

W dniu 16 czerwca 1989r. zmarł

profesor Jerzy PNIEWSKI,

fizyk, wybitny uczyony, współodkrywca hiperjader,
wychowawca wielu pokoleń,
niezrównany organizator nauki.

nr 513-10-1-s IP-314533...

SPIS TREŚCI

NUMERU 7(187)

Całka Eudoksosa <i>dr hab. Marek Kordos</i>	str. 1
Zadania	str. 3
Odwrócenie frontu fali świetlnej <i>prof. dr Adam Kujawski</i>	str. 4
O ciągach typu dwumianowego <i>dr Maciej Grzesiak</i>	str. 6
Mała Delta	str. 8
Korespondencyjny Klub Fizyków	str. 9
Asocjacje <i>dr Tomasz Kwast</i>	str.10
Drobizgi	str.12
O podziale prostokąta na kwadraty <i>mgr Jarosław Górnicki</i>	str.13
Patrz w niebo	str.16
Klub 44	str.16

W następnym numerze:

Polowanie na pulsary

„Delta”
matematyczno-fizyczno-astronomiczny
miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego
Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
Towarzystwa Astronomicznego
wydawany przy poparciu
Ministerstwa Edukacji Narodowej

Komitet Redakcyjny

dr Maciej Bryński
dr Bogdan Cichocki
dr Antoni L. Dawidowicz
dr Alicja Derkowska
doc.dr Jan A. Gaj
doc.dr Bolesław Gleichgewicht
doc.dr Tomasz Hofmokr – v-przewodniczący
doc.dr Tadeusz Jarzębowski
doc.dr Marcin Kubiak
mgr Andrzej Mąkowski
dr Zbigniew Plochocki
dr Jan Rempala
prof.dr Konrad Rudnicki
prof.dr Grzegorz Sitarski
prof.dr Józef I. Smak
prof.dr Kazimierz Stępień
prof.dr Mieczysław Subotowicz
doc.dr Andrzej Szymacha
doc.dr Aniela Wolska
prof.dr Andrzej Woszczyk
prof.dr Wojciech Żakowski –
przewodniczący

WARUNKI I CENY PRENUMERATY

Zgłoszenia na prenumeratę:
w terminie

- do dnia 10 listopada na pierwszy kwartał, pierwsze półrocze oraz cały rok,
- do dnia 1 każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty

przyjmują:

- Oddziały RSW „Prasa-Książka-Ruch” od osób prawnych – instytucji i zakładów pracy zlokalizowanych w miastach będących siedzibą tych Oddziałów,
- urzędy pocztowe nadawczo-odbiorcze właściwe dla miejsca zamieszkania prenumeratora – przyjmują zamówienia od indywidualnych prenumeratorów (osoby fizyczne); zamieszkałych w miastach, gdzie znajdują się siedziby Oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”,
- urzędy pocztowe i doręczyciele w miejscowościach, gdzie nie ma Oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich – przyjmują zgłoszenia zarówno od indywidualnych prenumeratorów (osoby fizyczne), jak i dla instytucji oraz zakładów pracy zamieszkałych i mieszczących się na tych terenach.

Ceny prenumeraty:

- kwartalnej 300 zł
- półrocznej 600 zł
- rocznej 1200 zł

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę – przyjmuje Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw RSW „Prasa-Książka-Ruch” ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, PBK XIII Oddział w Warszawie Nr 370044-1195-139-11.

Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.

Redaguje kolegium w składzie:

mgr inż. Krzysztof Biesaga
dr Lidia Goettig
dr hab. Jan Kalinowski – z-ca red. nacz.
Maria Kapuścińska
mgr Krystyna Kordos – sekr. red.
dr hab. Marek Kordos – red. nacz.
dr Tomasz Kwast
mgr Anna Rudnik
dr Jerzy Ryll
mgr Joanna Udalska
Jacek Urbański – grafik

Adres Redakcji

ul. Noakowskiego 14
00-666 Warszawa
tel. 25-56-39

Warszawskie Wydawnictwo Prasowe
RSW „Prasa-Książka-Ruch”
Al. Jeruzolimskie 125/127

tel. 02-017 Warszawa
tel. centr. 28-52-31
Biuro Reklamy Prasowej i Ogłoszeń
ul. Poznańska 38
00-689 Warszawa

tel. 28-23-09
Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.,
2,50 ark. druk.,
papier offsetowy V kl. 70 g.
Wydrukowano w Prasowych
Zakładach Graficznych
RSW „Prasa-Książka-Ruch”
w Łodzi, ul. Armii Czerwonej 28
Nr zam. 1630/89
Skład systemem TeX
wykonała redakcja.

O odkryciu i wprowadzeniu do użytku liczb rzeczywistych pisałem w *Delcie* 2/1989.

Od momentu, gdy ludzie zaczęli być przekonani, że za pomocą liczb można opisywać wszelkiego rodzaju wielkości i gdy własności liczb nadających się do takiego opisu zostały ustalone, powstał problem, jak w praktyce przyporządkowywać wielkościom liczby. Czyli – jak mierzyć.

Dziś teoria mierzenia mieści się w dziale matematyki zwanym **funkcje rzeczywiste**, a podręczniki o takim tytule mają zazwyczaj dwie części: **teorię miary** i **teorię całki**. Jest tu mowa o tak zwanych całkach oznaczonych, czyli obliczeniach miar obszarów opisanych danymi funkcjami. Używane przez nas całki są (przeważnie) dwóch rodzajów.

Pierwszy z nich (wypracowany przez licznych matematyków przełomu XVI i XVII wieku, takich jak Kepler, Torricelli, Barrow) został skodyfikowany przez Newtona i Leibniza. Kodyfikacja ta była jednak na tyle nieściśła i intuicyjna, że używana przez nich całka nosi dziś nazwę **całki Riemanna** od nazwiska matematyka, który (200 lat później) podał jej definicję na tyle ścisłą, że może być ona używana do dziś. Definicja ta określa całkę jako liczbę leżącą pomiędzy dwoma zbiorami przybliżeń, a więc całka ta jest dobrze określona, gdy pomiędzy te zbiory można „wetknąć” tylko jedną liczbę. Doświadczenie wskazuje, że często między dolnymi i górnymi przybliżeniami mieści się wiele liczb. W takiej sytuacji całka Riemanna nie jest określona i trzeba albo zrezygnować z mierzenia, albo mierzyć jakoś inaczej.

Kwadrat jednostkowy z dziurką w każdym punkcie o obu współrzędnych wymiernych nie ma pola w sensie takiej całki. Przybliżenie górne jest nie mniejsze od 1, a dolne – dokładnie 0.

W sensie Lebesgue'a opisany poprzednio kwadrat ma pole 1, bo tyle wynosi kres dolny pół jego pokryć „przypoitymi” figurami.

Druga powszechnie używana całka powstała pół wieku później (ma tyle lat co nasze stulecie) i nosi nazwę **całki Lebesgue'a** (od nazwiska jej twórcy). Tu dla ustalenia wartości całki używa się już tylko jednego zbioru przybliżeń, którego konstrukcja (specyficzna dla tej całki) gwarantuje sensowność otrzymanego wyniku. Tam, gdzie określone są obie całki, otrzymujemy ten sam wynik, niezależnie od tego, którą z nich zastosujemy. Wiele jest jednak sytuacji, gdzie całka Lebesgue'a daje się obliczyć, mimo że całka Riemanna nie jest określona.

Są jeszcze inne całki, ale ciekawszym wydaje się pytanie, jak radzono sobie z mierzeniem przez 19 stuleci, jakie upływały od jasnego sformułowania „o co chodzi” przez Eudoksosa do prac XVI-wiecznych matematyków.

Odpowiedź na to pytanie jest znana. Używano wprowadzonej przez tegoż Eudoksosa **metody wyczerpywania**, zwanej też czasami całkowaniem Starożytnych. Robi się to w następujący sposób.

Z figury, którą chcemy zmierzyć, wyjmujemy część, której miarę znamy (na ogół wielokąt czy wielościan), przy czym musi być ona większa od połowy całej figury. Miarę tej części oznaczmy S_1 . Z pozostałą częścią figury postępujemy tak samo otrzymując S_2 , potem S_3 , S_4 itd. Eudoksos twierdzi, że suma

$$S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n$$

tym lepiej przybliża miarę figury, im większe jest n , oraz że nieskończona suma daje miarę figury.

Uzasadnienie jest proste. Zakładając, że mierzona przez nas figura daje się zmierzyć i ma miarę S , mamy

$$(*) \quad S \geq S_1 + S_2 + S_3 + \dots \geq \frac{S}{2} + \frac{S}{4} + \frac{S}{8} + \dots = S.$$

Istotnie, pierwsza nierówność wynika z faktu, że wyjmowaliśmy zawsze części mierzonej figury (i były one rozłączne), druga – że zawsze wyjmowaliśmy ponad połowę tego, co jeszcze było, a równość – to prosta własność ciągu (postępu) geometrycznego. Tak więc we wzorze (*) występują same równości.

Jak widać – metoda jest prosta, używa tylko jednego zbioru przybliżeń (jak całka Lebesgue'a – choć jest to zupełnie inny zbiór), co więcej – zbiór ten jest ciągiem. Można zapytać, jak wiele się traci pozwalając sobie na takie luksusy.

Rozwiązanie zadania F 272. Liczba atomów argonu $^{37}_{18}\text{Ar}$ wynosi

$$n = \sigma t N_{\text{Cl}} \cdot \Phi,$$

gdzie $t = 1 \text{ rok} \approx 3,2 \cdot 10^7 \text{ s}$,
 N_{Cl} – liczba atomów chloru,
 $\Phi = \frac{N}{4\pi R^2}$ – strumień neutronów na powierzchni Ziemi. Otrzymujemy

$$N_{\text{Cl}} \approx \frac{4\pi R^2 n}{\sigma t}.$$

Wynika stąd, że w eksperymencie należy użyć CCl_4 w ilości równej

$$M \approx \frac{\mu N_{\text{Cl}}}{4} \cdot \frac{1}{\eta} = \mu N_{\text{Cl}} \approx 560 \text{ ton},$$

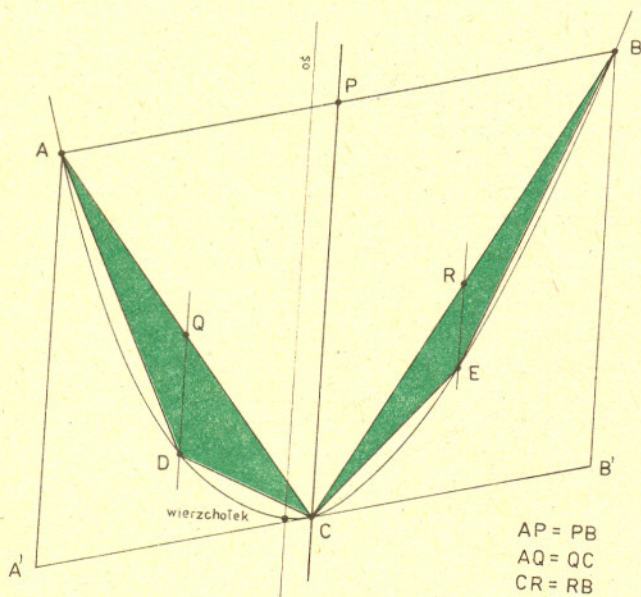
gdzie μ jest masą molową CCl_4 .

To, że coś się traci, jest oczywiste – najlepszym dowodem jest tu fakt, że w końcu opracowano inne, bardziej skomplikowane całki. Warto jednak zauważyć, jak wiele można było osiągnąć używając całki Eudoksosa. Podam dwa przykłady. Pierwszy z nich to tzw. kwadratura paraboli, czyli pierwsze obliczenie pola figury płaskiej ograniczonej krzywą inną niż łamana lub okrąg (autor – Archimedes). Drugi z nich to obliczenie objętości ostrosłupa. To może zdziwić – przecież każdy wie, że objętość ta jest równa $\frac{1}{3}P \cdot h$, gdzie P to pole podstawy, a h – to wysokość. I po co tu całkować? Prawda jest jednak taka, że wzór ten łatwo uzyskać, jeśli wiemy, iż objętość ostrosłupa zależy tylko od P i h , a nie zależy np. od kształtu ostrosłupa. To natomiast, że objętość ostrosłupa zależy tylko od P i h , nie da się wykazać bez użycia całek (dowolnego już rodzaju). Ten zdumiewający fakt został odkryty dopiero w 1900 roku przez Dehna. Przedtem dopuszczano, że może to być tylko powszechna nieumiejętność. Objętość ostrosłupa obliczył (metodą wyczerpywania) Euklides.

Twierdzenie Dehna można znaleźć np. w *Delcie* 11/1984.

Kwadratura paraboli

Obliczamy pole figury ograniczonej łukiem paraboli i zamykającą go cięciwą AB .

