O. Stern wykazali, że również atomy helu i cząsteczki wodoru ulegają dyfrakcji zgodnie z teorią de Broglie'a. Doświadczenia te dowodzą, że atom jako całość i cząsteczka jako całość są falami. Możemy więc wierzyć, że w odpowiednich warunkach doświadczalnych również i słoń będzie zachowywał się jak fala.



Fotografie przedstawiają dyfrakcję a) elektronów o energii 100 keV, b) promieni rentgenowskich o długości 1,5 Å, na mikrokryształkach białej cyny. Podobieństwo jest uderzające.

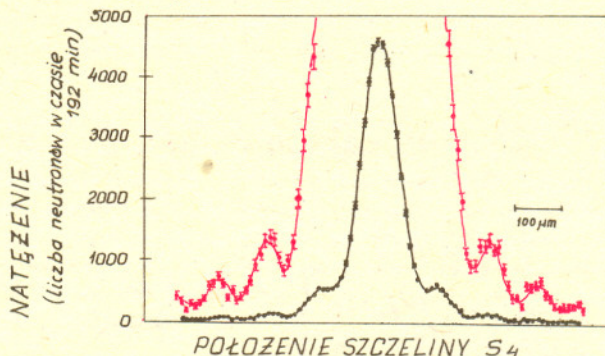
W doświadczeniach z dyfrakcją na kryształach strukturę „siatki dyfrakcyjnej”, to znaczy odstęp między atomami poznajemy również poprzez zjawisko dyfrakcji. W doświadczeniach opisanych w tym artykule szerokość szczelin była zmierzona niezależnie metodami optycznymi.

Do doświadczeń użyto szkła (z firmy Vacuumschmelze Hanau) z dodatkiem Gd_2O_3 dla zwiększenia absorpcji neutronów. Płaszczyzny szczelin o szerokości 0,5 mm, równoległe do wiązki, były szlifowane w Zakładach Zeissa. Aby zmniejszyć odbicie neutronów od tych płaszczyzn, nie były one dokładnie równoległe, lecz zeszlifowane pod kątem $0,8^\circ$ do wiązki padającej. Szerokość szczeliny była ustalona przez włożenie cienkich blaszek między dwa kawałki szkła.

Układ szczelin S_5 , na którym badano dyfrakcję, został wykonany ze szkła z dużą zawartością boru. Równoległość brzegów szczelin o długości 400 mm sprawdzono z dokładnością lepszą niż $1 \mu m$. Doświadczenie przeprowadzono z pojedynczą i podwójną szczeliną S_5 .

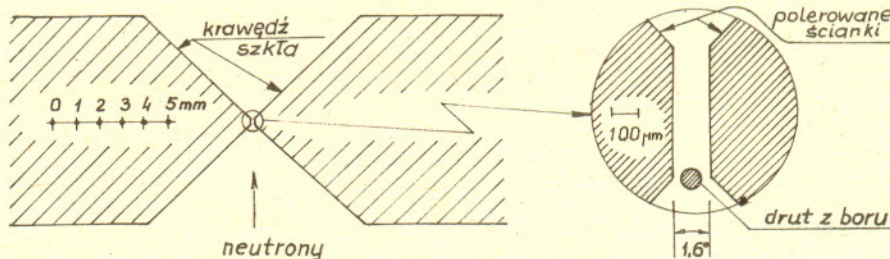
Wyniki dla pojedynczej szczeliny

Doświadczenie przeprowadzono dla szczeliny o szerokości $90 \mu m$ i $\lambda_n = 19,26 \pm 0,7 \pm 0,02 \text{ \AA}$ (pierwsza liczba podaje średnią długość fali neutronów, druga – szerokość pasma długości, trzecia – błąd). Pomiary natężenia neutronów wykonano dla stu położzeń szczeliny S_4 . Wyniki pomiarów wraz z krzywą teoretyczną przedstawione są na rysunku 2. Zgodność jest doskonała, nawet dla maksimum dyfrakcyjnego trzeciego i czwartego rzędu.



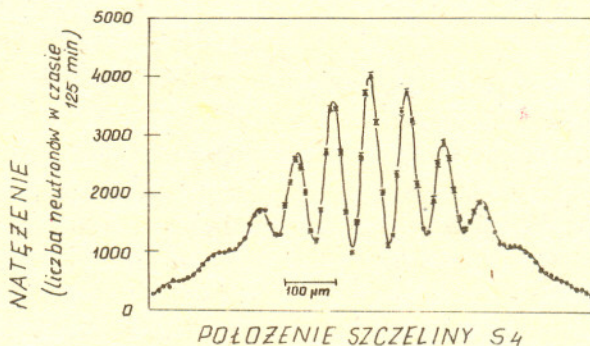
Rys. 2. Obraz dyfrakcyjny na pojedynczej szczelinie $90 \mu m$. Linia czarna przedstawia przewidywanie teorii. Kolorem zaznaczono te same dane powiększone dziesięciokrotnie.

Wyniki dla podwójnej szczeliny



Rys. 3. Przekrój podwójnej szczeliny.