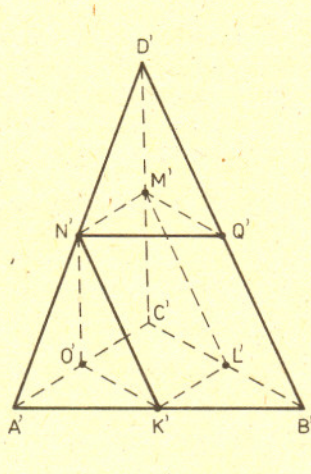


AP = PB
AQ = QC
CR = RB

Przez środek cięciwy prowadzimy prostą równoległą do osi paraboli otrzymując w przecięciu z parabolą punkt C . Pole trójkąta ABC oznaczmy S_1 . Jest to oznaczenie zgodne z metodą Eudoksosa, bo styczna do paraboli w punkcie C jest równoległa do AB (Czytelniku – dlaczego?) i mierzona figura mieści się w równoległoboku $ABB'A'$, gdzie AA' i BB' są równoległe do osi. A trójkąt ABC to połowa tego równoległoboku, a więc więcej niż połowa mierzonyj figury. Wyjmujemy więc ABC i do obu pozostałych części figury stosujemy ten sam, co poprzednio, zabieg. Suma pól trójkątów oznaczonych na rysunku kolorem będzie naszym S_2 . Mógł Archimedes, więc możesz i Ty, Czytelniku, sprawdzić, że pola obu trójkątów są równe, oraz że każdy z nich ma pole równe $\frac{1}{8}$ pola trójkąta ABC (w tym celu wystarczy wykazać, że wysokość trójkąta ACD z wierzchołką D jest osiem razy krótsza od wysokości trójkąta ABC z wierzchołką B). Jeśli tak, to $S_2 = \frac{1}{4}S_1$ i podobnie $S_n = \frac{1}{4}S_{n-1}$. Zatem pole mierzonyj figury jest równe $\frac{4}{3}$ pola trójkąta ABC , które możemy obliczyć tradycyjnie.

Objętość czworościanu

a dokładniej: stosunek objętości do iloczynu pola podstawy i wysokości jest w każdym czworościanie taki sam. Wykonajmy rysunki dwóch czworościanów $ABCD$ i $A'B'C'D'$. Oznaczmy jeszcze pola ABC i $A'B'C'$ przez P i P' , a opuszczone na te podstawy wysokości przez h i h' . Niech K, L, M, N, O, Q (i tak samo z primami) będą środkami krawędzi jak na rysunku. Wyjmujemy z każdego z czworościanów dwa graniastosłupy: $KBLNQM$ i $KONLCM$ (i tak samo z primami). Ich sumę objętości oznaczmy przez S_1 i S'_1 . Są to oznaczenia zgodne z metodą Eudoksosa, bo czworościan $NQMD$ wkłada się przez przesunięcie do graniastosłupa $KBLNQM$, a $AKON$ do $KONLCM$ (i tak samo z primami). Zauważmy, że (sprawdź Czytelniku)



$$(**) \quad \frac{S_1}{S'_1} = \frac{\frac{1}{4}P \cdot \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}P \cdot \frac{1}{2}h)}{\frac{1}{4}P' \cdot \frac{1}{2}h' + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}P' \cdot \frac{1}{2}h')} = \frac{P \cdot h}{P' \cdot h'}$$

To, co z czworościanów zostało, to dwa podobne do nich (w skali 1/2) czworościany. Powtarzamy więc poprzednie rozumowanie otrzymując kolejno

$$\frac{S_2}{S'_2} = \frac{P \cdot h}{P' \cdot h'} = \frac{S_3}{S'_3} = \frac{S_4}{S'_4} = \dots$$

Mamy więc ostatecznie dla objętości S i S' naszych czworościanów

$$\frac{S}{S'} = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + \dots}{S'_1 + S'_2 + S'_3 + \dots} = \frac{Ph}{P'h'}$$

Stąd

$$\frac{S}{Ph} = \frac{S'}{P'h'}$$

Ustalenie, że stosunek ten jest równy akurat $\frac{1}{3}$, jest rzeczą bardzo prostą (i do niedawna było w podręcznikach szkolnych). Podobnie jak uogólnienie na dowolne ostrosłupy.

Na koniec uwaga: oczywiście, można oglądając wzór (**), zauważyć, że końcowy wynik jest do uzyskania bezpośrednio i to rozpatrując tylko jeden czworościan. Istotnie, otrzymujemy

$$S_1 = \frac{1}{4}Ph, \quad S_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot S_{n-1},$$

czyli

$$S = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}Ph\right) = \frac{1}{3}Ph.$$

Chciałem jednak rachować tak jak Euklides.



Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 547. Udowodnić, że jeśli obwody ścian czworościanu są równe, to ściany są trójkątami przystającymi.

Rozwiązanie na str. 4

M 548. Szereg $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ jest bezwzględnie zbieżny (tj. $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty$), ponadto dla każdego $k \geq 1$ mamy $A_k = a_k + a_{2k} + a_{3k} + \dots = 0$. Wykazać, że $a_i = 0$ dla $i = 1, 2, 3, \dots$

Rozwiązanie na str. 10

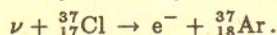
M 549. Wykazać, że

$$\binom{n}{1} \cdot 1 - \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{2} + \binom{n}{3} \cdot \frac{1}{3} - \dots \pm \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Rozwiązanie na str. 7

Redaguje dr Rafał STAROŃSKI

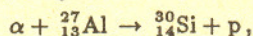
F 272. Reakcje jądrowe zachodzące w Słońcu można badać mierząc strumień neutrin (ν) pochodzących ze Słońca. Detekcja neutrin jest możliwa przy wykorzystaniu reakcji



Średni przekrój czynny takiej reakcji wynosi $\sigma = 1,4 \times 10^{-42} \text{cm}^2$. Zakładając, że Słońce produkuje $N = 3 \times 10^{33}$ neutrin na sekundę, ocenić, w jakiej masie CCl_4 (czterochloru węgla) powstanie w ciągu roku $n = 100$ atomów ${}_{18}^{37}\text{Ar}$. Przyjmujemy, że CCl_4 jest naturalną mieszaniną izotopów, w której tylko $\eta = 25\%$ jąder chloru to jądra ${}_{17}^{37}\text{Cl}$. Promień orbity Ziemi wynosi $R = 1,5 \cdot 10^8 \text{km}$.

Rozwiązanie na str. 1

F 273. Ocenić przekrój czynny reakcji



jeśli wiadomo, że po przejściu cząstek α o energii 8 MeV przez aluminiową tarczę powstaje $n_p = 8$ protonów na $n_\alpha = 10^6$ cząstek α . W powietrzu, w warunkach normalnych cząstka α przebiega $R_{pow} = 7,0 \text{cm}$.

Rozwiązanie na str. 6

W obu zadaniach pojawia się pojęcie przekroju czynnego. Przekrój czynny (oznaczany σ) jest miarą prawdopodobieństwa zajścia określonej reakcji w czasie jednej sekundy dla jednostkowego strumienia Φ cząstek wywołujących reakcję (1 cząstka/cm²s) podzielonego przez liczbę cząstek N w bombardowanej próbce. Liczba cząstek n zderzających się w ciągu sekundy wynosi $n = N\sigma\Phi$.

FIZYCZNE NOWINKI

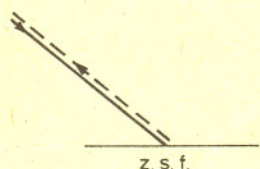
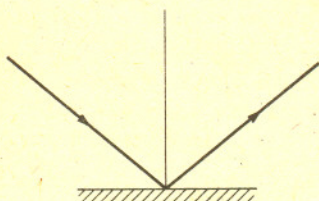
Redaguje dr hab. Andrzej HENNEL

ATOMY KOŁOWE

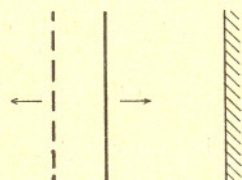
Atomami rydbergowskimi nazywamy atomy znajdujące się w bardzo wysokich stanach wzbudzonych (patrz Fizyczne nowinki, Delta 10/1986). Natomiast atomy kołowe są to te spośród atomów rydbergowskich, które mają maksymalną dopuszczalną wartość całkowitego momentu pędu ($l = n-1$). Symbole n i l oznaczają liczby kwantowe (główną i poboczną) w modelu atomu Bohra. Takie atomy są obiektami wyznaczającymi symboliczną granicę między fizyką klasyczną i kwantową. Wzbudzone elektrony w atomach kołowych są znacznie oddalone od jądra atomowego. Prawdopodobieństwo znalezienia tych elektronów jest największe w obszarze cienkiego torusa (czyli obrączki) o promieniu wyznaczonym przez model atomu Bohra i wynoszącym $n^2 a_0$ (gdzie a_0 jest tzw. promieniem pierwszej orbity Bohra równym $5 \times 10^{-11} \text{m}$). Oznacza to, że na przykład dla $n=44$ promień ten wynosi około 10^{-7}m , czyli 0,1 μm . Drugą ważną własnością atomów kołowych jest ich stosunkowo długi czas życia, który w zależności od wartości liczby kwantowej n dochodzi do setnych części sekundy. Tak długie czasy życia (przewyższające około milion razy typowe czasy życia "zwykłych" stanów wzbudzonych) umożliwiają wykonywanie z atomami kołowymi wielu interesujących eksperymentów. Pierwsze atomy kołowe otrzymano w 1983 roku za pomocą rezonansowego pobudzenia mikrofalami atomów znajdujących się już wcześniej w stanach wzbudzonych. W ostatnich latach fizycy z Uniwersytetu imienia Piotra i Marii Curie w Paryżu zaproponowali nową, bardzo pomysłową metodę utrzymywania atomów kołowych w skrzyżowanych polach elektrycznym i magnetycznym. Polega ona na gwałtownym włączeniu pola magnetycznego w trakcie wyłączenia pola elektrycznego. W 1988 roku inna grupa paryska z Ecole Normale Supérieure przeprowadziła pierwsze udane próby utrzymywania atomów kołowych tą nową metodą. Atomy litu rozpedzone do szybkości 1500 m/s wpadały w obszar pola elektrycznego o natężeniu 200 V/cm, gdzie wzbudzone były najpierw za pomocą impulsowych laserów krystalicznych ze stanu 2s do 2p, dalej ze stanu 2p do 3d i wreszcie ze stanu 3d do stanów kołowych o głównej liczbie kwantowej n od 20 do 25. Całość układu znajdowała się w elektromagnetycznym wytwarzającym pole do 0,01 T. Powstające atomy kołowe były rejestrowane w dalszej części układu, gdzie ulegały jonizacji w bardzo silnym polu elektrycznym (ponad 3 kV/cm). Zastosowana metoda utrzymywania atomów kołowych okazała się znacznie bardziej efektywna od dotychczas stosowanych i wkrótce planowane są próby utrzymania kołowego wodoru, jak i szeregu innych atomów.

Odwrócenie frontu fali świetlnej

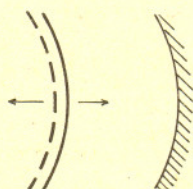
Prof. dr Adam KUJAWSKI



Rys. 1



a)

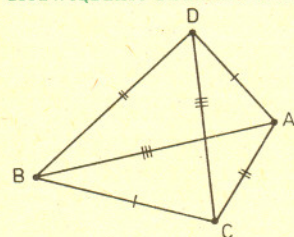


b)

Rys. 2



Rozwiązanie zadania M 547.



Oznaczmy $BC = k$, $CA = l$, $AB = m$, $DA = n$, $DB = o$, $DC = p$.

Mamy $k + l + m = l + n + p$, skąd

$$(*) \quad k + m = n + p,$$

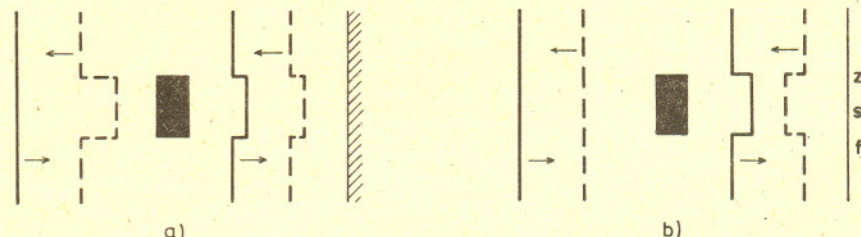
a także $m + n + o = k + o + p$, skąd

$$(**) \quad m + n = k + p.$$

Odejmując stronami (*) i (**) otrzymujemy $k - n = n - k$, tj. $k = n$; wynika stąd, że $m = p$. Ponadto $k + l + m = k + o + p$, więc $l = o$. Zatem przeciwległe krawędzie czworokąta mają równe długości, stąd od razu wynika, że ściany są przystające.

Obserwując zjawisko odbicia światła od zwierciadła stwierdza się w prosty sposób, że promień padający, odbity i prostopadła padania leżą w jednej płaszczyźnie, a kąt odbicia jest równy kątowi padania. We współczesnej optyce nieliniowej bada się zjawiska, w których promień „odbija się” w zupełnie inny sposób. Rysunek 1 ilustruje odbicie od zwykłego zwierciadła oraz od tak zwanego zwierciadła sprzęgającego fazę (w jęz. ang. *phase-conjugate mirror*). W tym drugim przypadku wytwarzany jest promień odbity o kierunku przeciwnym do kierunku promienia padającego. Zjawisko to w opisie optyki falowej nazywa się odwróceniem frontu fali świetlnej. Jest ono w centrum zainteresowań wielu ośrodków badawczych ze względu na jego oryginalność i duże możliwości zastosowań.

Niech na zwierciadło płaskie pada prostopadle fala, której powierzchnia stałej fazy jest płaszczyzną, jak na rysunku 2a. Podobnie, niech na zwierciadło sferycznie wklęsłe pada fala o sferycznej powierzchni stałej fazy „dopasowanej” do powierzchni zwierciadła, jak ilustruje to rysunek 2b. Te przykłady pokazują, że po odbiciu fala może mieć taką samą powierzchnię stałej fazy; oznacza to, że jej front falowy nie zmienia się, zmienia się natomiast kierunek propagacji. Taką sytuację przyjęto nazywać odwróceniem frontu fali lub wytwarzaniem fali o fazie sprzężonej. To drugie określenie wynika z odpowiedniego opisu matematycznego. Jeśli jednak front falowy nie jest dopasowany do zwierciadła, na przykład na skutek przejścia fali płaskiej przez płytkę szklaną, jak na rysunku 3a (pomijamy efekty dyfrakcyjne), odbicie od zwykłego zwierciadła i ponowne przejście przez płytkę prowadzi do powstania fali o innym froncie falowym niż płaski. Co dzieje się, gdy fala o odkształconym froncie falowym pada na zwierciadło sprzęgające fazę? W tym przypadku, jak pokazuje rysunek 3b, front fali zostaje odwrócony, a po ponownym przejściu przez płytkę powstaje fala o froncie falowym takim samym jak front fali padającej. Jest to prosta ilustracja możliwości zastosowań praktycznych zwierciadła sprzęgającego fazę.



a)

b)

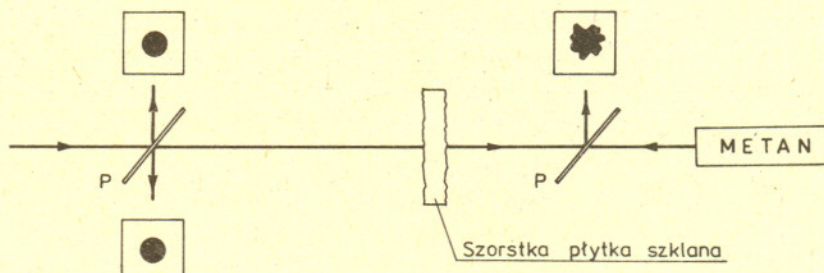
Rys. 3

W 1972 r. B.J. Zeldowicz ze współpracownikami przeprowadzili eksperyment, w którym wykazano, że w zjawisku wymuszonego rozpraszania Brillouina-Mandelsztama zachodzi odwrócenie frontu fali świetlnej. Ten eksperyment stał się początkiem nowego kierunku badań zwanego obecnie optyką pół ze sprzężoną fazą (w jęz. ang. *phase-conjugate optics*). Zjawisko wymuszonego rozpraszania Brillouina-Mandelsztama zaobserwowano w latach sześćdziesiątych, gdy rozpoczęły się intensywne badania optycznych zjawisk nieliniowych. Wyjaśnijmy na czym polega to zjawisko. Najpierw przypomnijmy, że gdy wiązka światła o małym natężeniu przechodzi przez ośrodek przezroczysty (może to być ciecz, gaz, kryształ lub szkło), zachodzi niewielka absorpcja i rozproszenie światła. Jeśli na ośrodek ten pada jednocześnie fala ultradźwiękowa (która w szczególności może tworzyć falę stojącą), zachodzi dodatkowe rozpraszanie światła, jak wykazali niezależnie L. Brillouin i L.I. Mandelsztam. Dzieje się tak dlatego, że zmiany gęstości ośrodka na skutek rozchodzenia się fali mechanicznej (ultradźwiękowej) powodują zmiany współczynnika załamania światła. W kwantowej interpretacji oznacza to, że rozproszenie pierwotnego fotonu o energii $\hbar\omega_1$ i pędzie $\hbar\vec{k}_1$ prowadzi do powstania fotonu o energii $\hbar\omega_2$ i pędzie $\hbar\vec{k}_2$ oraz fononu (kwantu drgań ośrodka) o energii $\hbar\omega_a$ i pędzie $\hbar\vec{k}_a$. Obowiązują zasady zachowania energii $\omega_1 = \omega_2 + \omega_a$ i pędu $\vec{k}_1 = \vec{k}_2 + \vec{k}_a$. Ponieważ częstość ω_a fali ultradźwiękowej jest znacznie mniejsza niż częstość optyczna ω_1 , to częstość ω_2 jest bliska wartości ω_1 . Jednocześnie kierunek fotonu rozproszonego zależy od kierunku fali ultradźwiękowej. Gdy nie ma zewnętrznej fali ultradźwiękowej, rozproszenie jest wynikiem fluktuacji termicznych ośrodka. Nosi ono nazwę spontanicznego rozpraszania Brillouina-Mandelsztama.

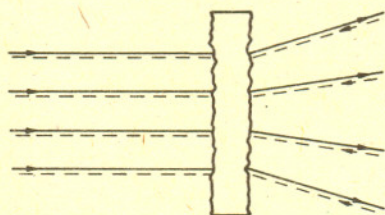
Elektrostrykcja – odkształcenie ośrodka dielektrycznego (obserwowane również w półprzewodnikach) spowodowane zewnętrznym polem elektrycznym. Wykorzystuje się do wytwarzania ultra i hiperdźwięków o częstościach do $10^9 \div 10^{11}$ Hz.

Dla dostatecznie dużego natężenia światła (odpowiada to gęstości mocy rzędu MW/cm^2) przebieg zjawiska jest inny i zachodzi prawie całkowite „odbicie” wiązki padającej. Tak duże moce można uzyskać z laserów pracujących impulsowo; są to tak zwane impulsy gigantyczne. Impuls światła o dostatecznie dużym natężeniu padając na ośrodek materialny rozpoczyna za pośrednictwem zjawiska elektrostrykcji wzbudzenie fal ultradźwiękowych o różnych kierunkach; ich pojawienie się powoduje jednocześnie rozpraszanie światła padającego. Wytworzona fala świetlna o mniejszej częstości i przeciwnym kierunku propagacji niż fala padająca interferuje z falą padającą, co prowadzi do generacji fali ultradźwiękowej o kierunku propagacji przeciwnym do kierunku padającej fali świetlnej. Tak wzbudzona fala ultradźwiękowa powoduje w dużym stopniu ukierunkowane rozproszenie światła. To wzajemne oddziaływanie powoduje, że światło rozproszone formuje się na kształt wiązki padającej i rozchodzi się w kierunku przeciwnym. Z tego powodu efekt ten nazywa się po prostu odbiciem. Nosi ono nazwę wymuszonego efektu Brillouina-Mandelsztama.

W oryginalnym doświadczeniu Zeldowicza i jego grupy impuls światła z lasera rubinowego przechodził przez płytkę szklaną o szorstkiej powierzchni (rodzaj matówki), a następnie padał na sprężony metan w naczyniu o kształcie światłowodu (przekrój poprzeczny 4×4 mm², długość około 1 m). Po przejściu przez matówkę kąt rozbieżności impulsu światła powiększa się i rozkład natężenia w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku propagacji staje się nieregularny. W wyniku wymuszonego rozpraszania Brillouina-Mandelsztama powstaje impuls odbity, który ponownie przechodzi przez matówkę, a jego rozbieżność kątowa i rozkład natężenia okazują się być takie same jak impulsu pierwotnego. Schemat eksperymentu ilustruje rysunek 4.



Rys. 4



Rys. 5

Zaznaczono na nim płytki częściowo odbijające P, które umożliwiają ocenę rozbieżności kątowej impulsu pierwotnego i impulsu, który dwukrotnie przeszedł przez matówkę, a także impulsu rozproszonego po przejściu przez matówkę. Omawiany efekt nie zachodzi, a ponowne przejście przez matówkę powiększa rozbieżność kątową, gdy zamiast zbiornika z metanem wstawione jest zwykłe zwierciadło. Rysunek 5 ilustruje rolę zwierciadła odwracającego front falowy; promienie światła odbitego (linie przerywane) mają kierunki przeciwnie niż promienie padające, tak że ponowne przejście przez ośrodek niejednorodny, zmieniający rozkład powierzchni stałej fali padającej, odtwarza wiązkę pierwotną.

Obecnie wytwarzanie fali o odwróconym froncie falowym zostało zaobserwowane dla prawie każdego optycznego zjawiska nieliniowego i znalazło liczne zastosowania. Szczególnie ważne i mające głębokie związki z holografia okazało się zjawisko mieszania czterech fal. W tym zjawisku dwie wiązki światła padają z dwóch przeciwnych stron na ośrodek nieliniowy, a jednocześnie padająca trzecia wiązka, zwana sygnałową, powoduje generację czwartej fali, mającej odwrócony front falowy względem fali sygnałowej. Generacja fali fazowo sprzężonej jest możliwa zarówno dla impulsów, jak i dla fali ciągłej. Okazuje się także, że fala generowana może mieć natężenie większe niż fala sygnałowa. Część tych badań zalicza się do nowej dziedziny zwanej holografia dynamiczną.

Nazwa zwierciadło odwracające front falowy (lub sprzęgające fazę fali padającej) jest powszechnie używana; należy jednak podkreślić, że nie jest tutaj istotne zjawisko odbicia, lecz to, że w różnych zjawiskach nieliniowych może być generowana wiązka lub impuls światła o takim samym kształcie przestrzennym i przeciwnym kierunku propagacji. Może to być także interpretowane jako „odwrócenie” fali świetlnej w czasie, bowiem zostaje ona ponownie odtworzona. Warto wspomnieć, że koncepcja zwierciadła odwracającego front fali padającej, chociaż dotychczas realizowana tylko w warunkach specjalnie dobranych, stała się źródłem idei różnych zastosowań, jak też pytań o jego własności podstawowe. Zastanów się, na przykład, nad następującym prostym pytaniem. Co zobaczysz patrząc na zwierciadło odwracające front falowy?

Czytelnikowi z pewnością znane są równości

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(zwane dwumianem Newtona). Nasuwa się pytanie, czy tylko wielomiany $p_n(x) = x^n$ mają własność

$$(*) \quad p_n(x + y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(y), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Możemy je sprecyzować: jakie ciągi wielomianów $(p_n(x))$, takich że stopień $p_n(x)$ jest równy n , spełniają równość $(*)$?

O tym, że ciąg wielomianów (x^n) nie jest jedynym mającym własność $(*)$ (mówi się: **ciągami wielomianów typu dwumianowego**), może się Czytelnik przekonać sprawdzając, że silnie dolne, to jest wielomiany

$$[x]_n = x(x-1)(x-2) \dots (x-n+1)$$

oraz silnie górne, czyli

$$[x]^n = x(x+1)(x+2) \dots (x+n-1)$$

tworzą ciągi wielomianów typu dwumianowego (czyli spełniają $(*)$).

Aby podać sposób na poszukiwanie jeszcze innych ciągów wielomianów typu dwumianowego, zajmiemy się operatorami (dokładniej: operatorami liniowymi) niezmienniczymi względem przesunięć, a nawet tylko delta operatorami, na przestrzeni liniowej wielomianów. Rozszyfrujmy, co oznaczają te nazwy.

Przestrzeń liniowa wielomianów to zbiór wszystkich wielomianów (o współczynnikach z danego ciała – dla nas niech to będzie ciało liczb rzeczywistych albo zespolonych) z dwoma działaniami: zwykłym dodawaniem wielomianów i zwykłym mnożeniem wielomianu przez liczbę. **Operator liniowy T** na tej przestrzeni to przekształcenie tego zbioru wielomianów na niego samego spełniające dla dowolnych wielomianów p i q i dowolnych liczb a i b warunek

$$T(ap + bq) = aT(p) + bT(q).$$

Jednym z takich operatorów jest **operator przesunięcia** o a , oznaczany przez E^a i określony przez równość

$$E^a(p(x)) = p(x + a).$$

O operatorze T mówimy, że jest **niezmienniczy względem przesunięć**, gdy jest on przemienny z E^a , czyli gdy dla każdego wielomianu $p(x)$ mamy

$$T(E^a(p(x))) = E^a(T(p(x))),$$

co zapisuje się krócej $TE^a = E^aT$. **Delta operator** to taki operator Q niezmienniczy względem przesunięć, który spełnia warunek $Q(x) = \text{const} \neq 0$.

Przykładem delta operatora jest operator różniczkowania D , czyli operator określony przez warunek $D(p(x)) = p'(x)$. Istotnie:

$$\begin{aligned} D(E^a(p(x))) &= D(p(x+a)) = p'(x+a) \cdot (x+a)' = p'(x+a) = \\ &= E^a(p'(x)) = E^a(D(p(x))) \end{aligned}$$

oraz $D(x) = 1$.

Dla delta operatorów wprowadza się pojęcie ich bazy. Mówimy, że ciąg wielomianów $(p_n(x))$ jest bazą operatora Q , gdy spełnia cztery warunki:

- (1) stopień $p_n(x)$ jest n ,
- (2) $p_0(x) = 1$,
- (3) $p_n(0) = 0$ dla $n > 0$,
- (4) $Q(p_n(x)) = n \cdot p_{n-1}(x)$.

Gdy x i y są liczbami naturalnymi, zależność

$$[x + y]_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [x]_k [y]_{n-k}$$

można otrzymać z bezpośrednich rozważań kombinatorycznych. Np. $[m]_n$ można interpretować jako liczbę funkcji różnowartościowych ze zbioru n -elementowego do zbioru m -elementowego ($m \geq n$). Wielkość $[m + l]_n$ ma interpretację jako liczbę funkcji różnowartościowych ze zbioru n -elementowego do sumy zbiorów rozłącznych A i B , gdzie A ma m elementów, a B ma l elementów. Zbiór takich funkcji można przedstawić w postaci sumy $n + 1$ zbiorów rozłącznych: k -ty zbiór składa się z funkcji mających k wartości w zbiorze A , a $n - k$ wartości w zbiorze B ($k = 0, 1, 2, \dots, n$). Ponieważ tych k wartości może być rozmieszczonych na $\binom{n}{k}$ miejscach, otrzymujemy nasz wzór. Podobnie można, dla x i y naturalnych, kombinatorycznie sprawdzić zależność $(*)$ dla silni górnych.