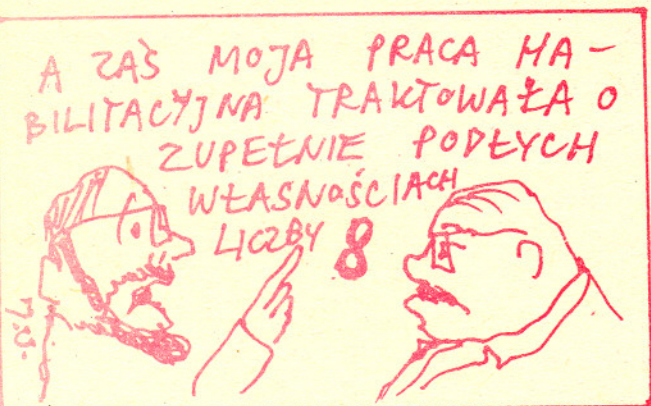
Podwójną szczelinę skonstruowano umieszczając cienki drut z boru w środku szczeliny o szerokości $150 \mu m$ (rysunek 3). Za pomocą mikroskopu stwierdzono, że odległości między brzegami szczeliny a drutem wynosiły $21,9$ i $22,5 \mu m$, a średnica drutu – $104,1 \mu m$. Doświadczenie przeprowadzono z wiązką neutronów o długości fali $\lambda_n = 18,45 \pm 1,40 \pm 0,02 \text{ \AA}$ (oznaczenia jak poprzednio). Wyniki przedstawione są na rysunku 4. Ponownie zgodność obliczeń z danymi doświadczalnymi jest znakomita.



Rys. 4. Obraz dyfrakcyjny na podwójnej szczelinie.

Doświadczenia z podwójną szczeliną są często traktowane jako fundamentalne potwierdzenie teorii kwantowej. Według Feynmana w tym doświadczeniu zawiera się sedno mechaniki kwantowej. Autorzy omawianej pracy uważają, że ich doświadczenie jest najbardziej precyzyjną realizacją „eksperymentu myślowego” Feynmana. Z tego powodu rzucają wyzwanie wszystkim, którzy proponują alternatywne teorie, aby porównali je dokładnie z ich pomiarami.

Zdumiewające własności liczby 7



Podaj siedem liczb, a ja znajdę wśród nich kilka kolejnych, których suma jest podzielna przez 7.

Rzeczywiście, np.

2, 3, 5, 11, 13, 17, 19;

19, 3, 17, 2, 13, 11, 5;

2, 32, 8, 16, 4, 64, 1.

Spróbujmy udowodnić sformułowaną powyżej hipotezę.

Najpierw o królikach i klatkach, czyli o Zasadzie Dirichleta. Zasada ta stwierdza: jeśli mamy więcej królików niż klatek i wszystkie króliki zamknijemy w klatkach, to w którejś klatce muszą być co najmniej dwa króliki. Fakt zupełnie oczywisty, jednak bardzo przydatny w matematyce.

Chcemy na przykład wykazać, że wśród $n + 1$ liczb naturalnych znajdują się dwie, których różnica jest podzielna przez n . Królikami będą tu reszty z dzielenia danych $n + 1$ liczb przez n , a klatkami liczby $0, 1, \dots, n - 1$. Królików jest więcej, czyli dwie liczby dają tę samą resztę z dzielenia przez n – to znaczy, że ich różnica jest przez n podzielna.

Tę samą zasadę zastosujemy do dowodu twierdzenia:

Dla dowolnych liczb a_1, \dots, a_n można wybrać kolejne liczby, tzn. liczby $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m}$, tak, by suma $a_k + \dots + a_{k+m}$ dzieliła się przez n .

Zadanie podane na wstępie jest szczególnym przypadkiem dla $n = 7$.

Narzuca się pomysł, by za króliki wziąć wszystkie możliwe sumy kolejnych liczb, a za klatki reszty z dzielenia przez n . Sum jest dużo (n zaczynających się od a_1 , $n - 1$ zaczynających się od a_2 , \dots , 1 zaczynająca się od a_n , razem $n + (n - 1) + \dots + 1 = n(n + 1)/2$), reszt mniej, a więc dwie sumy dają tę samą resztę, zatem ich różnica...

I tu stop. Różnica sum kolejnych liczb na ogół nie jest sumą kolejnych liczb, np.

$$a_1 + \dots + a_5 - (a_3 + \dots + a_7) = a_1 + a_2 - a_6 - a_7.$$

Co robić? Spróbujmy brać tylko takie sumy, których różnica dalej jest sumą kolejnych liczb. Na przykład: $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + \dots + a_n$. Teraz już będzie dobrze.

Czy rzeczywiście? Przecież sum jest n , a reszt z dzielenia przez n tyleż. Zasady Dirichleta nie da się zastosować. Co jednak znaczy, że któraś z sum $a_1 + \dots + a_k$ daje z dzielenia przez n resztę 0? A to, że ta suma jest podzielna przez n i koniec dowodu. Jeśli zaś żadna z sum nie daje reszty 0, to mamy $n - 1$ klatek – reszty $1, 2, \dots, n - 1$ – i n sum: $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + \dots + a_n$. Któreś dwie sumy dają więc tę samą resztę (Zasada Dirichleta) i ich różnica jest poszukiwaną sumą kolejnych liczb.

Małą Deltę przygotował Jerzy RYLL

Doświadczenie Sterna–Gerlacha



W 1902 roku dwaj fizycy niemieccy Otto Stern i Walther Gerlach wykonali doświadczenie, które dostarczyło bezpośredniego dowodu kwantowania przestrzennego momentu magnetycznego atomu i związanego z tym momentem magnetycznym wektora momentu pędu. Doświadczenie polega na obserwacji obrazu wiązki atomowej przepuszczonej przez obszar silnie niejednorodnego pola magnetycznego o indukcji B skierowanej prostopadle do kierunku wiązki. Jeśli indukcja skierowana jest wzdłuż osi z , to siła działająca na atom o momencie magnetycznym $\vec{\mu}$ będzie miała tylko składową z -ową

$$F_z = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Siła ta działając prostopadle do kierunku wiązki spowoduje jej rozszczepienie na tyle oddzielnych wiązek, ile różnych wartości może przyjmować składowa μ_z . Gdyby momenty magnetyczne mogły się ustawiać dowolnie względem kierunku B (tj. gdyby nie było kwantowania przestrzennego), to wiązka uległaby nie **rozszczepieniu**, ale **rozmyciu**.