Rozwiązanie zadanie F 278.

Najpierw znajdziemy długość drogi R_{Al} cząstki α w aluminium. Ponieważ utrata energii przez cząstkę α na skutek powodowanej przez nią jonizacji ośrodka jest proporcjonalna do NZ , gdzie N jest liczbą atomów w 1 cm^3 , a Z – ładunkiem jądra, więc możemy zapisać:

$$\frac{R_{Al}}{R_{pow}} = \frac{(NZ)_{pow}}{(NZ)_{Al}}$$

Liczba reakcji jądrowych zachodzących w cienkiej warstwie o grubości x jest równa $n_\alpha N_{Al} \cdot \sigma \cdot x$, co jest równe ilości n_p protonów, a x przyjmujemy w przybliżeniu równe R_{Al} . Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{n_p}{n_\alpha N_{Al} R_{Al}} = \\ &= \frac{n_p Z_{Al}}{n_\alpha (NZ)_{pow} \cdot R_{pow}} = 4 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$



Dla operatora D bazą jest więc np. ciąg (x^n) . Pierwsze trzy warunki są oczywiste, a czwarty to

$$D(x^n) = (x^n)' = n \cdot x^{n-1}.$$

Rozwiązanie zadania M 549.

Oznaczmy $a_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$;

ponieważ $a_1 = 1$, wystarczy wykazać, że $a_{k+1} - a_k = \frac{1}{n+1}$. Mamy

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sum_{k=1}^n \left[\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} \right] \times \\ &\quad \times \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \binom{n+1}{n+1} \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} = \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \\ &\quad + \binom{n+1}{n+1} \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\binom{n}{k} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1}.$$

Dlatego ostatnia suma wynosi po prostu

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{k+1} = \\ &= \frac{1}{n+1} (-1 - \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k + 1) = \\ &= \frac{1}{n+1} (-1 - 1 + 1) = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

To kończy dowód.

Zauważmy, że dla dowolnego delta operatora Q warunek (4) pozwala na (jednoznacznie!) znalezienie jego bazy. Istotnie: współczynniki $a_{n,i}$ wielomianu

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_{n,i} x^i$$

można obliczyć (rekurencyjnie) z równości

$Q(p_n(x)) = \sum_{i=0}^n a_{n,i} Q(x^i) = n \cdot p_{n-1}(x)$. Ponieważ $p_0(x) = 1$, więc wyliczamy kolejno p_1, p_2, \dots . Ta konstrukcja pokazuje jednocześnie, że każdy delta operator ma dokładnie jedną bazę.

Trzeba wyjaśnić jeszcze rolę warunku (1). Otóż dzięki temu, że każdy wielomian bazy jest innego stopnia, oraz że występują w niej wielomiany wszystkich stopni, każdy wielomian (rozpatrywanej przestrzeni liniowej) da się przedstawić jako kombinacja liniowa wielomianów bazy (tj. suma pewnej skończonej liczby wielomianów bazy pomnożonych przez stosowne liczby). Wykorzystamy ten fakt, by udowodnić

Twierdzenie. Jeżeli ciąg $(p_n(x))_{n=0}^{\infty}$ jest bazą dla pewnego delta operatora, to jest on typu dwumianowego.

Dowód. Niech $(p_n(x))_{n=0}^{\infty}$ będzie bazą dla delta operatora Q . Z własności (3) przez iterację otrzymujemy:

$$Q^k(p_n(x)) = [n]_k p_{n-k}(x).$$

Stąd $[Q^n(p_n(x))]_{x=0} = n!$, $[Q^k(p_n(x))]_{x=0} = 0$ dla $k < n$. Zatem

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{p_k(x)}{k!} [Q^k(p_n(x))]_{x=0}.$$

Dowolny wielomian $p(x)$ jest kombinacją liniową wielomianów bazowych $p_k(x)$, więc także

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \frac{p_k(x)}{k!} [Q^k(p(x))]_{x=0}.$$

Przyjmijmy teraz $p(x) = p_n(x+y)$, gdzie y jest ustalone. Wtedy

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \frac{p_k(x)}{k!} [Q^k(p_n(x+y))]_{x=0}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ale } [Q^k(p_n(x+y))]_{x=0} &= [Q^k E^y(p_n(x))]_{x=0} = [E^y Q^k(p_n(x))]_{x=0} = \\ &= [E^y([n]_k p_{n-k}(x))]_{x=0} = [n]_k [p_{n-k}(x+y)]_{x=0} = \\ &= [n]_k p_{n-k}(y), \end{aligned}$$

więc
$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(y), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

czyli $(p_n(x))$ jest ciągiem typu dwumianowego, co kończy dowód.

Twierdzenie odwrotne jest również prawdziwe.

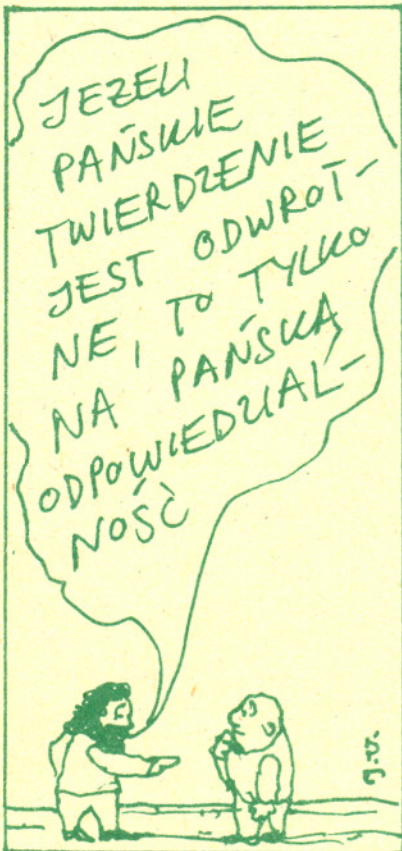
Podane na wstępie przykłady ciągów wielomianów typu dwumianowego uzyskać można właśnie za pomocą tego twierdzenia. Silnie dolne tworzą bazę dla delta operatora

$$\Delta(p(x)) = p(x+1) - p(x),$$

a silnie górne - dla delta operatora

$$\nabla(p(x)) = p(x) - p(x-1).$$

Czytelnik zechce sprawdzić, że Δ i ∇ są istotnie delta operatorami, oraz że silnie stanowią dla nich bazę. A warto też spróbować znaleźć jeszcze inny delta operator i, obliczając dla niego bazę, uzyskać jeszcze inny ciąg wielomianów typu dwumianowego.

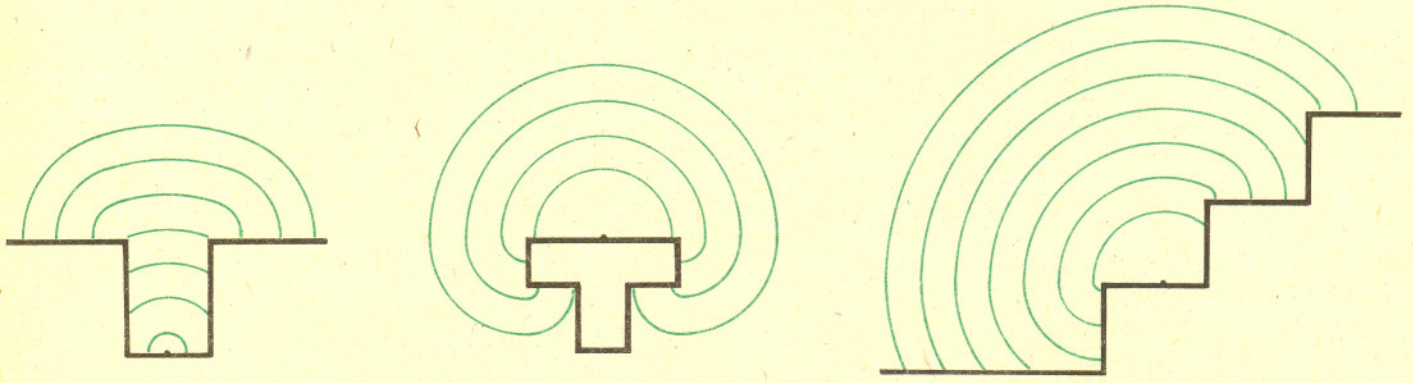




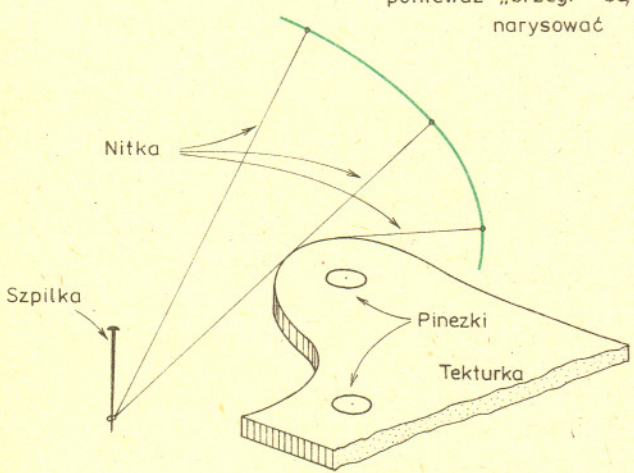
Kręgi na wodzie

Jeśli na gładkie lustro wody rzucimy kamień, otrzymamy pięknie rozszerzające się koła. Dlaczego tak jest? Po prostu zakłócenie wywołane przez kamień rozchodzi się w każdym kierunku z tą samą prędkością znajdując się, wobec tego, w każdym momencie z każdej strony w tej samej odległości od punktu, w którym je wywołaliśmy – a więc na okręgu.

Nic nie stoi na przeszkodzie, by tak właśnie zdefiniować okrąg: punkty, do których można dotrzeć w tym samym czasie (poruszając się ze stałą prędkością). Określenie to możemy teraz zastosować do innej niż poprzednia sytuacji (choć podobnej): niech nasza „woda” będzie ograniczona „brzegami”. Rysunki pokazują różne takie sytuacje. Jak zostały wykonane?



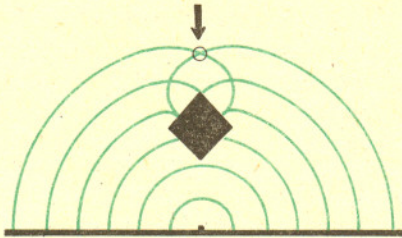
ponieważ „brzegi” są łamanymi, więc „okręgi” można narysować cyrklem – jak?



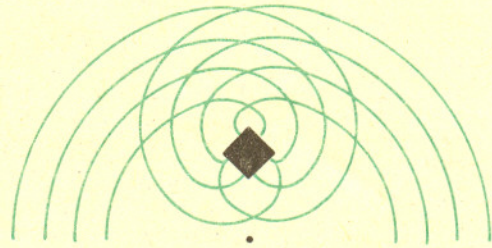
Bardzo prosto: wystarczy w „środku” rysowanego „okręgu” wbić szpilkę, przywiązać do niej nitkę i zaznaczyć linię, po której porusza się jej wolny koniec („brzegi” trzeba wykonać z grubej tekturki, żeby nitka opierała się o nie). Dla różnych długości nitki otrzymamy „okręgi” o różnych promieniach.

Interesująca jest taka zabawa: spróbujmy z góry przewidzieć kształt „okręgów”, a potem sprawdzimy nitką nasze przewidywania. Zabawę można komplikować dopuszczając istnienie nie tylko brzegów, ale i wysp.

tu okrąg przecina się sam ze sobą!



mniejszych „okręgów” nie narysowaliśmy



DORYSUJ WIĘKSZE „OKRĘGI”

A teraz pytania:

Czy gdybyśmy wykonali nasze doświadczenia nie nitką, lecz „prawdziwą wodą”, to wynik byłby taki sam?

Może potrzebne byłyby jakieś dodatkowe warunki?

Co by było widać na wodzie w takich przypadkach, gdy „okrąg” przecina się sam ze sobą?

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS

Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego

KORESPONDENCYJNY KLUB FIZYKÓW

1. Znaleźć doświadczalnie odpowiedź na pytanie: jaki kształt przyjmuje ciecz w stanie nieważkości?

Pomysł ten można znaleźć w książce „Czy umiecie się dziwić”, Ossolineum 1978 (II wyd. Wydawnictwa Alfa 1984).

Proponujemy następujący sposób zrównoważenia sił działających na kroplę cieczy na Ziemi:

Nalej do szklanki trochę oliwy, a następnie trochę spirytusu. Spirytus jako lżejszy, pozostanie na wierzchu. Teraz ostrożnie dodawaj wody do spirytusu. Najlepiej użyć do tego kropliomierza. Ważne jest, aby woda nie spływała wzdłuż ścianki szklanki na jej dno, lecz żeby mieszała się ze spirytusem. W miarę wkrapiania wody gęstość mieszaniny wody i spirytusu rośnie. Obserwuj uważnie, co dzieje się z oliwą. W pewnej chwili oliwa uwypukla się, odrywa się od dna, po czym tworzy (?), która zawisa w mieszaninie wody ze spirytusem. O tej wielkiej (?) oliwy można powiedzieć, że znajduje się w stanie nieważkości. Wprawdzie działa na nią siła przyciągania ziemskiego, ale jest ona zrównoważona siłą wyporu. Przeprowadźcie doświadczenie i nadeślijcie sprawozdanie. Jaki jest kształt kropli cieczy w warunkach nieważkości?

2. Proponujemy Wam zbadanie figur (krzywych) Lissajous (czytamy: lisażu) powstających przy składaniu w kierunkach wzajemnie prostopadłych dwóch drgań harmonicznym. Bardzo łatwo otrzymać te figury na ekranie oscyloskopu, ale można obyć się bez niego. Zaopatr się w suchy drobny piasek i naczynie z otworkiem u dołu, z którego ten piasek będzie się wysypywał drobną strużką. Naczynie zawieszamy na sznurku i wprawiamy w ruch wahadłowy. Okres wahań zależy, oczywiście,

od długości sznurka. Pod spodem na podłożonej deseczce piasek „rysuje” linię prostą. Zawieś teraz na czterech sznurkach samą deseczkę i wpraw ją w ruch wahadłowy w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny wahań naczynia z piaskiem. Na deseczce piasek ułoży figury, których kształt zależy od stosunku częstości wahań naczynia z piaskiem i deseczki. Zbadaj kształt figur przy stosunku częstości: 1 : 1, 1 : 2, 1 : 3, 2 : 3.

Sprawdź, czy kształt figury zależy tylko od stosunku częstości, czy jeszcze od czegoś?

Zagadnienie składania drgań można znaleźć na przykład w książce Waldemara Gorzkowskiego i Andrzeja Szymachy „Pola i ruch”, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1986.

3. Odpowiedz na pytanie: dlaczego niebo jest niebieskie? W odpowiedzi podaj źródła, skąd zaczerpnięta jest informacja, na przykład z podręcznika (autor, tytuł, strona), z czasopisma, z książki, od nauczyciela, od kolegi, od rodziców itp. W pracach naukowych zawsze podaje się źródło, skąd czerpie się określoną informację. Spróbuj postąpić podobnie.

W zeszłym numerze obiecaliśmy podać, gdzie można znaleźć rozwiązanie zadania z siecią oporów: J.I. Butikow, A.A. Bykow, A.S. Kondratiew, *Fizyka część 2*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1987, str. 953.

Listy prosimy przysyłać pod adresem:

Korespondencyjny Klub Fizyków,
Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego,
ul. Hoża 69, 00-681 Warszawa.

Dr Tomasz KWAST

Pozorne grupowanie się gwiazd w gromady moglibyśmy też widzieć w przypadku, gdyby równomiernie tło gwiazdowe było przesłonięte obłokami ciemnej materii. Oczywiście, że wtedy powstają „dziury” w tle gwiazdowym, ale obraz taki może ludzko przypominać zwyczajne zgrupowania gwiazd.



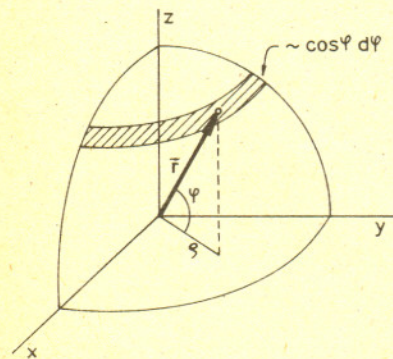
Rozwiązanie zadania M 548.
Ponieważ A_k spełnia również założenia twierdzenia, wystarczy wykazać, że $a_1 = 0$. Niech p_1, \dots, p_m będą kolejnymi początkowymi liczbami pierwszymi. Wtedy suma:

$$A_1 - \sum_{i \leq m} A_{p_i} + \sum_{i_1 < i_2 \leq m} A_{p_{i_1} p_{i_2}} - \dots \pm A_{p_1 \dots p_m}$$

jest równa zeru, a z drugiej strony – zawiera dokładnie te wyrazy a_i , których wskaźnik i jest niepodzielny przez żadną z liczb p_1, \dots, p_m . W szczególności zawiera a_1 , a nie zawiera a_i dla $2 \leq i \leq p_m$. Dlatego

$$|a_1| \leq \sum_{i=p_m+1}^{\infty} |a_i| \quad (\text{dla każdego } m),$$

z stąd $a_1 = 0$, czego należało dowieść.



Rys. 1

Radziecki astronom Wiktor Ambarcumian badając w końcu lat czterdziestych rozkład gwiazd wczesnych typów widmowych zauważył, że są one rozmieszczone na niebie nierównomiernie. Ich rozrzut był wyraźnie większy niż wynikający z przypadku, nie dało się go też uzasadnić rozmieszczeniem obłoków ciemnej materii międzygwiazdowej. Te fakty oraz dalsze badania natury zgrupowań tych gwiazd typu O i B zmusiły do uznania, że są to zgrupowania realne. Nazwano je OB-asocjacjami.

Obecnie znamy około 70 OB-asocjacji. Wszystkie leżą w pobliżu płaszczyzny Galaktyki, a więc – na niebie – blisko równika galaktycznego. Jedyne niektóre najbliższe leżą poza Drogą Mleczną, co jest tylko efektem perspektywy. Najdalej od Drogi Mlecznej leży asocjacja Orion OB1, mianowicie między szerokościami galaktycznymi -10° i -25° . Jest ona rzeczywiście jedną z najbliższych, jej odległość wynosi 460 pc i ma największe rozmiary kątowe. W ogóle nie jest łatwo określić granice i rozmiary asocjacji, ponieważ tworzące ją gwiazdy są tam rozmieszczone dość luźno, na jej tle leżą gwiazdy bliższe, a poprzez nią widać gwiazdy dalsze. Dlatego oglądając niebo lub zdjęcie nieba nie da się na pierwszy rzut oka określić zarysu asocjacji – o przynależności do niej może świadczyć dopiero typ widmowy gwiazdy, jej odległość i ruch w przestrzeni (mniej więcej takie jak dla całej asocjacji). Za to często wyraźnie widać najgęstsza część centralną. Tak np. we wspomnianej asocjacji Orion OB1 w centrum są cztery gwiazdy tworzące charakterystyczny tzw. Trapez Oriona. Odległości między tymi gwiazdami są rzędu 0,5, a całość zanurzona jest w jasnej mgławicy M42, co razem stanowi wdzięczny obiekt do oglądania przez niewielkie nawet lunety.

Podobnie jest w innych asocjacjach, tzn. gwiazdy najjaśniejsze (najmasywniejsze) tworzą układy wielokrotne typu Trapezu lub tworzą łańcuszki – a są to wszystko układy dynamicznie nietrwałe. Okazuje się, że asocjacje w całości są obiektami nietrwałymi, a wiadomo to dzięki temu, że możemy oszacować całkowitą energię takiej grupy gwiazd. Jest to o tyle interesujące, że z obserwacji mamy bezpośrednio przecież tylko rzuty odległości gwiazd na płaszczyznę styczną do sfery niebieskiej (ze znanych odległości kątowych i odległości całej asocjacji) oraz rzuty prędkości na kierunek widzenia (z pomiaru dopplerowskiego przesunięcia widma). A energię – zarówno potencjalną, jak i kinetyczną – możemy oszacować dopiero, gdy znajdziemy średnie pełne odległości i pełne prędkości gwiazd w gromadzie. Jak się to robi?

Wyobraźmy sobie (rys. 1), że z początku układu współrzędnych odkładamy wektory \vec{r} reprezentujące położenia każdej gwiazdy względem wszystkich pozostałych w gromadzie. Do oszacowania energii potencjalnej gromady będzie potrzebna wartość średnia $\langle 1/r \rangle$, tymczasem patrząc (np. wzdłuż osi z) widzimy tylko rzuty wektorów \vec{r} na płaszczyznę xy . Na średnią odwrotność rzutu $\langle 1/\rho \rangle$ będą się składały przyczynki $1/(r \cos \phi)$ w ilości proporcjonalnej do pola tego fragmentu powierzchni sfery, ku któremu skierowane są odpowiednie wektory \vec{r} . Pole to (na rysunku zacieniowane) jest proporcjonalne do $\cos \phi d\phi$, zatem $\langle 1/\rho \rangle$ będzie średnią wartością $1/(r \cos \phi)$ „ważoną” funkcją $\cos \phi$:

$$\langle 1/\rho \rangle = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (r \cos \phi)^{-1} \cos \phi d\phi}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \phi d\phi} = \langle 1/r \rangle \frac{\pi}{2}.$$

Z kolei do oszacowania energii kinetycznej potrzebny będzie średni kwadrat prędkości jednej gwiazdy $\langle v^2 \rangle$ (w jej ruchu względem całej gromady), tymczasem możemy mierzyć tylko ich prędkości radialne, czyli rzuty prędkości na kierunek widzenia u . Analogiczne rozumowanie mówi nam, że $\langle u^2 \rangle$ będzie średnią



wartością $v^2 \sin^2 \phi$ „ważoną” funkcją $\cos \phi$:

$$\langle u^2 \rangle = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} v^2 \sin^2 \phi \cos \phi d\phi}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \phi d\phi} = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle.$$

Tu od razu ostrzegam, że jeżeli obliczy się (powiedzmy – dla wprawy) $\langle \rho \rangle$, a potem tego odwrotność, to wynik będzie inny. Również inny będzie wynik, gdy obliczy się $\langle u \rangle$, a potem podniesie do kwadratu, a to ponieważ średnia odwrotność to nie to samo co odwrotność średniej, albo też średni kwadrat to nie to samo co kwadrat średniej!

W każdym razie mamy sposób, by z wielkości obserwowalnych $\langle \rho^{-1} \rangle$ i $\langle u^2 \rangle$ znaleźć „prawdziwe” $\langle r^{-1} \rangle$ i $\langle v^2 \rangle$, a stąd całkowitą energię gromady gwiazd czy galaktyk:

$$E \approx -\frac{n(n-1)}{2} GM^2 \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle + \frac{1}{2} Mn \langle v^2 \rangle,$$

gdzie M oznacza średnią masę gwiazdy (galaktyki), n ich liczbę, G stałą grawitacji.

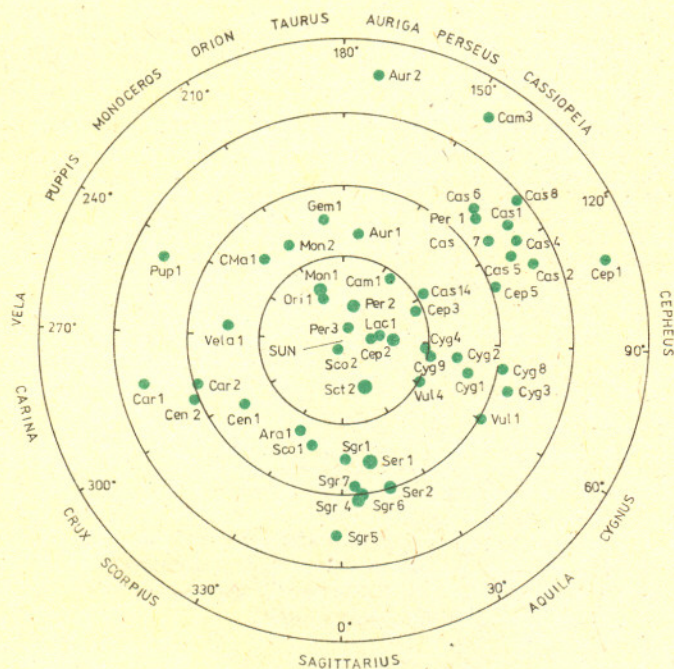
I tak właśnie okazało się, że asocjacje są nietrwale – ich całkowita energia jest bliska zeru lub dodatnia. Wobec tego muszą to być obiekty krótko żyjące i młode, albo po prostu asocjacje to zgrupowania dopiero co uformowanych gwiazd. Poza nietrwałością dynamiczną asocjacji przemawia za tym sama fizyczna natura gwiazd (masywne gwiazdy nie mogą zbyt długo świecić z taką mocą) oraz często tam spotykana materia rozproszona (będąca resztkami mgławicy, z której asocjacja powstała).

A więc gwiazdy rodzą się w płaszczyźnie Galaktyki. Ale dokładniej – gdzie? Na to pytanie dostajemy odpowiedź odtworzywszy przestrzenny rozkład asocjacji. Praktycznie wszystkie leżą w odległościach zbyt wielkich dla metody paralaksy rocznej. Odległości ich wyznacza się fotometrycznie: znając widmo gwiazdy określamy jej jasność absolutną M , z obserwacji mamy jasność widomą m , zatem porównując te dwie wartości wyznaczamy odległość r ze związku

$$m - M = 5 \log r - 5,$$

gdzie r jest tu liczone w parsekach. Jest to metoda wprawdzie mniej dokładna niż metoda paralaks rocznych, wystarczająco jednak dokładna, by wyciągnąć całkiem konkretne wnioski. Asocjacje najwyraźniej układają się wzdłuż ramion spiralnych Galaktyki (rys. 2). Obecnie znamy już chyba ogólny obraz Galaktyki i innych galaktyk spiralnych. Ramiona tych galaktyk to „fale” o podwyższonej gęstości materii, zbudowane z coraz to innych obiektów. Gwiazdy i obłoki materii doganiają ramiona, biegnące na rysunku 2 od lewej. W wyniku zderzeń z już obecną tam materią następuje zgęszczanie się obłoków, co prowadzi do powstawania asocjacji nowych gwiazd. Na rysunku wyraźnie widać dwa ramiona spiralne (jedno u dołu, drugie biegnące przez środek rysunku i w tym ramieniu jest Słońce) i ewentualnie słabiej zaznaczone trzecie u góry.