W pierwszym doświadczeniu Stern i Gerlach użyli atomów srebra i otrzymali dwa prążki, położone symetrycznie względem prążka, który odpowiadał nieobecności pola. Taki wynik jest możliwy tylko w przypadku, gdy moment pędu atomów wynosi $\hbar/2$. Wiadomo było jednak, iż najniższy stan energetyczny atomów srebra jest stanem o orbitalnym momencie pędu równym zeru, a więc również i odpowiadający mu moment magnetyczny powinien być równy zeru. Sprzeczność została wyjaśniona po przyjęciu hipotezy S. Goudsmita i H.E. Uhlenbecka, że poza orbitalnym momentem pędu elektron ma również spin i związany z nim moment magnetyczny.

Doświadczenie Sterna–Gerlacha pozwoliło zmierzyć rzuty momentów magnetycznych atomu na kierunek pola magnetycznego. Okazało się, że rzuty te są całkowitymi wielokrotnościami magnetonu Bohra

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 0,9273 \cdot 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

dr Lidia GOETTIG



Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 550. Funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna i spełnia równanie

$$f(x) \cdot f(y) = f\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) \cdot f\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)$$

Znaleźć f .

Rozwiązanie na str. 1

M 551. Połączono n punktów strzałkami w taki sposób, że każda para różnych punktów jest połączona strzałką. Udowodnić, że istnieje „centrum”, czyli punkt, z którego można dojść do każdego innego w co najwyżej dwóch krokach, idąc zgodnie z kierunkiem strzałek.

Rozwiązanie na str. 3

M 552. Bank udziela kredytu w wysokości k zł, który jest oprocentowany na $p \cdot 100$ procent rocznie i można go spłacać przez n lat, gdzie n jest dowolne. Niech r oznacza roczną ratę. Czy r zmierza do 0 wraz z wydłużaniem okresu spłaty?

Rozwiązanie na str. 4

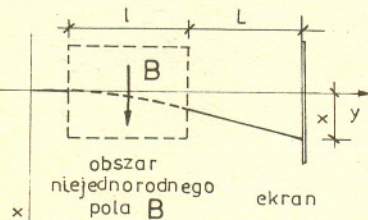
Redaguje dr Rafał STAROŃSKI

F 274. Wiązka atomów sodu wylatuje z pieca o temperaturze $T = 700$ K. Wiązka jest rozszczepiana w niejednorodnym polu magnetycznym zmieniającym się o $\frac{dB}{dx} = 5$ T/cm na odcinku $l = 10$ cm (rys. 1). Detektor jest odległy od magnesu o $L = 65$ cm. Znaleźć odległość między punktami zetknięcia się wiązek z ekranem detektora.

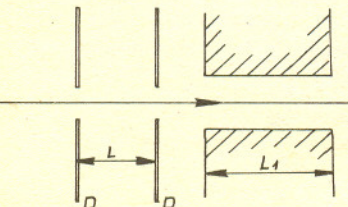
Rozwiązanie na str. 4

F 275. Wiązka atomów litu o minimalnej energii kinetycznej $E_{kin} = 0,1$ eV, znajdujących się w stanie podstawowym, przechodzi przez układ magnesów doświadczenia Sterna–Gerlacha o długości $L_1 = 6$ m (rys. 2). Pole magnetyczne między nimi zmienia się o $\frac{dB}{dx} = 5$ T/cm. Przed magnesem znajdują się w odległości $L = 1$ m od siebie dwie jednakowe przesłony D . Przy jakim największym rozmiarze przesłony składniki rozdzielanej wiązki atomów całkowicie się rozejdą?

Rozwiązanie na str. 10



Rys. 1

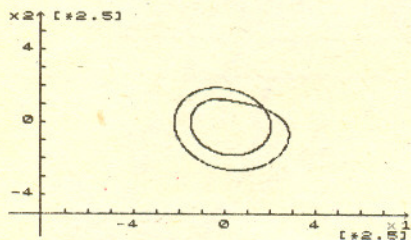


Rys. 2


```

Projekcja ATRAKTORA ROSSLERA
Parametry atraktora
Parametr a = 0.0
Parametr b = 0.0
Parametr c = 0.0
Uspólrzędne początkowe
Uspólrzędna x1 = 0.0
Uspólrzędna x2 = 0.0
Uspólrzędna x3 = 0.0
Całkowita liczba kroków czasu
nk = 2500
Czynnik skalujący osie
s = 2.5

```

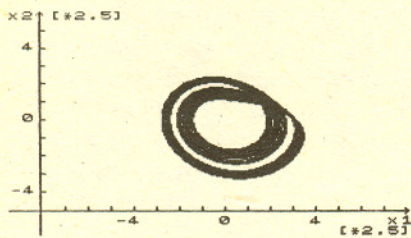


Rys. b

```

Projekcja ATRAKTORA ROSSLERA
Parametry atraktora
Parametr a = 0.0
Parametr b = 0.0
Parametr c = 4.0
Uspólrzędne początkowe
Uspólrzędna x1 = 0.0
Uspólrzędna x2 = 0.0
Uspólrzędna x3 = 0.0
Całkowita liczba kroków czasu
nk = 125000
Czynnik skalujący osie
s = 2.5

```

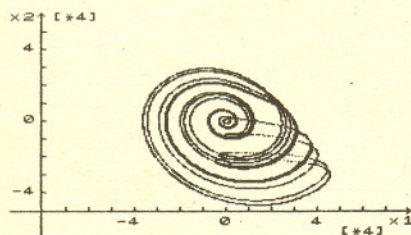


Rys. c

```

Projekcja ATRAKTORA ROSSLERA
Parametry atraktora
Parametr a = 0.3
Parametr b = 0.4
Parametr c = 0.5
Uspólrzędne początkowe
Uspólrzędna x1 = 0.0
Uspólrzędna x2 = 0.0
Uspólrzędna x3 = 0.0
Całkowita liczba kroków czasu
nk = 125000
Czynnik skalujący osie
s = 4

```



Rys. d

Na rysunku a przedstawiona jest prosta trajektoria cykliczna na płaszczyźnie $(x_1, x_2, 0)$. Aby prześledzić jej powstanie, wystarczy uruchomić załączony program komputerowy wprowadzając podane ponad rysunkiem wartości parametrów, warunki początkowe oraz całkowitą liczbę elementarnych kroków czasowych. Tak powstała trajektoria jest rozwiązaniem numerycznym układu równań (*) i stanowi punkt wyjścia cyklu obrazków zamieszczonych na rysunkach a – d.

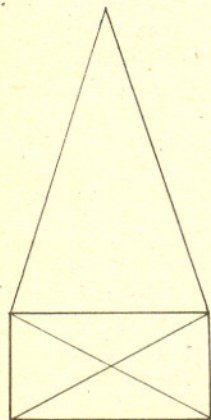
Na rysunku b przedstawiona jest już inna trajektoria cykliczna, jak widać, o strukturze bardziej skomplikowanej – podwójnie zapętłonej. Proszę zauważyć, że komplikacja została spowodowana zmianą tylko jednego parametru μ (w programie: mi). W dalszym ciągu, dla uproszczenia, będziemy zwiększać właśnie ten jeden parametr.

Możesz, Czytelniku, sam sprawdzić, że istnieje taka „krytyczna” wartość parametru $\mu = \mu_k \approx 4,2$, że dla $\mu > \mu_k$ rozwiązanie zmienia swój charakter tworząc pasma, jak pokazuje rysunek c. W trakcie powstawania tego obrazka można zaobserwować, jak bardzo poplątana, by nie rzec chaotyczna, jest trajektoria wewnątrz każdego z pasm.

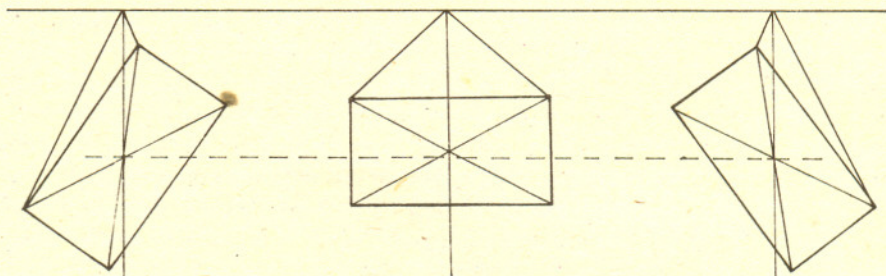
Na koniec przyjrzyjmy się jeszcze rysunkowi d, który powstał w wyniku zmiany wszystkich trzech parametrów. Jest to tzw. dziwny atraktor Rösslera, a ściślej rzecz biorąc jego dwuwymiarowa projekcja (często mówiąc o atraktorze Rösslera ma się na myśli właśnie ten twór, a nie układ równań różniczkowych (*)). Jak widać, struktura rozwiązania przedstawionego na rysunku d charakteryzująca się pofałdowaniem i splecaniem trajektorii, jest krańcowo różna od naszego wyjściowego, prymitywnego rozwiązania z rysunku a. Przedstawione rysunki ilustrują właśnie efekt bifurkacji, tzn. **jakościową** zmianę rozwiązania wraz ze zmianą wartości parametrów charakteryzujących dany układ. Bifurkujące rozwiązania równań różniczkowych (zwykłych lub cząstkowych) to nie tylko ciekawostka matematyczna. Pojawiają się one także w różnych modelach fizycznych, na przykład w hydrodynamice i aerodynamice zagadnień turbulentnych. Trzeba podkreślić, że droga do opisu ruchów turbulentnych poprzez bifurkacje i dziwne atraktory znajduje dzisiaj swoich zwolenników zarówno wśród matematyków, jak i fizyków. Są to wszystko problemy „gorące”, właśnie badane nie tylko metodami czysto teoretycznymi, ale także na drodze eksperymentów komputerowych, podobnych również do zamieszczonych w tym artykule. Zachęcam do wzięcia w nich udziału.

Wybrany przez nas przykład atraktora Rösslera dotyczy tzw. zagadnień dyssypatywnych (o których mówiliśmy nieco przy omawianiu dziwnych atraktorów w *Delcie* 4/1988). Okazuje się, że efekt bifurkacji występuje także w tzw. układach konserwatywnych. Ale to już całkiem inna historia. A może, w formie ćwiczenia spróbujesz, Czytelniku, sam napisać program kreślący np. trajektorie w przestrzeni fazowej punktu materialnego podlegającego np. działaniu siły zależnej liniowo oraz kubicznie od jego wychylenia z położenia równowagi. Jako pomocną pozycję literaturową mogę tutaj polecić pracę przeglądową R.H.G. Hellemana pt.: „Self – generated chaotic behavior in nonlinear mechanics” zamieszczoną w *Fundamental Problems in Statistical Mechanics*, tom V, red. E.G.D. Cohen, North-Holland, 1980.

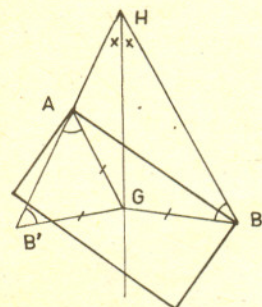
Do górnych wierzchołków prostokątnego obrazu przyczepiamy sznurek i za ten sznurek wieszamy obraz na haku wbitym w ścianę. Jakie są możliwe położenia równowagi? Pomijamy tarcie sznura o hak i obrazu o ścianę. Doświadczenie pokazuje, że dla długiego sznurka mamy jedno położenie równowagi trwałej (rys. 1a), a dla sznurka krótkiego dwa położenia równowagi trwałej i jedno nietrwałej (rys. 1b).