Asocjacje rozpraszają się w ciągu kilku milionów lat (a jest to w skali życia Galaktyki niewiele – pamiętajmy, że jeden obieg Słońca wokół jej centrum trwa około 250 mln lat) i w ten sposób ich gwiazdy stają się samodzielnymi członkami Galaktyki.



Rys. 2. Rozkład OB-asocjacji w płaszczyźnie Galaktyki. W środku rysunku jest Słońce, a okręgi wyznaczają odległości od niego co 1 kpc. Centrum Galaktyki znajduje się w długości galaktycznej 0° o około 10 kpc od Słońca. Rotacja Galaktyki na tym rysunku odbywałaby się w kierunku ruchu wskazówek zegara.

PROSĄZG

Najjaśniejszą gromadą gwiazd jest prawdopodobnie gromada położona w pobliżu centrum galaktyki NGC 1705 leżącej na granicy Malarza i Żółtej Ryby w odległości 10 Mpc. Oznaczona jest ona symbolem NGC 1705-A i świeci z mocą ponad 100 mln Słońc. Dawniej uważana była za tzw. supermasywną gwiazdę (por. „Patrz w niebo” *Delta* 4/1989), jednak dokładniejsze obserwacje wykazały, że jej widmo jest złożeniem widm wielu gwiazd. Jest ona zatem przykładem niemal „wybuchowego” powstawania wielu młodych gwiazd w małej objętości przestrzeni (por. artykułu o asocjacjach w tym numerze *Delfy*). Z faktu, że w gromadzie NGC 1705-A nie widać obłoków zjonizowanego wodoru, wnioskuje się, iż gromada zdążyła już „rozdmuchać” resztki swojej macierzystej mgławicy, a powstała przed mniej więcej 10 mln lat.



Użytkownicy komputerów, którzy potrzebują dokładnego czasu, mogą obecnie korzystać z usług National Bureau of Standards. Wykorzystując zwykłą sieć telefoniczną (nr telefonu 303-494-4774; USA) i modem mogą sprawdzić i ustawić czas zegarów komputerowych z dokładnością od 1/10 do 1/1000 sekundy, w zależności od rodzaju połączenia. Podawany czas uwzględnia opóźnienie związane z przesyłaniem sygnałów siecią telefoniczną.



Typowa energia jednej błyskawicy wynosi około 10^9 kWh, to znaczy równa jest energii towarzyszącej wybuchowi około 1 tony trotylu. W czasie średniej burzy z kilkoma wyładowaniami na minutę wydzielona energia jest równa energii wytwarzanej przez małą elektrownię jądrową. Aby zgromadzić taką energię, chmury burzowe muszą naładować się do potencjałów rzędu kilkuset milionów woltów. Do dzisiaj mechanizm ładowania się chmur do tak wysokich potencjałów pozostaje tajemnicą.



Drobne kryształki diamentu znalezione w meteorytach zawierają atomy ksenonu i kryptonu o nie spotykanym na Ziemi składzie izotopowym. Niektórzy naukowcy twierdzą, że kryształki te powstały blisko czerwonych olbrzymów w okresie poprzedzającym ich wybuch jako supernowych.



Miasto Waxahachie, 25 mil na południe od Dallas w Teksasie, zostało wybrane na siedzibę nowego centrum fizyki wysokich energii. Stany Zjednoczone planują zbudowanie tam nowego akceleratora protonów, tzw. nadprzewodzącego super-kolajdera (SSC), o obwodzie 86 km i mającego przyspieszać wiązki protonów do energii 20 TeV ($1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$). Dla porównania – największy obecnie pracujący w Batavii koło Chicago akcelerator przyspiesza protony do energii 0,9 TeV.

Naukowcom z IBM udało się jedna z najbardziej delikatnych operacji. Podczas skanowania mikroskopem tunelowym (patrz *Delta* 4/1987) powierzchni grafitu, pokrytej substancją organiczną (di(2-ethylhexyl) phthalate), przyłożyli krótkotrwały impuls stosunkowo wysokiego napięcia do skanującej igły. Wówczas stwierdzono na powierzchni grafitu pewną strukturę o rozmiarach rzędu wielkości molekuly tej substancji. Sądzi się, że impuls spowodował wiązanie chemiczne molekuly z grafitem. W następnym eksperymencie stwierdzono, że podobny impuls może „odciąć” molekulę od powierzchni grafitowej.



Głównym składnikiem szczątkowej atmosfery Merkurego jest sód. Wynik taki otrzymali na początku 1985 roku astronomowie amerykańscy. Mianowicie w widmie Merkurego stwierdzono obecność bardzo wąskich linii emisyjnych sodu w pobliżu sodowych linii D_1 (5897 Å) i D_2 (5891 Å) należących do widma Słońca. Przesunięcie odpowiadało prędkości Merkurego względem Ziemi. Gęstość atomów sodu przy powierzchni planety oceniono na nie więcej niż 150 000 sztuk w centymetrze sześciennym. Oprócz sodu w skład atmosfery planety wchodzi hel i wodór.



Firma ZYP Coating oferuje farby nadprzewodzące. Farba zawiera ceramiczny nadprzewodnik $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$. Po wyschnięciu daje wodoodporną powłokę nadprzewodzącą. Farbę można nakładać pędzlem, rozpylaczem lub przez zanurzenie w niej przedmiotów. Używana jest obecnie do produkcji obwodów drukowanych.



Europejska Agencja Przestrzeni Kosmicznej postanowiła wziąć udział wspólnie z NASA w wyprawie na księżyc Saturna – Tytan. Wyprawa będzie nosić nazwę Cassini – od nazwiska XVII-wiecznego astronoma francusko-włoskiego Giovanniego Domenica Cassiniego. Odkrył on cztery księżycy oraz strukturę pierścieni tej planety. Statek, który będzie zbudowany przez naukowców europejskich i który osiadzie na powierzchni Tytana, został ochrzczony nazwiskiem Christiana Huygensa, holenderskiego fizyka, odkrywcy Tytana. Wyprawa ma rozpocząć się w kwietniu 1996, a lądowanie przewidywane jest na październik 2002.



Na wysokości ponad 10 000 km w górnych warstwach atmosfery stwierdzono obecność cząstek mineralnych o rozmiarach przekraczających 100 μm . Ich obecności nie można wytłumaczyć w ramach obecnej teorii ruchu atmosfery.

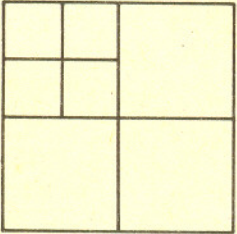


Przekształcenia czasu i zmiennych przestrzennych przy zmianie układu odniesienia w szczególnej teorii względności, nazywane transformacją Lorentza, powinny nosić nazwę transformacji Voigta. W 1987 r. minęła setna rocznica odkrycia transformacji Lorentza przez Waldemara Voigta. W swojej pracy „Über das Doppler'sche Prinzip” (opublikowanej w *Göttinger Nachr.*, 41 (1887)) Voigt pokazał, że równania falowe są niezmiennicze względem tej transformacji.

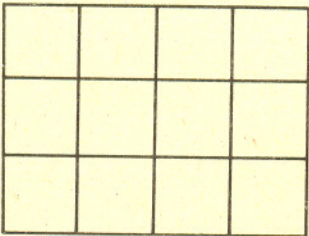
O podziale prostokąta na kwadraty

Mgr Jarosław GÓRNICKI

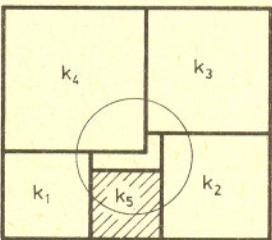
Dwa odcinki a i b nazywamy współmiernymi, jeśli istnieje odcinek c , który mieści się całkowitą liczbą razy w obu odcinkach, lub inaczej, gdy stosunek $a : b$ jest liczbą wymierną.



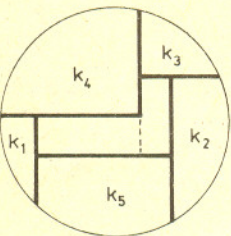
Rys. 1



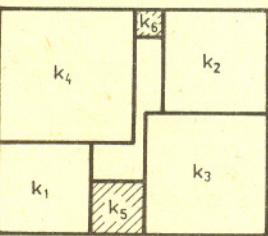
Rys. 2



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

Oto łamigłówka, której autorem jest R.L. Brooks: wytnij Czytelniku 13 różnych kwadratów o bokach 3, 5, 9, 11, 14, 19, 20, 24, 31, 33, 36, 39, 42 i ułóż z nich prostokąt (istnieją dwa różne ułożenia – rozwiązania na ostatniej stronie okładki).

Oto, pokrótce, historia problemu.

Oczywiście, każdy kwadrat można rozłożyć na mniejsze kwadraty (rys. 1), prostokąt zaś o bokach współmiernych, np. 3 i 4, daje się zbudować z pewnej liczby jednakowych kwadratów (rys. 2) – są to rozkłady trywialne. Przez wiele lat nie znano żadnego przykładu rozkładu prostokąta (z kwadratami było jeszcze trudniej) na skończoną liczbę różnych między sobą kwadratów. Takie rozkłady prostokąta będziemy nazywać rozkładami doskonałymi.

W 1903 roku M. Dehn rozważając pewne równania liniowe udowodnił

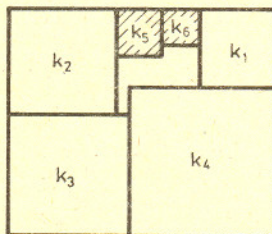
Twierdzenie 1. Prostokąty o bokach niewspółmiernych nie dają się rozłożyć na skończoną liczbę parami różnych kwadratów (nie mają rozkładu doskonałego). (Dowód na przykład w [2] str. 51-67.)

Pierwsze dwa przykłady doskonałych rozkładów wskazał Z. Moron w 1925 roku – rysunki 3 i 4 na ostatniej stronie okładki. W latach 1936–1938 czterech amerykańskich studentów Trinity College Uniwersytetu w Cambridge, R.L. Brooks, C.A. Smith, A.H. Stone, W.T. Tutte, zafascynowanych problemem podziału prostokąta na kwadraty, postanowiło go rozstrzygnąć. Dzięki nim powstała najobszerniejsza i najbogatsza w nowe rezultaty praca [1]. Oto pierwszy wynik z „teorii rozkładów”

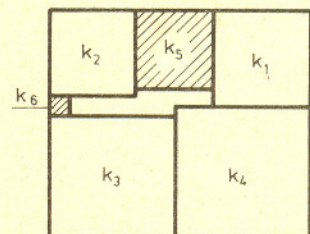
Twierdzenie 2. Nie istnieje prostokąt, który w sposób doskonały można rozłożyć na mniej niż 9 kwadratów.

Dowód. Oczywiście, nie możemy zbudować prostokąta z 2 ani z 3 różnych kwadratów. W minimalnym podziale muszą istnieć 4 różne kwadraty narożne (jeden kwadrat nie może zawierać dwóch naroży prostokąta, gdyż po jego odrzuceniu otrzymalibyśmy prostokąt, który można by rozłożyć na mniejszą niż minimalna liczba kwadratów). Gdyby 4 kwadraty wystarczały, to oznaczając boki kwadratów przez k_1, k_2, k_3, k_4 otrzymujemy: $k_1 + k_2 = k_3 + k_4$, $k_1 + k_3 = k_2 + k_4$, skąd wynika, że $k_1 = k_4$, $k_2 = k_3$ – przeczy to doskonałości rozkładu. Gdy trzy spośród czterech narożnych kwadratów dotyczą się, musimy lukę na brzegu wypełnić piątym kwadratem o boku k_5 (rys. 5). We wnętrzu prostokąta powstaje wtedy luka w kształcie litery L, której nie można wypełnić dwoma różnymi kwadratami. Rzeczywiście, bok k_5 luki musi przylegać do co najmniej dwóch kwadratów (rys. 6), z których lewy l musiałby być mniejszy od prawego p (dlaczego?). Jest to niemożliwe, gdyż $l = k_4 - k_1$, zaś $p = k_3 - k_2$. Zatem dwa kwadraty nie wypełniają luki. Podobnie można stwierdzić, że trzema różnymi kwadratami również nie wypełnimy tej luki.

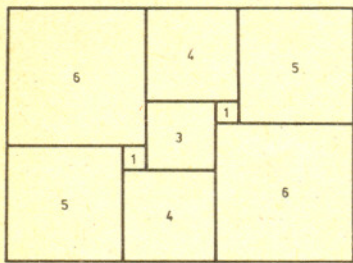
Pozostaje przypadek, gdy istnieją dwa różne kwadraty „brzegowe” (oprócz czterech narożnych). Mogą one leżeć tak, jak obrazują to rysunki 7, 8, 9. W każdym z tych przypadków do boku mniejszego kwadratu k_6 muszą przylegać co najmniej dwa różne, mniejsze kwadraty wewnętrzne. W żadnym z tych przypadków nie wystarczą one do pokrycia powstałej luki. Ostatnia sytuacja – istnieją trzy nienarodne kwadraty „brzegowe”, czyli łącznie siedem kwadratów zewnętrznych. Najmniejszy z nich musi stykać się z co najmniej dwoma kwadratami wewnętrznymi. Oznacza to, że 8 kwadratów w żadnym przypadku nie wystarcza na wypełnienie prostokąta, a to kończy dowód.