Rys. 1a



Rys. 1b



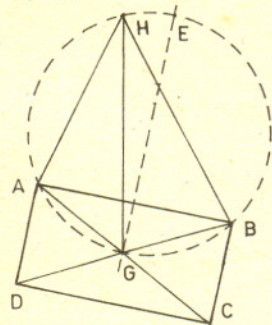
Rys. 2

Znajdźmy te położenia. Z prostych rozważań fizycznych wynika, że środek obrazu G leży pionowo pod hakiem H oraz kąty AHG i GHB są równe (rys. 2). Odbijmy punkt B symetrycznie względem prostej HG . Punkt B' leży na prostej HA .

1. Jeśli $B' = A$, to H leży na dwusiecznej kąta AGB .

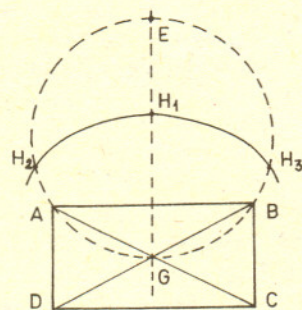
2. Jeśli $B' \neq A$, to $\angle HBG = \angle HB'G = \angle B'AG = \pi - \angle HAG$ (przedostatnia równość wynika z równoramienności trójkąta $B'AG$.)

Zatem na czworokącie $HAGB$ da się opisać okrąg, czyli punkt H leży na okręgu opisanym na trójkącie AGB (rys. 3).

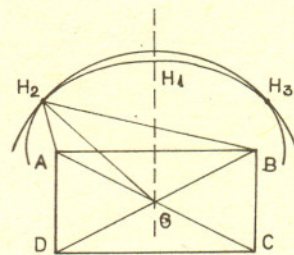


Rys. 3

Rozważmy możliwe położenia haka (gdy obraz jest w równowadze) w układzie odniesienia obrazu. Przy danej długości sznura wszystkie możliwe położenia haka leżą na elipsie. Jeśli długość sznura jest większa lub równa $2AE$, to możliwe jest tylko jedno położenie równowagi (punkt przecięcia prostej i elipsy leżący powyżej G) i musi to być równowaga trwała. Przy skracaniu sznura następuje bifurkacja i jedno położenie równowagi trwałej rozszczepia się na trzy (rys. 4). Badając energię potencjalną obrazu (proporcjonalną do GH) można sprawdzić, który z punktów przecięcia elipsy z prostą (H_1) i okręgiem (H_2 i H_3) jest punktem równowagi trwałej (energia jest minimalna), a który równowagi nietrwałej (energia maksymalna).

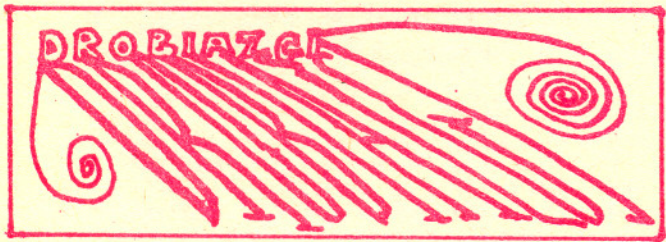


Rys. 4

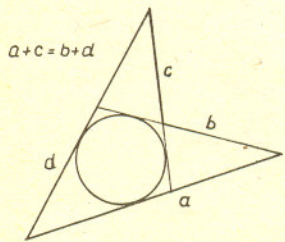


Rys. 5

Punkt wbicia haka jest punktem równowagi, gdy odcinek łączący go z G jest prostopadły do elipsy. Okrąg S o środku G i promieniu GH_2 jest styczny do elipsy w H_2 i H_3 (rys. 5). Elipsa i okrąg nie mają więc więcej punktów wspólnych (dwie stożkowe mogą się przecinać w co najwyżej 4 punktach, ale w naszym przypadku punkty przecięcia są punktami styczności) i elipsa leży wewnątrz okręgu S . W punktach H_2 i H_3 są zatem maksima energii potencjalnej, a w punkcie H_1 minimum.



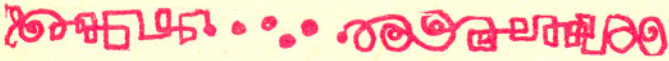
Radiowe obserwacje neutralnego wodoru (na fali 21 cm) w pewnej gromadzie galaktyk w Lwie ukazują obecność kilku obłoków układających się w coś w rodzaju pierścienia, w centrum którego leżą galaktyki M 105 i NGC 3384. Biorąc pod uwagę odległość tych obiektów ocenia się średnicę pierścienia na 200 000 parseków i okres obrotu na 4 mld lat. Przypuszcza się, że przyczyną powstania takiej struktury mogło być zderzenie się dwóch galaktyk, choć, oczywiście, jeszcze daleko do pełnego wyjaśnienia tej osobliwości.



Warto pamiętać (patrz II etap XL Olimpiady Matematycznej), że twierdzenie o bokach czworokąta opisanego na okręgu stosuje się również do czworokątów wklęsłych.



Zmiany jasności kwazarów obserwuje się od dawna, jednak dopiero koncepcja supergęstych obiektów centralnych okazała się zdolna wytłumaczyć zmiany blasku zachodzące w tempie minut. Np. kwazar OJ 287, jeden z najjaśniejszych zmiennych kwazarów, położony na niebie w pobliżu gromady gwiazd Praesepe w Raku, wykazuje zmiany jasności o okresie m.in. 15 minut. Oznacza to, że jasność ta produkowana jest w źródle o rozmiarach nie większych niż 15 minut świetlnych! Skomplikowany charakter zmian jasności sugeruje, że promieniuje tam kilka źródeł jednocześnie, prawdopodobnie tzw. gorące plamy w dysku otaczającym centralny supergęsty obiekt (czarną dziurę?). Jego masa jest oceniana na kilka milionów do 60 milionów mas Słońca. Prawdopodobnie jest to w ogóle typowy mechanizm produkcji energii w kwazarach.



Na Uniwersytecie w Ann Arbor (USA) opatentowano nowy rodzaj substancji, które zależnie od obecności pola elektrycznego mogą przechodzić ze stanu ciekłego w stan stały i odwrotnie. Są one mieszaniną proszku i cieczy – poddane działaniu silnego pola elektrycznego przechodzą w stan stały, a po wyłączeniu pola powracają do stanu ciekłego. Znanie dotychczas cieczy o tych własnościach nie mogły być wykorzystane w samochodach czy innych maszynach, bowiem ich ciekły składnik to woda, która wyparowuje przy wysokich temperaturach. Nowo odkryte substancje nie zawierają wody, będą więc mogły znaleźć szerokie zastosowanie w nowoczesnych układach hamulcowych czy innych urządzeniach hydraulicznych. W amortyzatorach cieczy te mogłyby zmieniać swe własności od ciekłych do stałych w czasach mniejszych od 1 ms pod kontrolą mikrokomputera.



Na pytanie „Czy liczba 3,14 jest wymierna?” często można otrzymać odpowiedź negatywną.

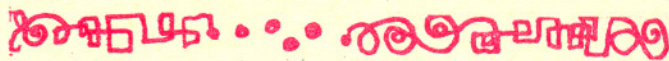
Mikroskopia pozytonowa już wkrótce pozwoli zajrzeć w głąb materii. Chociaż nie osiągnie takiej zdolności rozdzielczej jak mikroskopia elektronowa, to może dostarczyć zupełnie innych informacji. Ostatnio grupie naukowców z Uniwersytetu Brandeis i Laboratorium Bella udało się skonstruować mikroskop pozytonowy o zdolności rozdzielczej 300 nm dający powiększenie 1150-krotne. Jest to granica możliwości mikroskopów optycznych. Naukowcy chcą osiągnąć zdolność rozdzielczą 1 nm, co umożliwi badanie defektów w kryształach oraz budowy molekuł biologicznych.



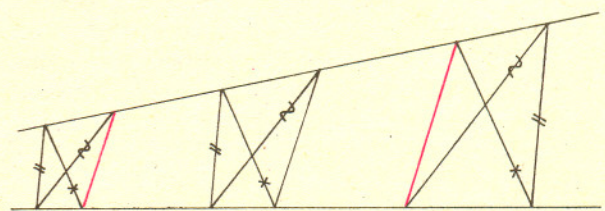
Victor Poncelet, autor pierwszego podręcznika geometrii rzutowej, jako jednej z metod uzyskiwania nowych twierdzeń używał następującej zasady ciągłości: *Jeśli figurę jakąś otrzymuje się z innej przez zmianę ciągłą i jeśli jest ona tak samo ogólna jak pierwsza, wówczas własność udowodnioną dla figury pierwszej można przenieść na figurę drugą, bez dalszych rozważań.* I uzyskiwał w ten sposób szereg ciekawych i, oczywiście, prawdziwych twierdzeń. Dziś jednak wszystkie te twierdzenia mają „prawdziwe” dowody, choć często następcy Ponceleta musieli włożyć wiele trudu w ich znalezienie. W ten sposób za ścisłość płaci się utratą piękna i jasności spostrzeżeń.



Nowe światłowodowy wykonane z wysoce przezroczystego szkła kwarcowego mogą przenosić sygnały optyczne na odległości rzędu 50 km bez konieczności wzmacniania. Zgodnie z przewidywaniami teorii światłowodowy te powinny umożliwić przekaz sygnałów w podczerwieni na odległości 20-krotnie większe.



W dwie proste (obojętnie: równoległe lub nie) wpismy trzydziestokątne łamane (łamana jest wpisana w dwie proste, jeśli jej kolejne wierzchołki leżą na różnych prostych). Jeśli będą one miały odcinki odpowiednio równoległe, to i odcinki zamykające, czyli łączące pierwszy wierzchołek z ostatnim, wszystkie będą miały ten sam kierunek



Jeśli dwie wyjściowe łamane rysowane są „tak samo” (lewa część rysunku), to można to łatwo uzasadnić własnościami przesunięć lub jednokładności. Ale jeśli łamane będziemy rysować „do góry nogami” (prawa część rysunku)? Twierdzenia opisujące podaną własność są nazywane prostymi i odwrotnymi nożycami.



Gwiazdy zmienne lub szybko poruszające się odkrywało się kiedyś przez porównywanie dwóch zdjęć tego samego obszaru nieba wykonanych w różnych chwilach. Łatwo domyśleć się, że było to zajęcie dość żmudne i aż prosiło się o zautomatyzowanie tej pracy. Urządzenia do automatycznego mierzenia klisz pracują na świecie już od lat. Najszybszym jest prawdopodobnie skaner pracujący na Uniwersytecie Minnesota zdolny w ciągu 2,5 godziny pomierzyć parę klisz o rozmiarach 14 x 14 cali. Wykonuje to, oczywiście, komputer sterujący promieniem laserowym omiatającym te klisze. Dokładność tak wyznaczonych położenia gwiazd na kliszy jest rzędu 1,5 μm.

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 X 1989

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1989.