Rys. 8



Rys. 9



Rys. 11

O tym, że istnieje prostokąt, który można rozłożyć doskonale na 9 kwadratów, wiadomo z rysunku 3. Oznacza to jednocześnie, że każdy prostokąt, którego boki pozostają w stosunku 32 : 33, można rozłożyć doskonale na 9 kwadratów. Czy jest to jedyny warunek tak ekonomicznego podziału? Dokładniejsza analiza problemu pokazuje, że nie! (omawiamy to w dalszej części artykułu). Przykład innego prostokąta, który doskonale możemy podzielić na 9 kwadratów daje rysunek 10 na ostatniej stronie okładki. Oczywiście, rozkłady z rysunków 3 i 10 (jako minimalne) są proste, tzn. żaden fragment rozkładu nie wypełnia prostokąta mniejszego od wyjściowego (pomijając kwadraty wchodzące w skład rozkładu). Dowodzi się, że minimalne doskonale rozbita mają tylko prostokąty, których stosunek boków wynosi 32 : 33 lub 61 : 69.

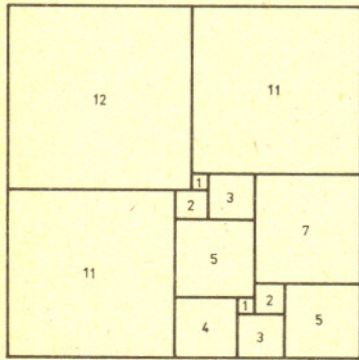
Rzecz ciekawą jest fakt, że istnieje tylko jeden prostokąt, który w sposób prosty i niedoskonały można rozłożyć na 9 kwadratów (rys. 11).

W 1960 roku C.J. Bouwkamp wykorzystując komputery opublikował katalog doskonałych i prostych rozkładów prostokątów, co obrazuje poniższa tabela.

liczba kwadratów występujących w podziale	9	10	11	12	13	14	15
liczba możliwych podziałów niedoskonałych	1	0	0	9	34	104	283
liczba możliwych podziałów doskonałych	2	6	22	67	213	744	2609

Interesujący jest fakt, że nie istnieją prostokąty, które można w sposób prosty i niedoskonały rozłożyć na 10 lub 11 kwadratów. Oto zestawienie wszystkich prostych rozkładów prostokątów na 10 kwadratów.

długości boków prostokąta	boki kwadratów rozkładu
57, 55	2, 3, 8, 11, 13, 15, 17, 25, 27, 30
65, 47	3, 5, 6, 11, 17, 19, 22, 23, 24, 25
105, 104	7, 12, 16, 19, 26, 28, 33, 44, 45, 60
115, 94	4, 11, 15, 16, 19, 23, 34, 39, 55, 60
130, 79	3, 11, 12, 23, 34, 35, 38, 41, 44, 45
111, 98	3, 4, 7, 11, 15, 26, 41, 44, 54, 57

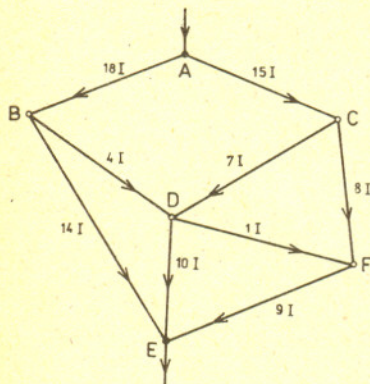


Rys. 13

Szczególnym przypadkiem rozważanego problemu są kwadraty, które przez długi okres nie poddawały się rozkładowi. Fakt ten upamiętnił S. Ruziewicz w *Księdze Szkockiej* jako problem 59. Pierwszy rozwiązał ten problem R. Sprague (1939 r.) podając rozkład na 55 kwadratów. Rozkład kwadratu o boku 175 na 24 kwadraty (rysunek na pierwszej stronie okładki) znalazł T. Willcocks (1948 r.). Niestety, nie jest to rozkład prosty (dlaczego?). „Lepszy” – prosty i doskonały rozkład kwadratu o boku 112 na 21 kwadratów podał A.J.W. Duivjestijn w *Scientific American*, tom 238 (6/1978, str. 86–88) – rysunek 12 z ostatniej strony okładki, oraz wykazał, że podział prosty i doskonały kwadratu na mniejszą liczbę kwadratów jest niemożliwy. Nadmienimy jeszcze, że w katalogu Bouwkampa pośród prostych rozkładów prostokątów na mniej niż 14 kwadratów istnieje dokładnie jedno rozbitcie kwadratu na 13 mniejszych kwadratów (rys. 13).

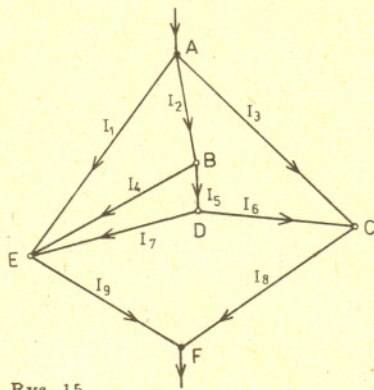
Wspomniani wyżej czterej amerykańscy matematycy dokonali dużego postępu w dziedzinie rozkładu prostokątów na kwadraty dzięki odkryciu związku między tą teorią a teorią przepływu prądu elektrycznego w zamkniętych obwodach i teorią grafów (łatwiej jest zbadać wszystkie możliwe sieci z n przewodników, niż mozolnie drogą prób zestawiać kwadraty, aż ułoży się z nich prostokąt). Wykazali następujące

Twierdzenie 3. Ze zbioru n kwadratów, niekoniecznie różnych, można zbudować prostokąt bez luk wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiada mu rozkład prądów według praw Kirchhoffa w obwodzie złożonym z n przewodników o oporze jednostkowym, bez źródeł elektryczności wewnątrz (każdemu natężeniu prądu w poszczególnym przewodniku odpowiada pewien bok kwadratu).



Rys. 14

Prześledźmy na przykładzie, jak budujemy sieć odpowiadającą danemu rozkładowi prostokąta, np. z rysunku 3. Górnemu bokowi prostokąta odpowiada biegun A (rys. 14), z którego wychodzą dwoma przewodnikami prądy o natężeniu 18I, 15I (I – umowna jednostka natężenia). Końce tych przewodników wyznaczają węzły B i C. Do kwadratu o boku 18 przylegają od dołu kwadraty 14 i 4, więc z węzła B muszą wychodzić przewodniki z prądami 14I (do bieguna E, który odpowiada dolnemu bokowi prostokąta) oraz 4I do nowego węzła D. Analogicznie z węzła C wychodzą przewodniki z prądami 7I, 8I. Ponieważ kwadraty 4 i 7 „kończą się” na tym samym poziomie, więc przewodniki z prądami 4I, 7I tworzą wspólny węzeł D (patrz



Rys. 15

rysunek), z którego wychodzą przewodniki z prądami $10I$ (do bieguna E) oraz $1I$ do węzła F . Wreszcie z węzła F wychodzi przewodnik do bieguna E z prądem $9I$, co kończy budowę sieci. W dolnym biegunie schodzą się przewodniki z prądami przyporządkowanymi dolnemu bokowi prostokąta; lewa strona obwodu ABE odpowiada lewemu bokowi prostokąta, prawa strona $ACFE$ – prawemu bokowi. Spróbujmy teraz przeprowadzić procedurę odwrotną: dla danej sieci złożonej z przewodników o oporze jednostkowym zbudujemy rozkład prostokąta. Rozpatrzmy sieć złożoną z 9 przewodników przedstawioną na rysunku 15 z biegunami A, F . Wypiszmy równania Kirchhoffa dla węzłów

$$\begin{aligned} B: & I_2 - I_4 - I_5 = 0, \\ C: & I_3 + I_6 - I_8 = 0, \\ D: & I_5 - I_7 - I_6 = 0, \\ E: & I_1 + I_4 + I_7 - I_9 = 0 \end{aligned}$$

oraz obwodów zamkniętych

$$\begin{aligned} ABEA: & I_2 + I_4 - I_1 = 0, \\ ACDBA: & I_3 - I_6 - I_5 - I_2 = 0, \\ BDEB: & I_5 + I_7 - I_4 = 0, \\ DCFED: & I_6 + I_8 - I_9 - I_7 = 0. \end{aligned}$$

Rozwiązując ten układ 8 równań (nie można bowiem dla 9 wielkości ułożyć więcej niż 8 niezależnych równań jednorodnych) np. względem I_1 otrzymujemy: $I_2 = \frac{16}{25}I_1$, $I_3 = \frac{28}{25}I_1$, $I_4 = \frac{9}{25}I_1$, $I_5 = \frac{7}{25}I_1$, $I_6 = \frac{5}{25}I_1$, $I_7 = \frac{2}{25}I_1$, $I_8 = \frac{33}{25}I_1$, $I_9 = \frac{36}{25}I_1$. Przyjmując $I_1 = 25$ mamy rozkład prostokąta na 9 parami różnych kwadratów, co obrazuje rysunek 10.

Badając sieci złożone z 9 przewodników można przekonać się, że tylko w dwóch sieciach (rys. 14, 15) płyną w każdym przewodniku różne prądy. Istnieją zatem tylko dwa różne doskonałe rozkłady prostokątów na 9 kwadratów. Rozważając wszystkie sieci złożone z 4, 5, 6, 7 lub 8 przewodników można wykazać, że niektóre prądy płynące w tych sieciach muszą być jednakowe, co oznacza, że nie można zbudować prostokąta z mniejszej liczby kwadratów niż 9. Jest to inny dowód twierdzenia 2.

Czy problematykę doskonałych rozkładów można uogólnić? Dla $m > 4$ z kilku (więcej niż jednego!) m -kątnych foremnych nie można złożyć dowolnego wielokąta wypukłego. Wynika to stąd, że suma dwóch kątów m -kąta foremnego wynosi

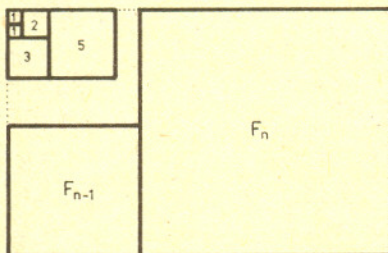
$$2 \frac{180^\circ(m-2)}{m} = 360^\circ - 180^\circ \frac{4}{m} > 180^\circ,$$

a to oznacza, że w jednym wierzchołku wielokąta wypukłego nie mogą się schodzić dwa m -kąty foremne. Podobnie elementem rozkładu nie może być trójkąt foremny, gdyż nawet trójkąt równoboczny nie daje się rozłożyć na skończoną liczbę różnych trójkątów równobocznych (patrz [2]). Problematyka ta nie daje się również rozszerzyć na przestrzeń – żaden prostopadłościan nie da się rozłożyć na skończoną liczbę nierównych sześciątów. Dlaczego tak się dzieje? Niech $a < b < c$ oznaczają trzy krawędzie prostopadłościanu. Postawmy prostopadłościan na ścianie o bokach a, b . Wszelki doskonały rozkład prostopadłościanu na sześciąty wyznacza doskonały rozkład tej ścianę na kwadraty. Najmniejszy z nich ma bok mniejszy niż $\sqrt{\frac{ab}{9}} \leq \frac{c}{3}$. Rozpatrzmy teraz górną ścianę tego najmniejszego sześciątka brzegowego. Rozkład prostopadłościanu na sześciąty wyznacza znowu rozkład tej ścianę na różne kwadraty, z których najmniejszy ma bok nie większy od $\frac{1}{3} \frac{c}{3} = \frac{1}{3^2} c$. Postępując w ten sposób otrzymujemy nieskończony ciąg kwadratów o bokach kolejno nie większych od $\frac{1}{3^3} c$, $\frac{1}{3^4} c, \dots$ Istnienie nieskończonego ciągu sześciątów doprowadza do sprzeczności z postulatem skończoności rozkładu, a ponadto

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots\right) c = \frac{c}{2} < c.$$

Literatura

- [1] R.L. Brooks, C.A. Smith, A.H. Stone, W.T. Tutte, *The dissection of rectangles into squares*, Duke J. Math. 7(1940), 312–340.
- [2] I.M. Jagłom, *Kak razriezat' kwadrat?*, Izd. Nauka, Moskwa 1959.
- [3] Z. Moroń, *O rozkładzie prostokątów na nierówne kwadraty*, Wiadom. Mat. I,1(1955), 75–94.
- [4] *The Scottish Book, Mathematics from the Scottish Cafe*, Ed. R. Daniel Mauldin, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart 1981.



Ciekawostka: Rysunek pokazuje, jaki jest związek między ciągiem Fibonacciego 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ..., a budową prostokątów z kwadratów.

Na komecie Halleya chyba wszyscy zawiedliśmy się, trudno więc reklamować zbliżanie się innej, która nie ma takiej sławy. Niemniej jednak od lipca do września można będzie próbować zaobserwować komетę okresową Brorsena-Metcalfa, która – jak oceniają niektórzy – powinna być widoczna nawet gołym okiem.