Zadania z matematyki nr 193, 194

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

193. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano dokładnie jednym z dwóch kolorów w taki sposób, że żaden trójkąt równoboczny o boku długości 1 nie ma wszystkich wierzchołków jednakowego koloru.

- a) Dowieść, że istnieje trójkąt równoboczny o boku długości $\sqrt{3}$, mający wszystkie wierzchołki jednego koloru.
- b) Dać przykład pokolorowania o wymienionej w pierwszym zdaniu własności.

194. Niech $n \geq 2$ będzie dowolną, ustaloną liczbą naturalną. Dowieść, że jest tylko skończenie wiele par liczb całkowitych (x, y) spełniających równanie

$$x^n + (x + 1)^n = y^{2n} + (y + 1)^{2n}.$$

Zadanie 194 zaproponował pan Marcin Mazur z Białegostoku.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/1989

Przypominamy treść zadań:

189. Rozpatrujemy trójkąty T i czworokąty Q opisane na danym kole K . Wyznaczyć kąty oraz określić wzajemne położenie figur T i Q , dla których pole części wspólnej $T \cap Q$ jest minimalne.

190. Dane $m, n \geq 1$, naturalne; m nieparzyste. Czy liczby $2^m - 1$ i $2^n + 1$ muszą być względnie pierwsze?

189. Dla ustalonego trójkąta T i czworokąta Q część wspólna tych figur jest siedmiokątem opisanym na kole K . Jego pole jest nie mniejsze niż pole siedmiokąta foremnego opisanego na K (wynika to łatwo z wypukłości funkcji tangens w przedziale $\langle 0; \frac{1}{2}\pi \rangle$ i z nierówności Jensena). Szukamy więc trójkąta T i czworokąta Q , dla których $T \cap Q$ jest siedmiokątem foremnym; wówczas pole $T \cap Q$ będzie minimalne.

Niech A_1, A_2, A_3 będą punktami styczności koła K z bokami trójkąta T i niech B_1, B_2, B_3, B_4 będą punktami styczności koła K z bokami czworokąta Q . Siedmiokąt $T \cap Q$ jest foremny, gdy wymienione punkty dzielą okrąg koła K na siedem równych łuków. Siedem punktów, wśród których są trzy punkty jednego typu i cztery punkty drugiego typu, można usytuować na okręgu na cztery sposoby:

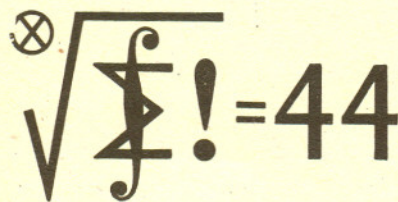
- (1) $B_1 A_1 A_2 A_3 B_2 B_3 B_4$
- (2) $B_1 A_1 B_2 A_2 B_3 A_3 B_4$
- (3) $B_1 A_1 A_2 B_2 A_3 B_3 B_4$
- (4) $B_1 A_1 A_2 B_2 B_3 A_3 B_4$

(każda konfiguracja daje się sprowadzić do jednej z powyższych przez stosowne przenumerywanie punktów). Warunek, by punkty A_i były punktami styczności koła z obwodem trójkąta, eliminuje konfiguracje (1) i (3). Natomiast z (2) i (4) dostajemy:

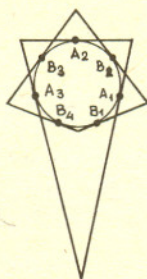
- (2) trójkąt o kątach $\frac{3}{7}\pi, \frac{3}{7}\pi, \frac{1}{7}\pi$, czworokąt o kątach $\frac{3}{7}\pi, \frac{3}{7}\pi, \frac{3}{7}\pi, \frac{5}{7}\pi$;
- (4) trójkąt o kątach $\frac{1}{7}\pi, \frac{1}{7}\pi, \frac{5}{7}\pi$, czworokąt o kątach $\frac{1}{7}\pi, \frac{5}{7}\pi, \frac{3}{7}\pi, \frac{5}{7}\pi$,

usytuowane, jak przedstawia rysunek (w każdym przypadku obie figury mają wspólną oś symetrii). Znalezione pary figur stanowią rozwiązanie zadania.

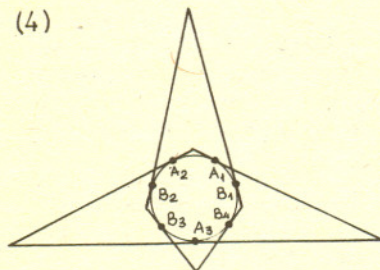
190. Tak. Przypuśćmy, że $d = \text{NWD}(2^m - 1, 2^n + 1) > 1$. Z założenia $2^m \equiv 1 \pmod{d}$, $2^n \equiv -1 \pmod{d}$. Pierwszą kongruencję podnosimy do potęgi n , a drugą do potęgi m . Otrzymujemy $1 \equiv 2^{m \cdot n} \equiv -1 \pmod{d}$, skąd $d = 2$. Sprzeczność, bo $2^n + 1$ jest liczbą nieparzystą.



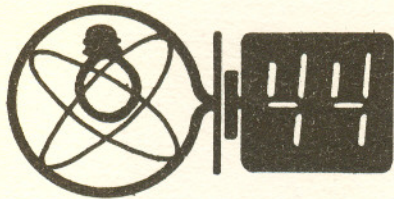
(2)



(4)

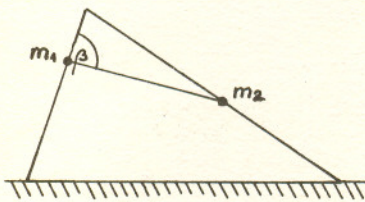


Redaguje dr Andrzej NADOLNY



91. Gdy poziomo rozpiętą nylonową żyłkę – używaną do suszenia bielizny – pociągamy (pocieramy) wzdłuż zwilżonymi palcami, słyszymy charakterystyczny, dźwięk. Jeśli na żyłce wiszą jakieś drobne, suche „szmatki”, możemy jednocześnie zauważyć, że przemieszczają się one wzdłuż żyłki w tym samym kierunku, w jakim przesuwamy po niej palce. Wytlumaczyć to zjawisko, w miarę możliwości ilustrując własnym materiałem doświadczalnym.

92. Dwa ciała, o masach odpowiednio m_1 i m_2 , połączone nieważką nicią, mogą się poruszać bez tarcia po prostopadłych prowadnicach ustawionych w płaszczyźnie pionowej tak, że jedna z nich nachylona jest pod kątem α względem poziomu (rys. 1). Znaleźć kąt między nicią łączącą ciała a tą prowadnicą, gdy układ ciał znajduje się w stanie równowagi. Określić, jaki to rodzaj równowagi.



Rys. 1

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/1989

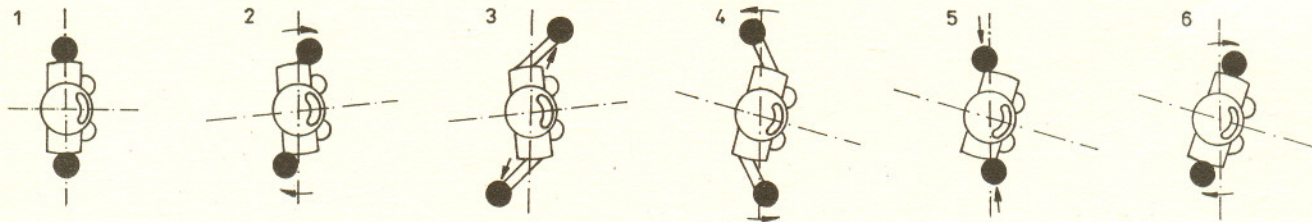
Przypominamy treść zadań:

87. Czy kosmonauta unoszący się swobodnie w przestrzeni kosmicznej (nie obracający się względem swego środka masy) może dokonać obrotu swego ciała, na przykład o 180° , nie wykorzystując żadnych oddziaływań z ciałami zewnętrznymi ani odrzutu? Jeśli jest to możliwe, to w jaki sposób?

88. Kwadratowa ramka o boku a z drutu miedzianego o polu przekroju poprzecznego S wiruje ze stałą prędkością kątową ω w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B wokół osi leżącej w płaszczyźnie ramki, równoległej do jednej pary boków i prostopadłej do kierunku pola magnetycznego.

Obliczyć maksymalną wartość momentu siły, jaki musi pokonać silniczek napędzający ramkę. Opór właściwy miedzi wynosi ρ . Czy wynik ulegnie zmianie i jak, jeśli ramka będzie zawierała n zwojów cieńszego drutu, wykonanego z tej samej ilości miedzi, co ramka pierwotna?

87. Jest to możliwe przez umiejętne wykorzystanie prawa zachowania momentu pędu układu izolowanego, jaki stanowi kosmonauta. Należy mianowicie dokonywać kolejno wzajemnych obrotów części tego układu w przeciwne strony, zmieniając w międzyczasie moment bezwładności części układu względem osi obrotu. Wystarczy, że kosmonauta będzie wykonywał następujące ruchy rękoma (najlepiej trzymając w nich spore masy): obrót w jedną stronę rąk położonych w pobliżu osi ciała, oddalenie rąk od osi ciała, obrót w drugą stronę, powrót rąk do pozycji wyjściowej. Rysunek 2 przedstawia schematycznie kosmonautę – oglądanego od strony głowy – w układzie inercjalnym, w kolejnych fazach tej operacji. Powtarzając ją wielokrotnie kosmonauta może się obrócić o dowolny kąt.



Rys. 2

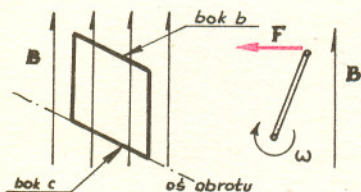
88. Rozpatrzmy ogólniejszy przypadek ramki zawierającej n zwojów drutu o polu przekroju poprzecznego S/n . Pochodna czasowa strumienia wektora indukcji magnetycznej B przechodzącego przez ramkę osiąga podczas obrotu ramki wokół osi maksymalną wartość w położeniu ramki równoległym do wektora B . Wartość ta $\frac{d\Phi}{dt} = Ba^2\omega$ nie zależy od położenia osi – zgodnego z warunkami zadania – przyjmijmy więc, że oś obrotu pokrywa się z bokiem c ramki (rys. 3).

W omawianym położeniu ramki w jej uzwojeniu indukuje się maksymalna siła elektromotoryczna o wartości bezwzględnej $|\epsilon| = nBa^2\omega$. Uwzględniając opór uzwojenia $R = 4n^2a\rho/S$ i zaniedbując przesunięcie fazowe związane z samoindukcją uzwojenia obliczamy natężenie płynącego w danej chwili przez uzwojenie prądu $|I| = |\epsilon|/R = BaS\omega/(4n\rho)$. Na bok b ramki (rysunek) działa siła $F = nIaB$ (której zwrot jest zgodny z regułą Lenza). W omawianym położeniu zarówno wartość tej siły, jak i jej ramie względem osi przyjmują wartość maksymalną. Wobec tego maksymalna wartość momentu siły jest równa

$$M = Fa = B^2a^3S\omega/(4\rho).$$

Jak widać, wartość ta nie zależy od n .

Można łatwo wykazać, że powyższy wynik jest słuszny dla dowolnego umiejscowienia osi obrotu spełniającego warunki zadania.



Rys. 3