Kometę odkrył niemiecki astronom Theodor Brorsen w 1847 r. Na podstawie obserwacji wykonanych podówczas jej orbita została wyznaczona niezbyt pewnie, ponieważ kometa była widoczna zaledwie przez dwa miesiące. W rezultacie nie było nawet pewności, czy jest komетą okresową czy nie. Ale w 1919 r. odkrył ją ponownie pastor Joel Metcalf z USA, oczywiście z początku nie wiedząc, że jest to ta sama kometa.

Obecnie zbliża się jej trzecie udokumentowane przejście przez perihelium, co ma nastąpić 27 IX 1989. Elementy orbity komety są następujące:

półoś	$a = 17,080$ j.a.
mimośrodek	$e = 0,972$
nachylenie	$i = 19,333$
długość węzła	$\Omega = 310,872$
położenie perihelium	$\omega = 129,633$

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki,

Szczegółowy regulamin Klubu 44 zamieściliśmy w *Delcie* 1/1989, a jego skrót – we wszystkich numerach, w których są zadania ligowe (tj. z wyjątkiem numerów 6 i 7).

Klub 44

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/1989

Przypominamy treść zadań:

187. Dana jest krzywa $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$; $t \in \langle 0; 1 \rangle$, $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, $\varphi(1) = \psi(1) = 1$; φ, ψ ciągle, niemalejące. Czy istnieje 10 prostokątów o bokach równoległych do osi układu, każdy o polu $\leq 1/100$, łącznie pokrywających daną krzywą?

188. Rozważamy ciąg (x_n) : $x_{n+1} = |x_n - 2^{-n}|$; $x_0 \in \mathbb{R}$. Przedyskutować zbieżność, wyznaczyć granicę.

187. Istnieją takie prostokąty. Interpretujemy zmienną t jako czas. Określamy ciąg położeń ruchomego punktu $P_t = (\varphi(t), \psi(t))$ przebiegającego daną krzywą tak, by każde dwa kolejne położenia były przeciwległymi wierzchołkami prostokąta o bokach równoległych do osi i o polu $1/100$ (istnienie takich położeń wynika z ciągłości φ i ψ); przedłużamy przy tym naszą krzywą przyjmując na przykład, że po chwili $t = 1$ ruch odbywa się prostoliniowo: $\varphi(t) = \psi(t) = t$ dla $t \geq 1$. Momenty t_0, t_1, t_2, \dots , wyznaczające te położenia, możemy określić indukcyjnie wzorami:

$$t_0 = 0, \quad t_k = \sup \left\{ t : (\varphi(t) - \varphi(t_{k-1}))(\psi(t) - \psi(t_{k-1})) \leq \frac{1}{100} \right\}.$$

Niech R_k będzie prostokątem, którego dwoma wierzchołkami są punkty $P_{t_{k-1}}$ i P_{t_k} . Długości boków R_k (poziomego i pionowego) oznaczamy odpowiednio przez a_k i b_k . Zatem $a_k b_k = 1/100$. Wykażemy, że

$$R_1 \cup \dots \cup R_{10} \supset \{P_t : 0 \leq t \leq 1\}.$$

Gdyby tak nie było, znaczyłoby to, że $\sum a_k \leq 1$ oraz $\sum b_k \leq 1$ (sumowanie, tu i dalej, po k od 1 do 10), przy czym co najmniej jedna z tych nierówności jest ostra. Na mocy nierówności Cauchy'ego-Schwarza mielibyśmy wtedy $\sum \sqrt{a_k b_k} \leq \sqrt{\sum a_k} \sqrt{\sum b_k} < 1$ – sprzeczność, bowiem $\sum \sqrt{a_k b_k} = 10\sqrt{1/100} = 1$. To kończy dowód.

188. Gdy $x_0 \leq 0$, wówczas $x_1 = 1 - x_0 \geq 1$. Gdy $x_0 \geq 2$, wówczas $x_1 = x_0 - 1 \geq 1$. W obu tych przypadkach dostajemy następnie przez łatwą indukcyjną zależność:

$$x_n \geq 2 \cdot 2^{-n}, \quad x_{n+1} = x_n - 2^{-n} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Stąd

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = x_1 - \sum_{k=1}^{n-1} 2^{-k}.$$

Istnieje więc granica

$$\lim x_n = x_1 - \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = x_1 - 1 = \begin{cases} -x_0 & \text{dla } x_0 \leq 0, \\ x_0 - 2 & \text{dla } x_0 \geq 2. \end{cases}$$

Gdy natomiast $0 \leq x_0 \leq 2$, indukcja pokazuje, że

$$0 \leq x_n \leq 2 \cdot 2^{-n} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Zatem $\lim x_n = 0$ dla $0 \leq x_0 \leq 2$.

Otrzymane wyniki można zapisać jednolitym wzorem

$$\lim x_n = \frac{1}{2} (|x_0| + |x_0 - 2|) - 1.$$

Czołówka ligi zadaniowej Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 79 (WT=1,27) i 80 (WT=2,36) z numeru 12/1988

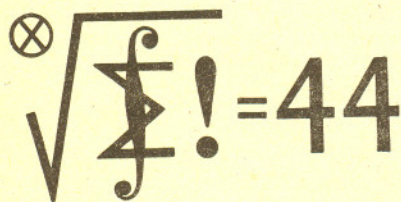
Paweł Perkowski	- Szczecin	42,61 pkt
Roman Musiał	- Katowice	41,03 pkt
Wiesław Kacprzak	- Kraków	40,56 pkt
Piotr Koczyński	- Warszawa	35,73 pkt
Aleksander Surma	- Mysłków	34,08 pkt
Dzierszysław Lipniacki	- Lublin	33,62 pkt
Jerzy Lipkowski	- Elbląg	31,08 pkt
Tomasz Wietecha	- Tarnów	28,41 pkt
Mariusz Bogacz	- Pińczów	25,60 pkt
Marek Karaf	- Tarnów	24,13 pkt

Czołówka ligi zadaniowej Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 181 (WT=1,61) i 182 (WT=2,01) z numeru 12/1988

Zbigniew Surduka	- Czechowice	47,33 pkt
Kazimierz Serbin	- Sanok	42,72 pkt
Jerzy Małopolski	- Kraków	40,86 pkt
Andrzej Krzysztofowicz	- Gdańsk	39,01 pkt
Dariusz Rybacki	- Kraśnik	38,49 pkt
Andrzej Szymczak	- Gdańsk	37,73 pkt

Numer 59 w Klubie 44(M):
Pan Z. Surduka.



Jak widać, kometa wraca do Słońca co $a\sqrt{a} = 70,6$ lat i ma orbitę rzeczywiście bardzo wydłużoną.

Pod koniec lipca kometa znajdzie się w Pegazie i będzie być może widoczna wieczorami nad wschodnim horyzontem, ale jako obiekt dość słaby (około 8 mag). Następnie przeleci przez Andromedę do Perseusza i w połowie sierpnia może być widoczna też wieczorami nad północnowschodnim horyzontem (jasność 6 mag). Na przełomie sierpnia i września będzie między Woźnicą a Rysiem, a więc wieczorami dość nisko nad północnym horyzontem (jasność 5,5 mag), po czym przestanie być widoczna wprawdzie w powodu bliskości Słońca, a później z powodu coraz niższej deklinacji. Oczywiście, w okresie jej widoczności lepiej będzie ją widać, tzn. wyżej na niebie, gdy nie poprzestanie się na obserwacjach wieczornych, a poczeka się do drugiej połowy nocy. Wspomniane tu gwiazdozbiory znajdują się wtedy wysoko.

Najbliżej Ziemi kometa Brorsena-Metcalfa znajdzie się około 20 VIII, maksymalną zaś jasność (ocenianą na 4,7 mag) osiągnie prawdopodobnie w połowie września, ale – jak mówiliśmy – jej warunki widoczności będą już dla nas niekorzystne.

A w ogóle jasność komety bardzo trudno jest przewidzieć i przewidywania takie rzadko się zgadzają ze stanem faktycznym. Równie dobrze kometa może okazać się słabsza, jak i jaśniejsza niż się przewiduje – a więc próbujmy.

Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delfy”

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/1989

Przypominamy treść zadań:

85. W płaskim kondensatorze jedna z dwu poziomych okładek o powierzchni S jest zawieszona na czterech jednakowych sprężynkach o współczynniku sprężystości k nad drugą, nieruchomą okładką znajdującą się w odległości d_0 . Kondensator ładujemy impulsowo do napięcia U . Przy jakiej wartości U nastąpi zetknięcie się okładek?

86. Gejzer mający duży, podziemny zbiornik wody nagrzewany ciepłem Ziemi oraz wąski kanał łączący ten zbiornik z powierzchnią Ziemi (rys. 1) wykazuje okresową aktywność. Podczas okresu spokojnego zbiornik oraz kanał są w całości wypełnione wodą. Z chwilą, gdy woda w podziemnym zbiorniku osiągnie temperaturę wrzenia, zaczyna się aktywny okres gejzera. Przyjmując, że podczas trwania tego okresu cały kanał wypełnia uchodząca na zewnątrz para wodna, oszacować, jaka część wody zawartej początkowo w zbiorniku gejzera ulega wyrzuceniu w postaci pary, jeśli kanał ma głębokość $h = 100$ m. Przybliżone wartości ciepła parowania oraz ciepła właściwego wody wynoszą odpowiednio $r = 2 \cdot 10^6$ J/kg oraz $c = 4 \cdot 10^3$ J/(kg·K). Na rysunku 2 przedstawiono zależność ciśnienia nasyconej pary wodnej od temperatury.

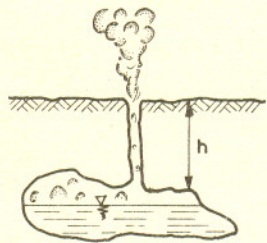
85. Pojemność kondensatora w chwili ładowania jest równa $C = \epsilon_0 S/d_0$ (ϵ_0 – przenikalność elektryczna próżni). Po naładowaniu do napięcia U każda z okładek kondensatora zawiera ładunek o wartości bezwzględnej $q = \epsilon_0 S U/d_0$ i gęstości powierzchniowej $\sigma = q/S = \epsilon_0 U/d_0$. Górna okładka znajduje się w wytworzonym przez ładunek dolnej okładki polu elektrycznym o natężeniu $E = \sigma/(2\epsilon_0) = U/(2d_0)$ (zaniedbujemy efekty brzegowe, przyjmując $S \gg d_0^2$), jest zatem przyciągana siłą $F = qE$. Siła ta nie zmienia się ze zmianą odległości okładek. Powoduje ona przesunięcie równowagowego położenia okładki o h względem położenia pierwotnego (rys. 3). Po naładowaniu górna okładka zostanie więc wprowadzona w drgania harmoniczne o amplitudzie h wokół nowego położenia równowagi. Dopóki spełniona będzie nierówność

$$(*) \quad h < d_0/2,$$

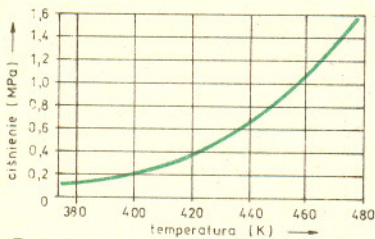
nie nastąpi zetknięcie się okładek podczas drgań. Początkowe wydłużenie sprężyn wynosi $\Delta l = P/(4k)$, gdzie P jest ciężarem górnej płyty. Podobnie mamy $\Delta l + h = (P + F)/(4k)$. Stąd wynika $h = F/(4k)$. Nierówność (*) przyjmuje teraz postać $F/(4k) < d_0/2$, czyli $k > F/(2d_0) = \epsilon_0 S U^2/(4d_0^3)$. Zetknięcie się okładek nastąpi, gdy nierówność ta nie będzie spełniona, a więc dla $U \geq 2\sqrt{k d_0^3/(\epsilon_0 S)}$.

86. Aktywny okres gejzera zaczyna się, gdy woda w zbiorniku osiąga temperaturę wrzenia odpowiadającą ciśnieniu panującemu przy dolnym ujściu kanału, a więc $p_0 + \rho g h \approx 1$ MPa (p_0 – ciśnienie atmosferyczne, ρ – gęstość wody, g – przyspieszenie ziemskie). Z wykresu (rys. 2) odczytujemy wartość tej temperatury: $T_1 = 453$ K. Powstająca para wodna wyrzuca wodę z kanału, na skutek czego ciśnienie w zbiorniku gwałtownie spada do wartości p_0 , której odpowiada temperatura wrzenia $T_2 = 373$ K. Wrzenie wody zachodzi tak długo, dopóki temperatura wody nie spadnie do wartości T_2 . Proces wrzenia odbywa się kosztem energii wewnętrznej wody; ponieważ – jak podano – trwa on krótko, możemy zaniedbać dopływ energii w postaci ciepła z zewnątrz. Oznaczając przez M pierwotną masę wody w zbiorniku, a przez m masę wody, która odparuje i ujdzie przez kanał, możemy napisać przybliżone równanie bilansu cieplnego: $mr = (M - m/2)c(T_1 - T_2)$. Stąd otrzymujemy

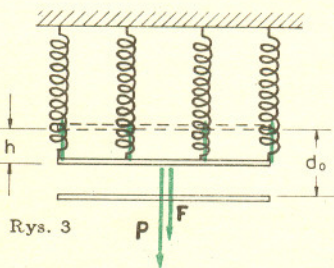
$$\frac{m}{M} = \frac{2c(T_1 - T_2)}{2r + c(T_1 - T_2)} \approx 0,15.$$



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

